Alejandro Ortiz
jortizsi@unal.edu.co

Formula general de una ecuación diofántica

$$X = x_p + \frac{b}{gcd(a,b)} \cdot \lambda$$

$$Y = y_p - \frac{a}{gcd(a,b)} \cdot \lambda$$

- Ecuación diofántica: $ax + by = c$
- x_p e y_p son una solución particular
- gcd es máximo común divisor
- λ es un valor entero

Problema: ¿Tiene $7x + 20y = c$ solución con x e y positivas dado c?

Parte 1 (solución particular)

Asumamos $c = 1$, obtenemos

$$7x + 20y = 1$$
$$7(3) + 20\cdot(-1) = 1$$
$$21 - 20 = 1$$

Podemos construir para un c

$$c(7x + 20y) = 1 \cdot c$$
$$7\underbrace{(3c)}_{x} + 20\underbrace{(-c)}_{y} = c$$

$$x_p = 3c$$
$$y_p = -c$$

Nota: por teorema de Bezout, como $gcd(a,b)=1$ es posible obtener solución para cualquier c.

La solución particular puede tener x e y con cualquier signo.

Parte 2: (usar fórmula general)

$$\underbrace{7}_{a}x + \underbrace{20}_{b}y = c \qquad x_p = 3c \quad y_p = -c \quad gcd(7,20)=1$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3c + \frac{20}{1}\cdot\lambda \\ y &= -c - \frac{7}{1}\cdot\lambda \end{aligned}}$$

Parte 3: garantizar solución positiva

En y ambos terminos son negativos. por la entrada se sabe que c tiene valor positivo lo que causa que $-c \leq 0$.

Casos

- Si c es multiplo de 7, tomar el lambda que anula $-c$. $y=0$ $x=\frac{c}{7}$
- Si c no es multiplo de 7 tomar lambda como el primer numero entero que multiplicado por 7 es mayor que c y multiplicarlo por -1. $\lambda = -\left(\frac{c}{7}+1\right)$

con este λ y es positivo, verificar x.

Nota sobre validez: usar un λ distinto puede fallar, si se toma mayor puede no arreglar y, si menor puede dañar x.

$\Longrightarrow$ Existen soluciones positivas si y solo si el menor λ que hace positivo y deja positivo x.