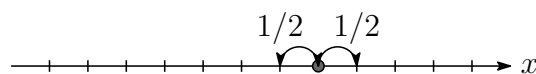


2 1次元ランダムウォーク

ブラウン運動の(確率)モデルとして、ランダムウォークというものを考察します。「ウォーク」という名前の通り、酔っ払い(で通すのも何なので、ウォーカーと呼びましょう)が一步一步ふらふらと動きまわるイメージを思い浮かべるとよいかも知れません。ここでは、もっとも簡単なモデルとして、数直線(x 軸)上を確率 $1/2$ でプラス方向に一步、確率 $1/2$ でマイナス方向に一步ずつ、一定の歩幅で(酔っ払いにしてはしっかりしてますが)移動するとしましょう。また、歩き始めは原点としておきましょう。



目盛の間隔は 1

演習 2.1 (5 点) RandomWalk.py は、1 つのウォーカーの n 歩目までの軌道を出力するプログラムです。縦軸はウォーカーの位置、横軸は何歩目か(時刻と考えてもいいです)を表しています。また、プログラム中の変数 x_c はウォーカーの現在位置、 x はウォーカーの現在位置を次々に記録するためのリスト(配列)です。空欄 (a), (b) を埋めてプログラムを完成し、出力される画像ファイルを提出しなさい。なお、(b) については、リストの `append` メソッドを(ネットなどで調べて)使うといいでしょう。

提出方法 保存される画像ファイルの名前を `rw1D.png` から、学籍番号が `y200000` なら、`rw1D_y200000.png` に変更し、期限内(次回講義開始時まで)に manaba のレポートの回答としてアップしてください。

```
RandomWalk.py
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = int(input("Enter number of steps:"))

xc = 0
x = [xc]
for i in range(n):
    xc += (a)
    (b)

plt.plot(x, marker='')

plt.savefig("rw1D.png")
plt.show()
```

次に、ウォーカーが原点からどのくらいの割合で離れていく、あるいは離れないのかを調べてみましょう。

n 歩進んだ時点でのウォーカーの位置の標は確率的に決まる確率変数です。これを X_n とします。また、 n 歩目は確率 $1/2$ で $+1$ 、確率 $1/2$ で -1 をとる確率変数です。これを Z_n と書くと、

$$X_0 = 0, \quad X_n = X_{n-1} + Z_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

という確率変数の「漸化式」が得られて、 $X_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$ となることがわかります。 Z_n の平均（期待値）と分散は、

$$E[Z_n] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0, \quad V[Z_n] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となるので²、これより、 X_n の平均（期待値）は、

$$E[X_n] = E[Z_1] + E[Z_2] + \dots + E[Z_n] = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

また、 Z_1, Z_2, \dots, Z_n は互いに独立なので、 X_n の分散は、

$$V[X_n] = V[Z_1] + V[Z_2] + \dots + V[Z_n] = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

となります³。これらは、たくさんのウォーカーを原点から出発させると、それらの位置の平均は 0、原点からの距離の 2 乗平均（平均が 0 の確率変数の分散は 2 乗平均になります）はステップ数 n に等しくなることを示しています。原点からの距離の 2 乗平均が n なので、距離そのものの平均（厳密にはそうでなくて、標準偏差ですが）は \sqrt{n} となります。

演習 2.2 (5 点) 原点から出発する 20 個（人?）のウォーカーの n 歩目までの軌道を出力するプログラムを作成し、20 本の軌道を同時に出力して、ウォーカーたちの「散らばり方」を観察しなさい。演習 2.1 で作ったプログラムを少し改造すれば（具体的には for 文をひとつ増やせば）よいので、サンプルは提供していません。

提出方法 学籍番号が y200000 なら、ファイル名を rws1D-y200000.png とした出力ファイルを、期限内（次回講義開始時まで）に manaba のレポートの回答としてアップしてください。演習 2.1 と提出ファイルの名前が似ているので注意してください。

発展 2.1 (ボーナス 2 点) 1000 個のウォーカーを原点から出発させ（軌道を出力する必要はない）、各ステップでウォーカー位置の 2 乗平均を計算し、それがステップ数に比例して増加することを確認めなさい（横軸をステップ数、縦軸を 2 乗平均としてグラフを出しなさい）。

提出方法 担当教員にプログラムと実行結果を（内容を説明しつつ）見せてください。期限は最終回の終了時とします。

²高校の数学 B の範囲の計算なので、さらっと書きます。??? の人は復習するか個別に質問してください

³これらも高校の数学 B にある内容です。