Nombres:
**Jose Manuel Martinez del Campo Gonzalez**
**Rodrigo Villela Franyutti 179081**
**Juan Diego Larrea 180119**
Examen : **3**
Curso: **Teoría de la Medida**
Fecha: May 27, 2022

# Problema 1

**Prueba que el lema de Fatou implica el teorema de convergencia monótona.**

P.D. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in L_0^+(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ tal que $f_n \leq f_{n+1}, f \in L_0^+(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$

$\Rightarrow \int f dm = \lim\limits_{n\uparrow\infty} \int f_n dm$

Demostración:

Por el lema de Fatou se tiene que:

$\int \underline{\lim} f_n dm \leq \underline{\lim} \int f_n dm$

Como el límite existe, el límite inferior es igual al límite. Y como $f_n$ es monótona creciente la sucesión $\int f_n dm$ también es monótona creciente y el límite inferior de esa sucesión es el supremo.

$\therefore \int f dm = \int \underline{\lim} f_n dm \leq \underline{\lim} \int f_n dm = \lim\limits_{n\to\infty} f_n dm$

$\therefore \int f dm \leq \lim\limits_{n\to\infty} f_n dm$

Por otro lado:

$f_n \leq f$ integrando de ambos lados se tiene que:

$\int f_n dm \leq \int f dm$ y tomando límite por ambos lados:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n dm \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int f dm = \int f dm$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n dm \leq \int f dm$

Juntanto los términos azules tenemos que:

$\int f dm = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n dm$

# Problema 2

**Sea $f \in L_0^+(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ acotada. Prueba que:**

$$\int f dm < \infty \textbf{ si y solo si } \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m([f > 2^k]) < \infty$$

$\Rightarrow)$
Suponemos que $\int f dm < \infty$

Veamos que:

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m([f > 2^k])$ Como f es acotada $\exists N$ tal que $m([f > 2^N]) = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m([f > 2^k]) = \sum\limits_{k=-\infty}^{N} 2^k m([f > 2^k]) = \sum\limits_{k=-M}^{N} 2^k m([f > 2^k])$

$\leq \sum\limits_{k=-M}^{N} f m([f > 2^k]) = \sum\limits_{k=-M}^{N} \int f \mathbb{I}_{[f>2^k]} \leq \sum\limits_{k=-M}^{N} \int f dm < \infty$

$\therefore \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m([f > 2^k]) < \infty$

$\Leftarrow)$

Suponemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m([f > 2^k]) < \infty$

Sea $E_k = [2^{k-1} < f \leq 2^k]$, notamos que $\lim\limits_{k \to -\infty} 2^{k-1} = 0$ y $\lim\limits_{k \to \infty} 2^k = \infty$. Aún más $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{-\infty}^{+\infty} E_k$ que es una unión disjunta.

$\int_{\mathbb{R}} f dm = \int_{\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} E_k} f dm = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int f \mathbb{I}_{E_k} dm = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int f \mathbb{I}_{[2^{k+1} \geq f > 2^k]} \leq \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int 2^{k+1} \mathbb{I}_{[2^{k+1} \geq f > 2^k]}$

Pues $f \mathbb{I}_{[2^{k+1} \geq f > 2^k]} \leq 2^{k+1} \mathbb{I}_{[2^{k+1} \geq f > 2^k]}$

Además $\mathbb{I}_{[f>2^k]} \geq \mathbb{I}_{[2^{k+1} \geq f > 2^k]}$
$\therefore \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int 2^{k+1} \mathbb{I}_{[2^{k+1} \geq f > 2^k]} \leq \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int 2^{k+1} \mathbb{I}_{[f>2^k]} = 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int 2^k \mathbb{I}_{[f>2^k]} = 2 \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m([f > 2^k]) < \infty$

$\therefore \int f dm < \infty$

# Problema 3

**Prueba la siguiente generalización del TCDL:**

**Sean $(g_n), g$ funciones en $L_1(\mathbb{R})$, no negativas y tales que $g_n \to g$ c.d. Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones medibles con $|f_n| \leq g_n$ para todo $n$ y $f_n \to f$ c.d. Si $\int g dm = lim \int g_n dm$ entonces $\int f dm = lim \int f_n dm$**

La idea es similar a como se probó en clase el TCDL:

Consideremos las sucesiones en $L_0^+(\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}) : g_n - f_n$ y $g_n + f_n$ además $|f_n| < |g_n|$ y así son sucesiones no negativas.

Por otro lado:

$\int gdm - \int fdm = \int (g-f)dm = \int \underline{\lim}(g_n - f_n)dm$. Aplicando el lema de Fatou tenemos que:

$\int \underline{\lim}(g_n - f_n)dm \leq \underline{\lim} \int (g_n - f_n)dm = \int gdm - \overline{\lim} \int f_n dm$

Y así se tiene que:

$\overline{\lim} \int f_n dm \leq \int fdm$

Similarmente con $g_n + f_n$ tenemos que:

$\int gdm + \int fdm = \int \underline{\lim}(g_n + f_n)dm \leq \underline{\lim} \int (g_n + f_n)dm = \int gdm + \underline{\lim} \int f_n dm$

Y así se tiene que:

$\int fdm \leq \underline{\lim} \int f_n dm$

Juntando los términos azules observamos que:

$\overline{\lim} \int f_n dm \leq \int fdm \leq \underline{\lim} \int f_n dm$ y siempre se cumple que $\underline{\lim} \leq \overline{\lim}$

$\therefore \int fdm = \lim \int f_n dm$

# Problema 4

**Sea $a \in \mathbb{R}$. Calcula**

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2} dx$$

Usando el cambio de variable $u = nx$, tenemos que:

$$\int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x^2} dx = \int_{an}^\infty \frac{1}{1+u^2} du$$

Entonces, definimos una sucesión de funciones como $f_n = \frac{1}{1+u^2} \mathbb{1}_{[an,\infty)}$

Podemos notar por calculo 2 que la integral $\int \frac{1}{1+u^2} du$ nos da la $\arctan u$ y al tomar $f_n = \frac{1}{1+u^2} \mathbb{1}_{[an,\infty)}$ notamos que $f_n \in L_0(\mathbb{R}, \hat{\mathbb{R}})$ y podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \int_{an}^\infty f_n(u)du$ depende de $a$ y se divide en 3 casos:

i) $a = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{an}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du &= \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du\\ &= \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du\\ &= \lim_{b\to\infty} arctan(u)\Big|_0^b\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ii) $a < 0$
Como $f_n = \frac{1}{1+u^2}\mathbb{1}_{[an,\infty)}$, en este caso tenemos que $\forall\, n \;\; f_n \leq f_{n+1}$. Lo cual nos permite aplicar el TCM como:

$$\lim_{n\uparrow\infty} f_n = \lim_{n\uparrow\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathbb{1}_{[an,\infty)} = \frac{1}{1+u^2} = f$$

Entonces,

$$\int f\, dm = \lim_{n\uparrow\infty}\int f_n\, dm$$

Luego, asistiendonos de la lectura 5 pues $f$ es Riemman integrable en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ y del resultado anterior,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{an}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du &= \lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int_{an}^{b}\frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int f_n\mathbb{1}_{[an,b]}\,dm\\ &= \lim_{n\to\infty}\int f_n\mathbb{1}_{[an,\infty]}\,dm\\ &= \lim_{n\uparrow\infty}\int f_n\,dm\\ &= \int f\,dm\\ &= \int\frac{1}{1+u^2}\,dm\\ &= \lim_{b\to\infty}\int\frac{1}{1+u^2}\mathbb{1}_{[-b,b]}\,dm\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= \lim_{b\to\infty} arctan(u)\Big|_{-b}^{b}\\ &= \pi\end{aligned}$$

iii) $a > 0$

Como la función $f_0 \in L_1(\mathbb{R})$ por lo visto en el inciso $i$), y es tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq |f_0|$. Como $f_n \to 0$ puntualmente, entonces converge c.d. cuando $n \to \infty$, pues $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathbb{1}_{[an,\infty)} = 0$. Entonces, por el TCDL:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm = \int 0\, dm = 0$$

Luego, asistiendonos de la lectura 5 pues $f = \frac{1}{1+u^2}$ es Riemman integrable en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ y del resultado anterior,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{an}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du &= \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \int_{an}^{b} \frac{1}{1+u^2}\, du \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{b\to\infty} \int f_n \mathbb{1}_{[an,b]}\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathbb{1}_{[an,\infty]}\, dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n\, dm \\
&= \int 0\, dm \\
&= 0
\end{aligned}$$

# Problema 5

**Prueba que $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$. Sugerencia: diferencía de exuación**

$$\int_0^\infty e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

Procederemos por inducción.

Caso base $n = 0$

P.D. $1 = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx$

$\int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^0 e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = 1 - 0 = 1$

Suponemos válido para $n$

$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

P.D. $\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = (n+1)!$

Por integración por partes se ve que:

$\int x^{n+1} e^{-x} dx = -x^{n+1} e^{-x} + (n+1) \int x^n e^{-x} dx$

$\Rightarrow \int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(\int_0^b x^{n+1}e^{-x}dx)$

$= \lim_{b\to\infty}\left(-x^{n+1}e^{-x}\Big|_0^b + (n+1)\int_0^b x^ne^{-x}dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-x^{n+1}e^{-x}\Big|_0^b\right) + \lim_{b\to\infty}\left((n+1)\int_0^b x^ne^{-x}dx\right)$

Pues cada límite existe: el primero vale 0 y el segundo existe por hipótesis de inducción.

$= 0 + (n+1)n! = (n+1)!$

$\therefore \int_0^\infty x^ne^{-x}dx = n!$

# Problema 6

**Demuestra el *lema del promedio*:**
**Si $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $M \geq 0$ son tales que**

$$\left|\frac{1}{m(E)}\int_E f dm\right| \leq M$$

**para todo $E \in \mathcal{M}$ con $0 < m(E) < \infty$, entonces $|f| \leq M$ c.d.**

Sugerencia :

$$\begin{aligned} \alpha\mathbb{1}_{[f>\alpha]} &< f\mathbb{1}_{[f>\alpha]} \\ \Rightarrow \alpha m([f>\alpha]) &< \int f\mathbb{1}_{[f>\alpha]} \\ &< \int f \\ &< \infty \\ \Rightarrow m([f>\alpha]) < \infty \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f\mathbb{1}_{[f<-\alpha]} &< -\alpha\mathbb{1}_{[f<-\alpha]} \\ \Rightarrow -\alpha m([f<-\alpha]) &> \int f\mathbb{1}_{[f<-\alpha]} \\ \Rightarrow m([f<-\alpha]) &< -\frac{1}{\alpha}\int f\mathbb{1}_{[f<-\alpha]} < \infty \end{aligned}$$

$$\therefore m([|f| > \alpha] < \infty$$

Sea $E = [|f| > M]$
P.D. $m(E) = 0$

Sea $(M_i)_{i=1}^\infty$ una sucesión no negativa tal que $M_{i+1} < M_i$ y $\lim_{n\to\infty} M_n = M$

Sea $E_n = [|f| > M_n]$ , se ve que $E_n \subseteq E_{n+1}$ pues $M_{i+1} < M_i$ y:

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ pues:

Si $e \in E \Rightarrow |f(e)| > M$ y como $M_n \to M$ existe un $j$ tal que $|f(e)| > M_j \Rightarrow e \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

Si $e \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow |f(e)| > M_n > M \Rightarrow e \in E$

$\Rightarrow m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$

P.D. $m(E_n) = 0$

Por la sugerencia sabemos que $m(|f| > \alpha) < \infty$ si tomamos $\alpha = M_n$ tenemos que $m(E_n) < \infty$. Suponemos que $m(E_n) > 0$

Por el procedimiento en la sugerencia también tenemos que:

$M_n m(E_n) \leq \int_{E_n} fdm$

$\Rightarrow M_n \leq \frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} fdm$ y como $M_n$ es no negativo podemos tomar valor absoluto de ambos lados:

$\Rightarrow \left|M_n\right| \leq \left|\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} fdm\right|$ que por hiótesis tenemos:

$\left|\frac{1}{m(E_n)} \int_{E_n} fdm\right| \leq M$ lo cual es una contradicción, pues $M_i > M$ para toda $i = 1, 2, ...$

$\therefore m(E_n) = 0$ para toda $n$ y así $m(E) = 0$

$\therefore |f| \leq M$ c.d.

# Problema 7

**Demuestra el *El lema de Rieman-Lebesgue*: si $f \in L_1(\mathbb{R})$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(\cdot)cos(n\cdot)$ es integrable y**

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)cos(nt)dt = 0$$

Caso 1 $f = \mathbb{1}_{(a,b)}$

$\int_{\mathbb{R}} f(t)cos(nt)dt = \int_a^b cos(nt)dt = \frac{1}{n}(sen(nt))\big|_a^b = \frac{1}{n}(sen(nb) - sen(na)) \leq \frac{2}{n}$ Tomando límite de ambos lados

$\lim_{n\to\infty} |\int_{\mathbb{R}} f(t)cos(nt)dt| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)cos(nt)dt = 0$

Caso 2 $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{(a_i,b_i)}$

Se define $f_i := c_i \mathbb{1}_{(a_i,b_i)}$ y se aplica el caso 1 y por linealidad se obtiene que el límite es 0 también.

Caso 3 $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_E$ con $m(E) < \infty$ para cualquier $E$

Por teorema de aproximación inciso 1) visto en clase existe una función simple $g$ tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$

$|\int f(x)cos(nx)dx| \leq |\int f(x)cos(nx) - g(x)cos(nx)dx| + |\int g(x)cos(nx)dx|$

$= |\int cos(nx)\left(f(x) - g(x)\right)dx| + |\int g(x)cos(nx)dx| \leq \int |f(x) - g(x)|dx + |\int g(x)cos(nx)dx|$

$< \epsilon + |\int g(x)cos(nx)dx|$

Tomando límite de ambos lados tenemos que:

$\lim_{n\to\infty} |\int f(x)cos(nx)dx| < \lim_{n\to\infty} \left(\epsilon + |\int g(x)cos(nx)dx|\right)$

Pero $\lim_{n\to\infty} |\int g(x)cos(nx)dx| = 0$ pues es el caso 2

$\therefore \lim_{n\to\infty} |\int f(x)cos(nx)dx| < \epsilon + 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \int f(x)cos(nx)dx = 0$

Finalmente si $f \in L_1(\mathbb{R}$

Es análogo al caso 3:

Tenemos que $\exists g$ función simple tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$

$|\int f(x)cos(nx)dx| \leq |\int f(x)cos(nx) - g(x)cos(nx)dx| + |\int g(x)cos(nx)dx|$

$< \epsilon + |\int g(x)cos(nx)dx|$

Y tomando límite de ambos lados obtenemos por los casos anteriores que:

$\lim_{n\to\infty} |\int f(x)cos(nx)dx| < \epsilon + 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \int f(x)cos(nx)dx = 0$

# Problema 8

**Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función . Demuestra que si $f$ es integrable entonces**

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+t)|dx = 0$$

Por el problema 11 sabemos que las funciones contínuas son densas en $L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists g$ tal que $\int |f-g|dm < \epsilon$ y g con soporte compacto. Como $f$ es integrable $f \in L_1 \Rightarrow g \in L_0$ y aun más en $L_1$

Sea $g_t = g(x+t)$:

Claramente $g_t \to g$ cuando $t \to 0$ por ser una funcion continua y por el TCDL:

$\lim\limits_{t\to 0} \int |g(x) - g(x+t)|dm < \frac{\epsilon}{3}$ ... $(*)$

Por otro lado veamos:

$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-f(x+t)|dx = \lim_{t\to 0}[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-f(x+t)+g(x)-g(x)+g(x+t)-g(x+t)|dx]$

$= \lim_{t\to 0} \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} |f(x) - f(x+t) + g(x) - g(x) + g(x+t) - g(x+t)|dx$

$\leq \lim_{t\to 0} \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} |f(x) - g(x)|dx + \int_{-b}^{b} |f(x+t) - g(x+t)|dx + \int_{-b}^{b} |g(x) - g(x+t)|dx$

$\leq \lim_{t\to 0} \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} |f(x) - g(x)|dx + \int_{-b+t}^{b+t} |f(y) - g(y)|dy + \frac{\epsilon}{3}$

$\leq \lim_{t\to 0} \lim_{b\to\infty} \int_{[-b,b]} |f-g|dm + \int_{[-b+t,b+t]} |f-g|dm + \frac{\epsilon}{3}$

$\leq \int_{\mathbb{R}} |f-g|dm + \int_{\mathbb{R}} |f-g|dm + \frac{\epsilon}{3}$

$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

(Los dos primeros son menores a $\frac{\epsilon}{3}$ por la densidad en $L_1$, el tercero es menor a $\frac{\epsilon}{3}$ por $*$).

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x+t)|dx = 0$

# Problema 9

**Demuestra la *desigualdad de Chebyshev*:**
**Sea $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función no decreciente y mayor que cero en $(0,\infty)$ y sea $f \in L_0(\mathbb{R}, \hat{\mathbb{R}})$ tal que la composición $\phi \circ |f| \in L_1(\mathbb{R})$ . Entonces para todo $\alpha > 0$ :**

$$m([|f| \geq \alpha]) \leq \frac{1}{\phi(\alpha)} \int \phi \circ |f| \, dm$$

Sea $\alpha > 0$ fijo. Definimos $E = [|f| \geq \alpha]$. Entonces:

$$0 < \alpha \mathbb{1}_E \leq |f| \mathbb{1}_E$$

Como $\phi$ es una función no decreciente y no negativa, si $x < y \quad \forall x, y \in (0,\infty)$ entonces $0 < \phi(x) \leq \phi(y)$. Luego:

$$0 < \phi(\alpha)\mathbb{1}_E \leq \phi(|f|)\mathbb{1}_E$$

$$\Rightarrow \int_E \phi(\alpha) dm = \int \phi(\alpha)\mathbb{1}_E dm$$
$$\leq \int \phi(|f|)\mathbb{1}_E dm$$
$$= \int_E \phi \circ |f| dm$$

Como $\phi(\alpha) > 0$, entonces:

$$\int \mathbb{1}_E dm \leq \frac{1}{\phi(\alpha)} \int_E \phi \circ |f| dm$$
$$\therefore m(E) \leq \frac{1}{\phi(\alpha)} \int_E \phi \circ |f| dm$$

# Problema 10

**Una medida, $v$, es *absolutamente continua* con respecto a la medida de Lebesgue, $m$, si para todo $E \subset \mathbb{R}$ tal que $m(E) = 0$ se cumple que $v(E) = 0$ (en símbolos $v \ll m$). Prueba que $v \ll m$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $m(E) < \delta$ entonces $v(E) < \epsilon$. Un ejemplo de continuidad absoluta que demostramos en clase cuando**

$$v(E) := \int_E f dm$$

**para alguna función $f \in L_0^+(\mathbb{R}, \widehat{\mathbb{R}})$.** Nota informativa: **El teoremón de Radon-Nikodym muestra que de hecho es *el ejemplo* de continuidad absoluta.**

$\Leftarrow$)

Supongamos que $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $m(E) < \delta \ \Rightarrow \ v(E) < \epsilon$. Sea $E \subset \mathbb{R}$. Entonces dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $m(E) = 0 < \delta$. Luego, por hipótesis, $v(E) < \epsilon$. Entonces, como $\epsilon$ fue elegido arbitrariamente, $v(E) = 0$.

$\Rightarrow$)

Supongamos que la conclusión no se cumple, y procedemos por contradicción. Entonces, $\exists\, \epsilon > 0$ y una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $E_n \subset \mathbb{R}$ tal que $m(E_n) < \frac{1}{2^n}$, pero que $v(E_n) > \epsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $E = \overline{lim}_{n\to\infty} E_n$.
Como $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$, podemos aplicar el lema de Borel-Cantelli visto en clase. Luego,

$$m(E) = m(\overline{lim}_{n\to\infty} E_n) = 0$$

Como $v << m$, entonces $v(E) = 0$. Sin embargo:

$$\begin{aligned} v(E) &= v(\overline{lim}_{n\to\infty} \cup_{k=n}^{\infty} E_k) \\ &= v(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} E_n) \\ &= lim_{n\downarrow\infty}\, v(\cup_{k=n}^{\infty} E_k) \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

Lo cual genera una contradicción.

$$\therefore v \ll m \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ tq\ si\ m(E) < \delta \Rightarrow v(E) < \epsilon$$

# Problema 11

**Sea $f \in L_1\mathbb{R}$ prueba que para todo $\epsilon > 0$ existe una función continua con soporte compacto, $g$, tal que $\|g - f\|_1 < \epsilon$. *Sugerencia*: completa los detalles que llevan al caso $f = \mathbb{I}_E$ y para este caso, si $f = \mathbb{I}_E$ con $E \subset [-n, n]$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, considera $F$ cerrado y $G$ abierto tales que $F \subset E \subset G \subset [-n, n]$ y $m(G \setminus F) < \epsilon$. Sea $\delta = dist(F, G^c)$. Prueba que**

Por la parte 1 del teorema de aproximación vista en clase $\exists \phi$ función simple tal que $\|f - \phi\|_1 < \epsilon$ Así podemos suponer que $f = \mathbb{I}_E$ y si no lo es usar esta aproximación.

a) $\delta > 0$.

Por la definición de distancia, existe una sucesión de $x_m$ y $y_m$ en $F$ y $G^c$ respectivamente tal que:

$$d(F, G^c) \leq d(x_m, y_m) < d(F, G^c) + \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow lim_{m\to\infty} d(x_m, y_m) = d(F, G^c)$$

Como $F$ es un conjunto acotado, existe $a \in F$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$d(x_m, a) \leq 2n$$

$$\Rightarrow d(y_m, a) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, a) < d(G^c, F) + \frac{1}{m} + 2n$$

$$\Rightarrow d(x_m, y_m) \leq d(x_m, a) + d(a, y_m) \leq 4n + \delta + \frac{1}{m}$$

De aquí que $d(x_m, y_m)$ está acotado, existen las subsucesiones convergentes $(x_{mk})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(y_{mk})_{k\in\mathbb{N}}$

de $(x_m)$ , $y_m$ respectivamente tal que:

$$lim_{m\to\infty} d(x_m, y_m) = d(x, y)$$

Como $F$ y $G^c$ son conjuntos cerrados, entonces $x \in F$ y $y \in G^c$. Luego, como $F$ y $G^c$ son disjuntos, entonces $x \neq y$.

$$\therefore \delta = d(G^c, F) = d(x, y) > 0$$

b) Si $g(x) := (1 - \frac{1}{\delta} dist(x, F))^+$ (parte positiva) entonces

i) $g$ es continua

Primero, veamos si la función $dist(x, F) := inf_{y\in F} dist(x, y)$ es continua. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $p \in F$. Entonces,

$$dist(x, p) \leq dist(x, y) + dist(y, p)$$

Y también,

$$dist(x, F) \leq dist(x, p) \leq dist(x, y) + dist(y, p)$$

Despejando esta última desigualdad, nos queda que:

$$d(y, p) \geq d(x, F) - d(x, y)$$

Entonces, como $p$ es un punto arbitrario de $F$,

$$d(y, F) \geq d(x, F) - d(x, y)$$

Luego,

$$d(y, F) - d(x, F) \leq d(x, y)$$

Habiendo visto que la función $dist()$ es continua, como $\delta > 0$, la función $h(x) = 1 - \frac{1}{\delta} dist(x, F)$ es continua.

Entonces $g(x) = (h(x))^+$ es una función continua. (La parte positiva de una función continua es continua)

ii) $0 \leq g \leq 1$.

Tenemos 3 casos:
Cuando $x \in F$, entonces $g(x) = (1 - \frac{1}{\delta}(0))^+ = 1$

Cuando $x \in G \setminus F$, entonces $g(x) = (1 - \frac{1}{\delta} dist(x, F))^+ \in (0, 1)$. Esto ya que $dist(x, F) < dist(G^c, F)$
Cuando $x \in G^c$, entonces $g(x) = (1 - \frac{1}{\delta} dist(x, F))^+ = 0$. Esto ya que $dist(x, F) \geq dist(G^c, F)$.
Como $F \cup (G \setminus F) \cup G^c = \mathbb{R}$, entonces $0 \leq g \leq 1$.

iii) $\mathbb{I}_F \leq g \leq \mathbb{I}_G$. Nota que también $\mathbb{I}_F \leq \mathbb{I}_E \leq \mathbb{I}_G$.

Es claro que $\mathbb{I}_F \leq \mathbb{I}_E \leq \mathbb{I}_G$, dado que $F \subset E \subset G$. Sea $x \in F$, entonces $g(x) = \mathbb{1}_F(x)$. Pero si $x \in F^c$, entonces $g(x) \geq 0 = \mathbb{1}_F(x)$.

Por otro lado, si $x \in G^c$ entonces $g(x) = \mathbb{1}_G(x) = 0$. Si $x \in F$ también tenemos igualdad, pues $g(x) = \mathbb{1}_G(x) = 1$. Sin embargo, cuando $x \in G \setminus F$, $1 = \mathbb{1}_G(x) \geq g(x) \in (0, 1)$.

$$\therefore \mathbb{I}_F \leq g \leq \mathbb{I}_G$$

c) $\|g - \mathbb{I}_E\|_1 = \int |g - \mathbb{I}_E| dm < \epsilon$. Sabemos que $g$ es continua, que $g(x) = 1$ si $x \in F$ y que $g(x) = 0$ si $x \in G^c$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int |g - \mathbb{1}_E| \, dm &\leq \int |g\mathbb{1}_G - \mathbb{1}_E| \, dm + \int |g\mathbb{1}_{G^c} - \mathbb{1}_E| \, dm \quad \textit{(desigualdad triángulo)} \\
&= \int |g\mathbb{1}_G - \mathbb{1}_E| \, dm \\
&\leq \int \left|g\mathbb{1}_{G\setminus F} - \mathbb{1}_{E\setminus F}\right| dm + \int |g\mathbb{1}_F - \mathbb{1}_F| \, dm \quad \textit{(desigualdad triángulo)} \\
&= \int \left|g\mathbb{1}_{G\setminus F} - \mathbb{1}_{E\setminus F}\right| dm \\
&\leq \int \mathbb{1}_{G\setminus F} dm \\
&= m(G \setminus F) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$