

Université Paris-Est Créteil

Double Licence Mathématiques-Physique (L3)

*Mémoire de recherche en laboratoire (Version 1.1)*

3 Juin 2024

# Exploration mathématique des transitions de phase du modèle d'Ising pour son intérêt dans l'enseignement universitaire de la physique statistique.

Etudiant :

Jorys MAHAMBA

Maître de stage :

Dr. Paul DARIO (LAMA)

*Document réalisé avec LaTeX v.1.40.25.*

***Version 1.1 corrigée et augmentée du 21/06/2024.***

*V1 soutenue devant un Jury à l'université le 03/06/2024.*

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenues et guidées tout au long de la préparation de ce travail de recherche.

Tout d'abord, je suis profondément reconnaissant envers mon maître de stage, le Docteur Paul DARIO, pour ses conseils précieux, ses avis éclairés et ses encouragements constants. Son expertise et son enthousiasme pour le sujet ont été déterminants dans l'achèvement de ce travail. Depuis décembre 2023, nous préparons cette collaboration, du choix du sujet à la sélection des résultats étudiés et des références, en passant par celui des méthodes de démonstration utilisées. Son investissement sur cette période bien plus longue qu'exigée m'a grandement aidé et motivé.

Je souhaite également remercier le Prof. Amine ASSELAH pour m'avoir mis en contact avec le mon futur tuteur et pour son soutien durant le premier semestre de la Licence 3. Ses enseignements et ses conseils ont facilité ma compréhension des théories de la mesure et des probabilités, essentielles pour ce travail. Je tiens aussi à le remercier de nouveau pour sa touchante lettre de recommandation pour ma candidature en Master. J'en profite aussi pour renouveler mes remerciements aux Professeurs Frédéric CHARVE et Galina PERELMAN pour leur excellente recommandation. Ils ont tous contribué au succès de ma candidature au prestigieux Master Centrale-ESSEC (DSBA).

Je suis particulièrement reconnaissant aux départements de Mathématique et de Physique de l'université pour m'avoir offert un cadre académique stimulant et le Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (LAMA) pour m'avoir fourni un bon environnement de recherche et des ressources indispensables à ce projet. Merci beaucoup à mes professeurs et camarades d'étude, avec qui les échanges ont été une grande source d'inspiration et de motivation. Tout cela m'a définitivement conforté dans mon choix d'orientation en ayant renoncé à mon admission aux Grandes écoles du *concours Mines-Télécom* suite à ma très intensive expérience en CPGE, pour intégrer l'UPEC.

Évidemment, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ma famille et mes amis pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements tout au long de mon parcours d'excellence en double projet. Leur confiance en moi est une source constante de force.

Enfin, merci à vous tous pour vos contributions et votre soutien. Pour ceux qui auront l'envie ou l'occasion de lire ce mémoire, j'espère que ma première réalisation de recherche académique vous plaira, et que celle-ci en appellera d'autres à l'avenir, toujours motivées par ma passion pour la mathématique et ses applications concrètes (innovation). Personnellement, j'y ai consacré beaucoup de temps et d'énergie durant l'année. J'en suis très fier<sup>1</sup>.

Jorys MAHAMBA  
(jmahamba@hotmail.com),  
Le 3 juin 2024.

---

<sup>1</sup>Note de stage obtenue : 15/20.

## 0 Abstract/Résumé

### Abstract

This mémoire aims to provide passionate and motivated students interested in both mathematics and physics with a formal and detailed introduction to the Ising model. It is a fundamental tool in statistical physics used to understand the behavior of magnets using probability theory. The internship work consisted of exploring some of its essential physical properties by relying on rigorous mathematical proofs. This report focuses on the Ising model in one and two dimensions, demonstrating the existence of a phase transition in the latter case (2D), unlike its absence in the other (1D). My contribution aims to bridge the gap between abstract mathematical formulations and tangible physical phenomena, using demonstrations that are uncommon at our level of studies, contributing to a deeper understanding of Ising's modelisation and its applications in contemporary research. The idea of this ambitious approach is to enable a better and more certain understanding of the reality of real-world phenomena, based on theorems, lemmas and propositions, guarantees of high scientific added value. This work is intended to be a concrete example of a mathematically ambitious science course content designed to satisfy the most demanding students.

Keywords: *Ising model, phase transition, Peierls argument, Gibbs measure, probability theory.*

### Résumé

Ce mémoire vise à offrir aux étudiants passionnés et motivés à la fois par la mathématique et la physique une introduction formelle et détaillée au modèle d'Ising. C'est un outil fondamental en physique statistique utilisé pour comprendre le comportement des aimants à l'aide de la théorie des probabilités. Le travail de stage a consisté à explorer certaines de ses propriétés physiques essentielles en s'appuyant sur des démonstrations mathématiques rigoureuses. Ce rapport se concentre sur le modèle d'Ising à une et deux dimensions, démontrant l'existence d'une transition de phase dans le dernier cas (2D), contrairement à son absence dans l'autre (1D). Ma contribution a pour but de réduire le gap entre les formulations mathématiques abstraites et les phénomènes physiques tangibles, à l'aide de démonstrations peu usuelles à notre niveau d'études, contribuant à une compréhension plus profonde de la modélisation d'Ising et de ses applications dans la recherche contemporaine. L'idée de cette démarche ambitieuse est de permettre une compréhension meilleure et plus sûre de la réalité des phénomènes du monde réel, en s'appuyant sur des théorèmes, lemmes et propositions, gages de haute valeur ajoutée scientifique. Ce travail se veut être un exemple concret de contenu d'enseignement des sciences ambitieux mathématiquement destiné à satisfaire les étudiants les plus exigeants.

Mots-clefs : *Modèle d'Ising, transition de phase, argument de Peierls, mesure de Gibbs, théorie des probabilités.*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>0 Abstract/Résumé</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte du stage en laboratoire . . . . .	1
1.2 Motivations personnelles . . . . .	1
1.3 Présentation du modèle et méthodologie mise en œuvre . . . . .	2
<b>2 Définition mathématique du modèle et inégalités de corrélation</b>	<b>4</b>
2.1 Définition du modèle . . . . .	4
2.2 Inégalités GKS . . . . .	6
2.3 Évolution de la corrélation en fonction de la température . . . . .	9
2.4 Interprétation physique et discussion des résultats . . . . .	11
<b>3 Le modèle d’Ising unidimensionnel (1D)</b>	<b>12</b>
3.1 Limite thermodynamique . . . . .	12
3.2 Absence de transition de phase . . . . .	13
3.3 Interprétation physique et discussion des résultats . . . . .	15
<b>4 Le modèle d’Ising bidimensionnel (2D)</b>	<b>16</b>
4.1 Limite thermodynamique . . . . .	16
4.2 Existence d’une transition de phase . . . . .	17
4.3 Interprétation physique et discussion des résultats . . . . .	20
<b>5 Conclusion</b>	<b>22</b>
<b>6 Références</b>	<b>23</b>
6.1 Bibliographie . . . . .	23
6.2 Webographie (YouTube) . . . . .	24
<b>7 Index et figures</b>	<b>25</b>
7.1 Index des formules . . . . .	25
7.2 Schémas . . . . .	28
7.3 Graphes . . . . .	29
<b>8 Annexes</b>	<b>31</b>
8.1 Présentation synthétique des références bibliographiques . . . . .	31
8.2 <i>Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice</i> : un cours du Pr. Hugo DUMINIL-COPIN qui a influencé mon choix de sujet . . . . .	34

# 1 Introduction

## 1.1 Contexte du stage en laboratoire

Ce document résulte du stage de troisième année qui s'inscrit dans le cadre de ma Licence de Physique. Il a été réalisé au sein du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (LAMA), à l'UPEC, sous la supervision du Dr. Paul DARIO qui m'avait préalablement proposé d'autres sujets de stage, au choix. Étant en Double Licence Mathématiques-Physique, effectuer cette collaboration sur le campus universitaire me permettait de suivre au mieux les cours de mathématique qui continuaient en parallèle. Dès lors, souhaitant mettre à profit les connaissances acquises dans les deux disciplines et souligner l'importance et la beauté de leur interaction, j'ai voulu traiter un sujet moderne de mathématique appliquée.

Aussi, ayant eu d'excellents résultats et ayant été impliqué dans les enseignements de Théorie de la mesure & Probabilités du Prof. Amine ASSELAH, celui-ci m'a recommandé et mis en contact avec un de ses collègues, expert en mathématique appliquée à la physique statistique [5] [6]. Au début de notre collaboration, nous avons alors choisi le thème du modèle d'Ising pour son importance à la fois dans la recherche en physique et en mathématique contemporaines.

Par ailleurs, j'ai listé les formules utilisées dans ce mémoire en annexe §7.1. Aussi, j'ai trouvé intéressant de donner en annexe §8.1 une synthèse des références bibliographiques utilisées. Ce genre d'appendice serait un outil très utile et agréable s'il était présent dans tous les articles ou livres de recherche. Il permet en effet au lecteur de gagner du temps quant à la sélection des œuvres bibliographiques qu'il souhaite consulter. En effet, il était important pour moi d'introduire des références diversifiées avec notamment celles venant d'institutions prestigieuses comme Harvard ou le MIT. Cette occasion m'aura d'ailleurs permis de découvrir le *Center for Computational Science & Engineering* (CCSE), l'un des fascinants centres de recherche du MIT. Alors je souhaite à présent publier ce travail afin de le partager à tous et d'éventuellement recevoir des conseils et des commentaires, pour amélioration. J'espère le présenter en séminaire auprès d'étudiants (en licence et master), voire de doctorants, afin de recueillir leurs remarques.

## 1.2 Motivations personnelles

En tant qu'étudiant passionné de sciences mathématiques éprouvant un fort intérêt pour la physique théorique, j'ai souvent cherché des ouvrages combinant l'élégance et la rigueur des raisonnements formels avec l'interprétation de leur manifestation dans les phénomènes du monde réel. Néanmoins, la lourdeur de certaines démonstrations peut être un frein pour beaucoup d'étudiants curieux dans leur apprentissage théorique.

Par ce travail, **j'aspire donc à contribuer à combler un certain *gap d'enseignement* en physique statistique. Ce mémoire s'adresse à des étudiants scientifiques n'ayant pas peur de se confronter à un formalisme lourd, ainsi qu'à des étudiants en mathématique souhaitant travailler sur ses applications en conservant la rigueur à laquelle ils sont habitués.** Cette volonté de transmettre qui m'anime depuis l'enfance s'est étoffée au contact de professeurs brillants et inspirants, de camarades que j'ai pu aider tout au long de ma scolarité comme en devenant tuteur académique à l'UPEC, mais aussi grâce à ceux qui permettent à

tous les curieux ou passionnés comme moi, d'explorer de nouveaux horizons par leur travail de vulgarisation sur Internet [c] [d]. Je souhaite ici apporter à mes pairs les plus exigeants une ressource supplémentaire répondant à leurs attentes et dans leur quête du savoir.

Enfin, j'envisage une carrière professionnelle dans l'enseignement et la recherche et ce stage m'a permis de mieux comprendre la réalité du travail de chercheur en laboratoire auprès de scientifiques confirmés ; et par ailleurs d'expérimenter l'usage d'outils d'Intelligence Artificielle générative dans le cadre d'un travail de recherche fondamentale [e] [f]. Je suis déjà convaincu qu'une utilisation judicieuse et appropriée de ces outils modernes (comme *ChatGPT* ou *Jenni.ai* par exemple) contribuera grandement au progrès de la recherche scientifique dans les prochaines années...

### 1.3 Présentation du modèle et méthodologie mise en œuvre

La théorie des probabilités a été introduite au  $XVI^e$  siècle par Geromalo Cardano (Jérôme Cardan), Pierre de Fermat et Blaise Pascal afin de modéliser les jeux d'argents. Elle fut ensuite développée par de nombreux illustres scientifiques comme Jacob Bernoulli, Gottfried Leibniz ou Isaac Newton et fut formalisée au  $XX^e$  siècle par Andreï Kolmogorov comme application des travaux d'Emile Borel et Henri Lebesgue sur les théories de la mesure et de l'intégration. Au fil des siècles, elle trouva des applications dans toutes les sciences naturelles, économiques et sociales. En particulier, la physique statistique, développée notamment par Ludwig Boltzmann au  $XIX^e$  siècle, permet de prédire le comportement global de systèmes thermodynamiques à l'aide de données locales en s'appuyant sur ce puissant formalisme.

Le modèle d'Ising, concept fondamental en physique statistique, illustre bien la précédente affirmation [15] [4] [7]. Il est utilisé pour comprendre et simuler des phénomènes de physique, mais aussi de chimie, de biologie ou d'informatique. En outre, on lui trouve par exemple des applications en finance pour modéliser certaines interactions entre agents de marchés, ou pour étudier la dynamique de certaines populations en écologie. Derrière son apparente simplicité résident encore bien des mystères, et c'est aujourd'hui un sujet de recherche très fertile. Le dernier lauréat Français de la prestigieuse médaille Fields, Hugo Duminil-Copin<sup>2</sup> (2022), a été récompensé "*pour avoir résolu un problème de longue date dans la théorie probabiliste des transitions de phase en physique statistique, en particulier dans les dimensions trois et quatre*" en travaillant sur ce fameux modèle [9] [2] [1] [13] [a] [b]. Ce distingué chercheur fait d'ailleurs partie d'une importante équipe de recherche de l'Université de Genève travaillant sur le sujet, dont la réputation dans la communauté scientifique illustre le fort intérêt que celui-ci suscite actuellement.

Concrètement, la modélisation mathématique d'Ising est utilisée pour caractériser des systèmes dynamiques à variables binaires, symbolisant souvent les *moments magnétiques* de particules élémentaires. Ces variables interagissent avec leurs voisins immédiats, et leur interaction est régie par une fonction énergétique spécifique. En physique statistique, il est utilisé pour expliquer des phénomènes de ferromagnétisme. Le plus connu est le *phénomène de Curie*. Celui-ci énonce que lorsqu'on chauffe un aimant au-dessus d'une *température critique*, il perd sa capacité à attirer d'autres aimants. On dit que les *spins magnétiques* composant l'aimant à l'échelle subatomique ont perdu leur *magnétisation spontanée* : l'aimant qui à froid était *ferromagnétique* est devenu *paramagnétique*. En représentant un aimant comme un réseau fini à trois dimensions (3D) de

---

<sup>2</sup>Son site internet personnel : <https://www.ihes.fr/~duminil/>

spins magnétiques, qu'on peut vulgariser comme étant des petits aimants à l'échelle microscopique pouvant pointer vers le haut (spin positif  $+1$ ) ou vers le bas (spin négatif  $-1$ ), le modèle d'Ising permet d'expliquer ce phénomène surprenant. Il associe à chaque sommet du réseau une probabilité d'être positif. Cette probabilité est contrôlée par l'énergie, selon que l'on souhaite favoriser les configurations paramagnétiques, avec le plus de spins voisins de signes contraires, ou ferromagnétiques, avec le plus de spins voisins alignés. Initialement, Wilhelm Lenz [3] avait présenté pour la première fois ce modèle de spins en 1920, mais il porte le nom de son élève en thèse Ernst Ising, qui a *résolu* la version unidimensionnelle durant sa thèse en 1925 [14]. Depuis lors, il a été étendu aux dimensions supérieures et développé sous d'autres conditions. Grâce à de nombreux chercheurs, notre compréhension du sujet a considérablement progressé, nous fournissant aujourd'hui une littérature vaste et diversifiée. L'étude approfondie autour de sa formulation a abouti à une multitude de techniques et de méthodes pour analyser ses propriétés [10].

D'autre part la mathématique est omniprésente en physique car celle-ci est faite d'observations et de mesures dont les résultats sont des nombres ou des entités mathématiques abstraites. Les lois physiques sont des relations entre ces nombres qui s'expriment mathématiquement. Celles-ci sont décrites à l'aide d'équations algébriques ou de modélisations analytiques. Alors, au-delà de la mise en oeuvre des méthodes mathématiques de base, indispensables pour la physique, mon approche méthodologique consiste en ce que chaque définition, théorème et méthode introduits soient présentés formellement puis systématiquement replacés dans le contexte physique [18] [11] ; en essayant de bien mettre en évidence les difficultés et d'éviter les pièges d'interprétation ou de simplification trop rapide.

Ainsi, ce mémoire de stage vise à en présenter quelques propriétés élémentaires, mais aussi fondamentales, avec un focus sur les dimensions 1 et 2. L'objectif est d'établir rigoureusement ces résultats mathématiques, puis de les interpréter physiquement, afin que cette présentation soit compréhensible par des étudiants curieux et motivés. **Le principal résultat démontré ici est l'existence d'une transition de phase en dimension 2 (2D), contrastant avec son absence à une dimension (1D).**

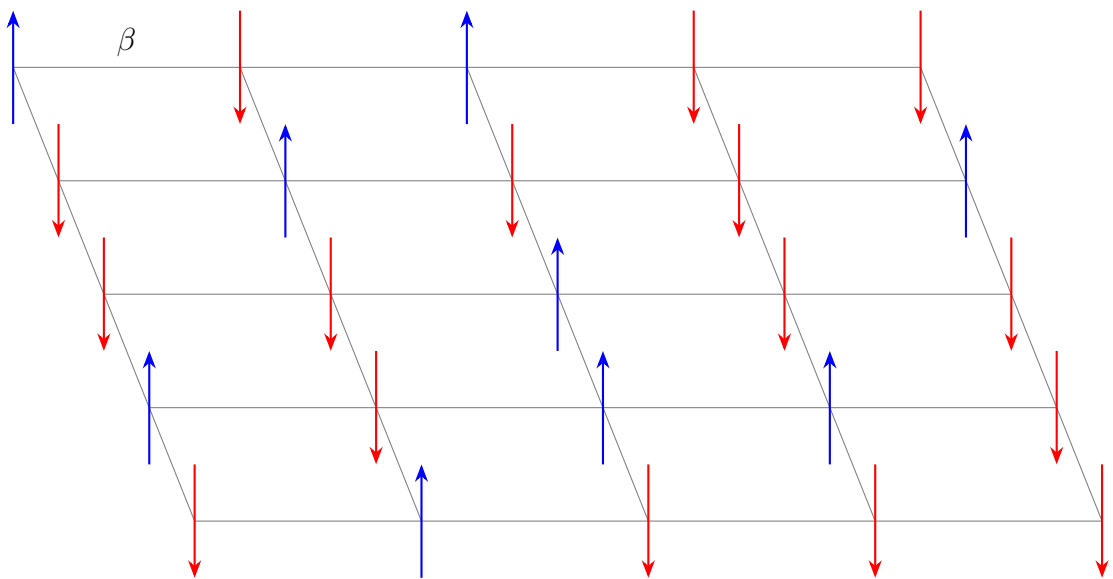


Figure 1: Représentation du modèle d'Ising 2D de plus proches voisins. On a représenté arbitrairement les spins positifs (up) en bleu, et négatifs (down) en rouge. Source : *réalisation personnelle (LaTeX)*.



## 2 Définition mathématique du modèle et inégalités de corrélation

Dans cette section, on présente formellement le modèle d'Ising grâce au puissant formalisme de la théorie des probabilités [11] [18]. On montrera ensuite quelques unes de ses propriétés fondamentales, valables en dimension quelconque, que l'on discutera au §2.4 (de même que pour les sections 3 et 4 dont les discussions seront respectivement aux §3.3 et §4.3).

### 2.1 Définition du modèle

On considère un *réseau fini*  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  où  $d \in \mathbb{N}^*$  est sa *dimension*. On se placera toujours dans le cas où le champ magnétique extérieur est nul. On travaillera avec une version basique du modèle d'Ising ferromagnétique, c'est-à-dire favorisant les *configurations* de plus basse énergie, qui sert de base à la construction de modélisations plus sophistiquées. Cette version est dite *de plus proches voisins* parce qu'on impose un *couplage* positif entre les *spins voisins* et nul entre ceux non voisins. Nous précisons ci-dessous le vocabulaire employé.

Une **configuration** est une application  $\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$  qui à chaque sommet  $x \in \Lambda$  associe son *spin*  $\sigma_x \in \{-1, 1\}$ . Une arête du réseau représente, en un certain sens que l'on précisera plus tard, la *corrélation* entre les spins qu'elle joint (voir Figure 1: Une représentation du modèle d'Ising 2D avec 25 spins).

On dira que deux sommets sont **voisins** s'ils sont à distance 1 l'un de l'autre au sens de la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ . On note  $E_\Lambda$  l'ensemble des paires de voisins sur  $\Lambda$ .

A chaque configuration  $\sigma$  sur  $\Lambda$  on associe une énergie, donnée par l'*Hamiltonien* :

$$\mathcal{H}_{\Lambda, \beta} := -\beta \sum_{\{x, y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y, \quad (1)$$

où  $\beta := \frac{1}{k_B T}$  est la *température inverse* du système, avec  $T \in \mathbb{R}_+^*$  la température et  $k_B$  la *constante de Boltzmann* valant  $1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ , l'une des sept constantes fondamentales en physique. On peut l'interpréter comme une constante de couplage entre les voisins. On verra qu'elle est intimement liée à la notion de corrélation. Aussi,  $\beta$  donne une indication sur l'importance qui est accordée à l'énergie dans le choix de la configuration. En effet, plus  $\beta$  est grande, plus l'énergie est négative, donc faible, ce qui signifie que le système est stable. A l'inverse, si on choisit le cas limite où  $\beta$  est nulle, l'énergie est maximale et le système est instable.

Enfin, on introduit une **mesure de probabilité** sur l'espace probabilisable fini  $(\{-1, 1\}^\Lambda, \mathcal{P}(\{-1, 1\}^\Lambda))$ , où  $\mathcal{P}(\{-1, 1\}^\Lambda)$  désigne l'ensemble des parties de  $\{-1, 1\}^\Lambda$ . On munit cet espace probabilisable de la *mesure de Gibbs*, avec *condition au bord*  $+$ . Cela signifie que l'on prolonge la configuration  $\sigma$  sur  $\mathbb{Z}^d$  tout entier de sorte que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$ ,  $\sigma_x = +1$ .

On calcule alors la probabilité pour qu'une configuration  $\sigma$  soit tirée par :

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda \quad \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma) := \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^+} \cdot \exp(-\mathcal{H}_{\Lambda, \beta}), \quad (2)$$

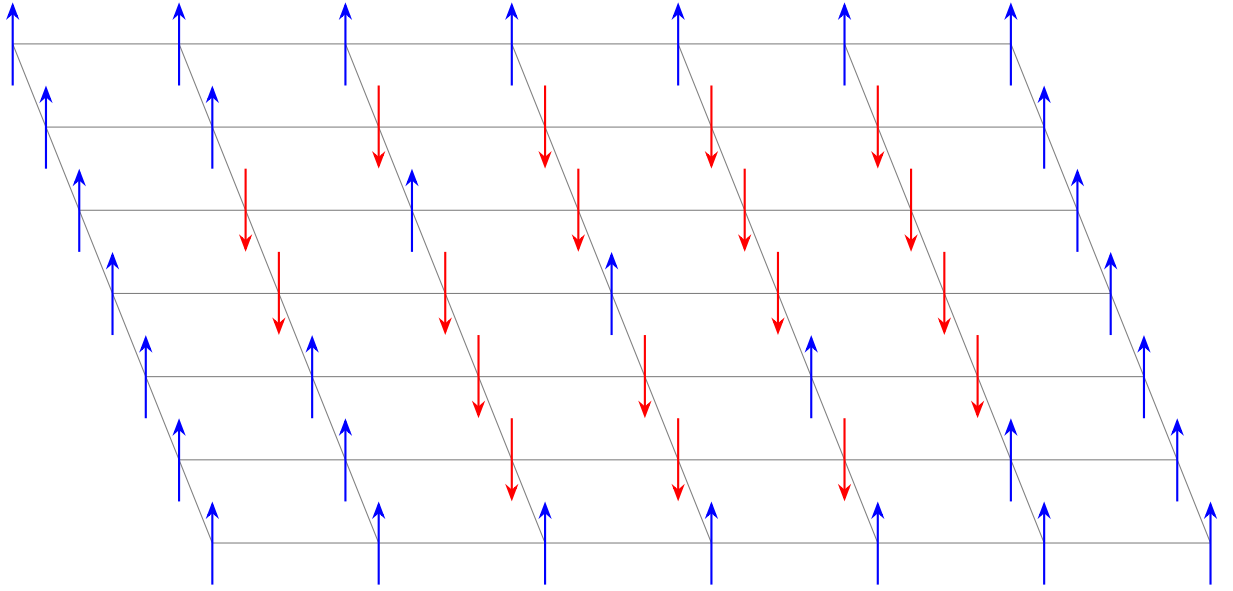


Figure 2: Représentation du modèle d'Ising en 2D sur un réseau  $5 \times 5$  avec condition au bord +. Source : réalisation personnelle (LaTeX).

où la constante  $Z_{\Lambda, \beta}^+$ , appelée *fonction de partition du système*, assure sa normalisation.

L'espérance sera notée  $\langle . \rangle_{\Lambda, \beta}^+$ . On constate que cette mesure de probabilité est conforme à l'intuition physique du modèle d'Ising. En effet, en reprenant les cas limites présentés lors de la définition de  $\beta$ , un couplage important favorisera les configurations organisées en *amas de spins*, avec des voisins de même signe. A l'inverse, un couplage nul produira une configuration fortement hétérogène, avec *équiprobabilité* du signe du spin sur chacun des sommets. Ceci s'explique *thermodynamiquement* par l'augmentation de l'*entropie* avec la température, ce qui traduit la désorganisation croissante du système avec l'augmentation du *désordre* à l'échelle microscopique.

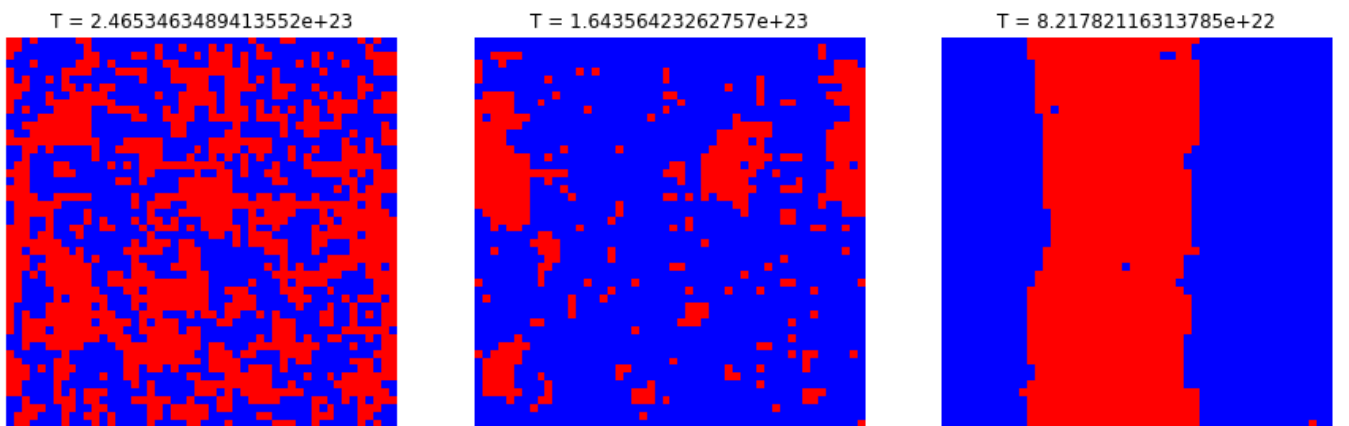


Figure 3: Répartition des spins en 2D en fonction de la température. Au milieu, on a une approximation de la température critique en 2D, à champ nul pour un modèle de plus proches voisins (quelques amas et quelques points isolés). A gauche on est au-dessus de la température critique (répartition plus équiprobable), et à droite en dessous (amas de spins). Source : réalisation personnelle (Python).

Maintenant que nous avons posé le cadre mathématique du modèle d'Ising, nous allons ex-

poser quelques unes de ses propriétés fondamentales, avant de les discuter, puis de s'intéresser plus particulièrement aux petites dimensions.

## 2.2 Inégalités GKS

Les *inégalités GKS*, ou *inégalités de Griffiths*, nommées d'après leurs découvreurs Robert B. Griffiths, D. G. Kelly et Seymour Sherman, sont fondamentales en physique statistique [12]. Nous verrons pourquoi, après les avoir exposées.

### **Théorème 1 :** (*Inégalités GKS*)

Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Pour tous  $A, B \subseteq \Lambda$ ,  $\beta > 0$ , on a :

$$(i) \quad \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \geq 0, \quad (3)$$

$$(ii) \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+, \quad (4)$$

où  $\sigma_A := \prod_{i \in A} \sigma_i$ .

Avant de démontrer ce résultat, exposons un lemme qui permettra de montrer (i), et un autre qui améliorera la clarté de la preuve de (ii).

**Lemme 1.(i) :** Soient  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $(m_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  une famille d'entiers naturels. Alors,

$$\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} = \begin{cases} 2^n, & \text{si } \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \text{ } m_i \text{ pair,} \\ 0, & \text{si } \exists i \in \llbracket 1, m \rrbracket \text{ } m_i \text{ impair,} \end{cases} \quad (5)$$

où  $n := |\Lambda| \in \mathbb{N}^*$ .

**Démonstration :** Soient  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $(m_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  une famille d'entiers naturels.

Cas 1 :  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$   $m_i$  pair. Dans ce cas, on a que :

$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$   $\sigma_i^{m_i} = 1$ , d'où  $\prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} = 1$ .

Or,  $|\{-1, 1\}^\Lambda| = 2^n$  car  $|\Lambda| = n \in \mathbb{N}^*$ .

Ainsi :

$$\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} = 2^n.$$

Cas 2 :  $\exists i_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$   $m_{i_0}$  impair. Dans ce cas, on a que :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} &= \sum_{\substack{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda \\ \sigma_{i_0} = -1}} \prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} + \sum_{\substack{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda \\ \sigma_{i_0} = 1}} \prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} \\ &= - \sum_{\substack{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda \\ \sigma_{i_0} = -1}} \prod_{i=1, i \neq i_0}^m \sigma_i^{m_i} + \sum_{\substack{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda \\ \sigma_{i_0} = 1}} \prod_{i=1, i \neq i_0}^m \sigma_i^{m_i}, \end{aligned}$$

$$\text{car } \sigma_{i_0}^{m_{i_0}} = \begin{cases} -1, & \text{si } \sigma_{i_0} = -1, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} = 0.$$

■

**Lemme 1.(ii) :** Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Pour tous  $A, B \subseteq \Lambda$ ,  $\beta > 0$  :

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ = \langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\Lambda; \beta, \mu \otimes \mu}^+, \quad (6)$$

où  $\sigma'$  est indépendante de  $\sigma$ .

**Démonstration :** Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Soient  $A, B \subseteq \Lambda$ ,  $\beta > 0$ . En notant  $\Gamma := \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+$  par souci de présentation, on a :

$$\Gamma = \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma_B \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right)} \cdot \frac{\left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_A \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_B \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \right]}{\left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \right]^2}.$$

Il s'agit de voir qu'on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} (*) \quad X &:= \left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma_B \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \right] \\ &= \sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma_B \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} (\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (**) \quad Y &:= \left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_A \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_B \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \right] \\ &= \sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma'_B \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} (\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2}) \right). \end{aligned}$$

(\*) et (\*\*) se montrent de la même manière : on part du second membre pour arriver au premier.

Etant donné que les sommes sont à support fini et que les champs d'indices sont indépendants, on peut intervertir les symboles *somme* en regroupant les termes en  $\sigma$  et ceux en  $\sigma'$  entre eux, en utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle d'une somme :  $\forall x, y \in \mathbb{R} \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ .

On a alors que :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ &= \frac{\sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} (\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2}) \right)}{\sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} (\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2}) \right)} \\ &= \langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\Lambda; \beta, \mu \otimes \mu}^+, \end{aligned}$$

ce qui conclut. ■

**Démonstration du Théorème 1 :** Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ . Soient  $A, B \subseteq \Lambda$ ,  $\beta > 0$ .

(i) La fonction de partition  $Z_\Lambda$  est positive comme somme de termes positifs. De plus, c'est une constante de  $\sigma$ . Il suffit donc de montrer que :  $Z_\Lambda \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \geq 0$ . Or, on a que :

$$\begin{aligned} Z_\Lambda \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ &= \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \exp(\beta \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}) \\ &= \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^n}{n!}. \end{aligned}$$

On a alors que,

$$\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^n}{n!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sum_{n=0}^N \frac{(\beta \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^n}{n!},$$

et, comme toutes les sommes et le produit sont finis, on peut intervertir les symboles *somme* et *produit*. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sum_{n=0}^N \frac{(\beta \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^n}{n!} &= \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \sum_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket^{E_\Lambda}} \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \frac{(\beta \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^{n_{y_1 y_2}}}{n_{y_1 y_2}!} \\ &= \sum_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket^{E_\Lambda}} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \frac{\beta^{n_{y_1 y_2}}}{n_{y_1 y_2}!} \sigma_A (\sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^{n_{y_1 y_2}}. \end{aligned}$$

Or,  $\beta \geq 0$  et le *lemme 1.(i)* donne que :

$$\prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_A(\sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^{n_{y_1 y_2}} \geq 0.$$

Il vient que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sum_{n=0}^N \frac{(\beta \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})^n}{n!} \geq 0.$$

Sa limite est donc également positive, soit :

$$Z_\Lambda \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta}^+ \geq 0,$$

ce qui conclut.

(ii) De la même manière, il suffit de montrer que  $Z_\Lambda^2(\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta}^+ - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda, \beta}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda, \beta}^+) \geq 0$ , ce qui, d'après le *lemme 1.(ii)*, est équivalent à montrer que  $Z_\Lambda^2(\langle \sigma_A(\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\Lambda, \beta, \mu \otimes \mu}^+) \geq 0$ . Or on a :

$$\begin{aligned} Z_\Lambda^2(\langle \sigma_A(\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\Lambda, \beta, \mu \otimes \mu}^+) &= \sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A(\sigma_B - \sigma'_B) \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} (\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2}) \right) \quad (7) \\ &= \sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A(\sigma_B - \sigma'_B) \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} e^{\beta(\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2})}. \end{aligned}$$

Introduisons alors  $\sigma'' = \sigma \sigma' = \frac{\sigma'}{\sigma}$ . Il vient que  $\sigma' = \sigma \sigma''$ .

Notons  $\Gamma := \sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A(\sigma_B - \sigma'_B) \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} e^{\beta(\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2})}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{\sigma, \sigma'' \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A(\sigma_B - \sigma_B \sigma''_B) \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} e^{\beta(\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \sigma''_{y_1} \sigma''_{y_2})} \\ &= \sum_{\sigma, \sigma'' \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma_B (1 - \sigma''_B) \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} e^{\beta[\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} (1 + \sigma''_{y_1} \sigma''_{y_2})]} \\ &= \sum_{\sigma'' \in \{-1, 1\}^\Lambda} (1 - \sigma''_B) \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma_B \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} e^{\beta[\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} (1 + \sigma''_{y_1} \sigma''_{y_2})]}. \end{aligned}$$

Étant donné que  $1 - \sigma'' \geq 0$ , que  $\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma_B \geq 0$  par le *lemme 1.(i)* et que le produit d'exponentielles est positif comme produit de termes positifs,

$$\sum_{\sigma'' \in \{-1, 1\}^\Lambda} (1 - \sigma''_B) \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_A \sigma_B \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} e^{\beta[\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} (1 + \sigma''_{y_1} \sigma''_{y_2})]} \geq 0,$$

ce qui conclut. ■

## 2.3 Évolution de la corrélation en fonction de la température

A présent, nous allons définir mathématiquement le concept de *corrélation*, puis nous verrons comment celle-ci évolue avec la température.

**Définition 1 :** Soient  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\beta > 0$ . On appelle corrélation entre deux sommets  $x, y$  de  $\Lambda$  le nombre réel positif :

$$\langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}^+ = \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \exp(\beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp(\beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})}. \quad (8)$$

**Proposition 1 :** Soient  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$  et  $x, y \in \Lambda$ . La corrélation entre les sommets  $x$  et  $y$  est croissante en  $\beta$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Démonstration :** Soient  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$  et  $x, y \in \Lambda$ . La corrélation entre  $x$  et  $y$  est le quotient de deux sommes finies de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en tant que fonction de la variable  $\beta$ . Elle est donc également de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $\beta$ , donc dérivable. Dérivons selon  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}^+}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \exp\left(\beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}\right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}\right)} \right] \\ &= \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \exp\left(\beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}\right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right)} \\ &\quad - \frac{\left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \exp\left(\beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}\right) \right] \left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right) \right]}{\left[ \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right) \right]^2} \\ &= \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right)}{\exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right)} \\ &\quad - \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \left[ \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \exp\left(\beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2}\right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right)} \cdot \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp\left(\beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Ainsi, on a que :

$$\frac{\partial \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}^+}{\partial \beta} = \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \rangle_{\Lambda, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}^+ \cdot \langle \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \rangle_{\Lambda, \beta}^+. \quad (10)$$

Quel que soit  $\beta > 0$ , ce nombre est positif par le point (ii) du *théorème 1*, ce qui conclut. ■

## 2.4 Interprétation physique et discussion des résultats

Les inégalités de Griffiths assurent que les spins sont positivement corrélés, ce qui minimise l'énergie. En effet, un système physique est d'autant plus *stable* que son énergie est faible. Au vu de la définition choisie pour l'hamiltonien, le système est donc d'autant plus stable qu'un grand nombre de spins voisins sont *alignés*, *i.e.* de même signe.

Cependant, lorsqu'on augmente la température, les fluctuations thermiques au sein du système deviennent plus importantes. La distribution de spins devient alors plus erratique et la corrélation entre ceux-ci diminuent. C'est ce que nous décrit la *Proposition 1*.

Ces inégalités permettent donc de comprendre le concept de corrélation dans le modèle d'Ising grâce au choix de la mesure de Gibbs sur l'espace des configurations possibles.



### 3 Le modèle d'Ising unidimensionnel (1D)

Le cas de la dimension 1 est intéressant à plusieurs égards. Premièrement, il peut être vu comme la base à partir de laquelle les modèles plus complexes en dimension supérieure sont construits. En effet, certaines démonstrations suivent les mêmes schémas lorsqu'on les généralise, avec des calculs simplifiés en 1D. Aussi, il a été *exactement résolu* par Ernst Ising dans sa thèse de 1925, ce qui signifie que toutes les propriétés caractéristiques du système peuvent être exprimées mathématiquement de façon exacte. Enfin, nous introduirons ici les concepts majeurs de *limite thermodynamique* et de *transition de phase* [19].

#### 3.1 Limite thermodynamique

En physique statistique, le concept de *limite thermodynamique* correspond à envoyer le nombre de particules et le volume du système vers l'infini à densité constante. Dans le cas du modèle d'Ising, cela revient à considérer une suite croissante de réseaux finis  $(\Lambda_n) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$  qui tend vers  $\mathbb{Z}^d$ . C'est une façon naturelle de prolonger le modèle de réseaux finis à  $\mathbb{Z}^d$  tout entier. Il faut aussi considérer une suite de conditions aux bords : on choisira toujours une condition aux bords +. On travaille ici avec une suite de demi-lignes avec condition au bord +. On montre qu'en envoyant vers l'infini la corrélation entre le dernier spin et le premier spin extérieur, de valeur 1 sous les conditions aux bords +, on retrouve le modèle d'Ising sur la "sous-ligne" avec condition au bord +. Précisons.

**Théorème 2 :** (*Limite thermodynamique en dimension 1*)

On considère le modèle d'Ising en dimension 1, avec condition de bord +. Soit une ligne  $L$  de longueur  $N \in \mathbb{N}^*$ , composée de  $N + 1$  points numérotés de 0 à  $N$ . Pour chaque paire de voisins  $i, i + 1$  pour  $i \in \llbracket 0, N - 2 \rrbracket$ , on impose une corrélation  $\beta_1 > 0$  entre les deux sommets. Entre les sommets  $N - 1$  et  $N$ , on impose une corrélation  $\beta_2 > 0$ . Alors, lorsqu'on fait tendre  $\beta_2$  vers l'infini, on retrouve le modèle d'Ising sur la "sous-ligne"  $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ , avec condition au bord +.

**Démonstration :** Soient  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $L := \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\sigma \in \{-1, 1\}^L$  telle que  $\sigma_N := 1$ . On suppose que les hypothèses du *Théorème 2* sont vérifiées.

$$\begin{aligned}
 \mu(\sigma) &= \frac{\exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma_i \sigma_{i+1} + \beta_2 \sigma_{N-1}\right)}{\sum_{\substack{\sigma' \in \{-1, 1\}^L \\ \sigma'_N = 1}} \exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma'_i \sigma'_{i+1} + \beta_2 \sigma'_{N-1}\right)} \\
 &= \frac{\exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma_i \sigma_{i+1}\right) \cdot \exp(\beta_2 \sigma_{N-1})}{\sum_{\substack{\sigma' \in \{-1, 1\}^L \\ \sigma'_N = 1}} \exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma'_i \sigma'_{i+1}\right) \cdot \exp(\beta_2 \sigma'_{N-1})}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma) &= \frac{\exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma_i \sigma_{i+1}\right) \cdot \exp(\beta_2 \sigma_{N-1})}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{L_N}} \exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma'_i \sigma'_{i+1}\right) \cdot \exp(\beta_2 \sigma_{N-1}) \cdot (1 + \exp(-2\beta_2 \sigma_{N-1}))} \\
&= \frac{\exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma_i \sigma_{i+1}\right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{L_N}} \exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma'_i \sigma'_{i+1}\right) \cdot (1 + \exp(-2\beta_2 \sigma_{N-1}))}.
\end{aligned}$$

Cas 1 :  $\sigma_{N-1} := -1$ .

Dans ce cas,  $\mu(\sigma) \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} 0$ . Cette configuration devient quasi-impossible.

Cas 2 :  $\sigma_{N-1} := 1$ .

Dans ce cas,

$$\mu(\sigma) \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma_i \sigma_{i+1}\right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{L_N}} \exp\left(\sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma'_i \sigma'_{i+1}\right)} \in ]0, 1], \quad (12)$$

ce qui conclut. ■

En effet, on retrouve le modèle d'Ising sur la ligne  $L_N := \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  avec condition de bord + car  $\sigma_{N-1}$  ne peut que valoir 1.

### 3.2 Absence de transition de phase

En physique statistique, **une transition de phase désigne un changement de l'état du système parfois caractérisé par une évolution brusque ou discontinue de certaines de ses propriétés caractéristiques**. Le modèle d'Ising permet d'expliquer le *phénomène de Curie* par une transition de phase dans la répartition subatomique des spins magnétiques du système. Cependant, les aimants sont des objets tridimensionnels ; on n'abordera pas leur cas dans ce mémoire. Néanmoins, on explorera les transitions de phase dans le modèle d'Ising en dimension 1 et 2. Nous commençons ici par le premier cas.

On se place dans le cas du modèle d'Ising en dimension 1. On utilisera un graphe centré en  $O$ , avec conditions aux bords +, de longueur  $L := 2N \gg 1$ . On utilisera également la dimension  $L$  du graphe pour faire référence à celui-ci.

**Théorème 3** :  $\forall \beta > 0 \quad \exists c_\beta > 0 \quad \forall L \geq 1,$

$$\langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+ \leq e^{-c_\beta L}. \quad (13)$$

Cela signifie qu'il n'y a pas de transition de phase pour le modèle d'Ising en dimension 1. On verra plus loin que ce résultat ne se généralise pas.

**Démonstration :** Soit  $\beta > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+ &= \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \sigma_0 \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right)} \\
 &= \frac{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \sigma_0 \cdot (\sigma_1 \sigma_1) \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right)},
 \end{aligned} \tag{14}$$

car  $\sigma_1 \sigma_1 = 1$ . Or, si on définit  $\sigma' \in \{-1,1\}^L$  tel que :

$$\begin{cases} \sigma'_0 = \sigma_0 \sigma_1, \\ \forall i \in L \setminus \{0\} \sigma'_i = \sigma_i, \end{cases}$$

et qu'on pose  $\Gamma := \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \sigma_0 \cdot (\sigma_1 \sigma_1) \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right)$ , on remarque que :

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} [\sigma_0 \sigma_1 \exp(\beta \sigma_0 \sigma_1)] \cdot \sigma_1 \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=1}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) \\
 &= \sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^L} \left[ \sum_{\sigma'_0 \in \{-1,1\}} \sigma'_0 \exp(\beta \sigma'_0) \right] \cdot \sigma'_1 \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=1}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) \\
 &= \sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^L} [-\exp(-\beta) + \exp(\beta)] \cdot \sigma'_1 \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=1}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) \\
 &= 2 \sinh(\beta) \sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^L} \sigma'_1 \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=1}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Par récurrence, on a que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \sigma_0 \cdot (\sigma_1 \sigma_1) \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) &= 2[\exp(\beta) - \exp(-\beta)]^{N-1} \\
 &= 2^N \sinh(\beta)^{N-1}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

En effet, sur la ligne réduite aux points  $N-2$  et  $N-1$  on a que :

$$\sum_{\sigma_{N-2} \in \{-1,1\}} \sum_{\sigma_{N-1} \in \{-1,1\}} \sigma_{N-2} \sigma_{N-1} \exp(\beta \sigma_{N-2} \sigma_{N-1}) = 2[\exp(\beta) - \exp(-\beta)].$$

D'autre part, on montre de façon similaire, mais sans avoir à effectuer de changement de variable, que :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) &= \prod_{i=0}^{N-1} \sum_{\sigma_i \in \{-1,1\}} \exp \left( \beta \left[ \sum_{j=0}^{N-2} \sigma_j \sigma_{j+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) \\ &= 2[\exp(\beta) + \exp(-\beta)]^{N-1} \\ &= 2^N \cosh(\beta)^{N-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ainsi,  $\langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+ = \tanh(\beta)^{N-1}$ . Sachant que  $\tanh$  est majorée par 1, cela conclut. ■

### 3.3 Interprétation physique et discussion des résultats

En combinant les résultats des deux sections précédentes, **on arrive à la conclusion qu'il n'existe pas de transition de phase pour le modèle d'Ising en dimension 1**. Commençons par établir rapidement un dernier résultat.

**Proposition 2 :** Pour tout  $\beta > 0$ , la fonction  $L \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+$  est décroissante.

**Démonstration :** Si pour tous  $L \in \mathbb{N}^*, \beta, \beta_2 > 0$  on note  $\langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta,\beta_2}^+$  l'espérance du spin en 0 sur la ligne de longueur  $2L+1$ , avec condition au bord + et une corrélation en  $\beta_2$  au bord, on a que, pour  $L$  et  $\beta$  fixés :

$$(i) \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta,\beta_2}^+ \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} \langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+ ; \quad (18)$$

$$(ii) \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta,\beta}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta}^+ ; \quad (19)$$

$$(iii) \beta_2 \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta,\beta_2}^+ \text{ est croissante en } \beta_2.$$

L'observation (i) découle du *Théorème 2*, (ii) est vraie par définition et (iii) est claire quand on adapte l'expression de  $\langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta}^+$  dans la preuve du *Théorème 3*. On a donc que  $\beta_2 \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta,\beta_2}^+$  est croissante et a une limite finie, qui en est donc un majorant. Ainsi :

$$\forall L \in \mathbb{N}^*, \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+, \quad (20)$$

ce qui conclut. ■

Ce résultat nous permet de comprendre que le spin au centre est de moins en moins affecté par la condition au bord + au fur et à mesure qu'on étend la ligne. On a une suite décroissante et minorée par 0, selon la première inégalité de Griffiths, qui a donc une limite finie positive, que l'on notera  $\langle \sigma_0 \rangle_\beta^+$  pour tout  $\beta$  fixé.

En passant à la limite dans le *Théorème 3* à  $\beta$  fixé, on obtient le résultat suivant :

$$\forall \beta > 0 \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = 0. \quad (21)$$

C'est ce résultat crucial qui traduit le fait qu'on n'observe pas de transition de phase pour le modèle d'Ising en dimension 1. En effet, ce résultat indique que la configuration en 0 est *équiprobable* quelle que soit la température. Un état n'est pas préféré à un autre : **il n'y a pas de magnétisation spontanée** des spins du système. L'adéquation du modèle avec l'expérience nous conforte dans le choix du formalisme utilisé.

Ainsi, on a réussi à montrer sans trop de peine l'absence de transition de phase pour les systèmes de spins en dimension 1.

## 4 Le modèle d'Ising bidimensionnel (2D)

A présent, nous étudions le modèle d'Ising en dimension 2. Les calculs y sont plus compliqués qu'en 1D, mais restent faisables, du moins, dans l'approximation de champ nul. En effet, le cas bidimensionnel sans champ magnétique extérieur a été exactement résolu par Lars Onsager en 1944 [16]. Plus tôt, Robert Peierls avait démontré le résultat fondamental qui est **l'existence d'une transition de phase**[17], pour laquelle Onsager est parvenu à exhiber la *température critique*, température à laquelle s'effectue le changement. En suivant la même structure que pour la dimension inférieure, on commencera par discuter de la limite thermodynamique avant de traiter le cas de la transition de phase.

### 4.1 Limite thermodynamique

L'argument utilisé en dimension inférieure s'applique toujours ici, au prix d'un léger alourdissement des calculs.

**Théorème 4 :** (*Limite thermodynamique en dimension 2*)

Soit  $L \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\Lambda_L$  le carré  $[-L, L]^2$ . On note  $\partial\Lambda_L$  sa frontière, et  $\partial\Lambda_{L+1}$  son bord, composé de spins positifs uniquement. On munit tous les couples de voisins de  $\Lambda_L$  d'une corrélation  $\beta > 0$  et tous les couples de voisins  $(x, y) \in \partial\Lambda_L \times \partial\Lambda_{L+1}$  d'une corrélation  $\beta_2 > 0$ .

Alors, si on fait tendre  $\beta_2$  vers l'infini, on retrouve le modèle d'Ising sur le sous-carré  $[-L-1, L+1]^2$  avec condition au bord +.

**Démonstration :** Soient  $L \in \mathbb{N}^*$ ,  $\beta, \beta_2 > 0$  et  $\sigma \in \{-1, 1\}^{\Lambda_{L+1}}$ . On se place sous les hypothèses du *Théorème 4*.

Cas 1 :  $\exists x \in \partial\Lambda, \sigma_x = -1$ .

Notons  $A := \{x \in \partial\Lambda_L : \sigma_x = -1\}$  et  $n := |A|$ . Alors,

$$\begin{aligned}
 \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma) &= \frac{\exp\left(\beta \sum_{\{x, y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y + \beta_2 \sum_{x \in \partial\Lambda_L \setminus A} \sigma_x + \beta_2 \sum_{x \in A} \sigma_x\right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1, 1\}^{\Lambda_L}} \exp\left(\beta \sum_{\{x, y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y + \beta_2 \sum_{x \in \partial\Lambda_L \setminus A} \sigma'_x + \beta_2 \sum_{x \in A} \sigma'_x\right)} \\
 &= \frac{\exp\left(\beta \sum_{\{x, y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y\right) \cdot \exp(-\beta_2[8L - n]\sigma_{x_1}) \cdot \exp(n\beta_2\sigma_{x_1})}{\sum_{\sigma' \in \{-1, 1\}^{\Lambda_L}} \exp\left(\beta \sum_{\{x, y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y\right) \exp(-\beta_2[8L - n]\sigma_{x_1}) [1 + \exp(2[8L - n]\beta_2\sigma_{x_1})] \exp(n\beta_2\sigma_{x_1}) [1 + \exp(-2n\beta_2\sigma_{x_1})]} \\
 &= \frac{\exp\left(\beta \sum_{\{x, y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y\right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1, 1\}^{\Lambda_L}} \exp\left(\beta \sum_{\{x, y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y\right) \cdot [1 + \exp(2[8L - n]\beta_2\sigma_{x_1})] [1 + \exp(-2n\beta_2\sigma_{x_1})]}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Comme  $\sigma_{x_1} = -1$ , on a que :  $\mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma) \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} 0$ .

Cas 2 :  $\forall x \in \partial\Lambda_L \sigma_x = 1$ . Alors,

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma) &= \frac{\exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y\right) \cdot \exp(8L\beta_2)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} \exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y\right) \cdot \exp(8L\beta_2) [1 + \exp(-16L\beta_2)]} \\ &= \frac{\exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y\right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} \exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y\right) \cdot [1 + \exp(-16L\beta_2)]}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ainsi,

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma) \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y\right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} \exp\left(\beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y\right)}. \quad (24)$$

On retrouve donc le modèle d'Ising sur le sous-carré  $\llbracket L-1, L+1 \rrbracket^2$  avec condition de bord  $+$ . ■

## 4.2 Existence d'une transition de phase

La plus grosse différence avec le modèle d'Ising en dimension 1 est l'existence d'une transition de phase pour le modèle d'Ising en dimension 2. Les résultats suivants nous permettrons de comprendre pourquoi.

**Définition 2 :** Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  tel que  $0 \in \Lambda$ , et  $\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$ . On appelle *contour entourant 0 dans la boîte  $\Lambda$*  le bord  $\gamma$  d'un ensemble  $A$  satisfaisant :

- i) Le bord de la boîte est contenu dans  $A$ ,
- ii) 0 est dans le complémentaire de  $A$ ,
- iii)  $A$  et son complémentaire sont connexes.

On notera  $ext(\gamma)$  et  $int(\gamma)$  les ensembles  $A$  et son complémentaire, respectivement. Le cardinal d'un contour est sa *taille*. On notera  $\Gamma_{0,k}$  l'ensemble des contours de taille  $k \in \mathbb{N}^*$  entourant 0.

**Définition 3 :** (contour le long duquel une configuration change de signe) : Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,  $\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$  et  $\gamma$  un contour entourant 0, alors  $\sigma$  change de signe le long de  $\gamma$  si :

$$\begin{cases} \forall x \in \gamma \quad \sigma_x = -1, \\ \forall \{x, y\} \in E_\Lambda \mid x \in \gamma, y \in ext(\gamma) \quad \sigma_y = 1. \end{cases} \quad (25)$$

**Proposition 3 :** (*admise*)

Si on a une boîte munie d'une configuration qui vaut +1 sur le bord de la boîte et -1 en 0, alors il existe un contour entourant 0 le long duquel cette configuration change de signe.

**Principe de la démonstration :**

- On appelle  $B$  la composante connexe de 0 dans l'ensemble des spins négatifs.
- On considère alors  $A$  la composante connexe du bord de  $\Lambda$  dans  $\Lambda$  privé de  $B$ .
- Il se trouve que l'ensemble  $A$  satisfait bien à la propriété d'être connexe à complémentaire connexe.
- On pose  $\gamma$  comme étant le bord de  $A$  : c'est le contour recherché.

**Proposition 4 :** (*Admise*)

Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d, \beta > 0$ . On a alors que :

$$\exists c_0 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad |\Gamma_{0,k}| \leq e^{c_0 k}. \quad (26)$$

**Proposition 5 :** Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d, \beta > 0$ , et  $\gamma$  un contour entourant 0 de taille  $k \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\sigma_\gamma$  l'ensemble des configurations qui changent de signe le long de  $\gamma$ . Alors :

$$\mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma \in \sigma_\gamma) < e^{-\beta k}. \quad (27)$$

**Démonstration :**

Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d, \beta > 0$ , et  $\gamma$  un contour entourant 0 de taille  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute configuration  $\sigma$  et pour tout contour  $\gamma$  entourant 0 tels que  $\sigma_0 = -1$  et que la *Proposition 4* soit vérifiée, on définit une configuration  $\sigma'$  vérifiant :

$$\forall x \in \Lambda \quad \sigma'_x = \begin{cases} -\sigma_x & \text{si } x \in \text{int}(\gamma), \\ \sigma_x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

$$\exists c \in [1, 2], \quad \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y = \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma'_x \sigma'_y - c\beta |\gamma|. \quad (28)$$

La constante  $c$  donne une information sur le nombre  $c|\gamma|$  d'arêtes issues de  $\gamma$  et qui pointent vers l'extérieur.

On a alors que :

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \sigma_\gamma) = \frac{\sum_{\substack{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda \\ \sigma_0 = -1 \\ \sigma \in \sigma_\gamma}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)}.$$

Or on a que :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda \\ \sigma_0 = -1 \\ \sigma \in \sigma_\gamma}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right) &= \sum_{\substack{\sigma' \in \{-1,1\}^\Lambda \\ \sigma'_0 = -1 \\ \sigma' \in \sigma_\gamma}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma'_x \sigma'_y \right) \cdot \exp(-c\beta|\gamma|) \\ &\leq \sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma'_x \sigma'_y \right) \cdot \exp(-c\beta|\gamma|). \end{aligned}$$

Ainsi, étant donné  $c \geq 1$  et que la transformation de  $\sigma$  à  $\sigma'$  est bijective, on a que :

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \sigma_\gamma) < e^{-\beta k}.$$

■

**Proposition 6 :** Avec les notations de la *Proposition 5*, la probabilité que le spin en 0 soit négatif tend vers 0 quand  $\beta$  tend vers l'infini.

**Démonstration :** En effet, avec les notations précédentes, la *Proposition 2* puis la *Proposition 5* fournissent les majorations suivantes :

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma_0 = -1) = \frac{\sum_{\substack{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda \\ \sigma_0 = -1}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma \in \Gamma_0} \sum_{\substack{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda \\ \sigma_0 = -1 \\ \sigma \in \sigma_\gamma}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right) \\ &\leq \frac{\sum_{\gamma \in \Gamma_0} \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)} \\ &\leq \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \exp(-\beta|\gamma|). \end{aligned} \quad (30)$$



De là, la *Proposition 4* fournit la deuxième majoration qui suit, ce qui nous permettra de conclure :

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma_0 = -1) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma_{0,n}} e^{-\beta n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{c_0 n} e^{-\beta n} = \frac{e^{c_0 - \beta}}{1 - e^{c_0 - \beta}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Ainsi, par encadrement, on a bien que

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma_0 = -1) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0, \quad (32)$$

ce qui conclut. ■

Cela est équivalent à dire que pour toute configuration  $\sigma$  sur un réseau fini  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma_0 = 1) > 1 - \frac{\exp(c_0 - \beta)}{1 - \exp(c_0 - \beta)} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 1. \quad (33)$$

Nous avons en fait démontré le

**Théorème 5 :** *(de Peierls)*

En dimension 2, avec les notations précédentes, on a :

$$\exists \beta_0 > 0 \forall \beta \geq \beta_0, \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+ > 0. \quad (34)$$

Sachant que  $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+$  est croissante, il suffit de montrer l'inégalité pour un certain  $\beta_0 > 0$ . La remarque énoncée juste avant le théorème permet de conclure.

### 4.3 Interprétation physique et discussion des résultats

Il nous faut ajouter un dernier résultat ici avant de pouvoir comprendre le phénomène de transition de phase en dimension 2, qu'on admettra. Le théorème qui suit vient compléter le théorème de Peierls démontré dans la section précédente [8].

**Théorème 6 :** En dimension 2, avec les notations précédentes, on a :

$$\exists \beta_1 > 0 \forall \beta \leq \beta_1, \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+ = 0. \quad (35)$$

Étant donné que la fonction  $\beta \mapsto \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+$  est croissante et positive, il suffit de montrer que ce résultat est vrai pour un certain  $\beta_1$  donné.

Ensuite, nous pouvons construire deux suites adjacentes de réels strictement positifs  $(\beta_{0,n})_n$

et  $(\beta_{1,n})_n$  vérifiant respectivement le *Théorème 5* et le *Théorème 6*. Par le *théorème des suites adjacentes*, ces deux suites convergent vers une température inverse critique  $\beta_c > 0$ , qui vérifiera donc que :

$$\begin{cases} \forall \beta < \beta_c, \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = 0, \\ \forall \beta > \beta_c, \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ > 0. \end{cases} \quad (36)$$

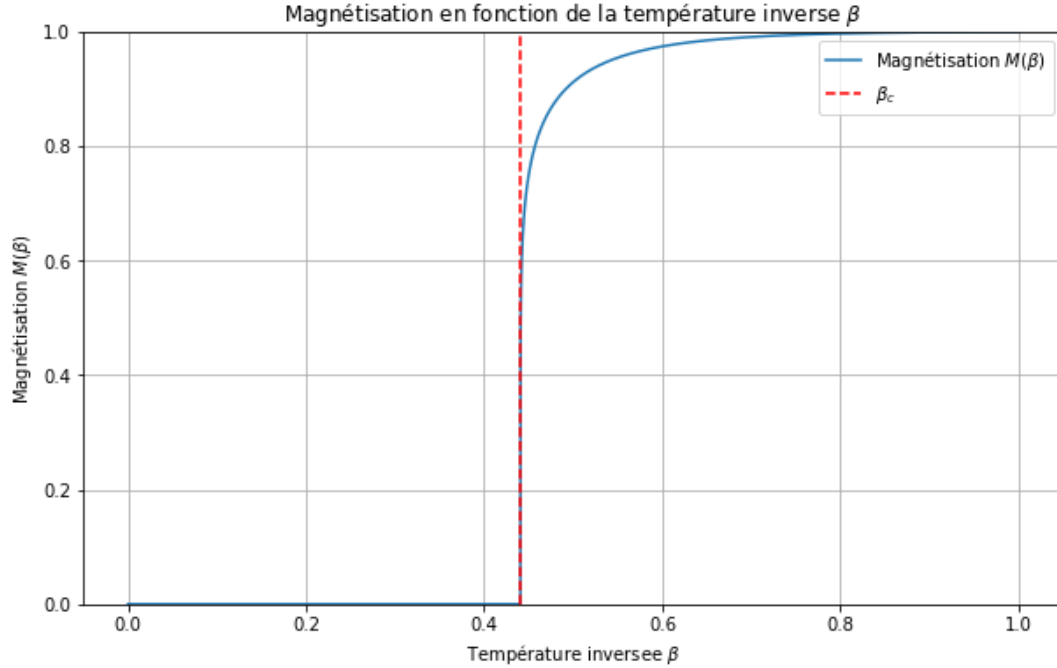


Figure 4: Magnétisation en fonction de la température (source : réalisation personnelle *via* Python).

C'est cette propriété qu'on appelle *transition de phase* en physique statistique. En effet, cela traduit qu'on observe une **magnétisation spontanée** du spin en 0 lorsque la température diminue (voir Figure 2: Magnétisation en fonction de la température). Celle-ci disparaît à haute température en raison de l'agitation thermique du système (voir Figure 3: Répartition des spins en 2D en fonction de la température). Le même phénomène se produit en dimension 3, et c'est ce qui explique qu'un aimant perd sa "*capacité magnétique*" lorsqu'il est chauffé au-delà d'une température critique ; cependant, nous ne traiterons pas ici la théorie du modèle d'Ising tridimensionnel, *car cela nous mènerait trop loin...*

Les calculs étaient un peu plus compliqués qu'en dimension 1 et les raisonnements plus astucieux, mais le modèle d'Ising a de nouveau fourni des résultats conforme à l'expérience, à l'aide d'un formalisme compréhensible et manipulable par un étudiant motivé en Licence 3 de mathématique ou de physique.

## 5 Conclusion

Ce stage de recherche a été une expérience enrichissante guidé par mon maître de stage, le Dr. Paul DARIO, contribuant à la fois à mon développement académique et personnel. À travers une étude mathématique des fondements du modèle d'Ising, j'ai pu relier mathématique et physique en soulignant leur relation complexe et complémentaire, à visée pédagogique. Ce rapport présente la rigueur mathématique comme un moyen précieux dans le chemin de compréhension d'une modélisation ainsi que dans l'interprétation des phénomènes physiques dont il rend compte. Ainsi, après avoir exposé rigoureusement le formalisme mathématique de la proposition théorique d'Ising et ses propriétés fondamentales, nous avons successivement étudié les cas particuliers des petites dimensions (1D et 2D) qui se démarquent l'une de l'autre par l'absence d'une transition de phase en 1D alors qu'on en observe une en 2D. La démarche proposée ici est satisfaisante scientifiquement, encourageant son application à d'autres sujets. Cette apparente contrainte d'intégrer la rigueur mathématique au sein de la démonstration physique s'est révélée être un atout pour la compréhension, valorisant la pertinence de la théorie vis-à-vis de l'expérience dans la discussion qui les confronte. Donc, en cela, ce travail représente l'aboutissement d'un parcours intellectuel audacieux et rigoureux, marqué par une profonde appréciation de l'interaction entre la mathématique et la physique. Le modèle d'Ising, avec sa riche histoire et sa pertinence continue, illustre le pouvoir des modèles mathématiques pour expliquer et prédire les phénomènes physiques. À mesure que j'avance dans ma formation, je développe ma curiosité afin d'explorer de nouveaux horizons <sup>3</sup>, fort de mes solides bases mathématiques me permettant d'aborder de nombreux sujets avec confiance.

En somme, dans ce travail, j'ai tenté de contribuer à combler un certain gap d'enseignement en physique statistique. Je considère avoir atteint cet objectif dans le cas de cette exploration mathématique des transitions de phase du modèle d'Ising. **Sous réserve de modifications de forme et de quelques précisions de fond, des étudiants exigeants pourront trouver en ce mémoire une ressource très intéressante et utile pour compléter leur formation scientifique dans ce domaine.** Enfin, pour le poursuivre, il serait intéressant d'approfondir ce travail en revenant sur les quelques résultats mathématiques admis ici ainsi que de plonger plus en profondeur dans les détails de la théorie physique du modèle d'Ising et de ses applications. Aussi, le cas de la dimension 3 serait intéressant à traiter en raison de sa représentation plus fidèle de la réalité. De plus, on pourrait étendre la méthodologie proposée ici à d'autres modèles similaires à celui étudié, comme ceux de Potts ou XY. Elle permet également de combattre une certaine forme d'inintérêt voué aux mathématiques fondamentales par certains étudiants en sciences. En outre, je suis convaincu que l'avènement actuel de **l'Intelligence Artificielle permettra de catalyser la recherche académique, de découpler les capacités des scientifiques et de multiplier les découvertes (et donc d'accélérer l'innovation).** En effet, son usage judicieux et maîtrisé permettra aux chercheurs de gagner en productivité. Dans ce mémoire, j'ai utilisé des outils tels que *ChatGPT*, *Jenni* ou *Perplexity* afin, entre autres, de passer en revue efficacement les ressources disponibles et d'apprendre plus facilement des fonctionnalités avancées de *LaTeX* [e] [f].

Désormais, il me semble clair que les applications potentielles de cette ambitieuse démarche, consistant à promouvoir le formalisme des raisonnements mathématiques en utilisant théorèmes, lemmes et propositions dans les enseignements des sciences physiques, sont innombrables...

---

<sup>3</sup>une pensée reconnaissante à tous les vulgarisateurs scientifiques, en particulier à ceux qui partagent gratuitement en ligne leur passion en délivrant du contenu intéressant et inspirant (YouTube), fournissant un très bon complément aux apprentissages et ressources académiques : A. ARNO, M. LAUNAY, D. LOUAPRE, L. NGUYEN, A. ROUSSEL, G. SAËS, 3blue1brown, El Jj, Maths\*, Numberphile, Veritasium, ...

## 6 Références

### 6.1 Bibliographie

- [1] Michael Aizenman and Hugo Duminil-Copin. Marginal triviality of the scaling limits of critical 4d ising and  $\lambda\phi_4^4$  models. *Annals of Mathematics*, 194(1):163–235, 2021.
- [2] Michael Aizenman, Hugo Duminil-Copin, and Vladas Sidoravicius. Random currents and continuity of ising model’s spontaneous magnetization. *Communications in Mathematical Physics*, 334:719–742, 2015.
- [3] Stephen G Brush. History of the lenz-ising model. *Reviews of Modern Physics*, 39(4):883–893, 1967.
- [4] John Cardy. *Scaling and renormalization in statistical physics*. Cambridge University Press, 1996.
- [5] P. Dario. Convergence to the thermodynamic limit for random-field random surfaces. *Annals of Applied Probability*, 33:1173–1195, 2023.
- [6] P. Dario and C. Garban. Phase transitions for the xy model in non-uniformly elliptic and poisson-voronoi environments. *arXiv preprint arXiv:2301.12345*, 2023.
- [7] Bernard Diu, Claude Guthmann, Daniel Lederer, and Bernard Roulet. *Physique statistique*. Hermann, 1989.
- [8] R. L. Dobrušin. Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions for its regularity. *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, 13:201–229, 1968.
- [9] Hugo Duminil-Copin. Graphical representations of lattice spin models. Course Peccot, Collège de France, January-February 2015.
- [10] Michael E Fisher. Critical exponent of the order-parameter in xy, heisenberg, and other systems. *Journal of Mathematical Physics*, 6(11):167–173, 1965.
- [11] S. Friedli and Y. Velenik. *Statistical mechanics of lattice systems: a concrete mathematical introduction*. Cambridge University Press, 2017.
- [12] R. B. Griffiths. Correlations in ising ferromagnets. i. *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):478–483, 1967.
- [13] Martin Hairer. The work of hugo duminil-copin. *arXiv preprint arXiv:2207.01715*, 2022. Subjects: Probability (math.PR); MSC classes: 82B20, 82B26, 82B43.
- [14] E. Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31:253–258, 1925.
- [15] Mehran Kardar. *Statistical physics of particles*. Cambridge University Press, 2007.
- [16] Lars Onsager. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65(3-4):117–149, 1944.
- [17] R. E. Peierls. On ising’s ferromagnet model. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32:477–481, 1936.
- [18] Y. Velenik. Le modèle d’ising. Notes de cours, Genève, 2008-2009.
- [19] JM Yeomans. *Statistical mechanics of phase transitions*. Clarendon Press, 1992.

## 6.2 Webographie (YouTube)



- [a] Hugo Duminil-Copin. *Le modèle d'Ising en dimension  $d$* , IHES, <https://youtu.be/P-0Qh4f9M8U?si=h7krq-JI1re7XTe9>, 2016.
- [b] *Fields Medal: Hugo Duminil-Copin*. Simons Foundation, <https://youtu.be/5dXulZVstbY?si=1VPyF30i0EP2m5XT>, 2022.
- [c] ScienceClic. Alessandro Roussel. <https://www.youtube.com/@ScienceClic> (chaîne YouTube française) et <http://youtube.com/ScienceClicEN> (chaîne YouTube anglaise), 2014.
- [d] Guillaume Saës. Science Trash (chaîne YouTube) <https://www.youtube.com/@sciencetrash>, 2020.
- [e] Andy Stapleton. (chaîne YouTube) <https://www.youtube.com/@DrAndyStapleton>, 2016.
- [f] Andy Stapleton. *2024 Twelve Best FREE AI tools for Academic Research and Researchers*, [https://youtu.be/qB4HGMvrhWE?si=NA\\_6ZUsrwYxcMVX5](https://youtu.be/qB4HGMvrhWE?si=NA_6ZUsrwYxcMVX5), 2024.

## 7 Index et figures

### 7.1 Index des formules

Je propose ici un index non exhaustif des formules utilisées dans ce mémoire. Certaines n'ont pas été numérotées par souci de sobriété et de redondance (par exemple celles apparaissant dans les sections de démonstration). Les quantificateurs n'apparaissent pas toujours dans cette liste hors contexte : les numéros de page sont indiqués pour s'y référer.

$$(1) \quad \mathcal{H}_{\Lambda, \beta} := -\beta \sum_{\{x, y\} \in E_{\Lambda}} \sigma_x \sigma_y, \quad p. 4$$

$$(2) \quad \forall \sigma \in \{-1, 1\}^{\Lambda} \quad \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma) := \frac{1}{Z_{\Lambda, \beta}^+} \cdot \exp(-\mathcal{H}_{\Lambda, \beta}), \quad p. 4$$

$$(3) \quad \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \geq 0, \quad p. 6$$

$$(4) \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+, \quad p. 6$$

$$(5) \quad \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^{\Lambda}} \prod_{i=1}^m \sigma_i^{m_i} = \begin{cases} 2^n, & \text{si } \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \ m_i \text{ pair,} \\ 0, & \text{si } \exists i \in \llbracket 1, m \rrbracket \ m_i \text{ impair,} \end{cases} \quad p. 6$$

$$(6) \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta}^+ = \langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\Lambda; \beta, \mu \otimes \mu}^+, \quad p. 7$$

$$(7) \quad Z_{\Lambda}^2(\langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\Lambda; \beta, \mu \otimes \mu}^+) = \sum_{\sigma, \sigma' \in \{-1, 1\}^{\Lambda}} \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \prod_{\{y_1, y_2\} \in E_{\Lambda}} e^{\beta(\sigma_{y_1} \sigma_{y_2} + \sigma'_{y_1} \sigma'_{y_2})}, \quad p. 9$$

$$(8) \quad \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda; \beta}^+ = \frac{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^{\Lambda}} \sigma_x \sigma_y \exp(\beta \sum_{(y_1, y_2) \in E_{\Lambda}} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})}{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^{\Lambda}} \exp(\beta \sum_{(y_1, y_2) \in E_{\Lambda}} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2})}, \quad p. 10$$

$$(9) \quad \frac{\partial \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}^+}{\partial \beta} = \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \frac{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \exp \left( \beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2} \right)}{\exp \left( \beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2} \right)} - \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \left[ \frac{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \exp \left( \beta \sum_{\{y_1, y_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2} \right)} \cdot \frac{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \sigma_x \sigma_y \exp \left( \beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2} \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{y'_1, y'_2\} \in E_\Lambda} \sigma_{y'_1} \sigma_{y'_2} \right)} \right], \quad p. 10$$

$$(10) \quad \frac{\partial \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}^+}{\partial \beta} = \langle \sigma_x \sigma_y \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \rangle_{\Lambda, \beta}^+ - \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_{\Lambda, \beta}^+ \cdot \langle \sigma_{y_1} \sigma_{y_2} \rangle_{\Lambda, \beta}^+, \quad p. 10$$

$$(11) \quad \mu(\sigma) = \frac{\exp \left( \sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma_i \sigma_{i+1} \right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1, 1\}^{L_N}} \exp \left( \sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma'_i \sigma'_{i+1} \right) \cdot (1 + \exp(-2\beta_2 \sigma_{N-1}))}, \quad p. 13$$

$$(12) \quad \mu(\sigma) \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} \frac{\exp \left( \sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma_i \sigma_{i+1} \right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1, 1\}^{L_N}} \exp \left( \sum_{i=0}^{N-2} \beta_1 \sigma'_i \sigma'_{i+1} \right)} \in ]0, 1], \quad p. 13$$

$$(13) \quad \langle \sigma_0 \rangle_{L, \beta}^+ \leq e^{-c_\beta L}, \quad p. 14$$

$$(14) \quad \langle \sigma_0 \rangle_{L, \beta}^+ = \frac{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^L} \sigma_0 \cdot (\sigma_1 \sigma_1) \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^L} \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right)}, \quad p. 14$$

$$(15) \quad \Gamma = 2 \sinh(\beta) \sum_{\sigma' \in \{-1, 1\}^L} \sigma'_1 \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=1}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right), \quad p. 14$$

$$(16) \quad \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^L} \sigma_0 \cdot (\sigma_1 \sigma_1) \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) = 2^N \sinh(\beta)^{N-1}, \quad p. 15$$

$$(17) \quad \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^L} \exp \left( \beta \left[ \sum_{i=0}^{N-2} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_{N-1} \right] \right) = 2^N \cosh(\beta)^{N-1}, \quad p. 15$$

$$(18) \quad \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta,\beta_2}^+ \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} \langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+, \quad p. 15$$

$$(19) \quad \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta,\beta}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta}^+ \quad , \quad p. 15$$

$$(20) \quad \langle \sigma_0 \rangle_{L+1,\beta}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{L,\beta}^+ \quad , \quad p. 15$$

$$(21) \quad \forall \beta > 0 \quad \langle \sigma_0 \rangle_{\beta}^+ = 0, \quad p. 16$$

$$(22) \quad \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma) = \frac{\exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y \right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y \right) \cdot [1 + \exp(2[8L - n]\beta_2 \sigma_{x_1})] [1 + \exp(-2n\beta_2 \sigma_{x_1})]},$$

$$(23) \quad \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma) = \frac{\exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y \right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y \right) \cdot [1 + \exp(-16L\beta_2)]}, \quad p. 18$$

$$(24) \quad \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma) \xrightarrow{\beta_2 \rightarrow +\infty} \frac{\exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma_x \sigma_y \right)}{\sum_{\sigma' \in \{-1,1\}^{\Lambda_L}} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in E_{\Lambda_L}} \sigma'_x \sigma'_y \right)}, \quad p. 18$$

$$(25) \quad \begin{cases} \forall x \in \gamma \quad \sigma_x = -1, \\ \forall \{x,y\} \in E_{\Lambda} \mid x \in \gamma, y \in \text{ext}(\gamma) \quad \sigma_y = 1. \end{cases} \quad p. 18$$

$$(26) \quad \exists c_0 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad |\Gamma_{0,k}| \leq e^{c_0 k}, \quad p. 19$$

$$(27) \quad \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma \in \sigma_{\gamma}) < e^{-\beta k}, \quad p. 19$$

$$(28) \quad \mu_{\Lambda,\beta}^+(\sigma_0 = -1) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0, \quad p. 19$$



$$(29) \quad \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma_0 = -1) = \frac{\sum_{\substack{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda \\ \sigma_0 = -1}} \exp \left( \beta \sum_{\{x, y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)}{\sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{x, y\} \in E_\Lambda} \sigma_x \sigma_y \right)}, \quad p. 20$$

$$(30) \quad \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \exp(-\beta |\gamma|), \quad p. 20$$

$$(31) \quad \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma_0 = -1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{c_0 n} e^{-\beta n} = \frac{e^{c_0 - \beta}}{1 - e^{c_0 - \beta}}, \quad p. 21$$

$$(32) \quad \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma_0 = -1) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0, \quad p. 21$$

$$(33) \quad \mu_{\Lambda, \beta}^+(\sigma_0 = 1) > 1 - \frac{\exp(c_0 - \beta)}{1 - \exp(c_0 - \beta)} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 1, \quad p. 21$$

$$(34) \quad \exists \beta_0 > 0 \forall \beta \geq \beta_0, \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ > 0, \quad p. 21$$

$$(35) \quad \exists \beta_1 > 0 \forall \beta \leq \beta_1, \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = 0, \quad p. 21$$

$$(36) \quad \begin{cases} \forall \beta < \beta_c, \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ = 0, \\ \forall \beta > \beta_0, \langle \sigma_0 \rangle_\beta^+ > 0. \end{cases} \quad p. 22$$

## 7.2 Schémas

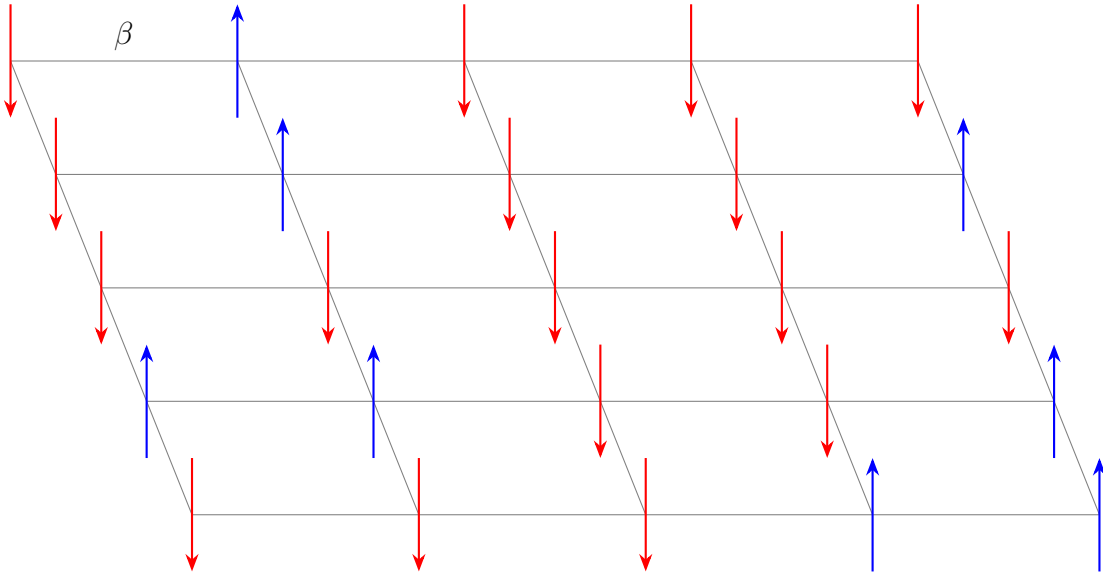


Figure 1: Représentation du modèle d'ising 2D de plus proches voisins. On a représenté arbitrairement les spins positifs (up) en bleu, et négatifs (down) en rouge. Source : réalisation personnelle (LaTeX).

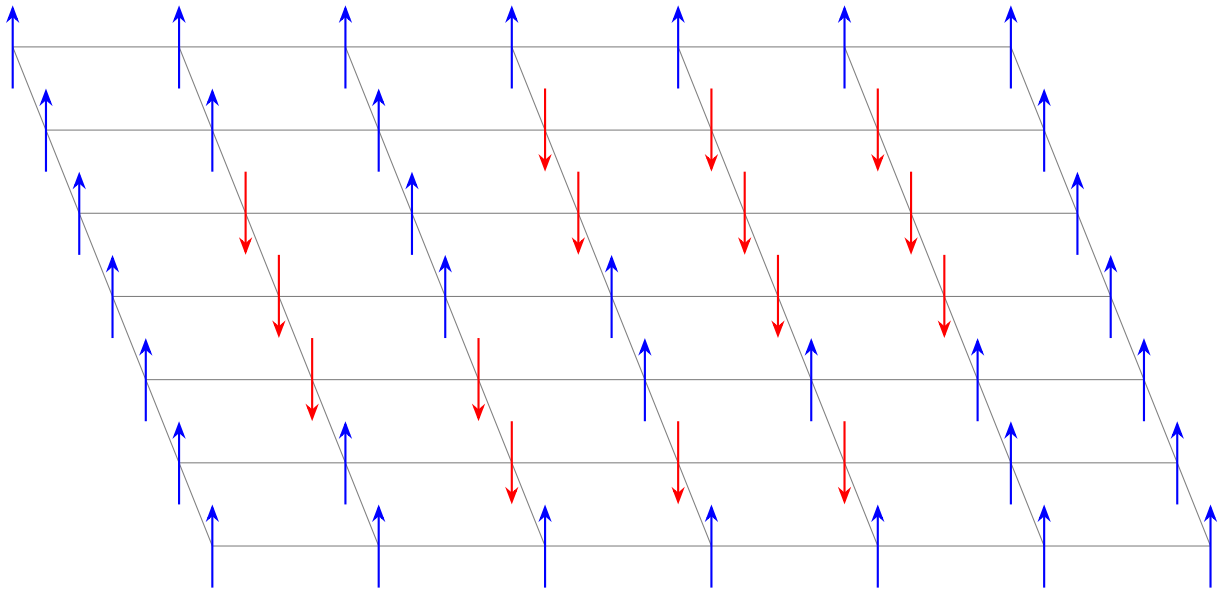


Figure 2: Représentation du modèle d'Ising en 2D sur un réseau  $5 \times 5$  avec condition au bord  $+$ .  
Source : réalisation personnelle (LaTeX).

### 7.3 Graphes

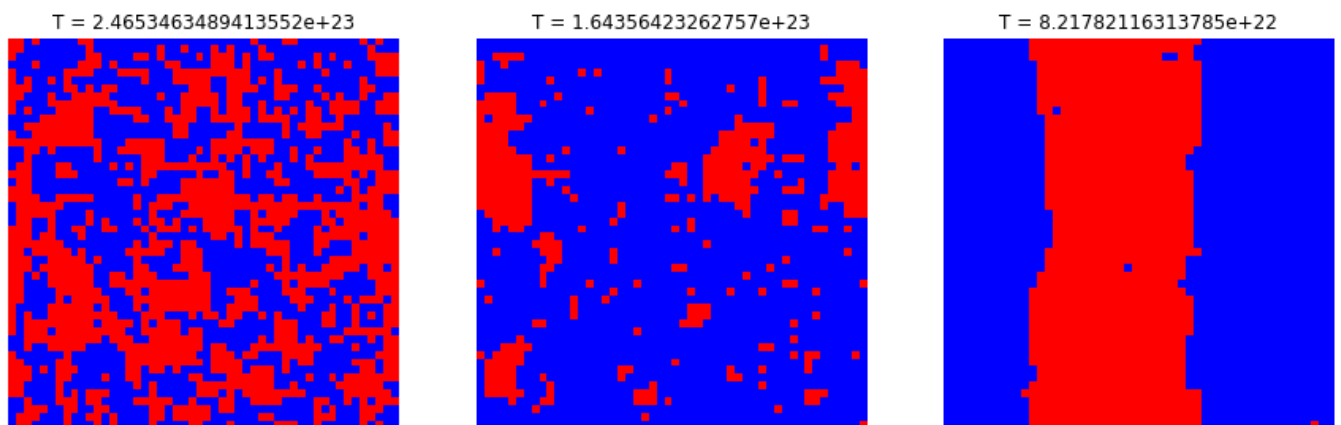


Figure 3: Répartition des spins en 2D en fonction de la température. Au milieu, on a une approximation de la température critique en 2D, à champ nul pour un modèle de plus proches voisins (quelques amas et quelques points isolés). A gauche on est sous au-dessus de la température critique (répartition plus équiprobable), et à droite en dessous (amas de spins). Source : réalisation personnelle (Python).

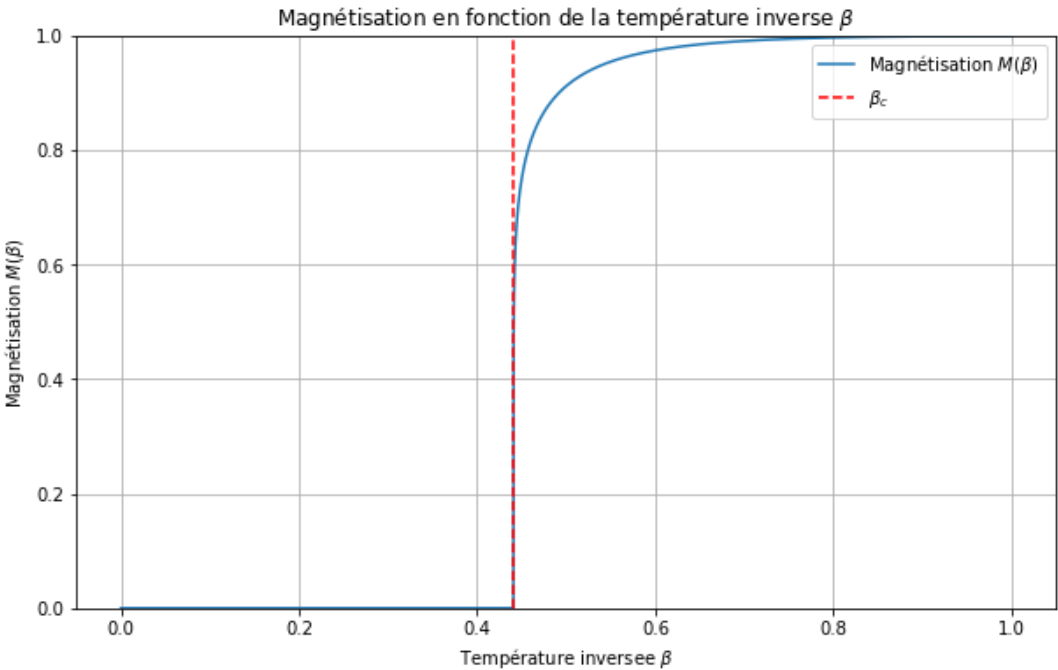


Figure 4: Magnétisation en fonction de la température (source : réalisation personnelle *via* Python).

## 8 Annexes

### 8.1 Présentation synthétique des références bibliographiques

Il m'a semblé utile d'intégrer cette liste synthétique en annexe afin de permettre au lecteur de rapidement comprendre l'intérêt des références utilisées dans ce rapport pour mon travail de recherche. Pour cette tâche, j'ai utilisé ChatGPT (OpenAI) en complément uniquement (cf. §6.1).

1. Michael Aizenman et Hugo Duminil-Copin. "Marginal triviality of the scaling limits of critical 4d Ising and  $\lambda\Phi_4^4$  models." *Annals of Mathematics*, 194(1):163–235, 2021.

Cet article explore le comportement du modèle d'Ising en 4D et des modèles  $\lambda\Phi_4^4$ , démontrant la trivialité marginale de leurs limites d'échelle. Cela est crucial pour comprendre les transitions de phase dans les dimensions supérieures. Mon travail complète cela en fournissant une analyse détaillée du modèle d'Ising en 1D et 2D, en mettant l'accent sur les transitions de phase et en rendant ces idées complexes accessibles aux étudiants de premier cycle. Le contraste entre les résultats en 4D et les cas de dimensions inférieures dans mon travail met en lumière les comportements uniques du modèle d'Ising à travers différentes dimensions.

2. Michael Aizenman, Hugo Duminil-Copin et Vladas Sidoravicius. "Random currents and continuity of Ising model's spontaneous magnetization." *Communications in Mathematical Physics*, 334:719–742, 2015.

Cet article se penche sur la méthode des courants aléatoires pour étudier la continuité de la magnétisation spontanée dans le modèle d'Ising. Il fournit des outils et des résultats mathématiques avancés significatifs pour la compréhension théorique des transitions de phase. Ma recherche utilise des preuves mathématiques rigoureuses pour explorer le modèle d'Ising. Bien qu'Aizenman et al. se concentrent sur les courants aléatoires, mon travail vise à combler le fossé entre ces méthodes avancées et leurs interprétations physiques, les rendant plus compréhensibles pour les étudiants.

3. Stephen G Brush. "History of the Lenz-Ising model." *Reviews of Modern Physics*, 39(4):883–893, 1967.

La revue historique de Brush fournit un contexte complet sur le développement du modèle d'Ising, contextualisant son importance en physique statistique. Cette perspective historique est essentielle pour apprécier l'évolution du modèle et son impact. Mon mémoire s'appuie sur cette base en se concentrant sur les propriétés physiques et les transitions de phase du modèle, reliant ainsi le contexte historique aux idées mathématiques et physiques contemporaines.

4. John Cardy. "Scaling and renormalization in statistical physics." Cambridge University Press, 1996.

Le travail de Cardy sur la mise à l'échelle et la renormalisation est fondamental pour comprendre les phénomènes critiques et les transitions de phase. Il introduit des concepts clés essentiels pour des études avancées en physique statistique. Ma recherche étend ces idées en les appliquant

spécifiquement au modèle d'Ising en 1D et 2D, en fournissant des preuves et des discussions détaillées qui aident à élucider ces théories complexes pour les étudiants motivés de premier cycle.

5. P. Dario. "Convergence to the thermodynamic limit for random-field random surfaces." *Annals of Applied Probability*, 33:1173–1195, 2023.

Cet article traite de la convergence vers la limite thermodynamique dans les surfaces aléatoires à champ aléatoire, un concept important en mécanique statistique. Mon travail sur le modèle d'Ising en 1D et 2D aborde également la compréhension des limites et des transitions de phase, fournissant ainsi un exemple concret de ces idées théoriques. L'accent mis sur les preuves mathématiques rigoureuses dans mon mémoire aide à solidifier la compréhension de telles limites dans des systèmes plus simples.

6. P. Dario et C. Garban. "Phase transitions for the XY model in non-uniformly elliptic and Poisson-Voronoi environments." *arXiv preprint arXiv:2301.12345*, 2023.

Dario et Garban explorent les transitions de phase dans le modèle XY sous des conditions spécifiques, contribuant à une compréhension plus large du comportement de phase dans les modèles statistiques. Ma recherche complète cela en se concentrant sur le modèle d'Ising, un autre modèle fondamental en physique statistique, et en offrant des preuves mathématiques détaillées qui illustrent les transitions de phase en 2D. Cet examen parallèle fournit une compréhension plus riche des différents modèles exhibant des phénomènes critiques.

7. Bernard Diu, Claude Guthmann, Daniel Lederer et Bernard Roulet. "Physique statistique." Hermann, 1989.

Ce manuel est une ressource fondamentale en physique statistique, couvrant divers modèles et théories de manière exhaustive. Il fournit les connaissances de base essentielles qui soutiennent mon travail. En se concentrant spécifiquement sur le modèle d'Ising et en fournissant des preuves rigoureuses de ses propriétés, mon mémoire sert de complément ciblé aux sujets plus larges couverts dans ce manuel, rendant la matière complexe plus accessible aux étudiants.

8. R. L. Dobrušin. "Description of a random field by means of conditional probabilities and conditions for its regularity." *Teor. Veroyatnost. i Primenen*, 13:201–229, 1968.

Le travail de Dobrušin sur les champs aléatoires et les probabilités conditionnelles est crucial pour comprendre les conditions de régularité dans les modèles statistiques. Mon mémoire applique des approches mathématiques rigoureuses similaires pour étudier le modèle d'Ising, comblant ainsi le fossé entre les concepts mathématiques abstraits et leurs applications physiques. Cette connexion aide à démontrer la pertinence pratique de ces idées théoriques.

9. Hugo Duminil-Copin. "Graphical representations of lattice spin models." Cours Peccot, Collège de France, January-February 2015.

Les cours de Duminil-Copin sur les modèles de spins sur réseau fournissent des perspectives précieuses sur les représentations graphiques et leurs applications. Mon travail étend ces concepts en fournissant des preuves mathématiques détaillées pour le modèle d'Ising en 1D et 2D. Cela aide les étudiants à comprendre et visualiser les formulations mathématiques abstraites discutées dans les cours de Duminil-Copin.

10. Michael E Fisher. "Critical exponent of the order-parameter in XY, Heisenberg, and other systems." *Journal of Mathematical Physics*, 6(11):167–173, 1965.

La recherche de Fisher sur les exposants critiques est essentielle pour comprendre les transitions de phase dans divers modèles. Mon mémoire s'appuie sur cela en examinant spécifiquement le modèle d'Ising et en fournissant des preuves rigoureuses de ses propriétés de transition de phase. Cet accent sur le comportement critique du modèle d'Ising complète l'exploration plus large des exposants critiques par Fisher dans différents systèmes.

11. S. Friedli et Y. Velenik. "Statistical mechanics of lattice systems: a concrete mathematical introduction." Cambridge University Press, 2017.

Le manuel de Friedli et Velenik offre une introduction mathématique concrète aux systèmes sur réseau, fournissant les bases nécessaires pour comprendre la mécanique statistique. Mon travail se concentre spécifiquement sur le modèle d'Ising, utilisant des preuves mathématiques détaillées pour explorer ses propriétés. Cette approche ciblée complète l'introduction plus large fournie par Friedli et Velenik, rendant plus facile pour les étudiants de saisir le cas spécifique du modèle d'Ising.

12. R. B. Griffiths. "Correlations in Ising ferromagnets. I." *Journal of Mathematical Physics*, 8(3):478–483, 1967.

L'article de Griffiths sur les corrélations dans les ferromagnets d'Ising fournit des perspectives fondamentales sur le comportement du modèle d'Ising. Mon mémoire s'appuie sur ces perspectives en fournissant des preuves mathématiques rigoureuses des transitions de phase en 1D et 2D, étendant ainsi le travail de Griffiths à un contexte éducatif plus détaillé. Cela aide les étudiants à comprendre les propriétés de corrélation de manière claire et précise.

13. Martin Hairer. "The work of Hugo Duminil-Copin." arXiv preprint arXiv:2207.01715, 2022.

La revue de Hairer sur les contributions de Hugo Duminil-Copin à la probabilité et à la physique statistique souligne l'importance de son travail pour faire avancer le domaine. Mon mémoire s'appuie sur les méthodologies de Duminil-Copin et les applique à l'étude du modèle d'Ising, fournissant des preuves et des explications détaillées qui rendent ces concepts avancés accessibles aux étudiants.

14. E. Ising. "Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus." *Zeitschrift für Physik*, 31:253–258, 1925.

L'article original d'Ising introduit le modèle d'Ising, posant les bases de son étude en physique statistique. Mon travail revisite ce modèle fondateur, fournissant une exploration moderne et rigoureuse de ses propriétés en 1D et 2D. En faisant cela, je vise à combler le développement historique avec la rigueur mathématique contemporaine, rendant le travail pionnier d'Ising pertinent pour les étudiants d'aujourd'hui.

15. Mehran Kardar. "Statistical physics of particles." Cambridge University Press, 2007.

Le manuel de Kardar couvre une large gamme de sujets en physique statistique, fournissant un

contexte approfondi essentiel pour comprendre les modèles complexes. Mon mémoire restreint cet accent au modèle d'Ising, offrant des preuves et des discussions détaillées qui complètent les sujets plus larges couverts par Kardar, fournissant ainsi une étude de cas spécifique dans le cadre plus large de la physique statistique.

16. Lars Onsager. "Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition." *Physical Review*, 65(3-4):117–149, 1944.

La solution révolutionnaire d'Onsager au modèle d'Ising en 2D fournit une démonstration claire des transitions de phase en deux dimensions. Mon mémoire s'appuie sur le travail d'Onsager en discutant non seulement du modèle d'Ising en 2D, mais aussi en fournissant des preuves mathématiques rigoureuses et des explications détaillées qui aident les étudiants à comprendre les phénomènes critiques associés à ce modèle.

17. R. E. Peierls. "On Ising's ferromagnet model." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32:477–481, 1936.

Le travail de Peierls sur le modèle d'Ising fournit des perspectives importantes sur les conditions des transitions de phase. Mon travail étend l'analyse de Peierls en offrant des preuves mathématiques détaillées des transitions de phase dans le modèle d'Ising, rendant ces concepts avancés accessibles aux étudiants de premier cycle et démontrant la pertinence continue des contributions de Peierls.

18. Y. Velenik. "Le modèle d'Ising." Notes de cours, Genève, 2008-2009.

Les notes de cours de Velenik sur le modèle d'Ising fournissent une introduction approfondie à ses aspects théoriques. Mon mémoire s'appuie sur ces notes en offrant une exploration plus détaillée des propriétés du modèle en 1D et 2D, fournissant ainsi une compréhension plus profonde adaptée aux étudiants hautement motivés et mathématiquement enclins.

19. JM Yeomans. "Statistical mechanics of phase transitions." Clarendon Press, 1992.

Le manuel de Yeomans est un guide complet sur la théorie des transitions de phase en mécanique statistique. Mon mémoire complète ce travail en se concentrant spécifiquement sur le modèle d'Ising, offrant des preuves et des discussions détaillées des transitions de phase en 1D et 2D. Cette approche ciblée aide à illustrer les principes généraux discutés par Yeomans à travers un exemple spécifique et bien étudié.

## **8.2 *Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice* : un cours du Pr. Hugo DUMINIL-COPIN qui a influencé mon choix de sujet**

Ce cours du Prof. Hugo DUMINIL-COPIN<sup>4</sup> m'avait été transmis par mon futur maître de stage en décembre 2023, soit bien avant le démarrage officiel de mon stage en avril 2024, afin de me faire m'introduire aux concepts et au formalisme du modèle d'Ising. Bien que nous ne l'ayons pas directement exploité dans notre collaboration, je tenais à l'inclure dans ce rapport pour son utilité dans mon initiation (consulter la page suivante) :

<sup>4</sup>Lien arXiv : <https://arxiv.org/abs/1707.00520>

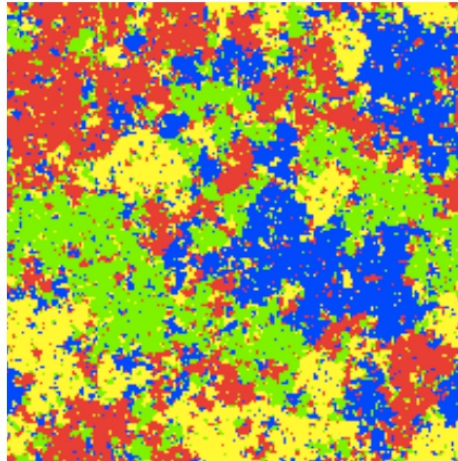
# Lectures on the Ising and Potts models on the hypercubic lattice

Hugo Duminil-Copin\*

July 4, 2017

## Abstract

Phase transitions are a central theme of statistical mechanics, and of probability more generally. Lattice spin models represent a general paradigm for phase transitions in finite dimensions, describing ferromagnets and even some fluids (lattice gases). It has been understood since the 1980s that random geometric representations, such as the random walk and random current representations, are powerful tools to understand spin models. In addition to techniques intrinsic to spin models, such representations provide access to rich ideas from percolation theory. In recent years, for two-dimensional spin models, these ideas have been further combined with ideas from discrete complex analysis. Spectacular results obtained through these connections include the proofs that interfaces of the two-dimensional Ising model have conformally invariant scaling limits given by SLE curves, that the connective constant of the self-avoiding walk on the hexagonal lattice is given by  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ . In higher dimensions, the understanding also progresses with the proof that the phase transition of Potts models is sharp, and that the magnetization of the three-dimensional Ising model vanishes at the critical point. These notes are largely inspired by [39, 41, 42].



A simulation of the 4-state Potts model due to V. Beffara.

\*[duminil@ihes.fr](mailto:duminil@ihes.fr) Institut des Hautes Études Scientifiques and Université de Genève

This research was funded by a IDEX Chair from Paris Saclay and by the NCCR SwissMap from the Swiss NSF. These lecture notes describe the content of a class given at the PIMS-CRM probability summer school on the behavior of lattice spin models near their critical point. The author would like to thank warmly the organizers for offering him the opportunity to give this course. Also, special thanks to people who sent me comments, especially Timo Hirscher and Franco Severo.