Nombre: **Jose Manuel Martinez del Campo Gonzalez** Examen : **Final**

Curso: **Teoria de la Medida** Fecha: May 27, 2022

Problema 1

a) Sea $\epsilon > 0$. Entonces:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geq N_1,\, m(|f_n - f| \geq \epsilon/2) < \epsilon/2$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geq N_2,\, m(|g_n - g| \geq \epsilon/2) < \epsilon/2$$

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$. Entonces:

$$\begin{aligned} m\big(|(f_n + g_n) - (f+g)| \geq \epsilon\big) &\leq m\big(|(f_n + g_n) - (f+g)| \geq \epsilon/2\big) \\ &\leq m\big(|f_n - f| + |g_n - g| \geq \epsilon/2\big) \\ &\leq m\big(|f_n - f| \geq \epsilon/2\big) + m\big(|g_n - g| \geq \epsilon/2\big) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

b) No es cierto que $f_n g_n$ convergen en medida a fg. Es necesario pedir como hipótesis que f y g sean acotadas casi donde quiera.
Supongamos que f y g estan acotadas c.d. Entonces $\exists M > 0$ tal que $f \leq M$ y $g_n \leq M$ c.d. Como $f_n \to f$ y $g_n \to g$, sea $\epsilon > 0$, entonces:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geq N_1,\, m(|f_n - f| \geq \epsilon/2) < \epsilon/2$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geq N_2,\, m(|g_n - g| \geq \epsilon/2) < \epsilon/2$$

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$ y $n \geq N$. Entonces, como f y g estan acotadas c.d. tenemos que g_n y f_n estan tambien acotadas c.d. Entonces

$$\begin{aligned} m(|f_n g_n - fg| \geq \epsilon) &\leq m(|f_n g_n - fg| \geq \epsilon/2) \\ &\leq m(|f_n||g_n - g| \geq \epsilon/2) + m(|g||f_n - f| \geq \epsilon/2) \\ &\leq m(|f_n| > M) + m(|f_n||g_n - g| \geq \epsilon/2) + m(|g| > M) + m(|g||f_n - f| \geq \epsilon/2) \\ &= m(|f_n||g_n - g| \geq \epsilon/2) + m(|g||f_n - f| \geq \epsilon/2) \\ &= m(|g_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2M}) + m(|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2M}) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

c) Esto es cierto. :)
Como $f_n \to f$, entonces $\exists N \in \mathbb{N} \quad tq \quad \forall n \geq N$, $m(|f_n - f| \geq \epsilon) < \epsilon$. Sea $n > N$ y $\epsilon > 0$, entonces:

$$m(||f_n| - |f|| \geq \epsilon) \leq m([|f_n - f| \geq \epsilon) < \epsilon$$

Problema 2

$\Rightarrow)$
Supongamos que $(f_n) \to f$ en medida. Sea (f_{n_k}) una subsución de (f_n). Entonces $(f_{n_k}) \to f$ en medida c.d. Luego, existe una subsucesion de (f_{n_k}) tal que converge en medida a f c.d..
$\therefore \forall (f_{n_k})$ subsucesion de (f_n) existe una subsucesion que converge a f c.d.

$\Leftarrow)$
Supongamos que (f_n) no converge a f en medida. Entonces, existe una constante $c > 0$ tal que para todo n se tiene que $m\{x : |f_n - f(x)| \geq c\} > c$. De esta manera, existe una constante $c > 0$ tal que para todo k se tiene que $m\{x : |f_{n_k} - f(x)| \geq c\} > c$. De aqui que la subsucesion f_{n_k} no tiene ninguna subsucesion que converge a f en medida.
$\therefore$ si $\forall (f_{n_k})$ subsucesion de (f_n) existe una subsucesion que converge a f c.d., entonces $(f_n) \to f$ en medida.

Problema 3

Sea D tal que $m(D) < \infty$, con $1 \leq r \leq p < \infty$, y $f \in L_p$.
Definimos por comodidad a $q = \frac{p}{r} > 1$ y a $q' = \frac{p}{p-r} > 1$. Notamos que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{p}{r} + \frac{p}{p-r} = 1$. Gracias a esto podemos usar la desigualdad de Hölder de la siguiente manera:

$$\int |f|^r dm \leq \Big(\int (|f|^r)^q dm\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int (\mathbf{1}_D)^{q'} dm\Big)^{\frac{1}{q'}} = \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{r}{p}} m(D)^{\frac{p-r}{p}}$$

Elevando a $\frac{1}{r} < 1$

$$\|f\|_r = \Big(\int |f|^r dm\Big)^{\frac{1}{r}} \leq \Big(\int |f|^p dm\Big)^{\frac{1}{p}} m(D)^{\frac{p-r}{pr}} = \|f\|_p m(D)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}$$

Como $m(D) < \infty$ y $\|f\|_p < \infty$ entonces $\|f\|_r < \infty$.
Como tenemos que si $f \in L_p$ entonces $f \in L_r$, luego que $L_p(D) \subset L_r(D)$.

Problema 4

a) Claramente, $M = supesen\{|f(x)| : x \in D\} = inf\{M \geq 0 : |f| < Mc.d.\}$ es mayor o igual que 0.
Como f es una funcion esencialmente acotada, entonces $f \in L_\infty(D) = \{f \in L_0(D, \hat{\mathbb{R}} : \exists M > 0 \quad tq \quad |f| < Mc.d.\}$. Esto es que $\|f\|_\infty < \infty$ y de aqui que $0 \leq M < \infty$

b) $\Rightarrow)$
Sea $f = 0 \quad c.d.$. Entonces, $M = supesen\{|f(x)| : x \in D\} = inf\{M \geq 0 : |f| <$

$Mc.d.\} = inf\{M \geq 0 : 0 < Mc.d.\} = 0.$

$\Leftarrow$)
Sea $M = 0$. Sea $N_k \subset D$, tal que $m(N_k) = 0$ y $|f(x)| < 1/2^k \quad \forall x \in D \setminus N_k$; para todo $k \in \mathbb{N}$.
Sea $N = \cup_{k=1}^{\infty} N_k$. Entonces, $m(N) = 0$y si $x \in D \setminus N$ tenemos que $f(x) = 0$.
$\therefore f(x) = 0$ c.d.

c) Supongamos que existe una constante M', tal que $0 \leq M' < M$ y tal que $m\big([|f| > M']\big) = 0$. Entonces $f(x) < M'$ *c.d.*. Luego,

$$\begin{aligned} M &= supese(f) \\ &= \inf\big\{M \geq 0 : |f| < M \quad c.d.\big\} \\ &\leq M' \\ &< M \quad \perp \end{aligned}$$

De aqui que $m\big([|f| > M']\big) > 0$. Tenemos tambien que $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in D \setminus N$, con N un conjunto nulo. Luego, $|f| < \|f\|_\infty$ *c.d.*. Por lo visto en este inciso, M es la menor constante que cumple que $|f| < M$ *c.d.*, ya que de otro modo tendremos una contradiccion.

Problema 5

a)

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &:= |\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+t)dt| \\ &= |\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(t)g(x+t)dt| \\ &= |\lim_{b\to\infty} \int fg \circ (\mathbf{1_{[-b+x,b+x]}})dt| \\ &= |\int_{\mathbb{R}} (fg)dm| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |fg|dm \\ &\leq \big(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dm\big)^{\frac{1}{p}} \big(\int_{\mathbb{R}} |g|^q\big)^{\frac{1}{q}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Entonces $f * g$ esta acotado, pues $f \in L_p$ y $g \in L_q$.

Queremos ver que cuando $|x-y| \to 0$ entonces $|(f*g)(x)-(f*g)(y)| \to 0$.

$$
\begin{aligned}
|(f*g)(x)-(f*g)(y)| &= |\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t)g(y+t)dt| \\
&= |\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+t) - f(t)g(y+t)dt| \\
&= |\int_{\mathbb{R}} f(t)[g(x+t) - g(y+t)]dt| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)[g(x+t) - g(y+t)]|dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{[-b,b]} |f(g \circ (\mathbf{1}_{[-b+x,b+x]})) - g \circ (\mathbf{1}_{[-b+y,b+y]})|dm \\
&\leq \lim_{b\to\infty} (\int_{[-b,b]} |f|^p dm)^{\frac{1}{p}} (\int_{[-b,b]} |(g \circ (\mathbf{1}_{[-b+x,b+x]})) - g \circ (\mathbf{1}_{[-b+y,b+y]}))|^q dm)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\int_{\mathbb{R}} |f|^p dm)^{\frac{1}{p}} (\int_{\mathbb{R}} |g(x+t) - g(y+t)|^q dm)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

Por la pregunta 8 del examen 3, sabemos que el segundo termino de esta ultima igualdad $\to 0$. Como $f \in L_p$ se sigue que $|(f*g)(x)-(f*g)(y)| \to 0$.

b)

$$
\begin{aligned}
\|(f*g)(x)-(f*g)(y)\|_\infty &= \|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x+t)dt - \int_{\mathbb{R}} f(t)g(y+t)dt\|_\infty \\
&= \|\int_{\mathbb{R}} f(t)[g(x+t) - g(y+t)]dt\|_\infty \\
&\leq \|\int_{\mathbb{R}} |f(t)[g(x+t) - g(y+t)]|dt\|_\infty \\
&= \|\lim_{b\to\infty} \int_{[-b,b]} |f(g \circ (\mathbf{1}_{[-b+x,b+x]})) - g \circ (\mathbf{1}_{[-b+y,b+y]})|dm\|_\infty \\
&\leq \|\lim_{b\to\infty} (\int_{[-b,b]} |f|^p dm)^{\frac{1}{p}} (\int_{[-b,b]} |(g \circ (\mathbf{1}_{[-b+x,b+x]})) - g \circ (\mathbf{1}_{[-b+y,b+y]}))|^q dm \\
&\leq \|f\|_\infty \| \lim_{b\to\infty} (\int_{[-b,b]} |(g \circ (\mathbf{1}_{[-b+x,b+x]})) - g \circ (\mathbf{1}_{[-b+y,b+y]}))|^q dm)^{\frac{1}{q}} \|_\infty \\
&\leq \|f\|_\infty \| \|g\|_\infty \|
\end{aligned}
$$

Problema 6

Desigualdad de Jensen:
Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sean $x_1, .., x_n \in I$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$, con $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ Entonces:

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n)$$

Demostración:

Procedemos por inducción. El primer caso es cuando $n = 2$. Como $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ se tiene por la desigualdad por la definición de función convexa. Para la hipótesis de inducción, suponemos que $f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n)$. Por demostrar para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
f(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k) &= f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\
&= f((1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_{n+1}} + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) f(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_{n+1}}) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)
\end{aligned}$$

Desigualdad de Jensen en medida :
Sea (X, S, μ) un espacio de medida con $\mu(X) = 1$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa . Sea $f \in L_1$, Entonces:

$$\phi(\int f d\mu) \leq \int \phi(f) d\mu$$

Demostración:

Como ϕ es convexa, entonces para cada $y \in \mathbb{R}$ tenemos que existe a, b tal que $\phi(y) = ay + b$. Por la convexidad de ϕ, $\phi(x) \geq ax + b$ para todo x.
En particular, escojemos a $y = \int f d\mu \leq \infty$. Luego,

$$\phi(\int f d\mu) = \phi(y) = ay + b = a((\int f d\mu)) + b = \int (af + b) d\mu \leq \int \phi(f) d\mu$$