Proyecto Métodos Numéricos:

Predicción del movimiento de partículas en distintos sistemas ambientales mediante simulaciones.

Julian Esteban Santos Martínez
Johan Sebastián Sánchez Vargas
Gabriel Santana Paredes

Julio 2021

1 Definición del Problema

Supongamos que queremos simular el movimiento de una partícula dadas unas condiciones iniciales. En algunos modelos se usan ecuaciones diferenciales para, por ejemplo, simular un campo vectorial el cual contendrá al a partícula antes mencionada.

Esto es útil en el campo de la Ingeniería de Sistemas y Computación ya que muchas de las aplicaciones se basan en desarrollar y crear simulaciones por ordenador las cuales reflejen de forma total o aproximada la realidad. En nuestro caso, usaremos este paradigma para simular el ambiente en un videojuego.

Por ejemplo, si queremos simular una tormenta de arena, una avalancha de nieve, planetas orbitando, e incluso la luz este tipo de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es muy útil.

2 Modelo Matemático

Para demostrar este problema, vamos a reducirlo al caso mas sencillo por motivos de presentación; usaremos el caso de un campo vectorial en 2D y una partícula en una posición inicial dada y calcularemos su trayectoria en el tiempo, para esto tenemos las siguientes condiciones iniciales:

Se necesita de un campo vectorial de velocidad que se extienda en el espacio cartesiano, este campo vectorial tiene una forma tal que:

$$\vec{F}(x, y) = u(x, y)\hat{\imath} + v(x, y)\hat{\jmath}$$

Y una partícula con una posición inicial tal que:

$$P = (a, b)$$

Una vez se tienen estas condiciones iniciales es posible calcular la trayectoria usando diferentes métodos analíticos y numéricos. Se va a transformar el campo vectorial en un sistema de ecuaciones diferenciales para poder evaluar la trayectoria de la partícula en el campo vectorial dado. Se debe aclarar que al tratarse de un sistema de ecuaciones diferenciales, la existencia de una solución analítica varía entre cada sistema.

En este caso se usarán 2 métodos, el método de Euler y el de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Para ello es necesario encontrar las ecuaciones diferenciales necesarias para aplicarlas a este método.

En este caso se supondrá que la trayectoria que rige la partícula es:

$$S(t) = (x(t), y(t))$$

Por tanto, su velocidad sera:

$$V(t) = (x'(t), y'(t))$$

Descomponiendo los vectores y las funciones en sus componentes x y y, e igualando la velocidad en función al campo vectorial tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t), y(t))$$
$$\frac{dy}{dt} = v(x(t), y(t))$$

Con las ecuaciones diferenciales dadas y las condiciones iniciales, es posible calcular la trayectoria de la partícula usando Runge-Kutta de cuarto orden y el método de Euler.

3 Solución Analítica

Al tratarse de un sistema de ecuaciones diferenciales la existencia de una solución analítica varía entre cada sistema. No todas las ecuaciones diferenciales, ni los sistemas de ecuaciones diferenciales tienen solución. La existencia de diversos métodos de aproximación es el resultado de la dificultad para resolver estas funciones exactamente. Las funciones evaluadas en este documento no tienen solución exacta y os métodos utilizados aquí se encuentran entre los más precisos para hallar una aproximación de la solución.

4 Solución Numérica

Si se tiene las componentes del campo vectorial definido como un sistema de ecuaciones diferenciales es posible resolverlas utilizando diferentes métodos numéricos. Se decide comparar dos de los métodos numéricos más usados para resolver este problema, los cuales son el método de Euler y el método de Runge Kutta de cuarto orden.

Tomando como ejemplo el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y) = (cos(x) \cdot y)\hat{\imath} + (sin(x) \cdot y)\hat{\jmath}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales derivado de este campo y los valores iniciales resultan ser:

$$\frac{dx}{dt} = (cos(x) \cdot y) \qquad x(0) = 0.4$$
$$\frac{dy}{dt} = (sin(x) \cdot y) \qquad y(0) = 0.4$$

Utilizando el intervalo [0 2] con un salto ($h = 0.1$) y tomando

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

podemos aplicar los diferentes métodos

4.1 Método de Euler

Aplicando el método de Euler se obtienen 21 intervalos para el primer punto, con un tiempo $h = 0.1$ las primeras iteraciones del método se ven así:

$$\begin{aligned}
x_1 = x(0.4, 0.4) = 0.368424 &\qquad y_1 = y(0.4, 0.4) = 0.155767 \\
x_0 + h \cdot x_1 = 0.436842 &\qquad y_0 + h \cdot y_1 = 0.415577 \\
x_2 = f(0.436842, 0.415577) = 0.376551 &\qquad y_2 = g(0.436842, 0.415577) = 0.175822 \\
x_0 + h \cdot x_2 = 0.474498 &\qquad y_0 + h \cdot y_2 = 0.433159 \\
x_3 = f(0.474498, 0.433159) = 0.385305 &\qquad y_3 = g(0.474498, 0.433159) = 0.197907 \\
x_0 + h \cdot x_3 = 0.513028 &\qquad y_0 + h \cdot y_3 = 0.45295 \\
x_4 = f(0, 0.0373, 0.0166) = 0.394638 &\qquad y_4 = g(0, 0.0373, 0.0166) = 0.222316 \\
x_0 + h \cdot x_4 = 0.552492 &\qquad y_0 + h \cdot y_4 = 0.475181
\end{aligned}$$

k	t_k	$x(t)$	$y(t)$
1	0.00	0.400000	0.400000
2	0.10	0.436842	0.415577
3	0.20	0.474498	0.433159
4	0.30	0.513028	0.452950
5	0.40	0.552492	0.475181
6	0.50	0.592940	0.500119
7	0.60	0.634415	0.528066
8	0.70	0.676946	0.559365
9	0.80	0.720548	0.594404
10	0.90	0.765215	0.633623
11	1.00	0.810914	0.677513
12	1.10	0.857583	0.726627
13	1.20	0.905124	0.781580
14	1.30	0.953393	0.843051
15	1.40	1.002199	0.911792
16	1.50	1.051295	0.988625
17	1.60	1.100375	1.074444
18	1.70	1.149075	1.170218
19	1.80	1.196976	1.276987
20	1.90	1.243608	1.395866
21	2.00	1.288469	1.528048

Table 1: Tabla de resultados con Euler

4.2 Método de Runge-Kutta

Aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden se obtienen 21 intervalos para el primer punto, con un tiempo t= 0.1 las operaciones intermedias para x_1 e y_1 son:

$$
\begin{aligned}
f_1 = f(0, 0.4, 0.4) &= 0.368424 & g_1 &= g(0, 0.4, 0.4) = 0.155767 \\
x_0 + \frac{h}{2} \cdot f_1 &= 0.0184 & y_0 &+ \frac{h}{2} \cdot g_1 = 0.0078 \\
f_2 = f(0, 0.0184, 0.0078) &= 0.372609 & g_2 &= g(0, 0.0184, 0.0078) = 0.165692 \\
x_0 + \frac{h}{2} \cdot f_2 &= 0.0186 & y_0 &+ \frac{h}{2} \cdot g_2 = 0.0083 \\
f_3 = f(0, 0.0186, 0.0083) &= 0.373028 & g_3 &= g(0, 0.0186, 0.0083) = 0.165972 \\
x_0 + h \cdot f_3 &= 0.0373 & y_0 &+ h \cdot g_3 = 0.0166 \\
f_4 = f(0, 0.0373, 0.0166) &= 0.377394 & g_4 &= g(0, 0.0373, 0.0166) = 0.176428
\end{aligned}
$$

$$x_1 = 0.4 + \frac{0.1}{2} \cdot (0.368424) + 2 \cdot (0.372609) + 2 \cdot (0.373028) + 0.377394) = 0.437285$$

$$y_1 = 0.4 + \frac{0.1}{2} \cdot (0.155767) + 2 \cdot (0.165692) + 2 \cdot (0.165972) + 0.176428) = 0.416592$$

Iterando de la misma manera para los siguientes intervalos se obtiene:

k	t_k	$x(t)$	$y(t)$
1	0.00	0.400000	0.400000
2	0.10	0.437285	0.416592
3	0.20	0.475502	0.435358
4	0.30	0.514719	0.456538
5	0.40	0.554998	0.480406
6	0.50	0.596395	0.507279
7	0.60	0.638952	0.537519
8	0.70	0.682697	0.571536
9	0.80	0.727638	0.609800
10	0.90	0.773759	0.652840
11	1.00	0.821010	0.701256
12	1.10	0.869301	0.755717
13	1.20	0.918498	0.816974
14	1.30	0.968411	0.885856
15	1.40	1.018791	0.963280
16	1.50	1.069323	1.050246
17	1.60	1.119627	1.147844
18	1.70	1.169261	1.257251
19	1.80	1.217728	1.379731
20	1.90	1.264494	1.516644
21	2.00	1.309008	1.669444

Table 2: Tabla de resultados con Runge-Kutta

Los puntos $x(t)$ e $y(t)$ resultan ser las coordenadas de la partícula en el campo vectorial.

4.3 Gráficos

A continuación, se muestra la gráfica correspondiente con los datos obtenidos de los datos obtenidos anteriormente a partir ambos métodos.

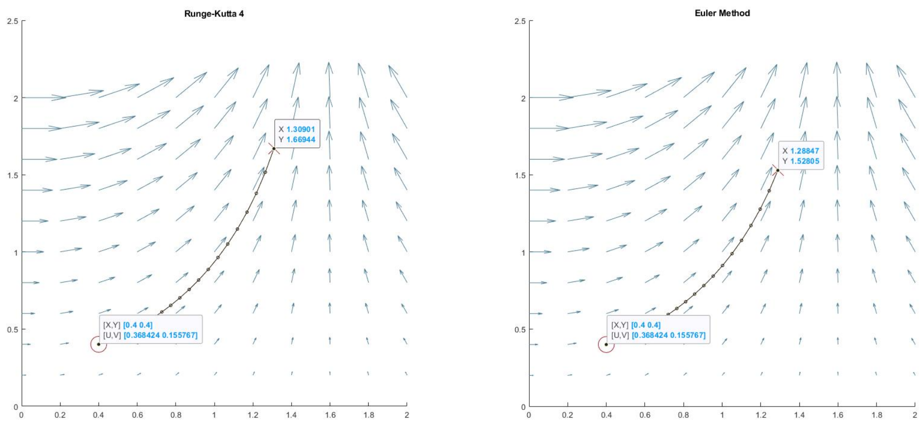

Figure 1: Resultados de RK4 y Euler respectivamente.

5 Análisis de resultados

Ambos métodos muestran una trayectoria acorde con la dirección de la velocidad en el punto por el que pasan en el campo vectorial. El método de Euler se desvía considerablemente conforme avanza la simulación y se hacen más iteraciones.

Los datos obtenidos entre los dos modelos difieren más entre sí entre más puntos se calculan, esto se pude ver tanto en las tablas de resultados (véase tabla 1 y tabla 2 de la sección 4.1 y 4.2) y en la trayectoria graficada en la sección 4.3.

6 Conclusiones

El método de Runge-Kutta es un método más preciso que el método de Euler como era de esperarse, esto se debe a que el método de Runge Kutta es de cuarto orden, lo que quiere decir que la cuarta derivada no tiene error, y comienza a haber un error en la quinta derivada. En cambio, el método de Euler es de primer orden, por lo que su cálculo en la segunda derivada ya comienza a tener errores. Estos errores conllevan a que se desvíe mucho del resultado correcto.

Esto lo podemos observar con un tiempo mayor de simulación, ya que los valores obtenidos con Euler se apartan rapidamente de los valores indicados por el campo vectorial. El método de Runge-Kutta es capaz de hallar una trayectoria precisa en un campo vectorial y es posible utilizarlo en el direccionamiento de partículas en un videojuego.

References

[1] Joy, K., 1999. Numerical Methods for Particle Tracing in Vector Fields. [online] University of California. Available at: https://web.cs.ucdavis.edu/ma/ECS177/papers/particle_tracing.pdf [Accessed 27 July 2021].

[2] J, J., I&A, M. (2021). Distinguished trajectories in time dependent vector fields. Retrieved 26 July 2021, from https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.3056050

[3] Rodriguez, J., 2016. Math for Game Developers - Runge-Kutta Order 4. [online] Youtube. Available at: https://www.youtube.com/watch?v=hGCP6I2WisMI&t=364sI&ab_channel=JorgeRodriguez [Accessed 26 July 2021].

[4] Rodriguez, J., 2016. Math for Game Developers - Particle Simulation (Numerical Integration). [online] Youtube.com. Available at: https://www.youtube.com/watch?v=BIz-wEu0QwEI&ab_channel=JorgeRodriguez [Accessed 26 July 2021].

[5] Sanderson, G., 2016. Vector fields, introduction. [online] Khan Academy. Available at: ¡https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/thinking-about-multivariable-function/visualizing-vector-valued-functions/v/vector-fields-introduction¿ [Accessed 26 July 2021].

[6] Khan Academy, 2015. https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-differential-equations-new/bc-7-5/v/example-eulers-method-exercise. [online] Khan Academy. Available at: ¡https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-bc/bc-differential-equations-new/bc-7-5/v/example-eulers-method-exercise¿ [Accessed 26 July 2021].