

Soutenance du mémoire de stage de recherche (v1.1)

Exploration mathématique des transitions de phase du
modèle d'Ising pour son intérêt dans l'enseignement
universitaire de la physique statistique

Jorys MAHAMBA (L3 DLMP, UPEC)

3 Juin 2024

Table des matières

- 1 Présentation du sujet et du contexte
- 2 Ressources et méthodes
- 3 Résultats
 - Inégalités de corrélation
 - Limite thermodynamique 1D
 - Absence de transition de phase à 1D
 - Limite thermodynamique à 2D
 - Existence d'une transition de phase à 2D
- 4 Interprétation et discussion
- 5 Conclusions et perspectives
- 6 Principales références (7 mentionnées / 25 citées)
- 7 Remerciements - Fin

Présentation du sujet et du contexte

- Contexte du stage en laboratoire et motivations personnelles :
 - 6 semaines (avril-mai) pour l'obtention de la Licence de physique ;
 - Accueilli au LAMA et guidé par le Dr. Paul DARIO [2].
- Objectif du stage : réduction d'un *gap d'enseignement* :
 - Exigence formelle afin d'essayer de combler un *gap* dans l'enseignement universitaire de la physique statistique ;
- Présentation du modèle d'Ising et méthodologie mise en œuvre [1][5].

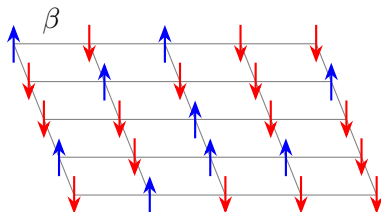


Figure 1 : Représentation du modèle d'ising 2D de plus proches voisins. On a représenté arbitrairement les spins positifs (up) en bleu, et négatifs (down) en rouge. Source : *réalisation personnelle (LaTeX)*.

Ressources et méthodes

- Description des outils mathématiques et des concepts physiques mis en œuvre [5] :
 - théories de la mesure et des probabilité ;
 - corrélation, limite thermodynamique et transition de phase.
- Méthodes de démonstration utilisées (théorèmes, lemmes et propositions) : **rigueur et formalisme mathématique** (Y. Velenik, 2017).
- Mesure de Gibbs (1) et Hamiltonien (2) ; modèle ferromagnétique de plus proches voisins (H. Duminil-Copin 2012) :

$$\mu_{\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H(\sigma)}}{Z(\beta)}, \quad (1)$$

$$H(\sigma) = - \sum_{\{i,j\}} \sigma_i \sigma_j, \quad (2)$$

où $\beta := \frac{1}{k_B T}$ la *température inverse*.

Inégalités de corrélation

- Modèle à condition au bord + sur une partie finie Λ de \mathbb{Z}^d [5].
- Inégalités GKS (R. Griffiths, D. G. Kelly, S. Sherman) [4] :

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\beta}^{+} \geq \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \quad (3)$$

- Évolution de la corrélation en fonction de la température.
- Interprétation physique et discussion des résultats :
 - les spins sont plus fortement corrélés à froid ;
 - cohérence du modèle ferromagnétique.

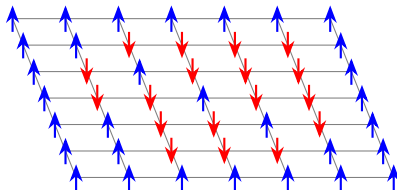


Figure 2 : Représentation du modèle d'Ising en 2D sur un réseau 5×5 avec condition au bord +. Source : réalisation personnelle (LaTeX).

Limite thermodynamique 1D

- Description du modèle unidimensionnel (1D)
- Démonstration de la limite thermodynamique (Y. Velenik, 2017) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N = f(\beta) \quad (4)$$

- Interprétation physique et discussion des résultats :
 - la force de couplage au bord du graphe n'a pas d'impact sur le signe des spins intérieurs ;
 - justification du choix de la condition au bord $+$.

Absence de transition de phase à 1D

- Explication de l'**absence de transition de phase en 1D**
- Résultats, interprétation et discussion:
 - Absence de transition de phase :

$$\forall i \quad \forall T > 0 \quad \langle \sigma_i \rangle_{\beta}^+ = 0 \quad ; \quad (5)$$

- pas de modification du comportement macroscopique ;
- pertinence du modèle ? Cas des dimensions supérieures ?

Limite thermodynamique à 2D

- Description du modèle bidimensionnel (2D)
- Démonstration de la limite thermodynamique:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N = f(\beta) \quad (6)$$

- Interprétation physique et discussion des résultats :
 - comme en 1D, la force de couplage au bord peut être choisie arbitrairement grande ;
 - justifie le choix de la condition au bord + en 2D également.
- Théorème de Peierls et son "complémentaire" [3][6]

Existence d'une transition de phase à 2D

- Démonstration de l'existence de la transition de phase [3][6]:

$$m(\beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_i \rangle \neq 0 \quad \text{pour } T < T_c \quad (7)$$

- Résultats, interprétation et discussion
 - modification du comportement macroscopique à 2D ;
 - concorde avec l'expérience (cas limite 3D *sans épaisseur*). Cas 3D ?

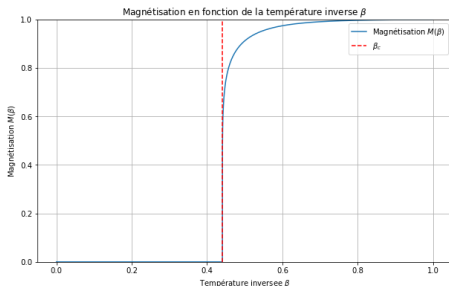


Figure 3 : Aimantation en fonction de l'inverse de la température (source : perso)

Interprétation et discussion

- Analyse critique des résultats et,
- Comparaison avec la littérature scientifique existante [1][5][6]

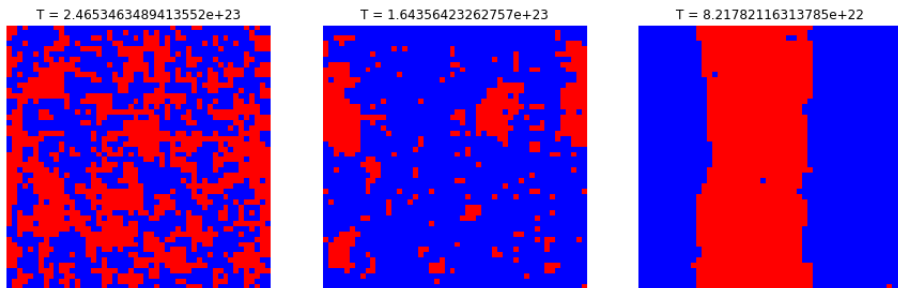


Figure 4 : Distribution de spins en fonction de la température (source : perso)

Conclusions et perspectives

- Synthèse des principaux résultats :
 - Inégalités de corrélation ;
 - Transitions de phase absente à 1D, présente à 2D ;
 - Production d'une ressource pédagogique en physique statistique mathématiquement ambitieuse.
- Perspectives de recherche future [7] :
 - Application à d'autres modèles de spins comme ceux de Potts ou XY ;
 - Application à d'autres théories scientifiques.
- Première **expérience de recherche en laboratoire très motivante et enrichissante** confirmant mon aspiration vers une carrière professionnelle dans l'enseignement et la recherche en mathématique appliquée...

Principales références (7 mentionnées / 25 citées)

- ① Michael Aizenman, Hugo Duminil-Copin et Vidas Sidoravicius. "Random currents and continuity of Ising model's spontaneous magnetization." *Communications in Mathematical Physics*, 334:719–742, 2015.
- ② P. Dario. "Convergence to the thermodynamic limit for random-field random surfaces." *Annals of Applied Probability*, 33:1173–1195, 2023.
- ③ R. L. Dobrusin. "Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions for its regularity." *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, 13:201–229, 1968.
- ④ R. B. Griffiths. "Correlations in Ising ferromagnets. I." *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):478–483, 1967.
- ⑤ E. Ising. "Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus." *Zeitschrift für Physik*, 31:253–258, 1925.
- ⑥ R. E. Peierls. "On Ising's ferromagnet model." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32:477–481, 1936.
- ⑦ Andy Stapleton. 2024 Twelve Best FREE AI tools for Academic Research and Researchers, (vidéo YouTube)

Remerciements - Fin

- Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenues et guidées tout au long de la préparation de ce travail de recherche (particulièrement Dr. DARIO, Profs. ASSELAH, CHARVE et PERELMAN).

YouTube

Aussi, une pensée reconnaissante à tous les vulgarisateurs scientifiques, en particulier à ceux qui partagent gratuitement en ligne leur passion en délivrant du contenu intéressant et inspirant, fournissant un très bon complément aux apprentissages et ressources académiques : A. ARNO, M. LAUNAY, D. LOUAPRE, L. NGUYEN, A. ROUSSEL, G. SAËS, 3blue1brown, El Jj, Maths*, Numberphile, Veritasium, ...

- **MERCI DE VOTRE ATTENTION**