Nombre: **Jose Manuel Martinez del Campo Gonzalez** Examen : **1**
Curso: **Teoria de la Medida** Fecha: May 27, 2022

Problema 1

Sea $A \subset P(X)$ una familia cerrada bajo uniones finitas y diferencias de conjuntos. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A. Prueba que existe una sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tal que:

a) $E_n \subset A_n$ **,** $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $E_n \cap E_m = \emptyset$ **, si** $n \neq m$

c) $\cup_{k=1}^{n} E_k = \cup_{k=1}^{n} A_k$

d) $\cup_{k=1}^{\infty} E_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$

Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión. Definimos:

$$\begin{gathered} E_1 = A_1 \\ E_2 = A_2 \setminus A_1 \\ E_3 = A_3 \setminus (\cup_{k=1}^{2} A_k) \\ \vdots \\ E_n = A_n \setminus (\cup_{k=1}^{n-1} A_k) \end{gathered}$$

Podemos ver que por construcción $E_n \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También, como A es cerrada bajo uniones finitas, dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $(A_k)_{k=1}^{n} \subset A$. Luego, como A es cerrada bajo diferencias de conjuntos, $A_n \setminus (\cup_{k=1}^{n-1} A_k) = E_n \subset A$.
Para probar b), supongamos s.p.g. que $n > m$, con n y m en $\mathbb{N}$. Entonces:
$E_n \cap E_m = \left[A_n \setminus (\cup_{k=1}^{n-1} A_k)\right] \cap \left[A_m \setminus (\cup_{k=1}^{m-1} A_k)\right] \subset \left[A_n \setminus (\cup_{k=1}^{n-1} A_k)\right] \cap A_m$.
Pero como $A_m \subset \cup_{k=1}^{n-1} A_k$ entonces $E_n \cap E_m = \emptyset$.
Para probar c), si $n \geq 1$ tenemos que $\cup_{k=1}^{n} E_k = \cup_{k=1}^{n} \left[A_k \setminus (\cup_{m=1}^{k-1} A_m)\right] = \cup_{k=1}^{n} A_k$ lo cual es fácil ver si se hace la operación de forma iterativa.
Por último, para probar d), como tenemos que $\forall n$ existe $m > n$ tal que $E_m = A_m$ y que $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ entonces $\cup_{k=1}^{\infty} E_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Problema 2

Prueba por inducción que si n intervalos abiertos $I_1, I_2, ..., I_n$ cubren a un intervalo compacto J entonces:

$$\ell(J) < \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

Caso Base.
Sea $n = 1$ y $J \subset \mathbb{R}$ compacto. Entonces $J = [a, b]$ con $a < b$.
Luego $\ell(J) = \ell\big([a, b]\big) = b - a$
Si I_1 es un intervalo abierto que cubre a J, entonces $I_1 = (a - \epsilon_1, b + \epsilon_2)$ para algún $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$.
Entonces $\ell(I_1) = b - a + \epsilon_1 + \epsilon_2 > b - a = \ell(J)$.

Hipótesis de Inducción.
Supongamos que $\ell(J) < \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$.
Por demostrar $\ell(J) < \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$

Caso Inductivo .

Sean $(I_k)_{k=1}^{n}$ una sucesión de intervalos abiertos tal que $J \subset \cup_{k=1}^{n} I_k$.
Sea J_1 un compacto tal que $J \subset (I_k)_{k=1}^{n-1}$ y tal que $J \setminus J_1 = J_2 \subset I_n$.
Por el caso base sabemos que $\ell(J_2) < \ell(I_n)$.
Por la hipótesis de inducción sabemos que $\ell(J_1) < \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k)$. Como J_1 y J_2 son ajenos.

$$\Rightarrow \ell(J_2) + \ell(J_1) = \ell(J) < \sum_{k=1}^{n-1} \ell(I_k) + \ell(I_n) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

$\therefore \ell(J) < \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$

Problema 3

Sea $r \in \mathbb{R}$. Prueba que $m^*(rE) = |r|m^*(E)$, $\forall E \subset \mathbb{R}$.

Si $E = \emptyset$, entonces la prueba es trivial pues $rE = E$ y $m^*(E) = 0$
Si $E \neq \emptyset$, entonces:

1. Si $r \geq 0$
   $m^*(rE) = inf\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(rI_k) |\, (rI_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } rE\big\}$
   $= inf\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} r\ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= inf\big\{ r\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= rinf\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= |r|m^*(E)$

2. Si $r < 0$
   $m^*(rE) = inf\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(rI_k) |\, (rI_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } rE\big\}$
   $= inf\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} r\ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= inf\big\{ r\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= rsup\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= -|r|sup\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= |r|inf\big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) |\, (I_k)_{k=1}^{\infty} \text{ cubren a } E\big\}$
   $= |r|m^*(E)$

$\therefore m^*(rE) = |r|m^*(E)$

Problema 4

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante $c > 0$, es decir, para todos x, y en $\mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Prueba que $m^*(f(E)) \leq cm^*(E)$, $\forall E \subset \mathbb{R}$.

Primero, supongamos que la medida de E es infinita. Entonces, se cumple la desigualdad. Ahora, suponemos que $m^*(E) < \infty$. Como $E \subset \mathbb{R}$, $\exists\, (I_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de intervalos abiertos y ajenos en $\mathbb{R}$ tal que $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. También, tomamos cada $I_n = (a_n, b_n)$ de tal manera que para alguna $\epsilon > 0$ se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < m^*(E) + \epsilon$.

Como $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ tenemos que $f(E) \subseteq f(\cup_{n=1}^{\infty} I_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f(I_n)$.
Por otro lado, tenemos que por la continuidad de f, para toda n $\exists$ α_n y β_n en el intervalo $[a_n, b_n]$ tales que $f\big((a, b)\big) \subseteq f\big([a, b]\big) = \big[f(\alpha_n), f(\beta_n)\big]$.
Entonces:

$$\begin{aligned} m^*\big(f(I_n)\big) &= m^*\Big(f\big((a_n, b_n)\big)\Big) \\ &\leq m^*\Big(\big[f(\alpha_n), f(\beta_n)\big]\Big) \\ &= |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \\ &\leq c|\alpha_n - \beta_n| \\ &\leq c|a_n - b_n| \\ &= cm^*(I_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Luego:

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) &\leq m^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} f(I_n)\big) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(f(I_n)) \\ &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \\ &< c\big(m^*(E) + \epsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

Como elegimos ϵ de manera arbitraria, entonces tenemos que $m^*(f(E)) \leq cm^*(E)$

Problema 5

Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que $0 < m^*(E) < \infty$ y sea $0 < \delta < 1$. Prueba que existe un intervalo abierto I tal que $m^*(E \cap I) > \delta m^*(I)$.

Sea $\epsilon > 0$ y $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de intervalos abiertos y ajenos tal que $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) < m^*(E) + \epsilon$.

$\Rightarrow m^*(E) = m^*\big(E \cap [\cup_{n=1}^{\infty} I_n]\big) = m^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} [E \cap I_n]\big) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*\big(E \cap I_n\big)$

La última igualdad se da por que los intervalos I_n los escogimos ajenos entre sí. Por lo que $[E \cap I_n] \cap [E \cap I_m] = \emptyset$ si $n \neq m$.

Ahora, supongamos que $m^*(E \cap I_n) \leq \delta m^*(I_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y procedemos por contradicción.

$\Rightarrow m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta m^*(I_n) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \leq \delta\big(m^*(E) + \epsilon\big)$.

Como tomamos a ϵ de manera arbitraria, entonces $m^*(E) \leq \delta m^*(E)$ y como $0 < \delta < 1$

$\Rightarrow m^*(E) < m^*(E)$ $\perp$

$\therefore$ $\exists n$ tal que $m^*(E \cap I_n) \leq \delta m^*(I_n)$

$\therefore$ $\exists I$ abierto tal que $m^*(E \cap I) \leq \delta m^*(I)$

Problema 6

a) **Prueba que si E, F son subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces $m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F)$.**

Primero, supongamos que $m^*(E) = \infty$ ó $m^*(F) = \infty$. Entonces, la desigualdad se cumple. Si, por otro lado, $m^*(E) = \emptyset$ ó $m^*(F) = \emptyset$, entonces la igualdad es trivial.
Ahora, supongamos que $m^*(E) < \infty$ y $m^*(F) < \infty$ y que F, E son no vacíos. Sea $\epsilon > 0$ y sean $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de intervalos abiertos y ajenos en $\mathbb{R}$ tal que:

$$E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(E) + \epsilon$$
$$F \subset \cup_{n=1}^{\infty} J_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) < m^*(F) + \epsilon$$

Entonces, tenemos que :

$$\begin{aligned} m^*(E \cup F) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) + \ell(I_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \\ &< m^*(E) + m^*(F) + 2\epsilon \end{aligned} \tag{3}$$

Como elegimos a ϵ de manera arbitraria, entonces $m^*(E \cup F) \leq m^*(E) + m^*(F)$.

b) **Supón que E y F son subconjuntos de $\mathbb{R}$ compactos y ajenos. Prueba que**

$$m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$$

Por demostrar que $m^*(E) + m^*(F) \leq m^*(E \cup F)$.
Supongamos que $m^*(E) = \emptyset$ ó $m^*(F) = \emptyset$, entonces la igualdad es trivial.

Sean F, E son no vacíos. Sea $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesion de intervalos abiertos que cubre $E \cup F$. Por el inciso 5 de la tarea 2, tomamos a todo intervalo Q_n de longitud menor a δ, con $dist(E, F) > \delta > 0$. Sea $\epsilon > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(Q_n) < m^*(E \cup F) + \epsilon$.

Sean $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. Definimos para todo n $I_n = Q_{i_n}$ como el n-esimo elemento de la secesion $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $I_n \cap E \neq \emptyset$, y como $\ell(I_n) < dist(E, F)$ entonces $I_n \cap F = \emptyset$. Analogamente, definimos para todo n $J_n = Q_{j_n}$ como el n-esimo elemento de la secesion $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $J_n \cap F \neq \emptyset$, y como $\ell(J_n) < dist(E, F)$ entonces ${}_j n \cap E = \emptyset$. Entonces tenemos que :

$$E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$$
$$F \subset \cup_{n=1}^{\infty} J_n$$
$$\big(\cup_{n=1}^{\infty} I_n \big) \cup \big(\cup_{n=1}^{\infty} J_n \big) = \cup_{n=1}^{\infty} Q_n)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} m^*(E) + m^*(F) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(Q_n) \\ &< m^*(E \cup F) + \epsilon \end{aligned} \tag{4}$$

Como elegimos a ϵ de manera arbitraria, entonces $m^*(E) + m^*(F) \leq m^*(E \cup F)$.

$\therefore m^*(E) + m^*(F) = m^*(E \cup F)$