

Sobre la homología persistente en redes neuronales

José Manuel Ros Rodrigo

Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad de La Rioja

Mayo 2022

Resumen

(En construcción.)

Índice

1. Introducción	4
2. Preliminares	5
2.1. Complejos simpliciales	5
2.2. Homología. Homología persistente	7

1. Introducción

(En construcción.)

2. Preeliminarios

A lo largo de este capítulo vamos a ver todas las nociones teóricas necesarias para el uso de la homología persistente en redes neuronales.

2.1. Complejos simpliciales

Comenzamos con el primer concepto fundamental de todo el trabajo, los *complejos simpliciales*. Esta noción admite dos enfoques diferentes, por lo que debemos distinguir entre dos definiciones relacionadas: los complejos simpliciales *abstractos* y los complejos simpliciales *geométricos*. Para el desarrollo estas nociones seguiremos la guía proporcionada por [1].

Siguiendo el enfoque combinatorio, comenzamos definiendo los complejos simpliciales abstractos y algunas nociones relacionadas.

Definición 1. Un *complejo simplicial abstracto* es una colección finita, \mathcal{V} , de subconjuntos no vacíos de un conjunto, \mathcal{V}_0 , que verifica las siguientes propiedades:

1. Si $v \in \mathcal{V}_0$, entonces $\{v\} \in \mathcal{V}$
2. Si $\sigma \in \mathcal{V}$ y $\tau \subset \sigma$, entonces $\tau \in \mathcal{V}$

A los elementos de \mathcal{V} los llamaremos *símplices*; más concretamente: dado $\sigma \in \mathcal{V}$, diremos que σ tiene *dimensión* p , y que σ es un *p-símplice*, si $|\sigma| = p + 1$. Asimismo, definimos la *dimensión de* \mathcal{V} como el máximo de las dimensiones de sus símplices y denotaremos por \mathcal{V}_p a la colección de los p -símplices de \mathcal{V} .

En relación con el concepto de símplice y de dimensión surge la siguiente noción:

Definición 2. Sean σ y τ dos símplices de \mathcal{V} tales que $\tau \subset \sigma$. Entonces diremos que τ es una *cara* de σ , y además, si las dimensiones de σ y τ difieren por un número natural a , diremos que τ es una cara de σ de *codimensión* a .

Ahora que hemos definido los complejos simpliciales abstractos veamos un pequeño ejemplo para fijar ideas.

Ejemplo 1. Supongamos el siguiente complejo simplicial abstracto:

$$\mathcal{V} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \\ \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

Así, tenemos que la dimensión de \mathcal{V} es 3. También observamos que el 3-símplice $\{a, b, c, d\}$ tiene por caras de codimensión 1 a los 2-símplices $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ y $\{a, c, d\}$. En la figura 1 ilustramos una representación geométrica de \mathcal{V} .

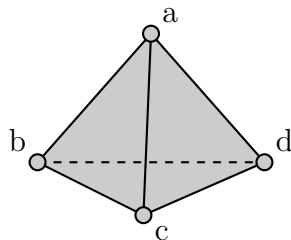


Figura 1: Representación geométrica del complejo simplicial \mathcal{V} .

La representación recogida en la figura 1, en la que cada símplice corresponde con un poliedro regular (cada 0-símplice corresponde a un punto, cada 1-símplice a una arista, cada 2-símplice a un triángulo, cada 3-símplice a un tetraedro, etc.) es única salvo homeomorfismo. Observamos que interpretando \mathcal{V} como un subconjunto de \mathbb{R}^3 obtenemos un tetraedro. Esta idea motiva el otro enfoque de los complejos simpliciales: el enfoque geométrico. ◀

Siguiendo el enfoque geométrico es necesario que, antes de llegar a la definición de complejo simplicial geométrico, veamos unos conceptos previos relacionados con la propia definición.

Definición 3. Sean $\{u_0, u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que los $k+1$ puntos son *afínmente independientes* si los k vectores $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_k - u_0$ son linealmente independientes.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es una *combinación afín* de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ si $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_k$ tales que $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i$ y $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$

Definición 4. Sean $\{u_0, u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ $k+1$ puntos afínmente independientes y $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i$ una combinación afín. Diremos que x es una *combinación convexa* de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ si $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ son no negativos.

Definimos la *clausura convexa* de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ como el conjunto de todas sus posibles combinaciones convexas.

Ahora que ya contamos con estas nociones previas pasamos a definir la pieza clave en la definición de complejo simplicial geométrico: el *símplice*.

Definición 5. Definimos un *k-símplice* como la clausura convexa de $k+1$ puntos afínmente independientes. Lo denotaremos por $\sigma = \text{conv}\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$, y diremos que la *dimensión* de σ es k .

Llamamos *cara* de σ a cualquier combinación convexa de un subconjunto no vacío de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$. A la relación «ser cara de» la denotaremos por \leq .

Para los casos $k = 0, 1, 2, 3$ diremos que σ es un vértice, arista, triángulo, tetraedro respectivamente.

Habiendo definido todos los conceptos previos necesarios pasamos a definir *complejo simplicial geométrico*.

Definición 6. Llamamos *complejo simplicial geométrico* a la colección finita de símplices \mathcal{V} verificando las siguientes propiedades:

1. Si $\sigma \in \mathcal{V}$ y $\tau \leq \sigma \implies \tau \in \mathcal{V}$
2. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{V} \implies \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ o $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común a ambos.

La relación entre los complejos simpliciales abstractos y los geométricos viene dada por la construcción de la *realización geométrica* de un complejo simplicial abstracto, que es un complejo simplicial geométrico definido tal y como se ilustra en la figura 1 del ejemplo 1 (para más detalles véase []).

De aquí en adelante emplearemos la definición de complejo simplicial abstracto, pues es la más adecuada para el presente trabajo.

Ahora que ya hemos definido los objetos con los que vamos a trabajar, procedemos a definir las aplicaciones entre ellos.

Definición 7. Una *aplicación simplicial entre complejos simpliciales*, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$, es una aplicación tal que $f(\sigma) = \{g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_k)\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$; donde $g : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}'_0$ es una aplicación entre 0-símplices, $\sigma = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \in \mathcal{V}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in \mathcal{V}'$.

2.2. Homología. Homología persistente

En la sección anterior hemos fijado el concepto de complejo simplicial, que nos será muy útil a lo largo de esta sección para desarrollar la noción de *grupos de homología*. A diferencia de como surgió el concepto de *grupos de homología* en la historia de las matemáticas, en el presente trabajo desarrollaremos primero la noción general para luego reducir al caso particular de la *homología simplicial*. Para ello emplearemos la guía proporcionada por [].

Comenzamos la sección con una definición básica, que no aparece en el grado, y que nos será necesaria para nuestros propósitos.

Definición 8. Sea R anillo. Definimos el *R -módulo izquierdo* sobre R como el conjunto M junto con las operaciones:

- Suma: $M \times M \rightarrow M, (x, y) \mapsto x + y$, y
- Producto por escalares: $R \times M \rightarrow M, (r, x) \mapsto rx$,

satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. La suma es asociativa, conmutativa, M contiene un elemento neutro para ella y todo elemento tiene opuesto. Es decir, $(M, +)$ es un grupo abeliano.
2. Para cualesquiera x, y de M y r, s de R :
 - a) $(r + s)x = rx + sx$ (distributiva respecto a la suma de R).
 - b) $(rs)x = r(sx)$ (asociativa).
 - c) $r(x + y) = rx + ry$ (distributiva respecto a la suma de M).
 - d) Si R es unitario, $1x = x$.

De manera análoga definimos el *R-módulo derecho*. Si R es conmutativo, entonces el R -módulo izquierdo es el mismo que el R -módulo derecho. En tal caso nos referiremos a él simplemente como *R-módulo*.

Nota. De la noción de R -módulo nos interesan particularmente las siguientes propiedades: todo grupo abeliano es \mathbb{Z} -módulo, y si R es un cuerpo, entonces las nociones de R -módulo y R -espacio vectorial coinciden.

Como es natural, a la noción de R -módulo le sigue la definición de *R-submódulo*.

Definición 9. Sea M un R -módulo. Definimos el *R-submódulo* de M como el subconjunto, no vacío, N de M tal que es cerrado para opuestos y para las operaciones heredadas de M . A la relación «ser submódulo de» la denotaremos por \leq .

Tras estas consideraciones básicas, comenzamos el camino que nos conducirá a la definición de los *grupos de homología*. Empezamos el camino con la definición de *complejo de cadenas*.

Definición 10. Sea R anillo. Decimos que un *complejo de cadenas* sobre R es un conjunto $\mathcal{C}_* = \{(C_p, d_p) | p \in \mathbb{Z}\}$ de R -módulos y R -homomorfismos $\{\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1} | p \in \mathbb{Z}\}$, satisfaciendo $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Se denota por $(\mathcal{C}_*, \partial)$ y a ∂ se le llama el diferencial del complejo.

Notemos que la propiedad anterior es equivalente a que $Im(\partial_{p+1}) \leq Ker(\partial_p), p \in \mathbb{Z}$. Es habitual pensar en \mathcal{C}_* como una sucesión infinita cuya representación es como sigue:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

Consideremos \mathbb{Z}_2 el cuerpo de dos elementos. Dado un complejo simplicial \mathcal{V} , denotaremos por $C_p(\mathcal{V})$ al \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial libre cuya base viene dada por los p -símplices de \mathcal{V} . Ahora, para cualquier $p \in \{1, 2, \dots\}$ definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(\mathcal{V}) &\rightarrow C_{p-1}(\mathcal{V}) \\ c &\mapsto \sum_{d \subset c, d \in \mathcal{V}_{p-1}} d \end{aligned} \quad (2.1)$$

Si $p = 0$ definimos $\partial_0 = 0$. Intuitivamente, ∂_p le asigna a cada p -símplice su borde, esto es, la suma de sus caras de codimensión 1. Esta aplicación tiene una propiedad muy importante, que motivará la siguiente subsección:

Proposición 1. Sea ∂_p definida como en 2.1. Entonces para todo $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Coloquialmente, «el borde del borde es vacío».

Demostración. Sea $c \in C_{p+1}(\mathcal{V})$ y $v \in \mathcal{V}$ el símplice representado por c . Veamos que $\partial_p(\partial_{p+1}(c)) = 0$.

En efecto, notemos que v posee $\binom{p+2}{p}$ caras distintas de codimensión 2. Sea τ una de ellas, es decir, τ es un p -1-símplice y $\tau \subset v$.

Si probamos que τ aparece en 2 caras de codimensión 1 de v habremos terminado, pues aparecerá 2 veces como vector al hacer $\partial_p(\partial_{p+1}(c))$ y como estamos en \mathbb{Z}_2 se anulará. Esto implica lo que queremos probar.

Observemos que τ tiene dimensión p mientras que v tiene dimensión $p+2$. Por lo tanto, supongamos, sin pérdida de generalidad, que τ viene dado por los p últimos elementos de v . Así, tenemos dos elementos libres en v , y al calcular las caras de codimensión 1 de v , con los p últimos elementos fijos, tendremos únicamente 2 caras que contienen a τ . \square

Nota. La elección del cuerpo sobre el que se toman los espacios vectoriales es muy significativa. De hecho, si escogemos otro cuerpo, los resultados serán muy distintos, y los cálculos para llegar a ellos, serán más engorrosos. Veremos este hecho en los siguientes ejemplos.

Veamos un ejemplo que ilustre la proposición anterior, es decir, que «el borde del borde es vacío».

Ejemplo 2. Supongamos el complejo simplicial \mathcal{V} del ejemplo anterior y $\sigma = \{a, b, c\} \in \mathcal{V}$.

Así pues, tendremos $c \in C_2(\mathcal{V})$, con $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ la representación de σ en $C_2(\mathcal{V})$. Ahora expresamos las aplicaciones ∂_2 y ∂_1 en forma matricial:

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, teniendo en cuenta que estamos operando en un cuerpo de característica 2, hacemos $\partial_1(\partial_2(c))$:

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2(c)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Hemos comprobado que, en efecto, «el borde del borde» de σ es 0. Para comprobarlo para cualquier vector bastará observar que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo apreciamos lo significativo de elegir el cuerpo \mathbb{Z}_2 , pues en otro caso, los productos matriciales son más difíciles de calcular y podrían no anularse. ◀

De la proposición anterior se desprende que $Im(\partial_{p+1}) \subset Ker(\partial_p)$. Este hecho motiva la siguiente noción importante del presente trabajo: los *grupos de homología*.

En la subsección anterior, más concretamente en 2.1, hemos introducido la aplicación «borde». A lo largo de esta subsección vamos a profundizar más en ella, y en los espacios sobre los que está definida, llegando de una manera natural a la definición de *grupo de homología*.

En primer lugar, vamos a centrarnos en $C_p(\mathcal{V})$ y sus elementos.

Tal y como hemos mencionado anteriormente, podemos ver $C_p(\mathcal{V})$ como un \mathbb{Z}_2 -espacio vectorial libre cuya base viene dada por los p-símplices de \mathcal{V} . Así, si $c \in C_p(\mathcal{V})$, entonces c es un vector que representa a un p-símplice v . De esta manera, podemos ver v como suma de los p-símplices de las componentes no nulas de c . Más formalmente:

Definición 11. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial y $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $p \leq \dim \mathcal{V}$. Una *p-cadena* es una suma formal de p-símplices de \mathcal{V} .

Con la noción de p-cadena, ya podemos formalizar la definición de $C_p(\mathcal{V})$.

Definición 12. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial abstracto. Definimos el *grupo de p-cadenas* de \mathcal{V} como el conjunto de todas las p-cadenas de \mathcal{V} , con la operación suma componente a componente con coeficientes en \mathbb{Z}_2 . Lo denotaremos por $(C_p(\mathcal{V}), +)$ o simplemente $C_p(\mathcal{V})$.

De la definición anterior se desprende el siguiente resultado:

Proposición 2. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial abstracto. Para cada $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $p \leq \dim \mathcal{V}$, entonces $(C_p(\mathcal{V}), +)$ es grupo abeliano.

Demostración. La asociatividad se tiene por herencia de la suma en \mathbb{Z}_2 . La existencia de elemento neutro es clara, pues bastará considerar el vector nulo. La existencia de opuesto también es inmediata, ya que todo elemento es opuesto de sí mismo. Finalmente, como la suma en \mathbb{Z}_2 es conmutativa, se sigue que $(C_p(\mathcal{V}), +)$ es abeliano. \square

En segundo lugar, y habiendo definido los grupos de p-cadenas, pasamos a hacer un estudio más detallado de la aplicación «borde» definida en 2.1. Vamos con su definición:

Definición 13. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial abstracto, $\sigma \in \mathcal{V}$ y $\sigma = \{u_1, \dots, u_p\}$. Definimos el *homomorfismo borde para un símplex* como:

$$B_p(\sigma) = \sum_{j=0}^p \{u_1, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_p\}$$

Donde $\widehat{u_j}$ indica que omitimos u_j . Notemos que este homomorfismo puede extenderse para cadenas, en concreto:

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(\mathcal{V}) &\rightarrow C_{p-1}(\mathcal{V}) \\ c = \sum \sigma_i &\mapsto \partial_p(c) = \sum B_p(\sigma_i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

A ∂_p lo llamaremos *homomorfismo borde para cadenas*, aunque por simplicidad nos referiremos a él como *homomorfismo borde*.

A los elementos de $Im(\partial_p)$ los llamaremos *(p-1)-bordes*, y a los elementos de $Ker(\partial_p)$, *p-ciclos*.

Demostración. Vamos a probar que ∂_p es, en efecto, un homomorfismo.

Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{V}_p$ tales que $\sigma = \{u_1, \dots, u_p\}$ y $\tau = \{w_1, \dots, w_p\}$.

$$B_p(\sigma) + B_p(\tau) = \sum_{j=0}^p \{u_1, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_p\} + \sum_{j=0}^p \{w_1, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_p\} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \{u_1 + w_1, \dots, \widehat{u_i} + \widehat{w_j}, \dots, u_p + w_p\} = B_p(\sigma + \tau).$$

Esto prueba que B_p conmuta con la suma para símlices. Se sigue que ∂_p conmuta para cadenas.

Ahora, $0 = B_p(\sigma) + B_p(\sigma) = B_p(\sigma + \sigma) = B_p(0)$. Esto implica que B_p deja fijo el símlice neutro. Al igual que antes, esta propiedad se extiende para cadenas.

Finalmente, $0 = B_p(0) = B_p(\sigma - \sigma) = B_p(\sigma) + B_p(-\sigma)$ y sumando $-B_p(\sigma)$ a ambos lados de la ecuación se sigue que B_p conmuta con el opuesto. Una vez más, este hecho se extiende a cadenas. \square

Este homomorfismo tiene propiedades muy interesantes, entre ellas:

Proposición 3. *Sea ∂_p el homomorfismo borde definido en 2.2. Entonces $Im(\partial_p)$ es subgrupo de $C_{p-1}(\mathcal{V})$ y $Ker(\partial_p)$ es subgrupo de $C_p(\mathcal{V})$. Más aún, ambos son subgrupos normales de $C_{p-1}(\mathcal{V})$, $C_p(\mathcal{V})$ respectivamente.*

Demostración. Vamos a probar ambos hechos por separado:

- Probaremos primero que $Im(\partial_p)$ es subgrupo:

Sean $a, b \in Im(\partial_p)$ tales que $a = \partial_p(c)$ y $b = \partial_p(d)$, $c, d \in C_p(\mathcal{V})$.

Entonces $a + b = \partial_p(c) + \partial_p(d) = \partial_p(c + d)$. Esto implica que $Im(\partial_p)$ es cerrado para la suma.

Ahora, $0 = \partial_p(0) = \partial_p(c + c) = \partial_p(c) + \partial_p(c) = a + a$. Esto implica que $Im(\partial_p)$ es cerrado para opuestos.

Se sigue que $Im(\partial_p) \leq C_{p-1}(\mathcal{V})$.

- Probemos ahora que $Ker(\partial_p)$ es subgrupo:

Al igual que antes, sean $a, b \in Ker(\partial_p)$.

Entonces $0 = \partial_p(a) + \partial_p(b) = \partial_p(a + b)$. Esto prueba que $Ker(\partial_p)$ es cerrado para la suma.

Ahora, $0 = \partial_p(0) = \partial_p(a - a) = \partial_p(a) + \partial_p(-a) = \partial_p(-a)$. Esto prueba que $Ker(\partial_p)$ es cerrado para opuestos.

Se sigue que $Ker(\partial_p) \leq C_p(\mathcal{V})$.

En virtud de la proposición 2 y lo ya probado, se concluye la normalidad. \square

Además de la propiedad anterior, y tal y como vimos en la subsección anterior, el homomorfismo borde tiene la propiedad fundamental de que $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Este hecho implica que $Im(\partial_{p+1}) \subset Ker(\partial_p)$. Por lo tanto, podemos considerar el cociente entre ambos grupos: $Ker(\partial_p)/Im(\partial_{p+1})$. Este cociente constituye una de las piezas clave del presente trabajo:

Definición 14. Sea $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y \mathcal{V} un complejo simplicial. Definimos el p -ésimo grupo de homología de \mathcal{V} como el grupo cociente $Ker(\partial_p)/Im(\partial_{p+1})$, donde ∂_p está definida como en 2.2. Lo denotaremos por $H_p(\mathcal{V})$.

A su orden, $|H_p(\mathcal{V})| = |Ker(\partial_p)| - |Im(\partial_{p+1})|$, lo llamaremos p -ésimo número de Betti, y lo denotaremos por $\beta_p(\mathcal{V})$.

Intuitivamente, los p -ciclos que no son p -bordes representan agujeros p -dimensionales. Por lo tanto, $\beta_p(\mathcal{V})$ representa el número de p -agujeros de \mathcal{V} . Además, notemos que si $dim \mathcal{V} = n$, entonces $\forall p > n \ H_p(\mathcal{V}) = \emptyset$, pues $\mathcal{V} = \emptyset$.

Ahora veamos un ejemplo en el que calculamos los números de Betti dado un complejo simplicial abstracto.

Ejemplo 3. Supongamos el siguiente complejo simplicial abstracto:

$$\mathcal{V} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$$

Construimos la secuencia de grupos de cadenas asociados:

$$\emptyset \longrightarrow C_2(\mathcal{V}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathcal{V}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathcal{V}) \xrightarrow{\partial_0} \emptyset$$

Calculamos ∂_2 y ∂_1 , y los expresamos de manera matricial:

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para calcular $\beta_0(\mathcal{V})$ y $\beta_1(\mathcal{V})$ bastará calcular el rango de las anteriores matrices. Observamos que:

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que, $dim Im(\partial_1) = 3$ y $dim Ker(\partial_1) = 2$, y por lo tanto, $\beta_1(\mathcal{V}) = 1$ y $\beta_0(\mathcal{V}) = 2$. La representación gráfica de \mathcal{V} en \mathbb{R}^2 nos queda:

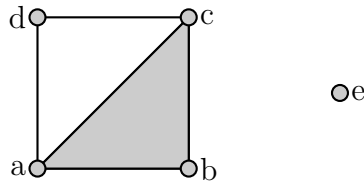


Figura 2: Representación geométrica del complejo simplicial \mathcal{V} .

Tal y como ya hemos comentado, los números de Betti nos cuentan los agujeros p -dimensionales. En este caso, si observamos la representación anterior, vemos que tenemos

un agujero 1-dimensional y dos componentes conexas, que se corresponde con los números de Betti que hemos calculado.

Notemos que, al igual que en el ejemplo anterior, si trabajamos sobre otro cuerpo que no sea \mathbb{Z}_2 , los rangos de las matrices podrían ser distintos. En este caso, si trabajamos sobre \mathbb{Q} , el rango de ∂_1 es 4. Esto afecta a los números de Betti y perjudica la eficiencia computacional de los algoritmos empleados para su cálculo. ◀

Al igual que en la subsección anterior, veamos como podemos definir morfismos, de manera más general, entre los objetos que estamos manejando.

Consideremos una aplicación entre complejos simpliciales, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$. Aplicando el mismo razonamiento que para la definición del homomorfismo borde, tenemos que f induce un homomorfismo entre grupos de cadenas :

$$\begin{aligned} \overline{f_p} : C_p(\mathcal{V}) &\rightarrow C_p(\mathcal{V}') \\ c = \sum_{\sigma \in \mathcal{V}_p} \sigma &\mapsto \overline{f_p}(c) = \sum_{f(\sigma) \in \mathcal{V}'_p} f(\sigma) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Además, tal f nos permite construir la secuencia:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_0} & \emptyset \\ & & \downarrow \overline{f_p} & & \downarrow \overline{f_{p-1}} & & & & \downarrow \overline{f_1} & & \downarrow \overline{f_0} & & \\ \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_p} & C_{p-1}(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_{p-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial'_2} & C_1(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_1} & C_0(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_0} & \emptyset \end{array} \quad (2.4)$$

De esta secuencia observamos que:

$$\overline{f_{p-1}} \circ \partial_p = \partial'_p \circ \overline{f_p}$$

En consecuencia, $\overline{f_p}$ induce un homomorfismo entre grupos de homología:

$$\begin{aligned} f_p : H_p(\mathcal{V}) &\rightarrow H_p(\mathcal{V}') \\ [c] &\mapsto [\overline{f_p}(c)] \end{aligned}$$

Concluimos que, dada una aplicación f entre complejos simpliciales, siempre es posible asociarle una aplicación f_p entre grupos de homología.

Nota. Esta propiedad es muy importante, de hecho, se conoce como *funtorialidad* y pertenece al ámbito de la teoría de categorías que queda fuera del alcance del presente trabajo. Sin embargo, observemos que esta propiedad es la responsable de que podamos ver $C_p(\mathcal{V})$ como grupo o como espacio vectorial según nos convenga.

Si bien los grupos de homología de un complejo simplicial abstracto nos aportan mucha información acerca de sus características topológicas, esta información tiene bastante margen de mejora pues no nos dice nada de la variable «tiempo». Pero, ¿Cómo introducimos la noción de tiempo en un complejo simplicial abstracto? Esta pregunta motiva la siguiente definición.

Definición 15. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial abstracto finito. Consideremos la secuencia $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{k-1} \subset \mathcal{V}_k = \mathcal{V}$ de subcomplejos simpliciales cualesquiera de \mathcal{V} . A \mathcal{V} junto con su secuencia de subcomplejos simpliciales encajados lo llamaremos *complejo simplicial filtrado*.

Esta noción nos habilita la variable «tiempo», pues nos permite preguntarnos en que momento de la secuencia aparecerá una cierta característica topológica y cuanto «tiempo» sobrevivirá dicha característica.

Hay muchas maneras de construir la secuencia complejos simpliciales, por ejemplo, empleando el *complejo simplicial de Čech*. Su construcción se realiza de la siguiente manera:

Sea \mathcal{V} un complejo simplicial y \mathcal{U} un cubrimiento de \mathcal{V} . Los p -símplices del complejo simplicial de Čech vendrán dados por la intersección no vacía de $p+1$ conjuntos de \mathcal{U} .

Lo interesante de este método es que si \mathcal{U} verifica ciertas condiciones, el *Teorema del nervio* garantiza que el complejo de Čech recupera la homología de \mathcal{V} . Ahora bien, ¿Cómo podemos capturar y visualizar esta nueva información? Empleando la *homología persistente*.

Definición 16. Sea $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{k-1} \subset \mathcal{V}_k = \mathcal{V}$ un complejo simplicial filtrado. Definimos los *p -ésimos grupos de homología persistente* como las imágenes de los homomorfismos inducidos por la inclusión, $H_p^{i,j} = \text{Im } f_p^{i,j}$, con $0 \leq i \leq j \leq k$.

A su orden, $|H_p^{i,j}|$, lo llamaremos *p -ésimo número de Betti persistente* y lo denotaremos por $\beta_p^{i,j}$.

Los homomorfismos $f_p^{i,j}$ los definimos siguiendo la idea dada por la funtorialidad. Es decir, tendremos el diagrama:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_p^1} & C_{p-1}(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^1} & \cdots & \rightarrow & C_1(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_1^1} & C_0(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_0^1} & \emptyset \\
 & & \downarrow \overline{f_p^{1,2}} & \partial_p^2 & \downarrow \overline{f_{p-1}^{1,2}} & \partial_{p-1}^2 & & & \downarrow \overline{f_1^{1,2}} & \partial_1^2 & \downarrow \overline{f_0^{1,2}} & \partial_0^2 & \\
 \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_2) & \rightarrow & C_{p-1}(\mathcal{V}_2) & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & C_1(\mathcal{V}_2) & \rightarrow & C_0(\mathcal{V}_2) & \rightarrow & \emptyset \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_p^{k-1}} & C_{p-1}(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^{k-1}} & \cdots & \rightarrow & C_1(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_1^{k-1}} & C_0(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_0^{k-1}} & \emptyset \\
 & & \downarrow \overline{f_p^{k-1,k}} & \partial_p^k & \downarrow \overline{f_{p-1}^{k-1,k}} & \partial_{p-1}^k & & & \downarrow \overline{f_1^{k-1,k}} & \partial_1^k & \downarrow \overline{f_0^{k-1,k}} & \partial_0^k & \\
 \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_k) & \rightarrow & C_{p-1}(\mathcal{V}_k) & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & C_1(\mathcal{V}_k) & \rightarrow & C_0(\mathcal{V}_k) & \rightarrow & \emptyset
 \end{array}$$

Donde los homomorfismos $\overline{f_p^{i,j}}$ entre grupos de cadenas vienen inducidos por el homomorfismo inclusión $f^{i,j} : \mathcal{V}_i \hookrightarrow \mathcal{V}_j$ con $0 \leq i \leq j \leq k$, como en 2.3. Ahora, aplicando el mismo razonamiento que en 2.4 definimos los homomorfismos entre grupos de homología $f_p^{i,j}$.

Ahora que ya tenemos una herramienta que nos captura las características topológicas junto con la variable «tiempo», en un complejo simplicial abstracto filtrado, necesitamos una manera gráfica de visualizar esta información. Para ello, emplearemos los *diagramas de barras* y los *diagramas de persistencia*.

Para construir los diagramas de barras, dibujamos $\beta_p^{i,i+1}$ puntos para la i -ésima filtración, y los conectamos con los $\beta_p^{i+1,i+2}$ puntos de la filtración $i+1$ atendiendo al siguiente criterio: unimos los puntos a de la filtración i y b de la filtración $i+1$, si la clase del elemento que genera a a es preimagen por $f_p^{i,i+1}$ de la clase del elemento que genera a b . Si la clase del elemento que genera a a es enviada a 0 por $f_p^{i,i+1}$ dibujaremos una línea que sale de a en la filtración i hasta la filtración $i+1$.

En este caso, diremos que la clase del elemento que genera a a *muere* en la filtración $i+1$. Si la preimagen de la clase del elemento que genera a a por $f_p^{i-1,i}$ es el 0, diremos que la clase *nace* en la filtración i .

Para los diagramas de persistencia, dibujaremos $\sum_p \beta_p^{i,j}$ puntos cuyas coordenadas en \mathbb{R}^2 vendrán dadas por su filtración de nacimiento y de muerte en ese orden.

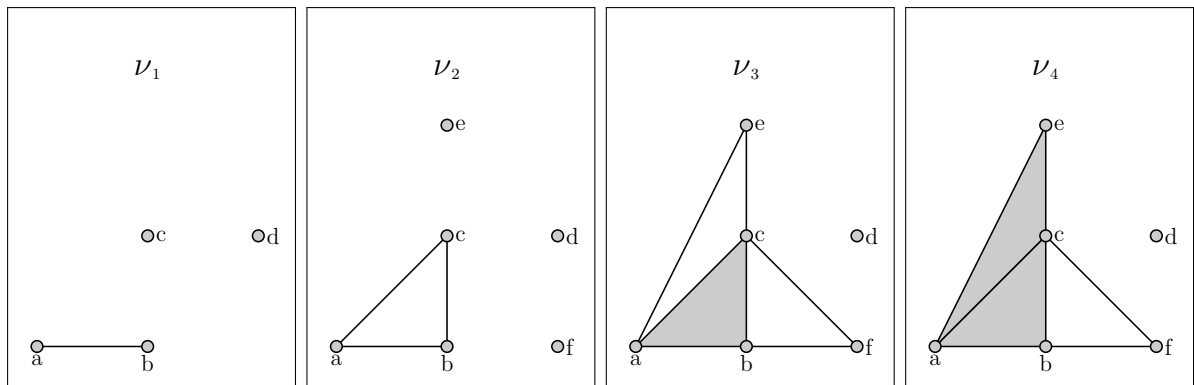
Nota. Estos diagramas dependen de la elección de la base de los espacios vectoriales subyacentes. Una mala elección nos llevará a diagramas ilegibles. Por suerte, tenemos un resultado teórico que nos garantiza la existencia de una «buena» base.

Veamos un ejemplo ilustrativo de estos conceptos:

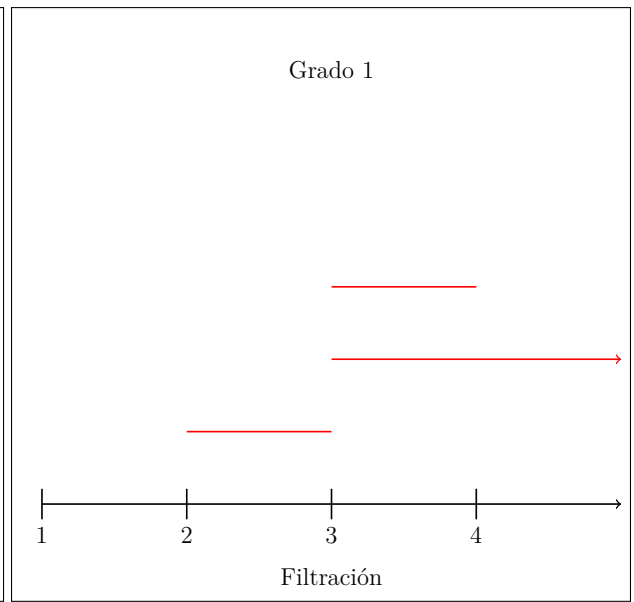
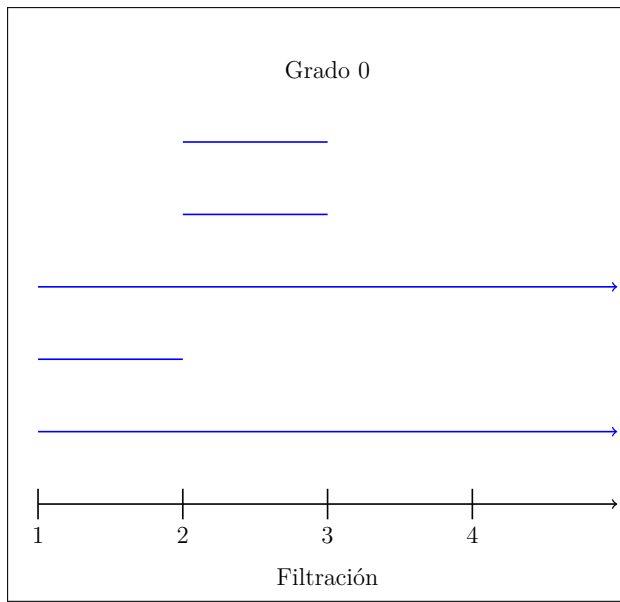
Ejemplo 4. Consideremos el siguiente complejo simplicial filtrado: $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}$. Donde:

- $\mathcal{V}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$
- $\mathcal{V}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
- $\mathcal{V}_3 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{c, e\}, \{a, b, c\}\}$
- $\mathcal{V}_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{c, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}\}$

Veamos su representación gráfica en \mathbb{R}^2 :



Ahora vamos a dibujar los diagramas de barras correspondientes:



Por último, visualizamos los diagramas de persistencia:

