

Sobre la homología persistente en redes neuronales

José Manuel Ros Rodrigo

Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad de La Rioja

Mayo 2022

Resumen

(En construcción.)

Índice

1	Introducción	4
2	Preeliminares	5
2.1	Complejos simpliciales	5
2.2	Homología. Homología persistente	8
2.3	Redes neuronales. Grafos subyacentes	18
	Referencias	22

1 Introducción

(En construcción.)

2 Preliminares

A lo largo de este capítulo vamos a ver todas las nociones teóricas necesarias para el uso de la homología persistente en redes neuronales.

2.1 Complejos simpliciales

Comenzamos con el primer concepto fundamental de todo el trabajo, los *complejos simpliciales*. Esta noción admite dos enfoques diferentes, por lo que debemos distinguir entre dos definiciones relacionadas: los complejos simpliciales *abstractos* y los complejos simpliciales *geométricos*. Para el desarrollo estas nociones seguiremos la guía proporcionada por [1, 8].

Siguiendo el enfoque combinatorio, comenzamos definiendo los complejos simpliciales abstractos y algunas nociones relacionadas.

Definición 1. Un *complejo simplicial abstracto* es una colección finita, \mathcal{V} , de subconjuntos no vacíos de un conjunto, \mathcal{V}_0 , que verifica las siguientes propiedades:

1. Si $v \in \mathcal{V}_0$, entonces $\{v\} \in \mathcal{V}$
2. Si $\sigma \in \mathcal{V}$ y $\tau \subset \sigma$, entonces $\tau \in \mathcal{V}$

A los elementos de \mathcal{V} los llamaremos *símplices*; más concretamente: dado $\sigma \in \mathcal{V}$, diremos que σ tiene *dimensión* p , y que σ es un *p-símplice*, si $|\sigma| = p + 1$. Asimismo, definimos la *dimensión de* \mathcal{V} como el máximo de las dimensiones de sus símplices y denotaremos por \mathcal{V}_p a la colección de los p -símplices de \mathcal{V} .

En relación con el concepto de símplice y de dimensión surge la siguiente noción:

Definición 2. Sean σ y τ dos símplices de \mathcal{V} tales que $\tau \subset \sigma$. Entonces diremos que τ es una *cara* de σ , y además, si las dimensiones de σ y τ difieren por un número natural a , diremos que τ es una cara de σ de *codimensión* a .

Ahora que hemos definido los complejos simpliciales abstractos veamos un pequeño ejemplo para fijar ideas.

Ejemplo 1. Supongamos el siguiente complejo simplicial abstracto:

$$\mathcal{V} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \\ \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

Así, tenemos que la dimensión de \mathcal{V} es 3. También observamos que el 3-símplice $\{a, b, c, d\}$ tiene por caras de codimensión 1 a los 2-símplices $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ y $\{a, c, d\}$. En la figura 1 ilustramos una representación geométrica de \mathcal{V} .

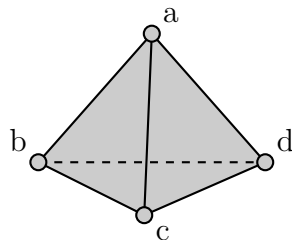


Figura 1: Representación geométrica del complejo simplicial \mathcal{V} .

La representación recogida en la figura 1, en la que cada símple corresponde con un poliedro regular (cada 0-símple corresponde a un punto, cada 1-símple a una arista, cada 2-símple a un triángulo, cada 3-símple a un tetraedro, etc.) es única salvo homeomorfismo. Observamos que interpretando \mathcal{V} como un subconjunto de \mathbb{R}^3 obtenemos un tetraedro. Esta idea motiva el otro enfoque de los complejos simpliciales: el enfoque geométrico. ◀

Siguiendo el enfoque geométrico es necesario que, antes de llegar a la definición de complejo simplicial geométrico, veamos unos conceptos previos relacionados con la propia definición.

Definición 3. Sean $\{u_0, u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que los $k+1$ puntos son *afínmente independientes* si los k vectores $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_k - u_0$ son linealmente independientes.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es una *combinación afín* de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ si $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_k$ tales que $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i$ y $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$

Definición 4. Sean $\{u_0, u_1, \dots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ $k+1$ puntos afínmente independientes y $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i$ una combinación afín. Diremos que x es una *combinación convexa* de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ si $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ son no negativos.

Definimos la *clausura convexa* de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ como el conjunto de todas sus posibles combinaciones convexas.

Ahora que ya contamos con estas nociones previas pasamos a definir la pieza clave en la definición de complejo simplicial geométrico: el *símple*.

Definición 5. Definimos un *k-símple* como la clausura convexa de $k+1$ puntos afínmente independientes. Lo denotaremos por $\sigma = \text{conv}\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$, y diremos que la *dimensión* de σ es k .

Llamamos *cara* de σ a cualquier combinación convexa de un subconjunto no vacío de $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$. A la relación «ser cara de» la denotaremos por \leq .

Para los casos $k = 0, 1, 2, 3$ diremos que σ es un vértice, arista, triángulo, tetraedro respectivamente.

Habiendo definido todos los conceptos previos necesarios pasamos a definir *complejo simplicial geométrico*.

Definición 6. Llamamos *complejo simplicial geométrico* a la colección finita de símlices \mathcal{V} verificando las siguientes propiedades:

1. Si $\sigma \in \mathcal{V}$ y $\tau \leq \sigma \implies \tau \in \mathcal{V}$
2. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{V} \implies \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ o $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común a ambos.

La relación entre los complejos simpliciales abstractos y los geométricos viene dada por la construcción de la *realización geométrica* de un complejo simplicial abstracto, que es un complejo simplicial geométrico definido tal y como se ilustra en la figura 1 del ejemplo 1 (para más detalles véase [1]).

De aquí en adelante emplearemos la definición de complejo simplicial abstracto, pues es la más adecuada para el presente trabajo.

Ahora que ya hemos definido los objetos con los que vamos a trabajar, procedemos a definir las aplicaciones entre ellos.

Definición 7. Una *aplicación simplicial entre complejos simpliciales*, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$, es una aplicación tal que $f(\sigma) = \{g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_k)\} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$; donde $g : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}'_0$ es una aplicación entre 0-símplices, $\sigma = \{u_1, u_2, \dots, u_k\} \in \mathcal{V}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \in \mathcal{V}'$.

2.2 Homología. Homología persistente

En la sección anterior hemos fijado el concepto de complejo simplicial, que nos será muy útil a lo largo de esta sección para desarrollar la noción de *espacio vectorial de homología*. A diferencia de como surgió el concepto de *espacio vectorial de homología* en la historia de las matemáticas, en el presente trabajo desarrollaremos primero la noción general para luego reducir al caso particular de la *homología simplicial*. Para ello emplearemos la guía proporcionada por [1, 7, 2].

Comenzamos la sección con una definición básica, que no aparece en el grado, y que nos será necesaria para nuestros propósitos.

Definición 8. Sea R anillo. Definimos el R -módulo izquierdo sobre R como el conjunto M junto con las operaciones:

- Suma: $M \times M \rightarrow M, (x, y) \mapsto x + y$, y
- Producto por escalares: $R \times M \rightarrow M, (r, x) \mapsto rx$,

satisfaciendo las siguientes propiedades:

1. La suma es asociativa, conmutativa, M contiene un elemento neutro para ella y todo elemento tiene opuesto. Es decir, $(M, +)$ es un grupo abeliano.
2. Para cualesquiera x, y de M y r, s de R :
 - (a) $(r + s)x = rx + sx$ (distributiva respecto a la suma de R).
 - (b) $(rs)x = r(sx)$ (asociativa).
 - (c) $r(x + y) = rx + ry$ (distributiva respecto a la suma de M).
 - (d) Si R es unitario, $1x = x$.

De manera análoga definimos el R -módulo derecho. Si R es conmutativo, entonces el R -módulo izquierdo es el mismo que el R -módulo derecho. En tal caso nos referiremos a él simplemente como R -módulo.

Nota. De la noción de R -módulo nos interesan particularmente las siguientes propiedades: todo grupo abeliano es \mathbb{Z} -módulo, y si R es un cuerpo, entonces las nociones de R -módulo y R -espacio vectorial coinciden.

Como es natural, a la noción de R -módulo le sigue la definición de R -submódulo.

Definición 9. Sea M un R -módulo. Definimos el R -submódulo de M como el subconjunto, no vacío, N de M tal que es cerrado para opuestos y para las operaciones heredadas de M . A la relación «ser submódulo de» la denotaremos por \leq .

Tras estas consideraciones básicas, comenzamos el camino que nos conducirá a la definición de los *espacios vectoriales de homología*. Empezamos el camino con la definición de *complejo de cadenas*.

Definición 10. Sea R anillo. Decimos que un *complejo de cadenas* sobre R es un conjunto $\mathcal{C}_* = \{(C_p, \partial_p) | p \in \mathbb{Z}\}$ de R -módulos y R -homomorfismos $\{\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1} | p \in \mathbb{Z}\}$, satisfaciendo $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Se denota por $(\mathcal{C}_*, \partial)$ y a ∂ se le llama el diferencial del complejo.

Notemos que la propiedad anterior es equivalente a que $Im(\partial_{p+1}) \leq Ker(\partial_p), p \in \mathbb{Z}$. Es habitual pensar en \mathcal{C}_* como una sucesión infinita cuya representación es como sigue:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \cdots$$

Fijemos ahora nuestra atención en los R -submódulos de C_p : $Im(\partial_{p+1})$ y $Ker(\partial_p)$.

Definición 11. Sea $(\mathcal{C}_*, \partial)$ un complejo de cadenas sobre R anillo. Definimos los siguientes R -submódulos de C_p :

1. $Z_p(\mathcal{C}_*) = Ker(\partial_p)$. A sus elementos los llamaremos p -ciclos.
2. $B_p(\mathcal{C}_*) = Im(\partial_{p+1})$. A sus elementos los llamaremos p -bordes.

Ahora bien, en virtud de la relación de inclusión entre ambos submódulos y de las operaciones heredadas, podemos considerar el R -módulo cociente $Z_p(\mathcal{C}_*)/B_p(\mathcal{C}_*)$. Este cociente constituye una pieza fundamental del presente trabajo y merece una definición detallada:

Definición 12. Sea $(\mathcal{C}_*, \partial)$ un complejo de cadenas sobre R anillo. Definimos el p -ésimo R -módulo de homología de \mathcal{C}_* como el cociente:

$$H_p(\mathcal{C}_*) := Z_p(\mathcal{C}_*)/B_p(\mathcal{C}_*)$$

Ahora que ya tenemos una noción general de los R -módulos de homología, pasamos al caso particular que nos ocupa en el presente trabajo: *la homología simplicial*. El primer paso será definir el complejo de cadenas asociado a un complejo simplicial, para ello será necesario fijar los R -módulos y R -homomorfismos apropiados.

Ante esta decisión, lo habitual es fijar una orientación para los símlices (la dada por el orden lexicográfico de sus vértices) y definir los grupos abelianos de cadenas dados por las sumas formales de los símlices con coeficientes en \mathbb{Z} (\mathbb{Z} -módulos).

No obstante, en el presente trabajo ignoramos la noción de orientación, pues no aporta beneficio alguno a nuestros propósitos, es más, podría perjudicarlos. Así pues, a partir de ahora, fijaremos el anillo $R = \mathbb{Z}_2$, con lo que podremos ver los \mathbb{Z}_2 -módulos que conformarán nuestro complejo de cadenas como \mathbb{Z}_2 -espacios vectoriales cuya base vendrá dada por los símlices del complejo simplicial escogido.

Veamos esto de manera más formal:

Definición 13. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial y $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $p \leq dim \mathcal{V}$. Una p -cadena es una suma formal de p -símlices de \mathcal{V} . Es decir, si c es una p -cadena, entonces $c = \sum a_i \sigma_i, \sigma_i \in \mathcal{V}, a_i \in \mathbb{Z}_2$.

Con la noción de p -cadena, pasamos a la definición de los \mathbb{Z}_2 -módulos que hemos introducido anteriormente. En adelante los denotaremos por $C_p(\mathcal{V})$.

Definición 14. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial abstracto. Definimos el \mathbb{Z}_2 -módulo de p -cadenas de \mathcal{V} como el conjunto de todas las p -cadenas de \mathcal{V} , con la operación suma componente a componente con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , y el producto externo por elementos de \mathbb{Z}_2 usual. Lo denotaremos por $(C_p(\mathcal{V}), +)$ o simplemente $C_p(\mathcal{V})$.

Tal y como ya hemos advertido antes, estos \mathbb{Z}_2 -módulos pueden ser vistos como espacios vectoriales cuyas bases vienen dadas por los p -símplices de \mathcal{V} . Así pues, en adelante, por simplicidad del lenguaje nos referiremos a ellos como *espacios vectoriales de p -cadenas*.

Habiendo especificado los R -módulos que vamos a emplear, pasamos a definir los R -homomorfismos asociados.

Definición 15. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial abstracto, $\sigma \in \mathcal{V}$ y $\sigma = \{u_0, \dots, u_p\}$. Definimos el *operador borde para un símplex* como:

$$B_p(\sigma) = \sum_{j=0}^p \{u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_p\}$$

La suma anterior es una suma formal, donde $\widehat{u_j}$ indica que omitimos u_j . Ahora extendemos dicho operador para cadenas, en concreto:

$$\begin{aligned} \partial_p : C_p(\mathcal{V}) &\rightarrow C_{p-1}(\mathcal{V}) \\ c = \sum \sigma_i &\mapsto \partial_p(c) = \sum B_p(\sigma_i) \end{aligned} \tag{2.1}$$

En esta definición hemos omitido los coeficientes en las cadenas pues trabajamos sobre \mathbb{Z}_2 . A ∂_p lo llamaremos *homomorfismo borde*.

Demostración. Vamos a probar que ∂_p es, en efecto, un \mathbb{Z}_2 -homomorfismo.

Sean $\sigma, \tau \in \mathcal{V}_p$ tales que $\sigma = \{u_0, \dots, u_p\}$ y $\tau = \{w_0, \dots, w_p\}$.

$$B_p(\sigma) + B_p(\tau) = \sum_{j=0}^p \{u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_p\} + \sum_{j=0}^p \{w_0, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_p\} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \{u_0, w_0, \dots, \widehat{u_i}, \widehat{w_j}, \dots, u_p, w_p\} = B_p(\sigma + \tau).$$

Esto prueba que B_p conmuta con la suma para símplices. Se sigue que ∂_p conmuta con la suma para cadenas.

Ahora debemos probar que ∂_p conmuta con el producto exterior, pero esto es inmediato pues:

- $\partial_p(0c) = \partial_p(0) = 0 = 0\partial_p(c)$
- $\partial_p(1c) = \partial_p(c) = 1\partial_p(c)$

Se concluye lo que queremos probar. □

Por lo tanto, ya tenemos casi construido nuestro complejo de cadenas asociado a un complejo simplicial. Sólo resta enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1. Sea ∂_p definida como en 2.1. Entonces para todo $p \in \{0, 1, 2, \dots\}$ $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Coloquialmente, «el borde del borde es vacío».

Demostración. Sea $c \in C_{p+1}(\mathcal{V})$ y, sin pérdida de generalidad (en virtud de la definición 2.1), supongamos que $c = v$, con $v \in \mathcal{V}$. Es decir, v es un elemento de la base del espacio vectorial de cadenas $C_{p+1}(\mathcal{V})$. Veamos que $\partial_p(\partial_{p+1}(c)) = 0$.

En efecto, notemos que, si $p \geq 1$ (si $p = 0$ es trivial), v posee $\binom{p+2}{p}$ caras distintas de codimensión 2. Sea τ una de ellas, es decir, τ es un $(p-1)$ -símplice y $\tau \subset v$.

Si probamos que τ aparece en 2 caras de codimensión 1 de v habremos terminado, pues aparecerá 2 veces al hacer $\partial_p(\partial_{p+1}(c))$ y como estamos en \mathbb{Z}_2 se anulará. Esto implica lo que queremos probar.

Observemos que τ tiene cardinalidad p mientras que v tiene dimensión $p+2$. Por lo tanto, supongamos, sin pérdida de generalidad, que τ viene dado por los p últimos elementos de v . Así, tenemos dos elementos libres en v , y al calcular las caras de codimensión 1 de v , con los p últimos elementos fijos, tendremos únicamente 2 caras que contienen a τ . \square

Nota. El teorema anterior denota lo significativo de la elección del anillo sobre el que se toman los coeficientes, pues la demostración sería distinta y los cálculos posteriores se complican. Veremos este hecho en los siguientes ejemplos.

Veamos un ejemplo que ilustre la proposición anterior, es decir, que «el borde del borde es vacío».

Ejemplo 2. Supongamos el complejo simplicial \mathcal{V} del ejemplo anterior y $\sigma = \{a, b, c\} \in \mathcal{V}$.

Así pues, tendremos $c \in C_2(\mathcal{V})$, con $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ la representación de σ en $C_2(\mathcal{V})$. Ahora expresamos las aplicaciones ∂_2 y ∂_1 en forma matricial:

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, teniendo en cuenta que estamos operando en un cuerpo de característica 2, hacemos $\partial_1(\partial_2(c))$:

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2(c)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Hemos comprobado que, en efecto, «el borde del borde» de σ es 0. Para comprobarlo para cualquier vector bastará observar que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo apreciamos lo significativo de elegir el cuerpo \mathbb{Z}_2 , pues en otro caso, los productos matriciales son más difíciles de calcular. ◀

Tras el resultado anterior y las construcciones previas, hemos acabado con la construcción del complejo de cadenas asociado a un complejo simplicial. En consecuencia, ya estamos en posición de definir los *espacios vectoriales de homología*.

Definición 16. Sea $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y \mathcal{V} un complejo simplicial. Definimos el p -ésimo espacio vectorial de homología simplicial del complejo simplicial \mathcal{V} como el espacio vectorial cociente $Ker(\partial_p)/Im(\partial_{p+1})$, donde ∂_p está definida como en 2.1. Lo denotaremos por $H_p(\mathcal{V})$.

A su dimensión, $dim H_p(\mathcal{V}) = dim Ker(\partial_p) - dim Im(\partial_{p+1})$, la llamaremos p -ésimo número de Betti, y la denotaremos por $\beta_p(\mathcal{V})$.

Intuitivamente, los p -ciclos que no son p -bordes representan agujeros p -dimensionales. Por lo tanto, $\beta_p(\mathcal{V})$ representa el número de p -agujeros de \mathcal{V} . Además, notemos que si $dim \mathcal{V} = n$, entonces $\forall p > n \ H_p(\mathcal{V}) = \emptyset$, pues $\mathcal{V}_p = \emptyset$.

Ahora veamos un ejemplo (propuesto en [8]) en el que calculamos los números de Betti dado un complejo simplicial abstracto.

Ejemplo 3. Supongamos el siguiente complejo simplicial abstracto:

$$\mathcal{V} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}\}$$

Construimos la secuencia de grupos de cadenas asociados:

$$\emptyset \longrightarrow C_2(\mathcal{V}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathcal{V}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathcal{V}) \xrightarrow{\partial_0} \emptyset$$

Calculamos ∂_2 y ∂_1 , y los expresamos de manera matricial:

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para calcular $\beta_0(\mathcal{V})$ y $\beta_1(\mathcal{V})$ bastará calcular el rango de las anteriores matrices. Observamos que:

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que, $\dim \text{Im}(\partial_1) = 3$ y $\dim \text{Ker}(\partial_1) = 2$, y por lo tanto, $\beta_1(\mathcal{V}) = 1$ y $\beta_0(\mathcal{V}) = 2$. La representación gráfica de \mathcal{V} en \mathbb{R}^2 nos queda:

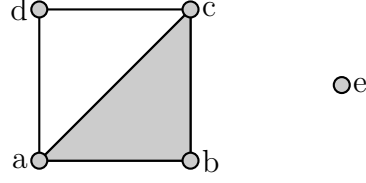


Figura 2: Representación geométrica del complejo simplicial \mathcal{V} .

Tal y como ya hemos comentado, los números de Betti nos cuentan los agujeros p-dimensionales. En este caso, si observamos la representación anterior, vemos que tenemos un agujero 1-dimensional y dos componentes conexas, que se corresponde con los números de Betti que hemos calculado.

Notemos que, al igual que en el ejemplo anterior, si trabajamos sobre otro cuerpo que no sea \mathbb{Z}_2 , los rangos de las matrices podrían ser distintos. En este caso, si trabajamos sobre \mathbb{Q} , el rango de ∂_1 es 4. Esto afecta a los números de Betti. ◀

Al igual que hicimos para los complejos simpliciales, veamos como podemos definir morfismos, de manera más general, entre los objetos que estamos manejando.

Consideremos una aplicación entre complejos simpliciales, $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$. Aplicando el mismo razonamiento que para la definición del homomorfismo borde, tenemos que f induce un homomorfismo entre espacios vectoriales de cadenas :

$$\begin{aligned} \overline{f_p} : C_p(\mathcal{V}) &\rightarrow C_p(\mathcal{V}') \\ c = \sum_{\sigma \in \mathcal{V}_p} \sigma &\mapsto \overline{f_p}(c) = \sum_{f(\sigma) \in \mathcal{V}'_p} f(\sigma) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Además, tal f nos permite construir la secuencia:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\partial_0} & \emptyset \\ & & \downarrow \overline{f_p} & & \downarrow \overline{f_{p-1}} & & & & \downarrow \overline{f_1} & & \downarrow \overline{f_0} & & \\ \emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_p} & C_{p-1}(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_{p-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial'_2} & C_1(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_1} & C_0(\mathcal{V}') & \xrightarrow{\partial'_0} & \emptyset \end{array} \quad (2.3)$$

De esta secuencia observamos que:

$$\overline{f_{p-1}} \circ \partial_p = \partial'_p \circ \overline{f_p}$$

En consecuencia, $\overline{f_p}$ induce un homomorfismo entre espacios vectoriales de homología:

$$\begin{aligned} f_p : H_p(\mathcal{V}) &\rightarrow H_p(\mathcal{V}') \\ [c] &\mapsto [\overline{f_p}(c)] \end{aligned}$$

Concluimos que, dada una aplicación f entre complejos simpliciales, siempre es posible asociarle una aplicación f_p entre grupos de homología.

Nota. Esta propiedad es muy importante, de hecho, se conoce como *funtorialidad* y pertenece al ámbito de la teoría de categorías que queda fuera del alcance del presente trabajo.

Si bien los espacios vectoriales de homología de un complejo simplicial abstracto nos aportan mucha información acerca de sus características topológicas, esta información tiene bastante margen de mejora pues no nos dice nada de la variable «tiempo». Pero, ¿Cómo introducimos la noción de tiempo en un complejo simplicial abstracto? Esta pregunta motiva la siguiente definición:

Definición 17. Sea \mathcal{V} un complejo simplicial abstracto finito. Consideremos la secuencia $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{k-1} \subset \mathcal{V}_k = \mathcal{V}$ de subcomplejos simpliciales cualesquiera de \mathcal{V} . A \mathcal{V} junto con su secuencia de subcomplejos simpliciales encajados lo llamaremos *complejo simplicial filtrado*.

Esta noción nos habilita la variable «tiempo», pues nos permite preguntarnos en que momento de la secuencia aparecerá una cierta característica topológica y cuanto «tiempo» sobrevivirá dicha característica.

Hay muchas maneras de construir la secuencia complejos simpliciales, por ejemplo, empleando el *complejo simplicial de Čech*. Su construcción se realiza de la siguiente manera:

Sea \mathcal{V} un complejo simplicial y \mathcal{U} un cubrimiento de \mathcal{V} . Los p -símplices del complejo simplicial de Čech vendrán dados por la intersección no vacía de $p+1$ conjuntos de \mathcal{U} .

Lo interesante de este método es que si \mathcal{U} verifica ciertas condiciones, el *Teorema del nervio* garantiza que el complejo de Čech recupera la homología de \mathcal{V} . Ahora bien, ¿Cómo podemos capturar y visualizar esta nueva información? Empleando la *homología persistente*.

Nota. En el presente trabajo nos ceñiremos a la homología persistente definida sobre un complejo simplicial filtrado. No obstante, cabe destacar que esta noción tiene una generalización conocida como *módulo de persistencia* que se define sobre un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 18. Sea $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_{k-1} \subset \mathcal{V}_k = \mathcal{V}$ un complejo simplicial filtrado. Definimos los *p -ésimos espacios vectoriales de homología persistente* como las imágenes de los homomorfismos inducidos por la inclusión, $H_p^{i,j} = \text{Im} f_p^{i,j}$, con $0 \leq i \leq j \leq k$.

A su dimensión, $\dim H_p^{i,j}$, la llamaremos *p -ésimo número de Betti persistente* y la denotaremos por $\beta_p^{i,j}$.

Los homomorfismos $f_p^{i,j}$ los definimos siguiendo la idea dada por la funtorialidad. Es

decir, tendremos el diagrama:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_p^1} & C_{p-1}(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^1} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^1} & C_1(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_1^1} & C_0(\mathcal{V}_1) & \xrightarrow{\partial_0^1} & \emptyset \\
& & \downarrow \overline{f_p^{1,2}} & \partial_p^2 & \downarrow \overline{f_{p-1}^{1,2}} & \partial_{p-1}^2 & & \partial_2^2 & \downarrow \overline{f_1^{1,2}} & \partial_1^2 & \downarrow \overline{f_0^{1,2}} & \partial_0^2 & \\
\emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_2) & \xrightarrow{\partial_p^2} & C_{p-1}(\mathcal{V}_2) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^2} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^2} & C_1(\mathcal{V}_2) & \xrightarrow{\partial_1^2} & C_0(\mathcal{V}_2) & \xrightarrow{\partial_0^2} & \emptyset \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_p^{k-1}} & C_{p-1}(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^{k-1}} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^{k-1}} & C_1(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_1^{k-1}} & C_0(\mathcal{V}_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_0^{k-1}} & \emptyset \\
& & \downarrow \overline{f_p^{k-1,k}} & \partial_p^k & \downarrow \overline{f_{p-1}^{k-1,k}} & \partial_{p-1}^k & & \partial_2^k & \downarrow \overline{f_1^{k-1,k}} & \partial_1^k & \downarrow \overline{f_0^{k-1,k}} & \partial_0^k & \\
\emptyset & \rightarrow & C_p(\mathcal{V}_k) & \xrightarrow{\partial_p^k} & C_{p-1}(\mathcal{V}_k) & \xrightarrow{\partial_{p-1}^k} & \cdots & \xrightarrow{\partial_2^k} & C_1(\mathcal{V}_k) & \xrightarrow{\partial_1^k} & C_0(\mathcal{V}_k) & \xrightarrow{\partial_0^k} & \emptyset
\end{array}$$

Donde los homomorfismos $\overline{f_p^{i,j}}$ entre espacios vectoriales de cadenas vienen inducidos por el homomorfismo inclusión $f^{i,j} : \mathcal{V}_i \hookrightarrow \mathcal{V}_j$ con $0 \leq i \leq j \leq k$, como en 2.2. Ahora, aplicando el mismo razonamiento que en 2.3 definimos los homomorfismos entre espacios vectoriales de homología $f_p^{i,j}$.

Ahora que ya tenemos una herramienta que nos captura las características topológicas junto con la variable «tiempo» en un complejo simplicial abstracto filtrado, necesitamos una manera gráfica de visualizar esta información. Para ello, emplearemos los *diagramas de barras* y los *diagramas de persistencia*.

Para construir los diagramas de barras, dibujamos $\beta_p^{i,i+1}$ puntos para la i -ésima filtración, y los conectamos con los $\beta_p^{i+1,i+2}$ puntos de la filtración $i+1$ atendiendo al siguiente criterio: unimos los puntos a de la filtración i y b de la filtración $i+1$, si la clase del elemento que genera a a es preimagen por $f_p^{i,i+1}$ de la clase del elemento que genera a b . Si la clase del elemento que genera a a es enviada a 0 por $f_p^{i,i+1}$ dibujaremos una línea que sale de a en la filtración i hasta la filtración $i+1$.

En este caso, diremos que la clase del elemento que genera a a *muerde* en la filtración $i+1$. Si la preimagen de la clase del elemento que genera a a por $f_p^{i-1,i}$ es el 0, diremos que la clase *nace* en la filtración i .

Para los diagramas de persistencia, dibujaremos $\sum_p \beta_p^{i,j}$ puntos cuyas coordenadas en \mathbb{R}^2 vendrán dadas por su filtración de nacimiento y de muerte en ese orden.

Nota. Estos diagramas dependen de la elección de la base de los espacios vectoriales subyacentes. Una mala elección nos llevará a diagramas ilegibles. Por suerte, tenemos un resultado teórico que nos garantiza la existencia de una «buena» base.

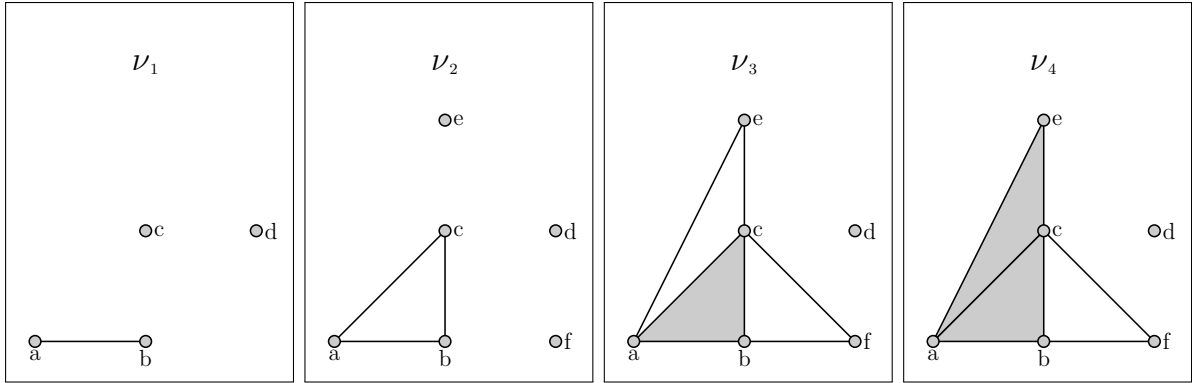
Veamos un ejemplo (propuesto en [8]) ilustrativo de estos conceptos:

Ejemplo 4. Consideremos el siguiente complejo simplicial filtrado: $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}_4 = \mathcal{V}$. Donde:

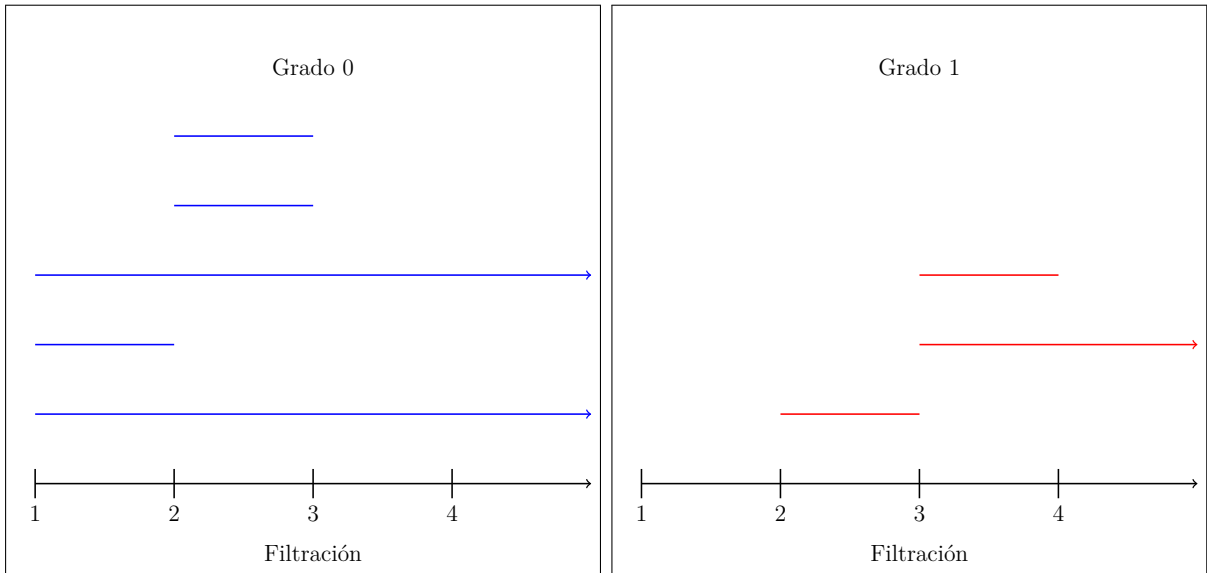
- $\mathcal{V}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$
- $\mathcal{V}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
- $\mathcal{V}_3 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{c, e\}, \{a, b, c\}\}$

- $\nu_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{c, e\}, \{a, b, c\}, \{a, c, e\}\}$

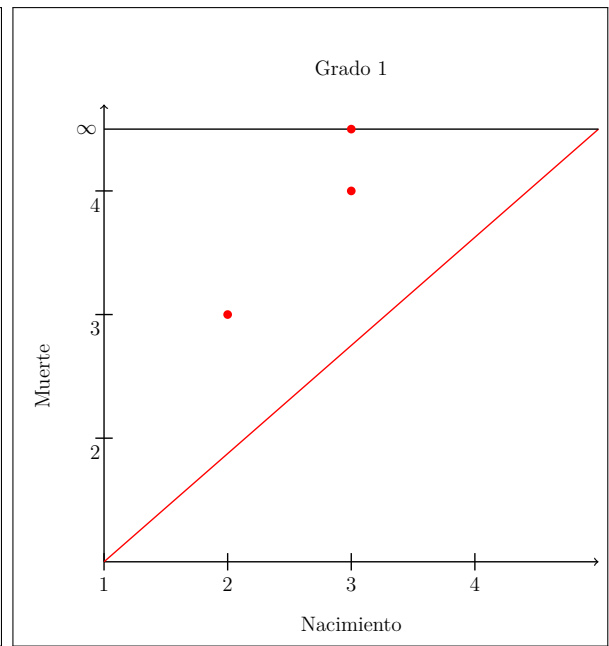
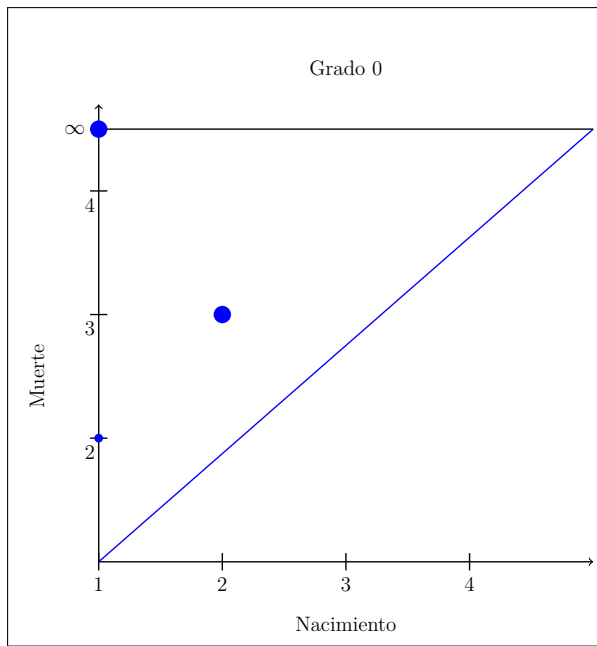
Veamos su representación gráfica en \mathbb{R}^2 :



Ahora vamos a dibujar los diagramas de barras correspondientes:



Por último, visualizamos los diagramas de persistencia:



2.3 Redes neuronales. Grafos subyacentes

Ahora cambiamos completamente de tema: nos alejamos momentáneamente de la formal topología algebraica y nos acercamos al mundo de la informática. En esta sección haremos una introducción hacia el otro concepto fundamental del presente trabajo: *las redes neuronales artificiales*. A lo largo de esta sección seguiremos la guía proporcionada por [3, 5, 4].

La historia del *aprendizaje profundo* y de las redes neuronales es muy amplia y queda fuera del alcance del presente trabajo. No obstante, conviene reseñar que, aunque los términos aprendizaje profundo y red neuronal nos parezcan algo reciente, la realidad es muy distinta. El origen de esta disciplina data de los años 40 de la mano de McCulloch y Pitts, y ha sufrido varias etapas de desarrollo hasta llegar a nuestros días. Al igual que con otras líneas de investigación, la inteligencia artificial (y en particular el aprendizaje profundo) sufrió varios estancamientos y contratiempos hasta llegar a nuestros días («inviernos de la IA»). Por lo tanto, debemos agradecer a todos aquellos investigadores que, aun cuando no existía certeza del éxito de la inteligencia artificial, continuaron con su trabajo en la disciplina y la desarrollaron hasta nuestros días.

Supongamos que queremos que nuestro ordenador nos escriba con palabras un número entre 0 y 9, dado dicho número en cifras. Parece una tarea sencilla, ¿no? Bastará con desarrollar un programa que a partir de una entrada (la cifra) nos produzca una salida (la palabra) de entre las nueve posibilidades; en resumidas cuentas, con unas pocas sentencias condicionales tendremos el resultado esperado.

Pensemos ahora en la misma tarea, pero esta vez le proporcionaremos como entrada una imagen de la cifra manuscrita. El problema se acaba de volver significativamente más difícil. La aproximación que propone el aprendizaje automático es dejar que el ordenador «aprenda» a hacer esa tarea. La idea intuitiva es desarrollar un programa que tome dos entradas: la imagen y unos parámetros; y que a partir de estas entradas proporcione una salida, tras esto, ajustar automáticamente los parámetros para mejorar el desempeño del programa. Iterando este proceso de predicción-ajuste, llegaremos a proporcionar la salida correcta. Una vez que hemos encontrado los parámetros correctos, podemos abandonar este proceso de ajuste y tendremos un programa clásico que a partir de unas entradas produce unas salidas.

Teniendo clara la idea intuitiva, vamos a ver su desarrollo hasta llegar a las redes neuronales.

Supongamos que queremos modelar la relación lineal entre una variable objetivo (y) y p variables independientes. Este modelo se conoce como regresión lineal y puede ser expresado como:

$$\hat{y} = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_px_p + b$$

donde \hat{y} es valor estimado de y , w_1, w_2, \dots, w_p son los pesos que indican la importancia de cada variable independiente para el modelo, y b es el término independiente. En principio, w_1, w_2, \dots, w_p y b toman valores en \mathbb{R} . Siguiendo la terminología anterior, \hat{y} es nuestra salida, las variables independientes son nuestras entradas y w_1, w_2, \dots, w_p son los parámetros a ajustar.

Para realizar este ajuste será necesario tener una métrica que nos indique si un conjunto de parámetros es mejor que otro. Para ello, usaremos el error cuadrático medio cuya expresión es la siguiente:

$$J(w_1, w_2, \dots, w_p, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

donde n es el número de datos (cada dato es un vector de p entradas), y_i es la salida real y \hat{y}_i es la salida estimada por el modelo. Nuestro objetivo es el de minimizar $J(w_1, w_2, \dots, w_p, b)$ para que el modelo sea el mejor posible. Para minimizar esta función será necesario ir ajustando los parámetros correctamente. Para ello se emplea el algoritmo conocido como *el descenso del gradiente*.

Supongamos una función continua y suave. Por ser ella continua sabemos que mapea puntos «ceranos» a puntos «ceranos», y por ser suave, sabemos que podemos aproximar valores «ceranos» a un punto de la función por una función lineal cuya pendiente sea la diferencial de la función. Este resultado se conoce como el *teorema de Taylor*. Como bien sabemos, el gradiente de una función en un punto nos indica cuanto aumenta o disminuye el valor de dicha función ante un pequeño cambio en su entrada. Lo que haremos será «movernos un poco» en la dirección marcada por el gradiente pero en sentido opuesto, pues nuestro objetivo es el de minimizar la función. Iterando este proceso, iremos dando pequeños «pasos» minimizando $J(w_1, w_2, \dots, w_p, b)$. En concreto, la actualización de los parámetros es como sigue:

$$\begin{aligned} w_i^{\text{siguiente}} &= w_i^{\text{actual}} - \alpha \frac{\partial J(w, b)}{\partial w_i} \\ b^{\text{siguiente}} &= b^{\text{actual}} - \alpha \frac{\partial J(w, b)}{\partial b} \end{aligned}$$

donde α es el ratio de aprendizaje: un hiperparámetro que tenemos que elegir. Este paso de actualización se conoce como *propagación hacia atrás*, y el paso del cálculo de \hat{y} se conoce como *propagación hacia adelante*. Una vez hemos logrado la configuración óptima de los parámetros ya podemos emplear este modelo para la predicción de y .

Nota. Notemos que el proceso presentado logra teóricamente la convergencia al mínimo local de $J(w_1, w_2, \dots, w_p, b)$. Para converger de manera teórica al mínimo global son necesarias técnicas más avanzadas cuya descripción queda fuera del alcance del presente trabajo. Para más información véase [3].

Desafortunadamente, el modelo de regresión lineal es muy limitado: supone una relación lineal entre la variable objetivo y las variables independientes. Se hace necesaria una generalización que consiguriemos introduciendo una función no lineal a la regresión lineal. El primer modelo conocido con esta definición es el *perceptrón*. Este modelo se expresa de la siguiente manera:

$$\hat{y} = r(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_p x_p + b)$$

donde, en general, $r(x)$ es una función no lineal que se conoce como *función de activación* y el resto de variables son como en la regresión lineal. En el caso particular del preceptrón, $r(x)$ está definida de la siguiente manera:

$$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Nota. En el caso general, la función $r(x)$ es un hiperparámetro, es decir, debemos escoger una función no lineal. Lo habitual suele ser escoger la función sigmoide, la tangente hiperbólica o la función ReLU.

Notemos que la función $r(x)$ es continua pero no es suave, pues ella no es diferenciable en $x = 0$. Por lo tanto, teóricamente no podemos asegurar que $J(w_1, w_2, \dots, w_p, b)$ lo sea. Sin embargo, por cuestiones prácticas, este incidente no se tiene en cuenta ya que normalmente no se alcanza el mínimo local de $J(w_1, w_2, \dots, w_p, b)$ luego no hay problemas en que dicha función no sea diferenciable en dicho punto. Adicionalmente, cabe destacar que la mayoría de los algoritmos empleados para el cálculo de la derivada en el descenso del gradiente sólo calculan una de las derivadas laterales, luego el problema de la no diferenciableidad queda «resuelto».

Tras salvar el anterior problema, podemos razonar de manera análoga a como hemos hecho para la regresión lineal y tendremos el mismo mecanismo para actualizar los parámetros y minimizar $J(w_1, w_2, \dots, w_p, b)$. Obtenemos así un modelo más general que no presupone una relación lineal entre la variable objetivo y las variables independientes.

A fin de facilitar el entendimiento de nuestros siguientes pasos, vamos a representar gráficamente la estructura subyacente del perceptrón.

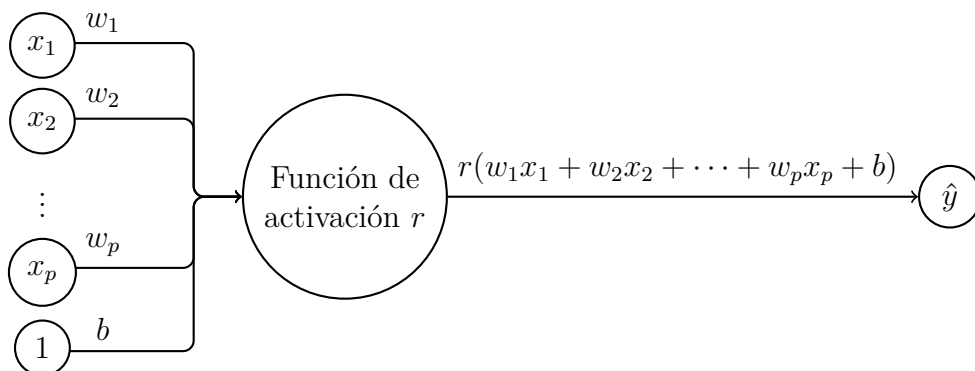


Figura 3: Representación gráfica de un perceptrón.

Esta representación gráfica y las limitaciones del perceptrón (para más detalles véase []), motivan el siguiente paso en la construcción de las *redes neuronales*. Este paso consiste en añadir más perceptrones en paralelo (nodos) y en serie (capas), consiguiendo lo que se conoce como *perceptrón multicapa*.

El perceptrón multicapa es caso particular de arquitectura de una red neuronal. En esta arquitectura las conexiones entre nodos (neuronas) se realizan únicamente hacia adelante y no se permite la conexión entre nodos de la misma capa, y la función de activación es $r(x)$ definida en 2.4. Para los propósitos del presente trabajo, la función de activación no es relevante; pero sí lo es la dirección de las conexiones entre los nodos. Por lo tanto, nos ceñiremos al caso particular de las redes neuronales cuyas conexiones se realizan hacia adelante y sin conexiones dentro de la misma capa, estas redes neuronales se conocen como *redes neuronales prealimentadas*.

Nota. Aunque puede parecer que nos estamos restringiendo a un caso muy particular de las redes neuronales, el *teorema de aproximación universal* nos garantiza que una red de estas características puede aproximar cualquier función Borel-medible cuyo dominio tenga dimensión finita (para más información véase [6]).

En el presente trabajo nos interesa especialmente la representación gráfica de las redes

neuronales prealimentadas, es decir, los grafos subyacentes. En este sentido, veamos las siguientes definiciones:

Definición 19. Un *grafo* $G = (V, E)$ consiste en un conjunto finito V , cuyos elementos reciben el nombre de *vértices*, y un conjunto E de pares de elementos de V , cuyos elementos se conocen como *aristas*. Si $\{u, v\}$ es una arista de G , se dice que los vértices u y v son *adyacentes* y llamaremos a u y a v *extremos* de la arista.

Para el caso las redes neuronales prealimentadas, necesitamos un caso particular de grafo:

Definición 20. Un *grafo dirigido* es un grafo en el que se asigna un orden a los extremos de cada arista. Las aristas dirigidas se denotan $\{u, v\}$, y nótese que $\{u, v\} \neq \{v, u\}$. En el caso de una arista dirigida $\{u, v\}$, se dice que u es el *origen* y al vértice v se le llama *término* de la arista. Un grafo dirigido se dice *acíclico* si para cada vértice u , no existe una sucesión de aristas cuyo origen y término sea u .

En resumen, vamos a estudiar los grafos dirigidos acíclicos subyacentes a las redes neuronales prealimentadas. A fin de facilitar la comprensión, veamos un ejemplo:

Ejemplo 5. Supondremos una red neuronal prealimentada de 2 capas y 13 neuronas.

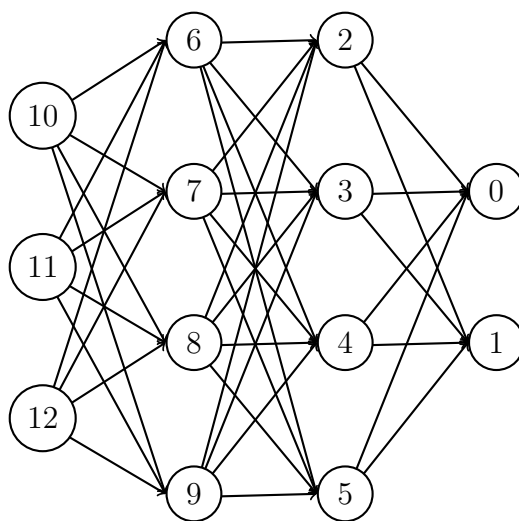


Figura 4: Grafo dirigido acíclico asociado a una red neuronal de 13 neuronas y 2 capas.

Hemos etiquetado las neuronas (vértices) en orden ascendente desde la primera neurona de la capa de salida hasta la última de la capa de entrada. En las próximas representaciones seguiremos usando esta notación. ◀

Habiendo fijado los conceptos de red neuronal prealimentada y de su grafo asociado, necesitamos dar una serie de pasos previos hasta la aplicación de la homología persistente. El primer paso será construir un complejo simplicial a partir del grafo subyacente a la red.

Referencias

- [1] Edelsbrunner, Herbert and John Harer: *Computational Topology - an Introduction*. American Mathematical Society, 2010, ISBN 978-0-8218-4925-5.
- [2] Elduque Palomo, Alberto Carlos: *Introduction to algebra*, 2017.
- [3] Goodfellow, Ian, Yoshua Bengio, and Aaron Courville: *Deep Learning*. MIT Press, 2016. URL <http://www.deeplearningbook.org>.
- [4] Gutiérrez Jiménez, José Manuel y Víctor Lanchares Barrasa: *Elementos de matemática discreta*. Universidad de La Rioja. Servicio de Publicaciones, 2010, ISBN 978-84-693-6451-2.
- [5] Heras Vicente, Jónathan: *Notas del curso de inteligencia artificial*, 2022.
- [6] Hornik, Kurt, Maxwell Stinchcombe, and Halbert White: *Multilayer feedforward networks are universal approximators*. Neural Networks, 2(5):359–366, 1989, ISSN 0893-6080. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0893608089900208>.
- [7] Macho Stadler, Marta: *De la homología a la cohomología: teoremas de dualidad*, 2006.
- [8] Otter, Nina, Mason A Porter, Ulrike Tillmann, Peter Grindrod, and Heather A Harrington: *A roadmap for the computation of persistent homology*. EPJ Data Science, 6(1), aug 2017. URL <https://doi.org/10.1140/2Fepjds%2Fs13688-017-0109-5>.
- [9] Sedgewick, Robert and Kevin Wayne: *Algorithms, 4th Edition*. Addison-Wesley, 2011, ISBN 978-0-321-57351-3.
- [10] Watanabe, Satoru and Hayato Yamana: *Topological measurement of deep neural networks using persistent homology*, 2021. URL <https://arxiv.org/abs/2106.03016>.