Taller #3 - Funciones Continuas

Los siguientes ejercicios sirven de complemento a los temas estudiados en clase sobre las propiedades de las funciones continuas. Este es un trabajo estrictamente individual y debe ser entregado a más tardar el día lunes 25 de octubre a las 11:59pm.

1. Una función real de variable real se dice que es un polinomio de grado $n \in \mathbb{Z}_+$ si tiene la forma
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$
donde se define $a_0 x^0 = a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $d \in \mathbb{R}$ cualquiera, Q_n otra función polinómica de grado n y supongamos que $Q_n(d) \neq 0$. Demuestre, usando la definición $\varepsilon - \delta$, que la función racional P_n/Q_n es continua en d. (1.0)

2. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) = \text{Rango}(f) \subseteq B$. Supongamos que $a \in A'$, $b = f(a) \in B'$, que f es continua en $x_0 = a$ y g es continua en $y_0 = b = f(a)$.

   a) Usando la caracterización secuencial de la continuidad, demuestre que la función composición $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 = a$. (0.5)

   b) Establezca y explique un ejemplo de una función f continua en $x_0 = a$ y una función g discontinua en $y_0 = f(a)$; pero que la composición $h = g \circ f$ sea continua en $x_0 = a$. (0.5)

3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya ley de asignación es
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x^3, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$
Demuestre que esta función es continua en $c = 0$; pero que es discontinua en $d \neq 0$. (1.0)

4. Usando el Teorema de Localización de las Raíces, demuestre que la función
$$f(x) = e^x - x\sin(x)$$
con $x \in [-2, 1]$ tiene al menos una raíz $c \in (-2, 1)$. Use la sucesión de los "puntos medios" $\{p_k\}$ definida en la demostración de este teorema para hallar una aproximación p_{k_0} de c con un error menor que 10^{-3}. Explique como calcular el número de iteraciones necesarias para obtener tal aproximación y adjunte un código donde se obtenga tal aproximación. La salida debe ser la tabla:

k	a_k	b_k	p_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(p_k)$

y la aproximación de la raíz c; así como el valor $f(c)$. (1.0)

5. Usando el método de la demostración del Teorema de Localización de Raíces (divide y vencerá), provea un algoritmo para aproximar el valor c donde la imagen de la función
$$f(x) = \ln(x) - x\cos(x)$$
con $x \in [1, 4]$ sea igual a 2. Explique y provea un código con salida una tabla de los resultados en cada iteración y la aproximación de c. Provea gráficos de la situación programada. (1.0)