Nombre: **Jose Manuel Martinez del Campo Gonzalez** Examen : **2**
Curso: **Teoria de la Medida** Fecha: May 27, 2022

Problema 1

Sea $\mathcal{F} = \{E \subset \mathbb{R} : E \;\; ó \;\; \mathbb{R} \setminus E \;\; es \;\; contable\}$. Una función $f : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{F}$ - medible si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $[f > \alpha] \in \mathcal{F}$

a) $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra y es generada por los singuletes de $\mathbb{R}$
Demostremos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

1) $\emptyset \in \mathcal{F}$
Claramente, el conjunto vacío es no infinito, por lo que es contable. Entonces, $\emptyset \in \mathcal{F}$.

2) **Si $E \in \mathcal{F}$ entonces $E^c \in \mathcal{F}$**
Si $E \in \mathcal{F}$ es contable tenemos dos casos. Si E es contable ó si $\mathbb{R} \setminus E$ es contable.
$i)$ Si E es contable, entonces $\mathbb{R} \setminus E^c$ es contable. Luego, $E^c \in \mathcal{F}$.
$ii)$ Si $\mathbb{R} \setminus E$ es contable, entonces E^c es contable. Luego, $E^c \in \mathcal{F}$.
De $i)$ y $ii)$ tenemos que si $E \in \mathcal{F}$ entonces $E^c \in \mathcal{F}$.

3) **Sea $\big(E_n\big)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión donde $E_n \in \mathcal{F} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$**
Sean $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $J = \{j \in \mathbb{N} \; : \; E_j \;\; es \;\; contable\}$, $I = \{i \in \mathbb{N} \; : \; \mathbb{R} \setminus E_i \;\; es \;\; contable\}$.
Entonces, $I \cap J = \emptyset$ y J, I son contables.
$\cup_{j \in J} E_j$ es una unión contable de conjuntos contables, por lo que $\cup_{j \in J} E_j$ es contable. Se presentan entonces dos casos:
$i)$ Si $I = \emptyset$, entonces $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \big(\cup_{j \in J} E_j \big) \cup \big(\cup_{i \in I} E_i \big) = \cup_{j \in J} E_j$ es contable.
$ii)$ Si $I \neq \emptyset$, entonces $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \big(\cup_{j \in J} E_j \big) \cup \big(\cup_{i \in I} E_i \big)$, y E_i es tal que $\mathbb{R} \setminus E_i$ es contable $\forall i \in I$. Entonces, $\mathbb{R} \setminus \big(\cup_{i \in I} E_i \big)$ es contable y también lo es $\mathbb{R} \setminus \big(\cup_{i \in I} E_i \big) \cup \big(\cup_{j \in J} E_j \big) = \mathbb{R} \setminus \big(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \big)$.

$\therefore \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$.

$\therefore$ $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

Singuletes

Sea $S = \big\{ \{x\} \; : \; x \in \mathbb{R} \big\}$ el conjunto creado por los singuletes en $\mathbb{R}$.

($\subset$) Supongamos que $E \in \mathcal{F}$. Si E es contable, entonces existe una sucesión $\big(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ tal que $\cup_{n=1}^{\infty} \{x_i\} = E$. Tenemos entonces que $S \subset \mathcal{F}$, ya que si $E \subset S$ entonces E es contable. Luego, $\sigma(S) \subset \mathcal{F}$.

($\supset$) Sea $E \in \mathcal{F}$. Si $E = \emptyset$ entonces $E \subset \sigma(S)$.
Si $E \neq \emptyset$ es contable, se puede expresar como $E = \cup_{n=1}^{\infty}\{x_n\} \in \sigma(S)$ pues cada $\{x_n\} \in \sigma(S)$
Si $\mathbb{R}\backslash E$ es contable, entonces $E^c = \cup_{n=1}^{\infty}\{x_n\} \in \sigma(S)$. Luego, tenemos por la segunda propiedad de las σ-álgebras que $E \in \sigma(S)$

b) Describe las funciones F- medibles.

Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ϕ es $\mathcal{F}$-medible si $\forall\alpha$, $[\phi \leq \alpha]$ ó $[\phi > \alpha]$ es contable.
Esto nos deja con las funciones de la forma:

$\phi = \sum_{j\in J} c_j \mathcal{I}_{Bj}$

Donde $\mathcal{I}$ es la función identidad, J es un conjunto contable y B_j son conjuntos contables.

Estas funciones forman un número contable de valores en dominios contables, y de esta forma se cumple que $[\phi \leq \alpha]$ ó $[\phi > \alpha]$ es contable. Uniones contables de funciones de la forma ϕ forman otra función de la forma ϕ, por lo que las funciones $\mathcal{F}$-medibles son de la forma descrita.

Problema 2

Sea $E \subset \mathbb{R}$ es tal que $m^*(E) < \infty$. Prueba que E es Lebesgue medible si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe una unión finita de intervalos acotados A tal que $m^*(E \triangle A) < \epsilon$. Da un contraejemplo para mostrar que $m^*(E) < \infty$ es necesaria.

($\Rightarrow$) Sea E un conjunto Lebesgue medible. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos abiertos y acotados tales que:

i) $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \leq m^*(E) + \frac{\epsilon}{2}$

Como $m^*(E) < \infty$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \leq \infty$. Entonces, como esta suma es convergente, para $\frac{\epsilon}{2}$ existe N_ϵ tal que $\sum_{n=N\epsilon}^{\infty} m^*(A_n) < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $A = \cup_{n=1}^{N\epsilon} A_n$. Desarrollemos tanto $m^*(E \setminus A)$ como $m^*(A \setminus E)$.

$$\begin{aligned} m^*(E \setminus A) &= m^*(E \setminus \cup_{n=1}^{N_\epsilon} A_n) \\ &\leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \cup_{n=1}^{N_\epsilon} A_n) \\ &= m^*(\cup_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} A_n) \\ &\leq \sum_{n=N_\epsilon+1}^{\infty} m^*(A_n) \\ &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
m^*(A \setminus E) &= m^*(\cup_{n=1}^{N_\epsilon} A_n \setminus E) \\
&\leq m^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus E) \\
&= m^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) - m^*(E) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned} \tag{2}
$$

De (1) y (2), $m^*(E \triangle A) = m^*(E \setminus A) + m^*(A \setminus E) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$(\Leftarrow)$

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe una unión finita de intervalos acotados A tal que $m^*(E \triangle A) < \epsilon$. Entonces:

$m^*(A \setminus E) < \epsilon$

$m^*(E \setminus A) < \epsilon$

Sea I una cubierta abierta de intervalos de $E \setminus A$ tal que $m^*(I) < m^*(E \setminus A) + \epsilon < 2\epsilon$ y que $E \setminus A \subset I$. Entonces:

$E \setminus A \subset I$

$E \cap A \subset A$

$\Rightarrow \quad E = (E \setminus A) \cup (E \cap A) \subset A \cup I$, que es una unión de intervalos abiertos y entonces. (Estoy suponiendo que los intervalos de A son abiertos, si no, basta tomar una cubierta abierta de estos cuya medida sea a lo mas ϵ mas grande que A.). También, tenemos que $m^*((A \cup I) \setminus E) < m^*(I \setminus E) + m^*(A \setminus E) < 3\epsilon$

Por el teorema estructural, entonces tenemos que E es medible.

Contraejemplo

Sea $E = \cup_{k \in \mathbb{Z}}(k, k+1)$. Claramente E es unión contable de conjuntos medibles por lo que es medible y $m^* = \infty$.
Sea $A = \cup_{n=1}^{N} A_n$ un conjunto medible y acotado, por lo que $m^*(A) < \infty$. Entonces:

i) $m^*(A \setminus E) < \infty$

ii) $m^*(E \setminus A) = m^*(E) - m^*(A \cap E) = \infty$

Entonces, para todo $\epsilon > 0$ y para todo A unión numerable de conjuntos acotados, $m^*(E \triangle A) \geq \epsilon$

Problema 3

Sean $f \in L_0(\mathbb{R}, \hat{\mathbb{R}})$ y B un boreliano. Prueba que $[f \in B]$ es Lebesgue medible.

Definimos $\mathcal{G} = \{B \in \mathbb{B} \ : \ [f \in B] \in \mathcal{M}\}$.

Queremos ver que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra. Entonces, tendríamos que $\mathbb{B} = \mathcal{G}$ y que para todo boreliano B, $[f \in B]$ es Lebesgue medible.

1) $\emptyset \in \mathcal{G}$

   $[f \in \emptyset] = \emptyset \in \mathcal{M} \ \Rightarrow \ \emptyset \in \mathcal{G}$

2) **Si** $B \in \mathcal{G}$ **entonces** $B^c \in \mathcal{G}$

   Tenemos que $[f \in B] \in \mathcal{M}$. Entonces, $[f \in B]^c = [f \in B^c] \in \mathcal{M}$ ya que B^c es también un boreliano y f es medible. Entonces, $B^c \in \mathcal{G}$

3) **Sea** $\big(B_n\big)_{n=1}^{\infty}$ **una sucesión donde** $B_n \in \mathcal{G} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$**. Entonces,** $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$

   Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $B_n \in \mathcal{G}$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$, $[f \in B_n] \in \mathcal{M}$.
   Luego, $[f \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n] = \cup_{n=1}^{\infty} [f \in B_n] \in \mathcal{M}$
   $\Rightarrow \ \ \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$

   $\therefore \forall B$ boreliano $[f \in B]$ es Lebesgue medible.

Problema 4

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes para $E \subset [a, b]$:
a) $m(f(E)) = 0$ siempre que $m(E) = 0$.
b) $f(E)$ es Lebesgue medible si E es Lebesgue medible.

a) $\Rightarrow$ b)

Sea $E \subseteq [a, b]$ un conjunto medible. Entonces, $E = F \cup N$, donde $F = F_\sigma$ y N es un conjunto m-nulo. Entonces, $m([f \in E]) = m([f \in F \cup N]) \leq m([f \in F]) + m([f \in N]) = m([f \in F])$.
En esta última igualdad es donde usamos a).
Por otro lado, es claro que $m([f \in F \cup N]) \geq m([f \in F])$.
De aquí que $m([f \in E]) = m([f \in F])$. Por el inciso anterior, como $[f \in F_\sigma]$ es medible para todo F_σ ya que es un boreliano, entonces $[f \in E]$ es medible.

b) $\Rightarrow$ a)

Sea E un conjunto L. medible. Entonces, $f(E)$ también lo es. Ahora, si ese E es tal que tiene medida cero, supongamos que $f(E)$ tiene medida positiva y lleguemos a una contradiccion.

$[f \in E] = [f \in (E \setminus N) \cup N] = [f \in E \setminus N] \cup [f \in N]$ donde N es un conjunto no medible contenido en E.

Entonces:

$0 < m([f \in E]) = m([f \in E \setminus N] \cup [f \in N]) \leq m([f \in E \setminus N]) + m([f \in N]) \quad \perp$ lo cual no está definido, por lo que llegamos a una contradicción.

De aquí que $b)$ implica $a)$

Problema 5

Prueba que si $f \in L_0(\mathbb{R}, \hat{\mathbb{R}})$ entonces la siguiente función es Lebesgue medible:

$$\frac{1}{f}(x) = \begin{cases} 0 & si\ f(x) = 0, +\infty, -\infty \\ \frac{1}{f(x)} & e.o.c \end{cases}$$

Partiremos en casos este ejercicio:

1) Si $f(x) = 0, +\infty, -\infty$ entonces $[f = 0], [f = +\infty], [f = -\infty]$ son conjuntos medibles. Entonces, $\frac{1}{f}$ es Lebesgue medible.

2) Si $0 < f(x) < \infty$, entonces definimos $g : (0, \infty) \to \hat{\mathbb{R}}$ como $g(y) = \frac{1}{y}$ continua. Entonces, tenemos que $g \circ f$ es Lebesgue medible.

3) Si $-\infty < f(x) < 0$, entonces definimos $g : (-\infty, 0) \to \hat{\mathbb{R}}$ como $g(y) = \frac{1}{y}$ continua. Entonces, tenemos que $g \circ f$ es Lebesgue medible.

De estos tres casos, tenemos que $\frac{1}{f}(x)$ es Lebesgue medible.

Problema 6

Sea $f \in L_0([a,b], \hat{\mathbb{R}}$ finita c.d. y sea $\epsilon > 0$. Prueba que existe una constante $M > 0$ tal que $m([|f| > M]) < \epsilon$

Primero, sabemos que f es una función medible. De ahí que $|f|$ también lo es. Entonces definimos la sucesión $\left(E_n\right)_{n=1}^{\infty}$ como $E_n = \big[|f| > n\big]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $E_n \supseteq E_{n+1}$ y E_n es medible para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, por la convergencia monótona decreciente:

$$\begin{aligned}\lim_{n\downarrow\infty}(E_n)_{n=1}^{\infty} &= m^*\Big(\cap_{n=1}^{\infty} E_n\Big)\\ &= m\Big(\cap_{n=1}^{\infty}\big[|f|>n\big]\Big)\\ &= m\Big(\big[|f|=\infty\big]\Big)\\ &= 0\end{aligned} \tag{3}$$

Entonces dada $\epsilon > 0$, $\exists\ M_\epsilon > 0$ tal que si $m > M_\epsilon \Rightarrow m(E_m) < \epsilon$.

$\Rightarrow$ Si $M > M_\epsilon$ entonces $m(\big[|f| > M\big])\ <\ \epsilon$

Problema 7

a) **La función indicadora $I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ es continua c.d.**
Falso. Podemos ver que para toda ϵ positiva, existe una bola en la que la función no es continua.

b) **Existe una función continua h, tal que $h = I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$c.d.**
Verdadero. Si tomamos $h(x) = 1$, esta función es igual a $I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ salvo en $\mathbb{Q}$, un conjunto a lo más numerable y por lo tanto de medida 0.