Experimento de Eratóstenes adaptado.

Thorac el Magufo Científico - Youtube

1 Planteamiento del experimento

Planteamos repetir el experimento de Eratóstenes en dos ciudades cualesquiera del planeta tierra, y calcular una estimación del radio de la Tierra. En el supuesto de que la Tierra fuera plana también se podría calcular la altura del Sol según algunos sencillos cálculos.

En primer lugar elegiremos dos ciudades distintas donde estarán repartidos los experimentadores para tomar las mediciones. Después elegiremos un instante del día concreto para realizar las mediciones teniendo en cuenta los cambios horarios en caso de que proceda. Necesitaremos los siguientes instrumentos

- Una vara de mas de un metro.
- Una plomada.
- Una cinta métrica.
- Una brújula.
- Un móvil con GPS y reloj.

El experimento consistirá en buscar un terreno liso y colocar ahí la vara lo más verticalmente posible (comprobándolo con la plomada) justo en el instante del día elegido comprobando la hora. Los datos que necesitarán recopilar los experimentadores serán los siguientes

- Longitud de la vara utilizada. Usando la cinta métrica
- Longitud de la sombra de la vara resultante en el suelo. Usando la cinta métrica.
- Punto geográfico donde se colocó la vara. Usando el GPS.
- Punto cardinal hacia el que apunta la sombra de la vara. Medido desde el Norte en sentido horario de 0 a 360 (luego será necesario pasarlo a radianes), esta medida se llama acimut. Usando la brújula.

Posteriormente será necesario medir la distancia entre los dos puntos de las mediciones, para ello podemos usar la herramienta en línea Google Earth.

Además debemos de medir en cada ciudad la dirección hacia la que está la otra ciudad siguiendo la geodésica del planeta. Este angulo se puede medir sobre la geodésica dada por Google Earth, o en persona viendo hacia donde apunta tal línea marcada en esta herramienta. En cualquier caso es necesario notar que este angulo no tiene que ser el mismo en ambas ciudades. Y no se debe usar un mapa de mercator, debido a que sabemos por motivos que no contaremos aquí, que el trayecto más corto entre dos puntos de la Tierra, generalmente no es el trayecto de rumbo constante en la brújula. Esto es especialmente importante si queremos repetir el experimento en ciudades muy alejadas, por ejemplo en diferentes países.

En este documento las ciudades elegidas son Madrid y Sevilla, aunque este experimento es completamente repetible en cualquier punto geográfico del planeta.

2 Cálculos teóricos del experimento

2.1 Definiciones y cálculos previos

En primer lugar marquemos una línea entre las dos ciudades del experimento, ciudad A y ciudad B. Esta linea la denotaremos por $\overline{AB}$ y la distancia entre las dos ciudades la llamaremos D.
Ahora vamos a denotar una serie de términos que usaremos, teniendo en cuenta que todos los términos son análogos para la ciudad B por lo que los obviaremos.

- Denotamos c_A a la dirección en la que apunta la recta $\overline{AB}$ en los puntos cardinales, la mediremos en radianes en el intervalo $[0, 2\pi)$ comenzando en el Norte y dando la vuelta en sentido horario.
- Llamamos S_A a la longitud de la sombra en la ciudad A.
- a_A es la altura de la vara en la ciudad A.
- Denotaremos como α_A a la dirección hacia la que apunta la sombra, siguiendo la misma regla de c_A.

Ahora vamos a proyectar S_A sobre la recta $\overline{AB}$, lo cual es un sencillo cálculo

$$l_A = S_A \cos(\alpha_A - c_A)$$

Esta longitud nos servirá para calcular la componente del ángulo de incidencia sobre la recta $\overline{AB}$. Es como si giráramos el Sol alrededor de la recta esa y después midiéramos la sombra.

Ahora vamos a calcular esta componente del ángulo.

$$\beta_A = \arctan\left(\frac{a_A}{l_A}\right)$$

2.2 Supuesta una Tierra plana

En una tierra plana tenemos que calcular la altura a la que debería estar el sol. Para ello vamos a usar el llamado teorema del seno, que declara que si tenemos un triangulo de lados u, v y w, y ángulos U, V y W como el de la imagen (1), se cumple la siguiente fórmula.

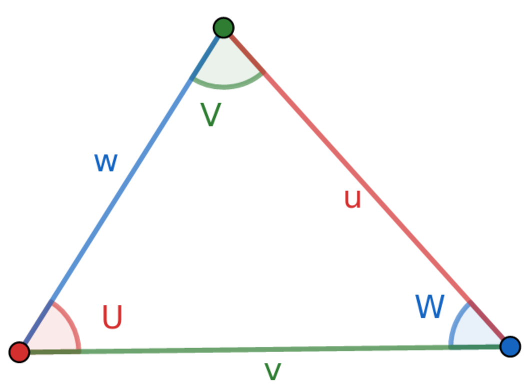

Figure 1: Triángulo de ejemplo para el teorema del seno.

$$\frac{u}{\sin(U)} = \frac{v}{\sin(V)} = \frac{w}{\sin(W)} \tag{1}$$

En nuestro caso tenemos el esquema de la imagen (2), en el que podemos conseguir todos los datos necesarios para usar el teorema del seno. Notemos que

$$\beta_A + (\pi - \beta_B) + \varphi = \pi \Rightarrow \varphi = \beta_B - \beta_A$$

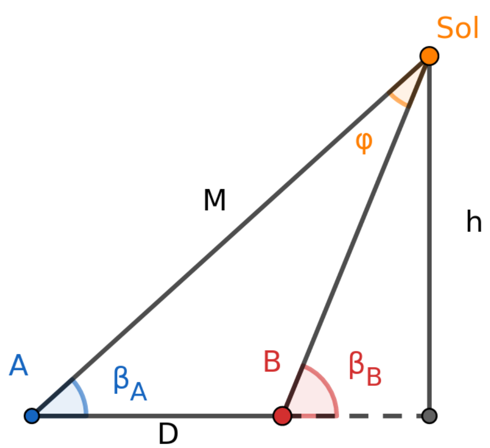

Figure 2: Gráfica de la posición de las ciudades.

Así podemos calcular la distancia desde la ciudad A al Sol denotada por M de la imagen (2) aplicando el teorema del seno.

$$\frac{M}{\sin(\pi - \beta_B)} = \frac{D}{\sin(\varphi)} \Rightarrow M = \frac{D\sin(\pi - \beta_B)}{\sin(\beta_B - \beta_A)}$$

Y finalmente tenemos que la altura del sol es

$$h = \sin(\beta_A)M \tag{2}$$

2.3 En la Tierra esférica

En la Tierra esférica es muy fácil hacer una estimación del radio terrestre R_T con los cálculos previos.

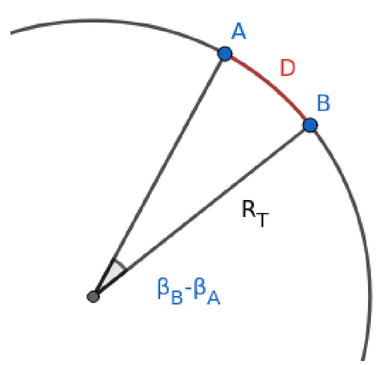

Figure 3: Gráfico sobre la esfera terrestre.

Solo notar que la diferencia $|\beta_A - \beta_B|$ es el ángulo que nos movemos en la Tierra y por la simple definición de radianes tenemos que

$$|\beta_A - \beta_B| = \frac{D}{R_T} \Longrightarrow R_T = \frac{D}{|\beta_A - \beta_B|}$$

3 Estimación usando el punto sin sombra

El método anterior da como resultado bastante error si no se usan métodos de medición muy precisos, como comprobaremos más adelante. Por lo tanto trataremos de ofrecer otras estimaciones sin tener que usar la dirección de la geodésica ni la dirección de la sombra. Más aún es un método que puede probar cualquier persona con las mediciones de un único lugar (sin ser necesarias dos ciudades), no obstante nosotros lo usaremos como un método de testeo para las mediciones ya hechas.

En primer lugar vamos a sacar de internet la posición del Sol justo en la hora a la que pertenecen las mediciones tomadas, en este punto el sol no da sombra al estar perpendicular. Podemos usar la página https://www.fourmilab.ch/cgi-bin/Earth o cualquier otra que el lector considere fiable. Una vez teniendo la posición del Sol, vamos a medir las distancias desde cada una de las ciudades hasta la posición del sol (podemos usar google maps). Llamaremos a estas distancias D_A "distancia al Sol en A" y D_B "distancia al Sol en B".

Ahora la situación que tenemos es exactamente la que tenía Eratóstenes en el experimento clásico. Calculamos los ángulos de incidencia del sol en cada punto.

$$\varphi_A = \arctan\left(\frac{S_A}{a_A}\right) \qquad \varphi_B = \arctan\left(\frac{S_B}{a_B}\right)$$

Con estos datos ya podemos sacar una estimación del radio terrestre en ambos puntos

$$R_A = \frac{D_A}{\varphi_A} \qquad R_B = \frac{D_B}{\varphi_B}$$

siendo R_A la estimación del radio desde el punto A y R_B la estimación en B. Análogamente se puede hacer la estimación de la altura del Sol en una hipotética Tierra plana con cada punto.

Este método tiene menos error de medición, debido a que no hace falta calcular

4 Experimento alternativo usando la menor cantidad de datos de internet

Vamos a intentar simplificar el experimento para que no haga falta tomar la medida de la dirección de la sombra ni haga falta la dirección de la geodésica. En cambio si que usaremos la distancia entre paralelos D_P (medida con google earth).

Esta vez lo que haremos será medir las siguientes cosas

- Longitud de la vara utilizada. Usando la cinta métrica
- Longitud de la sombra de la vara en el cenit solar. Que es cuando la sombra del Sol apunta exactamente al Norte o al Sur, que es la hora cuando el Sol está más alto.
- Punto geográfico donde se colocó la vara. Usando el GPS.

Solo con estas mediciones conseguiremos una medida más exacta del radio debido a que no tendremos el error de medición de la dirección de la sombra. Con estas mediciones podemos suponer tranquilamente que ambos puntos están en el mismo meridiano, con lo que los cálculos son muy simples.

$$R_T = \frac{D_P}{|\varphi_A - \varphi_B|}$$

Este sería el radio de la Tierra estimado. Para la altura del Sol en la tierra plana sería

$$M = \frac{D_P \sin(\pi - \varphi_B)}{\sin(\varphi_B - \varphi_A)} \qquad h = \sin(\varphi_A) M$$

Como ya se mostró en una sección anterior.

5 Resultados empíricos del experimento

Usaremos el programa Octave para hacer los cálculos. Primero implementamos el código de una función que nos calcule el radio terrestre, la hipotética altura del Sol en una Tierra plana y la distancia al punto de la tierra sobre el que está el Sol.

```
function v=eratostenes(aA,aB,sA,sB,alfaA,alfaB,cA,cB,D)

% aA,ab          ALTURAS DE LAS VARAS
% sA,sB          SOMBRAS DE LAS VARAS
% alfaA,alfaB    DIRECCION DE LAS SOMBRAS
%cA,cB           DIRECCION DE LA GEODESICA EN AMBOS PUNTOS

lA=sA*cos(alfaA-cA);      % PROYECCION DE sA SOBRE LA GEODESICA
betaA=atan(aA/lA);        % ANGULO CON LA PROYECCION

%rad2deg(betaA)

lB=sB*cos(alfaB-cB);      % PROYECCION DE sB SOBRE LA GEODESICA
betaB=atan(aB/lB);        % ANGULO CON LA PROYECCION

%arcoEstimado=rad2deg(betaA-betaB)

%DISTANCIA EN LINEA RECTA AL SOL APLICANDO TEOREMA DEL SENO
M=(D*sin(pi-betaB))/sin(abs(betaB-betaA));
h=sin(betaA)*M; %Altura del Sol en la Tierra plana
dSol=sqrt(M^2+h^2); %Distancia al Sol por el suelo

RT=D/abs(betaA-betaB);  %Radio de la Tierra

v=[RT h dSol];

endfunction
```

Teniendo esta función, crearemos un archivo de texto donde se implemente esta función con las mediciones realizadas. La medición se realizó el día 18 de Mayo de 2021 en las localidades Sevilla capital y Alcalá de Henares (Madrid).

```
%PRUEBA 18-5-2021 16:30
%% MEDICIONES ERATOSTENES SEVILLA-MADRID
aA=318;        % ALTURA DE LA VARA SEVILLA
sA=208;           % LONGITUD SOMBRA SEVILLA

aB=269;           % ALTURA VARA MADRID
sB=214;             % LONGITUD SOMBRA MADRID

alfaA=deg2rad(68.5);     % DIRECCION SOMBRA SEVILLA
alfaB=deg2rad(68);     % DIRECCION SOMBRA SEVILLA

D=406.87;       %DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS
DsinSombraA=3703.3; %DISTANCIA AL PUNTO SIN SOMBRA EN SEVILLA
DsinSombraB=4045.11; %DISTANCIA AL PUNTO SIN SOMBRA EN MADRID

cA=deg2rad(90-56.59);      % DIRECCION GEODESICA SEVILLA
cB=deg2rad(90-55.1);       % DIRECCION GEODESICA MADRID

k=eratostenes(aA,aB,sA,sB,alfaA,alfaB,cA,cB,D);
v(1,:)=testEra(aA,sA,DsinSombraA);
v(2,:)=testEra(aB,sB,DsinSombraB);
```

```
%ESTIMACION SIN USAR EL PUNTO SIN SOMBRA
RadioEstimado=k(1)
AlturaSolEstimada=k(2)
DistanciaSolEstimada=k(3)
%ESTIMACIONES USANDO EL PUNTO SIN SOMBRA DE LA TIERRA
RadioEratostenes1=v(1,1)
AlturaSolEratostenes1=v(1,2)
RadioEratostenes2=v(2,1)
AlturaSolEratostenes2=v(2,2)
```

Este archivo calcula las estimaciones del radio y la altura del Sol tanto sin tener en cuenta el punto sin sombra, como las estimaciones de ambas ciudades con el punto sin sombra. Al ejecutar el archivo en la consola de comandos conseguimos los siguientes resultados

```
>> medida180521
RadioEstimado =   4219.4
AlturaSolEstimada =   3100.4
DistanciaSolEstimada =   4688.2
RadioEratostenes1 =   6393.3
AlturaSolEratostenes1 =   2422.3
RadioEratostenes2 =   6019.4
AlturaSolEratostenes2 =   3218.0
```

Con el primer método el radio estimado es de 4219.4 km y la altura del sol en la tierra plana 3100.4 km. El dato llamado "DistanciaSolEstimada" es la distancia hasta el punto sin sombra en la tierra plana. Luego teniendo en cuenta el punto donde está el Sol (punto sin sombra) por el método de la sección 3 tenemos dos estimaciones del radio, 6393.3 km en Sevilla y 6019.4 km en Madrid (lo cual son unas estimaciones mucho más precisas), y de alturas del Sol tenemos 2422.3 km y 3218 km de altura .

El día 23 de Mayo de 2021 realizamos el experimento de la forma indicada en la sección 4. Creamos un archivo de octave que nos realice las cuentas

```
%PRUEBA 23-05-2021
%Cenit Sevilla a las 14:20 segun cuando la brujula marca el norte
aA=318;
lA=93;

%Cenit Madrid a las 14:11 teorico, pero medido a las 14:16 por nubes
aB=296;
lB=104;

anguloA=atan(aA/lA);
anguloB=atan(aB/lB);

variacion=abs(anguloA-anguloB);

%Distancia entre paralelos
distancia=339.31;

%Radio de la Tierra
RadioTierra=distancia/variacion

%Altura del Sol suponiendo la tierra plana
M=distancia*sin(pi-anguloA)/sin(anguloA-anguloB);
AlturaSol=sin(anguloB)*M
DistanciaSol=sqrt(M^2+AlturaSol^2)
```

Al ejecutar el archivo en la consola de comandos nos da los siguientes resultados

```
>> medida230521
```

```
RadioTierra =  6358.9
AlturaSol =  5760.9
DistanciaSol =  8394.9
```

Los resultados obtenidos son 6358.9 para el radio de la Tierra, 5760.9 km de altura del Sol en la tierra plana, y 8394.9 km de distancia hasta el punto sin sombra según la tierra plana.

6 Estimación del radio de la Luna

Ahora trataremos de estimar el radio de la Luna a partir de la estimación del radio de la Tierra y observaciones en un eclipse de Luna.
En primer lugar vamos a ver cuanto mide la zona de penumbra del eclipse del día 26 de Mayo de 2021, en función del radio de la Luna. Para ello vamos a tomar una imagen del eclipse y calcular los radios con geogebra.

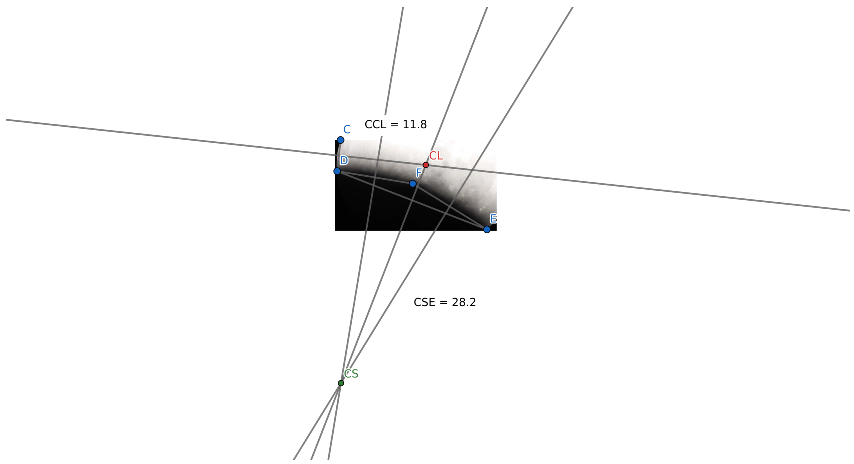

Figure 4: Medición de los radios aparentes de la Luna y la zona de penumbra.

Cogemos una foto del eclipse y calculamos los centros gráficamente, para ello basta calcular la intersección de la mediatriz de dos cuerdas de la circunferencia. En la imagen 4 podemos ver que nos da el radio aparente de la Luna en la foto $CCL = 11.8$ y el radio de la zona de penumbra $CSE = 28.2$, con lo cual tenemos que la proporción entre los radios es 2.3898 tomaremos 2.39 para simplificar.

Ahora veamos un gráfico de lo que pasaría en un eclipse, con el que podremos estimar el radio de la Luna en función del radio de la Tierra.

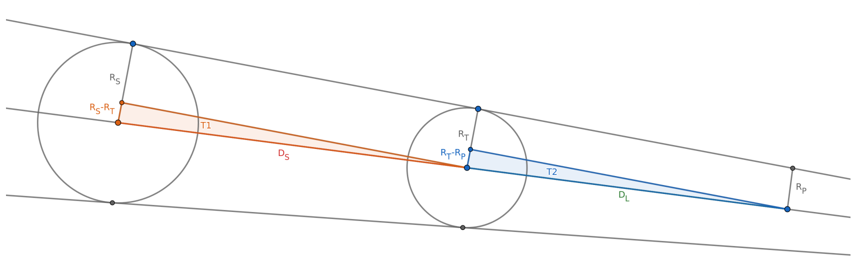

Figure 5: Gráfico de los triángulos semejantes en el eclipse.

La imagen 5 representan el sol y la Tierra formando un cono de sombra (en el que se da el eclipse). Las constantes que tenemos son R_S radio del Sol, R_T radio de la Tierra, R_P radio de la zona de penumbra a la distancia de la luna R_L

radio de la Luna, D_S distancia al Sol y D_L distancia a la Luna. Podemos ver que los triángulos T_1 y T_2del gráfico son triángulos semejantes, gracias a eso tenemos la siguiente relación

$$\frac{R_S - R_T}{D_S} = \frac{R_T - R_P}{D_L} \Longrightarrow \frac{R_S - R_T}{R_T - R_P} = \frac{D_S}{D_L} = a$$

Donde a es el ratio entra la distancia al Sol y la distancia a la Luna. Además podemos ver que el tamaño aparente del Sol y de la Luna desde la Tierra son aproximados, con lo cual podemos escribir

$$\frac{D_S}{D_L} = a = \frac{R_S}{R_L}$$

Como hemos comprobado con los cálculos en base a la imagen 4, tenemos que la zona de penumbra es 2.39 veces mas grande que la Luna, con lo cual podemos escribir $2.39R_L = R_P$. Si escribimos la ecuación que teníamos

$$\frac{R_S - R_T}{R_T - R_P} = \frac{aR_L - R_T}{R_T - 2.39R_L} = a \Longrightarrow aR_L - R_T = aR_T - 2.39aR_L \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (a+1)R_T = 3.39aR_L \Longrightarrow \frac{R_T}{R_L} = \frac{3.39a}{a+1}$$

Ahora para conseguir estimar el radio de la luna deberíamos intentar obtener la constante a. Medir esta constante es complicado, pero como justificaremos en otra sección, podemos ver que es relativamente "grande". De hecho si la consideramos suficientemente grande, el valor $+1$ que está en la última ecuación sería despreciable. Concretamente tomaremos $a + 1 \simeq a$

$$\frac{R_T}{R_L} = \frac{3.39a}{a} \Longrightarrow R_T = 3.39R_L$$

Y usando la estimación del radio de la Tierra de los anteriores apartados, podemos estimar el radio de la Luna.

```
>> medida230521
RadioTierra =  6358.9
AlturaSol =  5760.9
DistanciaSol =  8394.9
>> RadioLuna=RadioTierra/3.39
RadioLuna =  1875.8
```

Como podemos ver el radio de la Luna estimado es 1875.8 km según las cuentas que hemos realizado.

Podríamos pensar también en que podemos estimar la distancia a la Luna sabiendo su radio estimado. Para hacerlo vamos a considerar el dato conocido de que la luna tiene un diámetro angular aproximado de medio grado, y después aplicamos simple trigonometría. Implementamos en octave una función que calcule el radio de la Luna estimado y la distancia a la Luna

```
function v=aristarco(RT)

RL=RT/3.39;              %RADIO DE LA LUNA
Tang=deg2rad(0.5);       %DIAMETRO ANGULAR APARENTE
DL=2*RL/tan(Tang);       %DISTANCIA A LA LUNA

v=[RL DL];
endfunction
```

Ahora aplicamos esta función con el radio obtenido por el experimento del 23 de Mayo

```
>> aristarco(RadioTierra)
ans =

1875.78712    429887.82830
```

Esta función nos devuelve además del radio de la Luna estimado (que hemos visto ya) la distancia a la Luna desde la Tierra. La distancia a la Luna es de 429887.82830 km estimada según nuestros cálculos y aproximaciones.