Über die Turán-Kubilius-Ungleichung in der Probabilistischen Zahlentheorie

Masterarbeit

Vorgelegt von

Jonathan Schmitz

aus Düren

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

10. August 2020

Betreuerin: Priv.-Doz. Dr. Karin Halupczok
Zweitbetreuer: Prof. Dr. Rüdiger Braun

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Studium arithmetischer Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ stellt einen Grundpfeiler der analytischen Zahlentheorie dar. So lassen sich beispielsweise Fragestellungen zur Häufigkeit von Primpotenzen, zur durchschnittlichen Anzahl der Teiler in gewissen Zahlbereichen oder zur Anzahl der invertierbaren Reste modulo einer Zahl n intuitiv in Fragestellungen zum Verhalten entsprechender arithmetischer Funktionen ω, τ oder φ übersetzen. Oft haben solche Funktionen die Eigenschaft, in sich so unregelmäßig zu sein, dass ihr Verhalten mit den klassischen Kennzahlen der Analysis, wie Limiten, Asymptotiken oder Schranken, kaum zu beschreiben ist. Aus diesem Problem heraus versucht die probabilistische Zahlentheorie, arithmetische Funktionen unter statistischen Gesichtspunkten zu studieren.

Die vorliegende Arbeit orientiert sich in erster Linie an den Resultaten in Gérald Tenenbaums „Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory“ [Ten15] und gliedert sich in vier Kapitel. Das Kapitel 1 wird dabei die Problematik aufzeigen, die sich beim Versuch ergibt, klassische statistische Konzepte wie Zähldichten in der probabilistischen Zahlentheorie zu übernehmen. Als Lösung dieses Problems werden wir eine alternative Definition für Dichten angeben und die natürliche sowie logarithmische Dichte als Beispiele einführen.

Kapitel 2 wird allgemeine, aus der Wahrscheinlichkeitstheorie entlehnte Begriffe wie Erwartungswerte und Varianzen im Kontext arithmetischer Funktionen einführen. Ferner werden wir die Konzepte der mittleren Ordnung und Normalordnung erklären und anhand von Beispielen illustrieren. Solche Ordnungen werden einfache, auf einem Großteil der natürlichen Zahlen aber sehr präzise Approximationen von arithmetischen Funktionen f angeben. Durch Vernachlässigung des Verhaltens von f auf einer kleinen Teilmenge der natürlichen Zahlen werden wir also den Vorteil der regelmäßigen und simplen Beschreibbarkeit von f auf den restlichen natürlichen Zahlen gewinnen. Einige große Resultate der Arbeit werden spezielle Aussagen über additive arithmetische Funktionen sein, für die wir die Turán-Kubilius-Ungleichung als Analogon zur Bienaymé-Tschebyscheff-Ungleichung aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie zeigen werden.

Wir werden hierbei die arithmetischen Funktionen f als Folgen $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen auf dem diskreten Raum der ersten N natürlichen Zahlen mit Gleichverteilung betrachten. Aus dieser Anschauung wird sich auf natürliche Weise die Fragestellung ergeben, ob für die Verteilungen von f für $N \to \infty$ ein schwacher Grenzwert existiert. Kapitel 3 wird auf rein wahrscheinlichkeitstheoretischer Ebene auf den Stetigkeitssatz von LÉVY hinarbeiten, um diese Frage in Form einer äquivalenten Bedingung an die f_N zu beantworten.

In Kapitel 4 werden wir mit Hilfe der TURÁN-KUBILIUS-Ungleichung aus Kapitel 2 sowie den Resultaten aus Kapitel 3 speziell für reellwertige, additive arithmetische Funktionen zwei Sätze von DELANGE beweisen. Aufbauend darauf wird der Satz von ERDŐS-WINTNER ein anwendungsfreundliches Kriterium für die Existenz einer Grenzwertverteilung reellwertiger, additiver arithmetischer Funktionen liefern. In diesem Zusammenhang werden wir auch aufzeigen, wo der Satz von ERDŐS-WINTNER die Nichtexistenz einer Grenzverteilung zeigt und weitergehende Resultate, wie den Satz von ERDŐS-KAC, anschließen.

Vorbemerkungen

Zunächst sollen einige grundlegende Notationen, Begriffe und Aussagen angegeben werden, die in dieser Arbeit Verwendung finden.

Notation 0.0.1. *1. Die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ *beginnen mit* 1. *Wir setzen* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ *und* $\underline{n} := \{1, ..., n\}$ *für* $n \in \mathbb{N}$.

2. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *schreiben wir* $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq n\}$.

3. *Für* $a, b \in \mathbb{Z}$ *schreiben wir Teilbarkeiten als*

$$a \mid b \quad :\Leftrightarrow \quad (\exists\, z \in \mathbb{Z} : b = z \cdot a)\,.$$

Gilt diese Beziehung nicht, schreiben wir $a \nmid b$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *schreiben wir kurz* $\sum_{d|n} a_d$ *bzw.* $\prod_{d|n} a_d$ *für die Summe bzw. das Produkt über alle* a_d, *für die* $d \in \mathbb{N}$ *und* $d \mid n$ *gilt.*

4. *Den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen* $a, b \in \mathbb{N}$ *notieren wir als* $(a, b) := \max\{n \in \mathbb{N} : n \mid a \text{ und } n \mid b\}$.

5. *Die Buchstaben* p *und* q *verwenden wir ausschließlich für Primzahlen. Die Menge der Primzahlen notieren wir als* $\mathbb{P}$.

6. *Somit meinen wir mit* $\sum_{p \leq x} a_p$ *bzw.* $\prod_{p \leq x} a_p$ *die Summe bzw. das Produkt über jene* a_d, *für die* d *eine Primzahl und* $d \leq x$ *ist.*

7. *Summen bzw. Produkte über jene* a_d, *die alle echten Primpotenzen* $d = p^k \leq x$ *mit einer Primzahl* p *und* $k \geq 1$ *durchlaufen, kürzen wir als* $\sum_{p^k \leq x} a_{p^k}$ *bzw.* $\prod_{p^k \leq x} a_{p^k}$ *ab.*

8. *Für Primpotenzen* p^ℓ *mit* $\ell \in \mathbb{N}_0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *schreiben wir*

$$p^\ell \,||\, n \quad :\Leftrightarrow \quad p^\ell \mid n \text{ und } p^{\ell+1} \nmid n.$$

Gilt die obige Aussage, notieren wir die Zahl ℓ *als* $\nu_p(n)$.

Lemma 0.0.2 (Legendre)**.** *Sei* p *eine Primzahl und* $n \in \mathbb{N}$, *dann gilt*

$$\nu_p(n!) := \max\{\ell \in \mathbb{N}_0 : p^\ell \mid n!\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor,$$

wobei sich die Summanden für alle $k \in \mathbb{N}$ *mit* $n < p^k$ *zu* 0 *auswerten.*

Beweis. Die Vielfachheit $\nu_p(n!)$, mit der p in der Primfaktorzerlegung von $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ auftaucht, entspricht der Summe der Vielfachheiten $\nu_p(m)$ über alle $m \leq n$. Somit erhalten wir

$$\nu_p(n!) = \sum_{m \leq n} \nu_p(m) = \sum_{m \leq n} \sum_{k \leq \nu_p(m)} 1 = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{m \leq n \\ \nu_p(m) \geq k}} 1 = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{m \leq n \\ p^k | m}} 1.$$

Die letzte innere Summe zählt dabei die Anzahl aller Vielfachen von p^k, die nicht größer als n sind. Von diesen gibt es genau $\lfloor n/p^k \rfloor$ Stück, womit die Behauptung folgt. □

Notation 0.0.3. *Im Folgenden schreiben wir $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, wenn wir auf die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ Bezug nehmen wollen. Wir setzen bei dieser Schreibweise voraus, dass $r \in \mathbb{N}_0$ ist, die $p_1, ..., p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen und $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}$ sind. Damit ist r minimal und der Fall $r = 0$ entspricht genau dem Fall $n = 1$.*

Definition 0.0.4. *Für $a, b, n \in \mathbb{C}$ schreiben wir $a \equiv b \mod n$, falls ein $z \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $a - b = z \cdot n$ gilt. Man beachte hierbei, dass a, b und n komplexwertig sein dürfen.*

Definition 0.0.5. *Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$* ***konvergiert gleichmäßig*** *auf $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt.*

Lemma 0.0.6. *Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x)|$ für eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ als Folge $(\sum_{n=1}^{N} f_n)_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf D.*

Beweis. Die Reihen $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für $x \in D$ konvergieren nach Voraussetzung absolut, also konvergiert die Folge $(\sum_{n \leq N} f_n)_{N \in \mathbb{N}}$ punktweise auf D. Für $\varepsilon > 0$ können wir mit der Konvergenzvoraussetzung ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $\sum_{n=N_0(\varepsilon)}^{\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x)| < \varepsilon$ gilt. Für alle $N \geq N_0(\varepsilon)$ gilt somit

$$\sup_{x \in D} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x)| < \varepsilon,$$

sodass für $\varepsilon \downarrow 0$ die Folge $\sum_{n=1}^{N} f_n$ gleichmäßig auf D gegen f konvergiert. □

Definition 0.0.7. *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ offen. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{C}$* ***konvergiert kompakt*** *auf D gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn sie auf jedem Kompaktum $K \subset D$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Lemma 0.0.8. *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine auf D kompakt konvergente Folge stetiger Funktionen. Dann ist auch ihr Grenzwert f stetig.*

Beweis. Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da D offen ist, finden wir ein $\delta > 0$, sodass die kompakte Menge $K := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset D$ ist. Mit der gleichmäßigen Konvergenz der $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf K finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, mit dem $|f_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$ für alle $x \in K$ gilt. Die Stetigkeit von f_N liefert ferner eine Umgebung U von x_0 (ohne Einschränkung mit $U \subseteq K \subseteq D$) für die $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon/3$ für alle $x \in U$ gilt. Damit ist

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in U$. Da $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in D$ beliebig waren, ist f somit stetig. □

Korollar 0.0.9. *Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen, die kompakt gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergieren. Für jede stetige Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergieren dann auch die $g \circ f_n$ kompakt gegen die Funktion $g \circ f$ und letztere ist stetig.*

Beweis. Die Stetigkeit der Funktion f folgt sofort aus Lemma 0.0.8. Sei nun K eine beliebige kompakte Teilmenge von D. Mit f als stetiger Funktion ist dann das Bild $K_0 := f(K) \subset \mathbb{C}$ und $K_1 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K_0) \leq 1\}$ ebenfalls kompakt. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da K_1 kompakt in $\mathbb{C}$ ist, ist die stetige Funktion g auf K_1 sogar gleichmäßig stetig. Wir finden also ein $\delta \in (0, 1)$, sodass $|g(z_1) - g(z_2)| \leq \varepsilon$ für alle $z_1, z_2 \in K_1$ mit $|z_1 - z_2| \leq \delta$ gilt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der f_n auf K können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, für welches $|f_n(x) - f(x)| \leq \delta$ für alle $n \geq n_0$ und $x \in K$ gilt. Damit ist $f_n(K) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K_0) \leq \delta\} \subseteq K_1$ für alle $n \geq n_0$, sodass mit der Wahl von δ auch

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ und $x \in K$ folgt. Da K als Kompaktum und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, folgt die kompakte Konvergenz der $g \circ f_n : D \to \mathbb{C}$. Die Stetigkeit der Grenzfunktion $g \circ f$ ist erneut Lemma 0.0.8. □

Vor allem in Kapitel 4 werden uns mit unendlichen Produkten beschäftigen. Hierzu führen wir Konvergenzbegriffe für solche Produkte ein.

Definition 0.0.10. *i) Ein unendliches Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ nennen wir **konvergent**, wenn höchstens endlich viele der a_n gleich 0 sind und die Partialprodukte der übrigen Faktoren gegen einen von 0 verschiedenen Grenzwert konvergieren.*

ii) Ist $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ *und sind die* $a_n : D \to \mathbb{C}$ *stetige Funktionen, heißt* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ***kompakt konvergent*** *auf* D*, wenn es zu jedem Kompaktum* $K \subseteq D$ *einen Index* $n_0(K) \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass die Folge* $(\prod_{n \geq n_0(K)}^{k} a_n)_{k \geq n_0(K)}$ *von Funktionen gleichmäßig auf* K *gegen eine nullstellenfreie Funktion konvergiert.*

Notation 0.0.11. *Als* $\log(x)$ *für* $x > 0$ *bezeichnen wir den natürlichen Logarithmus zur Basis* $e = \exp(1)$*. Für den Logarithmus von* x *bezüglich einer anderen Basis* $a > 1$ *schreiben wir* $\log_a(x)$*.*

Lemma 0.0.12. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *konvergiert die Reihe* $\exp(z) := \sum_{n \geq 0} z^n/n!$ *mit* $\exp(|z|) = \sum_{n \geq 0} |z|^n/n! \in \mathbb{R}$ *absolut. Für die dadurch entstehende komplexe Fortsetzung der Exponentialfunktion gilt:*

(i) $\exp$ *ist stetig auf ganz* $\mathbb{C}$*,*

(ii) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, womit* $\exp$ *insbesondere keine Nullstellen auf* $\mathbb{C}$ *besitzt,*

(iii) $|1 + z| \leq \exp(\mathrm{Re}\,(z) + |z|^2)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq 1/2$*,*

(iv) $|1 + z| \leq \exp(|z|)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*.*

Den ***Hauptzweig des Logarithmus*** *notieren wir analog zu Notation 0.0.11 ebenfalls als* $\log$ *mit* $\log(z) := \log(|z|) + i\arg(z) \in \mathbb{C}$ *für* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Dabei wählen wir* $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ *so, dass* $e^{i\arg(z)} = z/|z|$ *gilt. Hierbei gilt:*

(v) $\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$*,*

(vi) $\log$ *ist stetig auf* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$*,*

(vii) $\exp(\log(z)) = z$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*,*

(viii) $\log(z_1 z_2) \equiv \log(z_1) + \log(z_2) \mod 2\pi i$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*,*

(ix) $|\log(1 + z) - z| \leq |z|^2$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \leq 1/2$*.*

Beweis. ad (i)**:** Dies folgt, da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert und Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius stetig sind.
ad (ii)**:** Die Aussage folgt mit dem Cauchyschen Multiplikationssatz für die absolut konvergenten Reihen $\exp(z_1)$ und $\exp(z_2)$ als

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2).$$

Gäbe es nun ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z_0) = 0$, ergäbe sich der Widerspruch

$$1 = \exp(0) = \exp(z_0 - z_0) = \exp(z_0)\exp(-z_0) = 0.$$

ad (v)**:** Dies folgt aus dem Identitätssatz der Funktionentheorie und der Holomorphie beider Seiten der Gleichung. Wir zeigen dies nicht, sondern verweisen beispielhaft auf [Koe02], S. 201-208.
ad (vi)**:** Dieser Punkt folgt, da $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = \log(|z|)$ stetig und $\arg(z)$ auf $\mathbb{C}$ außerhalb von $(-\infty, 0]$ ebenfalls stetig ist.
ad (vii)**:** Mit der Definition von $\log(z)$ für $z \neq 0$, Punkt (ii) und $\exp(\log(x)) = x$ für reelle $x > 0$ gilt

$$\exp(\log(z)) = \exp(\log(|z|) + i\arg(z)) = |z|\exp(i\arg(z)) = |z|\frac{z}{|z|} = z.$$

ad $(viii)$**:** Aus der Definition der arg-Funktion ergibt sich

$$e^{i\arg(z_1 z_2)} = \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} = \frac{z_1}{|z_1|} \cdot \frac{z_2}{|z_2|} = e^{i(\arg(z_1)+\arg(z_2))},$$

sodass mit der kleinsten Periodenlänge 2π der Funktion $t \mapsto e^{it}$ die Äquivalenz $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \mod 2\pi$ gilt. Zusammen mit der Definition von $\log(z)$ und der Gleichung $\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$ für reelle $x_1, x_2 > 0$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\log(z_1 z_2) &= \log(|z_1 z_2|) + i\arg(z_1 z_2) = \log(|z_1|) + \log(|z_2|) + i\arg(z_1 z_2)\\ &\equiv \log(|z_1|) + \log(|z_2|) + i(\arg(z_1) + \arg(z_2)) \mod 2\pi i\\ &= \log(z_1) + \log(z_2) \mod 2\pi i.\end{aligned}$$

ad (ix)**:** Mit der Darstellung aus (v) erhalten wir für $|z| \leq 1/2 < 1$, dass

$$|\log(1+z) - z| = |z|^2 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2} z^k \right| \leq |z|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{2} \leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = |z|^2,$$

womit der Punkt (ix) folgt.
ad (iii)**:** Punkt (ix) liefert für $|z| \leq 1/2$, dass

$$\begin{aligned}|z|^2 &\geq |\log(1+z) - z| \geq |\mathrm{Re}\,(\log(1+z) - z)|\\ &\geq |\log(|1+z|) - \mathrm{Re}\,(z)| \geq \log(|1+z|) - \mathrm{Re}\,(z),\end{aligned}$$

also auch $\log(|1+z|) \leq \mathrm{Re}\,(z) + |z|^2$. Durch Anwenden der auf $\mathbb{R}$ monoton steigenden Exponentialfunktion auf diese Ungleichung folgt Abschätzung (iii).
ad (iv)**:** Diese Ungleichung folgt mittels der Reihendarstellung der reellen Exponentialfunktion als

$$e^{|z|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = 1 + |z| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \geq 1 + |z| \geq |1+z|. \qquad \square$$

Lemma 0.0.13. *i) Sei* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *ein unendliches Produkt und* $m \in \mathbb{N}$ *so, dass alle* $a_n \notin (-\infty, 0]$ *für* $n \geq m$ *sind. Dann ist die Konvergenz des Produktes äquivalent zur Konvergenz der Reihe* $\sum_{n \geq m} \log(a_n)$*.*

ii) Es seien die $a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stetige Funktionen und* $m \in \mathbb{N}$ *so, dass für jede Funktion* a_n *mit* $n \geq m$ *die Funktion* $\log(a_n) := \log \circ a_n$ *stetig ist. Dann folgt aus der kompakten Konvergenz der Summe* $\sum_{n \geq m} \log(a_n)$ *gegen eine Funktion* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *auch die kompakte Konvergenz des Produkts* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *gegen* $\exp(s) \prod_{n=1}^{m} a_n := (\exp \circ s) \cdot \prod_{n=1}^{m} a_n$*.*

Beweis. Für den Punkt $i)$ siehe [Kno54], S.223, Theorem 8.
Da die Folge $(s_k)_{k \geq m} := (\sum_{n \geq m}^{k} \log(a_n))_{k \geq m}$ in $ii)$ kompakt gegen s konvergiert, konvergiert mit exp als stetiger Funktion nach Korollar 0.0.9 auch die Folge $(\exp(s_k))_{k \geq m} := (\exp \circ s_k)_{k \geq m} = (\prod_{n \geq m}^{k} a_n)_{k \geq m}$ kompakt gegen $\exp(s)$. Da exp nach Punkt (ii) in Lemma 0.0.12 nullstellenfrei auf $\mathbb{C}$ und damit auch $\exp(s)$ nullstellenfrei auf $\mathbb{R}$ ist, folgt die Behauptung. □

Satz 0.0.14 (Umordnungssatz)**.** *Ein unendliches Produkt* $\prod_{n \geq 1}(1 + a_n)$ *mit* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *nennen wir* ***absolut konvergent****, wenn das Produkt* $\prod_{n \geq 1}(1 + |a_n|)$ *im Sinne von Definition 0.0.10 konvergiert. Absolut konvergente unendliche Produkte sind insbesondere konvergent. Es sind dabei äquivalent:*

i) $\prod_{n \geq 1}(1 + a_n)$ *konvergiert absolut,*

ii) $\sum_{n \geq 1} a_n$ *konvergiert absolut,*

iii) $\sum_{n \geq 1} a_{\varphi(n)}$ *konvergiert für jede bijektive Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit dem gleichen Grenzwert,*

iv) $\prod_{n \geq 1}(1 + a_{\varphi(n)})$ *konvergiert für jede bijektive Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit dem gleichen Grenzwert.*

Beweis. [Kno54], S.223, Theorem 6 zeigt, dass die absolute Konvergenz eines Produkts die Konvergenz nach Definition 0.0.10 impliziert. Die Äquivalenzen $i) \Leftrightarrow ii)$, $ii) \Leftrightarrow iii)$ und $i) \Leftrightarrow iv)$ sind – in dieser Reihenfolge – [Kno54], S.223, Theorem 7; S.138f., Theoreme 1, 2 und S.227, Theorem 11. □

Lemma 0.0.15. *Konvergiert eine Reihe* $\sum_{n \geq 1} a_n$ *mit* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *und ist für eine Indexmenge* $I = \{n_1, n_2, ...\} \subseteq \mathbb{N}$ *die Reihe* $\sum_{k \geq 1} a_{n_k}$ *absolut konvergent, konvergiert auch die Reihe* $\sum_{n \geq 1, n \notin I} a_n$*.*

Beweis. Mit dem Umordnungssatz 0.0.14, $ii) \Leftrightarrow iii)$ folgt aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{k \geq 1} a_{n_k}$ auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \geq 1, n \in I} a_n$.

Somit finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{n\geq N, n\in I} a_n\right| \leq \varepsilon/2$ und $\left|\sum_{n\geq N} a_n\right| \leq \varepsilon/2$ für alle $N \geq N_0$. Für $N \geq N_0$ gilt damit auch

$$\left|\sum_{n\geq N,\, n\notin I} a_n\right| = \left|\sum_{n\geq N} a_n - \sum_{n\geq N,\, n\in I} a_n\right| \leq \left|\sum_{n\geq N} a_n\right| + \left|\sum_{n\geq N,\, n\in I} a_n\right| < \varepsilon,$$

sodass die Behauptung für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt. □

Bemerkung 0.0.16. Einige Resultate dieser Arbeit benötigen Grundlagen der Maßtheorie. Hierzu setzen wir die Vertrautheit mit einigen Begrifflichkeiten wie in [Kle13] S.1-44 und S.87-91 voraus. Dazu zählen der Begriff eines **Ereignisraums** $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, der einer σ-**Algebra** $\mathcal{F}$ auf Ω, der eines **schnittstabilen Erzeuger-Systems** $\mathcal{P}$ von $\mathcal{F}$ und der eines **Maßes** $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$. Ebenfalls setzen wir direkt mit diesen Begriffen zusammenhängende Konzepte, wie das eines **Messraums** $(\Omega, \mathcal{F})$, eines **Maßraums** $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, der **Messbarkeit** von Funktionen

$$f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$$

und der **Integrierbarkeit** von solchen f bezüglich eines Maßes μ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ voraus. Zu Letzterem gehört auch die Definition von Integralen der Form

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x).$$

Reden wir von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbf{P}$ auf $\mathbb{R}$, gehen wir dabei von der Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}$ als zugehöriger σ-Algebra aus, welche von der Menge $\mathcal{M}$ der halboffenen Intervalle $(-\infty, x]$ für $x \in \mathbb{R}$ erzeugt wird. Mit $\mathcal{M}$ als schnittstabilem Erzeuger-System von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist dabei jedes $\mathbf{P}$ nach [Kle13], Beispiel 1.44. durch seine zugehörigen Verteilungsfunktionen

$$F_\mathbf{P} : \mathbb{R} \to [0,1]\,, \quad F_\mathbf{P}(x) := \int_{(-\infty,x]} d\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}\left((-\infty, x]\right)$$

eindeutig bestimmt. Umgekehrt definiert jede Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ wie nach [Kle13], Satz 1.60 ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Aus diesem Grund benutzen wir für $\mathbf{P}$-integrierbare Funktionen f in dieser Arbeit die äquivalenten Schreibweisen

$$\int_\mathbb{R} f(x)\, dF_\mathbf{P}(x) := \int_\mathbb{R} f(x)\, d\mathbf{P}(x).$$

Reden wir ohne Angabe eines Maßes von messbaren oder integrierbaren Funktionen $f : A \to \mathbb{C}$ für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$, meinen wir damit Messbarkeit und Integrierbarkeit bezüglich der Lebesgue-Maße auf den Borel-Algebren auf A bzw. $\mathbb{C}$, wobei wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ interpretieren. Alle Integrale der Form $\int_A f(x)\, dx$ oder $\int_a^b f(x)\, dx$ für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind als Lebesgue-Integrale zu verstehen.

Lemma 0.0.17 (partielle Summation)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine komplexwertige Folge. Setzen wir $A(t) := \sum_{n\le t} a_n$ für $t \ge 1$, gilt für jedes $x > 1$ und jede stetig differenzierbare Funktion $b : [1,x] \to \mathbb{R}$ mit $x > 1$, dass*

$$\sum_{n\le x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)\,dt.$$

Beweis. Aus der Identität $A(t) = \sum_{n\le x} a_n \mathbb{1}_{[1,t]}(n) = \sum_{n\le x} a_n \mathbb{1}_{[n,x]}(t)$ für alle $1 \le t \le x$ folgt sofort

$$\int_1^x A(t)b'(t)\,dt = \int_1^x \sum_{n\le x} a_n \mathbb{1}_{[n,x]}(t)b'(t)\,dt = \sum_{n\le x} \int_1^x a_n \mathbb{1}_{[n,x]}(t)b'(t)\,dt$$
$$= \sum_{n\le x} \int_n^x a_n b'(t)\,dt = \sum_{n\le x} a_n(b(x)-b(n)) = A(x)b(x) - \sum_{n\le x} a_n b(n).$$ □

Satz 0.0.18 (Monotone Konvergenz, Beppo-Levi)**.** *Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge μ-integrierbarer Funktionen. Konvergieren die f_n dann μ-fast überall – also überall bis auf einer μ-Nullmenge – monoton steigend gegen eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega f(x)\,d\mu(x).$$

Beide Seiten der Gleichung dürfen dabei den Wert unendlich annehmen. Speziell gilt $\sum_{n=1}^\infty \int_\mathbb{R} g_n(x)\,dx = \int_\mathbb{R} \sum_{n=1}^\infty g_n(x)\,dx$ im Falle nicht-negativer integrierbarer Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$.

Beweis. Siehe [Bil95], Theorem 16.2. □

Satz 0.0.19 (Majorisierte Konvergenz)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge messbarer Funktionen bezüglich μ und $\mathcal{B}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Ferner sei $g : \Omega \to [0,\infty]$ eine μ-integrierbare Funktion, sodass $|f_n| \le g$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Konvergieren dann die f_n punktweise μ-fast überall gegen eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ist auch f μ-integrierbar mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} f_n(x)\,d\mu(x) = \int_\mathbb{R} f(x)\,d\mu(x).$$

Beweis. Siehe [Bil95], Theorem 16.4. □

Satz 0.0.20 (Fubini)**.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ und $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ zwei σ-endliche Maßräume, $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß sowie $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine messbare*

Funktion bezüglich der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Ist dann $f \geq 0$ oder $\int_{X\times Y} |f(x,y)|\, d\mu(x,y) < \infty$, gelten die Gleichheiten

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d\mu(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y) d\mu_2(y) d\mu_1(x) = \int_Y \int_X f(x,y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Die inneren Integrale der letzten beiden Ausdrücke sind dabei jeweils $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$- bzw. $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$-messbare Funktionen. Mit $|f(x,y)| \geq 0$ ist es nach voriger Aussage für die obige Gleichung hinreichend zu zeigen, dass eines der Integrale

$$\int_X \int_Y |f(x,y)|\, d\mu_2(y) d\mu_1(x) \quad \textit{oder} \quad \int_Y \int_X |f(x,y)|\, d\mu_1(x) d\mu_2(y)$$

endlich ist. Da das Lebesguemaß λ_1 auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ σ-endlich[1] *und Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sogar endlich sind, gilt die Aussage insbesondere für solche Maße.*

Beweis. Für einen Beweis der Version reellwertiger $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, siehe [Dur10], Satz 1.7.2. Die Version für komplexwertige Funktionen folgt sofort durch Aufteilen von f und der Integrale in Real- und Imaginärteil über die Linearität der Integration. □

Definition 0.0.21. *Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nennen wir eine* ***arithmetische Funktion****. Eine solche Funktion heißt*

1. ***additiv****, falls $f(nm) = f(n) + f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $(n,m) = 1$ gilt. Sie heißt* ***multiplikativ****, falls $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $(n,m) = 1$ gilt und $f(1) \neq 0$ ist.*

2. ***vollständig additiv****, falls $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt. Sie heißt* ***vollständig multiplikativ****, falls $f(nm) = f(n) \cdot f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt und $f(1) \neq 0$ ist.*

Bemerkung 0.0.22.

1. Eine additive bzw. multiplikative Funktion f ist eindeutig durch ihre Werte auf den Primpotenzen festgelegt. So gilt für solche Funktionen und $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}$, dass $f(n) = \sum_{i=1}^r f(p_i^{\alpha_i})$ bzw. $f(n) = \prod_{i=1}^r f(p_i^{\alpha_i})$.

2. Eine vollständig additive bzw. vollständig multiplikative Funktion f ist bereits durch ihre Werte auf den Primzahlen eindeutig festgelegt als $f(n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f(p_i)$ bzw. $f(n) = \prod_{i=1}^r f(p_i)^{\alpha_i}$ für $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}$.

[1] Für die σ-Endlichkeit von λ_1 betrachte man z.B. die Intervalle $([-n,n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_1([-n,n]) = 2n < \infty$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n] = \mathbb{R}$.

3. Für additive f gilt $f(n) = f(1 \cdot n) = f(1) + f(n)$, also $f(1) = 0$. Für multiplikative f gilt $f(n) = f(1)f(n)$, also $f(1) = 1$, da $f(1) \neq 0$ ist.

Definition 0.0.23. *Sei $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir*

1. *die **Möbius-Funktion** μ durch $\mu(1) = 1$ und*

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^r, & \text{falls } r \geq 1 = \alpha_1 = ... = \alpha_r, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. *die **Primteilerzähl-** bzw. **Primfaktorzählfunktionen** ω bzw. Ω durch $\omega(n) := \sum_{p|n} 1 = r$ und $\Omega(n) := \sum_{p^k|n} 1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i$.*

3. *die **Eulersche φ-Funktion** als $\varphi(n) := \#\{k \in \underline{n} : (k,n) = 1\}$.*

Lemma 0.0.24. *Die arithmetischen Funktionen μ und φ sind multiplikativ, ω ist additiv und Ω ist vollständig additiv.*

Beweis. Für die Multiplikativität von μ und φ siehe [Bor12], Beispiel 4.6 und 4.11. Die Additivität von ω folgt für $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ und $m = q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$ mit $(n,m) = 1$, also $p_i \neq q_j$ für alle $(i,j) \in \underline{r} \times \underline{s}$, sofort aus der Definition von ω als

$$\omega(nm) = \omega(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}) = r + s = \omega(n) + \omega(m).$$

Die vollständige Additivität von Ω folgt mit der Darstellung $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ und $m = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$, wobei wir hier auch $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}_0$ zulassen, als

$$\Omega(nm) = \Omega\left(\prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right) = \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{i=1}^r \beta_i = \Omega(n) + \Omega(m). \quad \square$$

Definition 0.0.25. *Für zwei arithmetische Funktionen f und g nennen wir*

$$(f * g) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \quad n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

*das **Dirichletprodukt** von f und g.*

Lemma 0.0.26. *Die Dirichlet-Multiplikation ist assoziativ und kommutativ. Für zwei multiplikative arithmetische Funktionen f und g ist auch das Dirichletprodukt $(f * g)$ multiplikativ.*

Beweis. Die Assoziativität folgt für $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ als

$$((f*g)*h)(n) = \sum_{d|n} \left(\sum_{c|d} f(c) g\left(\frac{d}{c}\right) \right) h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{c|d} f(c) g\left(\frac{d}{c}\right) h\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{c|n} f(c) \sum_{c|d,\, d|n} g\left(\frac{d}{c}\right) h\left(\frac{n/c}{d/c}\right) = \sum_{c|n} f(c) \left(\sum_{d' | \frac{n}{c}} g(d') h\left(\frac{n/c}{d'}\right) \right) = (f*(g*h))(n),$$

wobei sich in der vorletzten Umformung d' als d/c verstehen lässt. Da $d = n/(n/d)$ genau dann alle Teiler von n durchläuft, wenn n/d dies tut, folgt die Kommutativität dieser Multiplikation als

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d) = \sum_{\frac{n}{d}|n} f(n/d) g(d) = (g*f)(n).$$

Seien nun f und g multiplikativ sowie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $(n_1, n_2) = 1$. Wegen der Teilerfremdheit von n_1 und n_2 existiert für jeden Teiler $d \in \mathbb{N}$ von $n_1 n_2$ eine eindeutige Zerlegung $d = d_1 d_2$ mit $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, sodass $(d_1, d_2) = 1$ ist und $d_i \mid n_i$ für $i = 1, 2$ gilt. Auch umgekehrt gilt im Falle $d_1 \mid n_1$ und $d_2 \mid n_2$, dass $d_1 d_2$ ein Teiler von $n_1 n_2$ ist. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
(f*g)(n_1 n_2) &= \sum_{d|n_1 n_2} f(d) g(n_1 n_2/d) = \sum_{d_1|n_1,\, d_2|n_2} f(d_1 d_2) g(n_1 n_2/d_1 d_2) \\
&= \sum_{d_1|n_1} \sum_{d_2|n_2} f(d_1) f(d_2) g(n_1/d_1) g(n_2/d_2) \\
&= \left(\sum_{d_1|n_1} f(d_1) g(n_1/d_1) \right) \cdot \left(\sum_{d_2|n_2} f(d_2) g(n_2/d_2) \right) \\
&= (f*g)(n_1) \cdot (f*g)(n_2),
\end{aligned}$$

womit $(f*g)$ multiplikativ ist. $\square$

Lemma 0.0.27. *Für $n \in \mathbb{N}$ und die* MÖBIUS*-Funktion μ gilt*

$$(\mu * \mathbb{1})(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\mathbb{1}$ die konstante Einsfunktion ist.

Beweis. Aus der Definition der μ-Funktion folgt $\mu(p^k) = 0$ für $k \geq 2$. Zusammen mit der Multiplikativität der μ-Funktion nach Lemma 0.0.24 erhalten wir somit für $2 \leq n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}$, also $r, \alpha_1, ..., \alpha_r \geq 1$, dass

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{k_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{k_r=0}^{\alpha_r} \mu\left(p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}\right) = \sum_{k_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{k_r=0}^{\alpha_r} \mu\left(p_1^{k_1}\right) \cdots \mu\left(p_r^{k_r}\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{1} \cdots \sum_{k_r=0}^{1} (-1)^{k_1+\ldots+k_r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k = (1-1)^r = 0.$$

Speziell für $n = 1$ gilt $\sum_{d|1} \mu(d) = \mu(1) = 1$. □

Lemma 0.0.28 (Möbius-Inversionsformel). *Die Möbius-Funktion μ ist bezüglich der Dirichlet-Multiplikation das inverse Element der konstanten Einsfunktion $\mathbb{1}$. Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $g := \mathbb{1} * f$ gilt also $f = \mu * g$, d.h.*

$$f(n) = (\mu * g)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach dem Lemma 0.0.27 ist $(\mu * \mathbb{1})(k) = \mathbb{1}_{(k=1)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Mit der Assoziativität und Kommutativität von Dirichletprodukten gilt somit

$$f(n) = \sum_{c|n} f(c) \mathbb{1}_{(n/c=1)} = (f * (\mu * \mathbb{1}))(n) = (\mu * (\mathbb{1} * f))(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right). \quad \square$$

Definition 0.0.29. *Sei f eine arithmetische Funktion. Dann nennen wir die Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $G(x) := \sum_{n \le x} f(n)$ die zu f gehörende **summatorische Funktion**.*
*Reihen der Form $L(s, f) := \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$ bezeichnen wir – falls sie konvergieren – als **Dirichletreihen** bezüglich $s \in \mathbb{C}$ und f.*

Satz 0.0.30. *Konvergieren für $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ die Dirichletreihen $\sum_{n \ge 1} f(n)/n^s$ und $\sum_{n \ge 1} g(n)/n^s$ absolut, gilt die Identität*

$$L(s, f) L(s, g) = \sum_{n \ge 1} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{m \ge 1} \frac{g(m)}{m^s} = \sum_{k \ge 1} \frac{(f * g)(k)}{k^s}.$$

Beweis. Mit der absoluten Konvergenz beider Dirichletreihen konvergiert auch die Doppelreihe

$$L(s, f) L(s, g) = \sum_{n \ge 1} \left(\sum_{m \ge 1} \frac{g(m)}{m^s} \right) \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n \ge 1} \sum_{m \ge 1} \frac{f(n) g(m)}{(nm)^s}$$

absolut und kann nach Satz 0.0.14 umgeordnet werden, ohne den Reihenwert zu ändern. Wir fassen so die Terme zusammen, für die $mn = k \in \mathbb{N}$ konstant ist und erhalten

$$L(s, f) L(s, g) = \sum_{k \ge 1} \frac{\sum_{n|k} f(n) g(k/n)}{k^s} = \sum_{k \ge 1} \frac{(f * g)(k)}{k^s}.$$ □

Lemma 0.0.31. *Konvergiert für eine multiplikative arithmetische Funktion f und $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ die Dirichletreihe $\sum_{n\geq 1} |f(n)|/n^\sigma$, gilt die Produktdarstellung*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{k\geq 0} \frac{f(p^k)}{p^{ks}},$$

wobei die rechte Seite im Sinne eines unendlichen Produkts konvergiert.

Beweis. Mit der Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} |f(n)|/n^\sigma = \sum_{n\geq 1} |f(n)/n^s|$ konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 1} f(n)/n^s$ absolut. Damit konvergiert für jedes $p \in \mathbb{P}$ auch die Reihe $F_p(s) := \sum_{k\geq 0} f(p^k)/p^{ks}$ absolut. Sei nun $P^+(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ die jeweils größte Primzahl p, die n teilt. Mit dem Umordnungssatz 0.0.14 sowie der Multiplikativität von f gilt dann für jedes $N \in \mathbb{N}$, dass

$$\prod_{p\leq N} F_p(s) = \sum_{P^+(n)\leq N} f(n)/n^s := \sum_{n\in\mathbb{N}\,:\,P^+(n)\leq N} f(n)/n^s.$$

Die behauptete Gleichung folgt somit als

$$\left|\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} - \sum_{P^+(n)\leq N} \frac{f(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n\geq N+1} \left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \sum_{n\geq N+1} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Um zu beweisen, dass das unendliche Produkt $\prod_p \sum_{k\geq 0} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}$ im Sinne von Definition 0.0.10 konvergiert, nutzen wir die Äquivalenz $i) \Leftrightarrow ii)$ aus dem Umordnungssatz 0.0.14. Wegen $\sum_{k\geq 0} f(p^k)/p^{ks} = 1 + \sum_{k\geq 1} f(p^k)/p^{ks}$ genügt es danach, die Konvergenz der Reihe $\sum_p |\sum_{k\geq 1} f(p^k)/p^{ks}|$ zu zeigen. Dies folgt mit der Voraussetzung sofort als

$$\sum_p \left|\sum_{k\geq 1} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right| \leq \sum_{p^k\geq 1} \frac{|f(p^k)|}{(p^k)^\sigma} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} < \infty. \qquad \square$$

Definition 0.0.32. *Sei $x \geq 2$. Dann definieren wir*

1. *die **Primzahlzählfunktion** π als $\pi(x) := \sum_{p\leq x} 1$,*
2. *die **erste** **Tschebyscheff-*****Funktion*** ϑ als $\vartheta(x) := \sum_{p\leq x} \log(p)$.*

Notation 0.0.33. 1. *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nutzen wir die Landau- bzw. Vinogradov-Notation*

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ bzw. } f(x) \ll g(x) \quad \text{für } x \geq x_0,$$

falls ein $C > 0$ existiert, sodass $|f(x)| \leq Cg(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt.

2. *Wir schreiben weniger konkret $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ bzw. $f(x) \ll g(x)$, wenn ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gefunden werden kann, sodass $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \geq x_0$ gilt. Hierbei kann man sich x_0 als hinreichend große Zahl vorstellen.*

3. *Wir schreiben $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \xi$ im Falle $\lim_{x\to\xi} f(x)/g(x) = 0$.*

4. *Hängen im Falle $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ die obigen Konstanten C oder x_0 bzw. im Falle $f(x) = o(g(x))$ die Konvergenzgeschwindigkeit von $f(x)/g(x)$ von Parametern $x_1, ..., x_n$ ab, verdeutlichen wir dies durch die Schreibweise $f(x) = \mathcal{O}_{x_1,...,x_n}(g(x))$ bzw. $f(x) = o_{x_1,...,x_n}(g(x))$.*

Lemma 0.0.34. *Ist $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \geq x_0$ und existieren die Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ sowie $\int_a^b g(x)\,dx$ für $x_0 \leq a \leq b$, gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{O}\left(\int_a^b g(x)\,dx\right),$$

wobei dies als Abschätzung in den Grenzen $x_0 \leq a \leq b$ zu verstehen ist.

Beweis. Mit $|f(x)| \leq Cg(x)$ für $x \geq x_0$ und ein passendes $C > 0$, der Dreiecksungleichung und Monotonie des Integrals folgt, dass

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq C\int_a^b g(x)\,dx. \qquad \square$$

Lemma 0.0.35. *Für $a, b > 0$ ist $\log(x)^a = \mathcal{O}_{a,b}(x^b)$ für $x \geq 1$. Genauer gilt*

$$0 \leq \log(x)^a \leq (a/b)^a x^b \quad \textit{für } x \geq 1.$$

Beweis. Mit $x \mapsto x^a$ als streng monoton steigender Funktion in $x \geq 0$ folgt $\log^a(x) \leq (a/b)^a\,x^b$ für $x \geq 1$, falls $\log(x) \leq ax^{b/a}/b$ für $x \geq 1$ gilt. Es genügt also, $\log(x) \leq x^\varepsilon/\varepsilon$ für $x \geq 1$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ zu zeigen. Dies folgt als

$$0 \leq \log(x) = \int_1^x t^{-1}\,dt \leq \int_1^x t^{\varepsilon-1}\,dt = \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \leq \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}. \qquad \square$$

Lemma 0.0.36. *Es gelten die Abschätzungen*

$$\vartheta(x) \ll x \textit{ für } x \geq 1, \quad x \ll \vartheta(x) \textit{ für } x \geq 1537,$$
$$\frac{x}{\log(x)} \ll \pi(x) \ll \frac{x}{\log(x)} \textit{ für } x \geq 5.$$

Beweis. Siehe [Bor12], Lemmata 3.42, 3.43 und Korollar 3.45. $\square$

Lemma 0.0.37 (Schwache STIRLING-Formel)**.** *Für* $2 \leq n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\log(n!) = n\log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n)).$$

Beweis. Mit der vollständigen Additivität der Logarithmusfunktion und durch partielle Summation erhalten wir

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \sum_{k=1}^{n} \log(k) \cdot 1 = \log(n) \sum_{k=1}^{n} 1 - \int_1^n \frac{\sum_{k \leq t} 1}{t}\, dt \\
&= n\log(n) - \int_1^n \frac{\lfloor t \rfloor}{t}\, dt = n\log(n) - \int_1^n \frac{t - \overbrace{(t - \lfloor t \rfloor)}^{\in[0,1)}}{t}\, dt \\
&= n\log(n) - (n-1) + \mathcal{O}\left(\int_1^n \frac{dt}{t}\right) = n\log(n) - n + \mathcal{O}\left(\log(n)\right).
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt mit $1 \leq \log(n)/\log(2)$ für $n \geq 2$, also $1 + \log(n) = \mathcal{O}(\log(n))$ für $n \geq 2$. $\square$

Lemma 0.0.38. *Es gilt für* $x \geq 1$ *und eine Konstante* $\gamma \in [0,1]$*, dass*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Beweis. Partielle Summation liefert für $x \geq 1$, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \cdot 1 &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt = \frac{x - (x - \lfloor x \rfloor)}{x} + \int_1^x \frac{t - (t - \lfloor t \rfloor)}{t^2}\, dt \\
&= 1 - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x} + \log(x) - \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt \\
&= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) + \log(x) - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt + \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt. \qquad (0.0.1)
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Integrale existieren dabei für $x \geq 1$, da $(t - \lfloor t \rfloor)/t^2$ stückweise stetig, d.h. messbar ist und in $1/t^2$ mit

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}\, dt \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{x} \leq 1 \qquad (0.0.2)$$

eine integrierbare Majorante besitzt Somit ist $\gamma := 1 - \int_1^\infty (t - \lfloor t \rfloor)/t^2\, dt \in [0,1]$ und wir erhalten aus (0.0.1) durch Einsetzen von γ und Abschätzung (0.0.2) wie behauptet, dass

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right). \qquad \square$$

Lemma 0.0.39. *Für jede beschränkte, messbare Funktion $R(x) = o(1)$ für $x \to \infty$ und $s > 1$ gilt*

$$s \int_1^\infty \frac{R(x)}{x^s}\,dx = o\left(\frac{1}{s-1}\right) \qquad \textit{für } s \downarrow 1.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $R(x) = o(1)$ für $x \to \infty$ finden wir eine Folge $1 < x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < ... < x_k(\varepsilon) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ mit $|R(x)| \leq \varepsilon/2^k$ für alle $x \geq x_k$. Ferner finden wir mit der Beschränktheit von R ein $C > 0$, sodass $|R(u)| \leq C$ für alle $x \in [1,\infty)$ gilt. Mit dem Satz von Beppo-Levi lässt sich das gesuchte Integral somit betraglich abschätzen als

$$\begin{aligned}\left|(s-1)s\int_1^\infty \frac{R(x)}{x^s}\,dx\right| &\leq (s-1)s\left(\int_1^{x_1}\frac{C}{x^s}\,dx + \sum_{k=1}^\infty \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\varepsilon}{2^k x^s}\,dx\right)\\ &= Cs\left(1-\frac{1}{x_1^{s-1}}\right) + s\varepsilon\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}\underbrace{\left(\frac{1}{x_k^{s-1}} - \frac{1}{x_{k+1}^{s-1}}\right)}_{\leq 1/x_k^{s-1}\leq 1} \leq Cs\left(1-\frac{1}{x_1^{s-1}}\right) + s\varepsilon.\end{aligned}$$

Dabei gilt für festes ε, also festes $x_1(\varepsilon) > 1$, dass $\lim_{s\downarrow 1} Cs(1-x_1^{1-s}) = 0$ und $\lim_{s\downarrow 1} s\varepsilon = \varepsilon$. Somit folgt insgesamt aus der letzten Ungleichungskette, dass

$$\left|\lim_{s\downarrow 1}(s-1)s\int_1^\infty \frac{R(x)}{x^s}\,dx\right| \leq \lim_{s\downarrow 1}\left[Cs\left(1-\frac{1}{x_1^{s-1}}\right) + s\varepsilon\right] = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt für $\varepsilon \downarrow 0$ die Behauptung. □

Satz 0.0.40. *Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ konvergiert für alle $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ mit $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 1$. Speziell ist $\zeta(2) = \pi^2/6$ und es gilt für die erwähnten s die Produktdarstellung*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Beweis. Für $\sigma > 1$ existiert das Integral $\int_1^\infty x^{-\sigma}\,dx = (\sigma-1)^{-1}$. Mit dem Integralkriterium konvergiert somit auch die Reihe $\sum_{n\geq 1} n^{-\sigma} = \sum_{n\geq 1} |n^{-s}|$, d.h. die Reihe $\zeta(s)$ sogar absolut. Für die Auswertung an der Stelle $s = 2$ siehe [Kon12], Theorem 3.7 bzw. Bemerkung 3.8.
Die Produktdarstellung folgt mit der nachgewiesenen absoluten Konvergenz und Multiplikativität der konstanten Einsfunktion sofort nach Lemma 0.0.31 als $\zeta(s) = \prod_p \sum_{k\geq 0} p^{-ks}$. Hierbei nutzen wir die wegen $|p^{-s}| = p^{-\sigma} \leq 1$ gültige Darstellung der geometrischen Reihen $\sum_{k\geq 0} p^{-ks} = (1-p^{-s})^{-1}$. □

Satz 0.0.41. *Für reelle $s > 1$ gilt die Asymptotik*

$$\lim_{s \downarrow 1} \zeta(s)(s-1) = 1.$$

Beweis. Für $s > 1$ konvergiert nach Satz 0.0.40 die Reihe $\zeta(s)$ als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s} + \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\, dx, \tag{0.0.3}$$

wobei die letzte Umformung mit Beppo-Lévy und der Existenz des Integrals $\int_1^\infty x^{-s}\, dx = (s-1)^{-1}$ folgt. Wegen $s + 1 > 2$ folgt für $x \in [n, n+1]$, dass

$$0 \le \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} = \int_n^x \frac{s}{t^{s+1}}\, dt \le \int_n^{n+1} \frac{s}{n^2}\, dx = \frac{s}{n^2}.$$

Einsetzen dieser Abschätzung in (0.0.3) liefert mit $\zeta(2) = \sum_{n \ge 1} n^{-2} < \infty$ für $s > 1$, dass

$$\zeta(s) = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx + \mathcal{O}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} \frac{s}{n^2}\, dx \right) = \frac{1}{s-1} + \mathcal{O}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s}{n^2} \right) = \frac{1}{s-1} + \mathcal{O}(s).$$

Damit folgt wie behauptet, dass

$$\lim_{s \downarrow 1} \zeta(s)(s-1) = 1 + \lim_{s \downarrow 1} (s-1)\mathcal{O}(s) = 1. \qquad \square$$

Lemma 0.0.42. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Hat jede Teilfolge der a_n eine weitere Teilfolge, die gegen α konvergiert, ist α auch der Grenzwert der gesamten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Beweis. Wäre α nicht der Grenzwert der a_n, gäbe es eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit $\alpha \in U$ sowie eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \notin U$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge dieser α_{n_k} hätte somit aber keine eigene Teilfolge, die gegen α konvergiert, was der Voraussetzung widerspricht. $\square$

Kapitel 1

Dichten

1.1 Die Problematik von Dichten

Die Zahlentheorie steht oft vor dem Problem, intuitive Aussagen formalisieren zu wollen. Im Fall dieser Arbeit möchten wir zunächst Formulierungen wie „*Die Hälfte der ganzen Zahlen ist gerade.*“ oder „*Der Anteil der Primzahlen unter den natürlichen Zahlen ist verschwindend klein.*“ eine konkrete mathematische Bedeutung geben.

Der erste intuitive Ansatz hierzu besteht darin, sich Methoden aus der Stochastik zunutze zu machen. So erlaubt die Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{N}$, bestimmten Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ Masse zuzuweisen. Unter einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß für unsere Zwecke sollten dabei beispielsweise die ungeraden Zahlen die gleiche Wahrscheinlichkeit erhalten wie die geraden Zahlen. Allgemeiner gesprochen wäre es wünschenswert, allen Vielfachen einer Zahl $a \in \mathbb{N}$ innerhalb der natürlichen Zahlen die Wahrscheinlichkeit $1/a$ zuzuordnen. Der folgende Satz zeigt, dass sich dieser Wunsch als unvereinbar mit dem Konzept von Wahrscheinlichkeitsmaßen herausstellt.

Satz 1.1.1. *Für $a \in \mathbb{N}$ seien $a\mathbb{N} := \{an \mid n \in \mathbb{N}\}$ die positiven Vielfachen von a. Dann gibt es kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $\mathbb{N}$ mit*

$$\mathbf{P}(a\mathbb{N}) = \frac{1}{a} \textit{ für alle } a \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$. Seien dann $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ beliebig und $m < p_1 < p_2 < ... < p_r \leq n$ die Folge der Primzahlen zwischen m und n. Ohne Einschränkung sei hierbei $r \geq 1$. Mit der paarweisen Teilerfremdheit von p_1 bis p_r ist dann $\bigcap_{i \in I} p_i\mathbb{N} = (\prod_{i \in I} p_i)\mathbb{N}$ für jede Indexmenge $\emptyset \neq I \subseteq \{1, ..., r\}$. Somit sind die Ereignisse $p_1\mathbb{N}$ bis $p_r\mathbb{N}$ bezüglich $\mathbf{P}$ unabhängig, da für alle selbigen Indexmengen I gilt, dass

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in I} p_i\mathbb{N}\right) = \mathbf{P}\left(\left(\prod_{i \in I} p_i\right)\mathbb{N}\right) = \frac{1}{\prod_{i \in I} p_i} = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(p_i\mathbb{N}).$$

Für die Komplemente $(p_i\mathbb{N})^C = \mathbb{N} \setminus p_i\mathbb{N}$ können wir somit aus dem In- und Exklusionsprinzip folgern, dass

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^r (p_i\mathbb{N})^C\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^r p_i\mathbb{N}\right) = 1 - \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,r\}\\ \#I=k}} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^r (-1)^k \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,r\}\\ \#I=k}} \prod_{i\in I} \mathbf{P}(p_i\mathbb{N}) = \prod_{i=1}^r (1 - \mathbf{P}(p_i\mathbb{N}))\,.\end{aligned}$$

Der letzte Umformungsschritt kommt dabei durch einfaches Ausmultiplizieren von rechts nach links zustande. Da m kein Vielfaches einer Primzahl $p > m$ sein kann, d.h. m ein Element von $\bigcap_{p>m}(p\mathbb{N})^C$ ist, erhalten wir aus der letzten Gleichungskette, dass

$$\mathbf{P}(\{m\}) \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{m<p\leq n} (p\mathbb{N})^C\right) = \prod_{m<p\leq n} (1 - \mathbf{P}(p\mathbb{N})) = \prod_{m<p\leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Mit

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \sum_{m=1}^\infty \underbrace{\frac{|x|^{2m} - |x|^{2m+1}/(2m+1)}{(2m)!}}_{\geq 0} \geq 1 + x \geq 0$$

für $x \in (-1, 0)$ folgt somit die Abschätzung

$$\mathbf{P}(\{m\}) \leq \prod_{m<p\leq n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq \prod_{m<p\leq n} \exp\left(-\frac{1}{p}\right) = \exp\left(-\sum_{m<p\leq n} \frac{1}{p}\right). \quad (1.1.1)$$

Nach dem nachfolgenden Satz von Mertens gilt dabei, dass $\sum_{p\leq n} 1/p$ – also für festes $m \geq 1$ auch $\sum_{m<p\leq n} 1/p$ – für $n \to \infty$ bestimmt divergiert. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt somit auch

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\sum_{m<p\leq n} \frac{1}{p}\right) = 0.$$

Nach (1.1.1) muss demnach $\mathbf{P}(\{m\}) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gelten. Somit ist $\mathbf{P}(\mathbb{N}) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(\{m\}) = 0$, also $\mathbf{P}$ kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$. $\square$

Satz 1.1.2 (Mertens, 1874)**.** *Für $x \geq 2$ gelten die Abschätzungen*

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + \mathcal{O}(1) \quad \textit{und} \quad \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log(\log(x)) + \mathcal{O}(1).$$

Beweis. Für die erste Abschätzung sei zunächst $2 \leq \lfloor x \rfloor =: n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n! = \prod_{p \leq n} p^{\nu_p(n!)}$ mit $\nu_p(n!) = \sum_{m \geq 1} \lfloor n/p^m \rfloor$ nach Lemma 0.0.2. Mit der vollständigen Additivität des Logarithmus ergibt sich für $n \geq 2$ somit

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \sum_{p \leq n} \log(p)\nu_p(n!) = \sum_{p \leq n} \log(p) \sum_{m \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \\
&= \sum_{p \leq n} \log(p) \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{p \leq n} \log(p) \sum_{m \geq 2} \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor \\
&= n \sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} + \mathcal{O}\left(\vartheta(n)\right) + \mathcal{O}\left(n \sum_{p \leq n} \log(p) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^m} \right), \qquad (1.1.2)
\end{aligned}$$

wobei $\vartheta(t) = \sum_{p \leq t} \log(p)$ die Funktion aus Lemma 0.0.36 ist. Eine Division durch n und Auswerten der inneren geometrischen Reihe

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^m} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - 1/p} = \frac{1}{p(p-1)}$$

im $\mathcal{O}$-Term von (1.1.2) liefert über $\vartheta(t) \ll t$ für $t \geq 1$ somit, dass

$$\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} = \frac{1}{n}\Big(\log(n!) + \mathcal{O}\left(n\right)\Big) + \mathcal{O}\left(\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p(p-1)} \right). \qquad (1.1.3)$$

Der letzte $\mathcal{O}$-Ausdruck ist dabei mit $\log(x) \leq 2\sqrt{x}$ für alle $x \geq 1$ nach Lemma 0.0.35 und $p - 1 \geq p/2$ beschränkt durch

$$\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p(p-1)} \leq 2 \sum_{p \leq n} \frac{\sqrt{p}}{p(p-1)} \leq 4 \sum_{p \leq n} \frac{1}{p^{3/2}} \leq 4\zeta(3/2) < \infty.$$

Durch Anwenden der schwachen Stirling-Formel $\log(n!) = n\log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n))$ für $n \geq 2$ nach Lemma 0.0.37 und mit $\log(n) \leq n$ für $n \geq 1$ nach Lemma 0.0.35 erhalten wir für $n \geq 2$ aus (1.1.3), dass

$$\sum_{p \leq n} \frac{\log(p)}{p} = \frac{n\log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n)) + \mathcal{O}(n)}{n} + \mathcal{O}(1) = \log(n) + \mathcal{O}(1). \quad (1.1.4)$$

Die finale Abschätzung folgt mit $0 \leq \log(x/\lfloor x \rfloor) < \log(2) < 1$ für allgemeine reelle $x \geq 2$ aus (1.1.4) als

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leq x} \frac{\log(p)}{p} = \sum_{p \leq \lfloor x \rfloor} \frac{\log(p)}{p} &= \log\left(\lfloor x \rfloor\right) + \mathcal{O}(1) \\
&= \log(x) - \log(x/\lfloor x \rfloor) + \mathcal{O}(1) = \log(x) + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Für die zweite Abschätzung setzen wir (wie in der ersten Abschätzung bewiesen) $A(x) := \sum_{p\leq x} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + \mathcal{O}(1)$ für $x \geq 2$. Partielle Summation liefert dann für ebendiese x, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \sum_{p\leq x} \frac{\log(p)}{p} \cdot \frac{1}{\log(p)} &= \frac{\log(x) + \mathcal{O}(1)}{\log(x)} + \int_2^x \left(\frac{d}{du}\frac{1}{\log(u)}\right) A(u)\, du \\
&= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right) + \int_2^x \frac{\log(u)}{u(\log(u))^2}\, du + \int_2^x \frac{\mathcal{O}(1)}{u(\log(u))^2}\, du \\
&= \mathcal{O}(1) + \int_2^x \frac{du}{u\log(u)} + \mathcal{O}\left(\int_2^x \frac{du}{u(\log(u))^2}\right). \qquad (1.1.5)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt nutzen wir dabei $0 \leq 1/\log(x) \leq 1/\log(2)$ für $x \geq 2$, also $1 + \mathcal{O}(1/\log(x)) = \mathcal{O}(1)$ für $x \geq 2$. Das Auflösen der Integrale in (1.1.5) liefert für $x \geq 2$ somit

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} &= \mathcal{O}(1) + \log(\log(x)) - \log(\log(2)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{\log(2)}\right) \\
&= \log(\log(x)) + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

□

Da klassische Zähldichten nach Satz 1.1.1 für die angestrebte Theorie nicht in Frage kommen, möchten wir alternative Abbildungen $\mathbf{P} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ festlegen, welche die Forderung $\mathbf{P}(a\mathbb{N}) = 1/a$ für beliebige $a \in \mathbb{N}$ respektieren. Eine weitere intuitive Forderung für solche $\mathbf{P}$ ist, dass endliche Mengen einen vernachlässigbar kleinen Anteil unter den natürlichen Zahlen ausmachen sollen. Die Abbildung $\mathbf{P}$ soll also endlichen Mengen die Masse 0 zuweisen.

Um ein solches $\mathbf{P}$ festzulegen, ändern wir das Konzept einer Zähldichte auf $\mathbb{N}$ ein wenig ab. Solche Zähldichten erhalten wir dabei stets durch Festlegung einer Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leq \lambda_n \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ gilt. Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ergibt sich dann ihre Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(A)$ unter dieser Zähldichte als $\mathbf{P}(A) := \sum_{n\in A} \lambda_n$. Ähnlich werden wir auch im Folgenden vorgehen, mit dem Unterschied, dass wir nicht-negative Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden, die bestimmt divergente Reihen definieren.

Definition 1.1.3. *Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negative reelle Folge, deren Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ bestimmt divergiert. Die zugehörige* ***Dichte*** *$d(A)$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir dann, falls der Grenzwert existiert, als*

$$d(A) := \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{a\leqslant x, a\in A} \lambda_a}{\sum_{n\leq x} \lambda_n}.$$

Bemerkung 1.1.4. Nach obiger Konstruktion haben alle endlichen Mengen $A \subset \mathbb{N}$ die Dichte 0. Dies folgt für $\alpha := \sum_{a \in A} \lambda_a < \infty$ aus der Divergenz der Reihe über die λ_n als

$$d(A) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sum_{a \leqslant x, a \in A} \lambda_a}{\sum_{n \leq x} \lambda_n} = \alpha \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sum_{n \leq x} \lambda_n} = 0. \tag{1.1.6}$$

Diese Beobachtung motiviert das folgende Lemma, welches festhält, wie nah der Begriff einer zahlentheoretischen Dichte einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$ kommt.

Lemma 1.1.5. *Jede Dichte d nach Definition 1.1.3 ist ein Inhalt auf dem System $\mathcal{A}$ der Mengen $A \subset \mathbb{N}$, für die $d(A)$ definiert ist. Neben $d(\mathbb{N}) = 1$ gilt also*

i) $d(\emptyset) = 0$,

ii) $d\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d(A_i)$ *für paarweise disjunkte $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$.*

Im Allgemeinen ist aber weder $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, noch ist d auf $\mathcal{A}$ σ-additiv.

Beweis. Die Behauptung $d(\mathbb{N}) = 1$ und *i)* folgt sofort aus Definition 1.1.3. Für paarweise disjunkte $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ und beliebiges $N \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\frac{1}{\sum_{k \leq N} \lambda_k} \sum_{\substack{a \in A_1 \cup ... \cup A_n \\ a \leq N}} \lambda_a = \frac{1}{\sum_{k \leq N} \lambda_k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{a \in A_i \\ a \leq n}} \lambda_a = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sum_{k \leq N} \lambda_k} \sum_{\substack{a \in A_i \\ a \leq n}} \lambda_a \right).$$

Also ist für $N \to \infty$ auch $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ und es folgt die Behauptung *ii)*. Nach Bemerkung 1.1.4 ist $\{n\} \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $d(\{n\}) = 0$. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, muss also $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}}$ gelten. Wir werden aber im Widerspruch dazu in Beispiel 1.2.4 noch Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ sehen, für welche spezielle Dichten $d(A)$ nicht existieren. Einen allgemeinen Widerspruch zur σ-Additivität von d auf $\mathcal{A}$ erhalten wir ebenfalls mit 1.1.4 als

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} d(\{n\}) = 0 \neq 1 = d(\mathbb{N}) = d\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right). \qquad \square$$

1.2 Die natürliche Dichte

Eine Dichte wie in Definition 1.1.3 erzeugt man auf die wohl intuitivste Weise durch das Setzen von $\lambda_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der dadurch entstehenden Dichte lassen wir einen entsprechenden Namen zukommen.

Definition 1.2.1 (Natürliche Dichte)**.** *Die **natürliche Dichte** $\boldsymbol{d}(A)$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ definieren wir – falls der Grenzwert existiert – als*

$$\boldsymbol{d}(A) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \#\{a \leq x : a \in A\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{a\leq x, a\in A} 1}{\sum_{n\leq x} 1}.$$

Entsprechend definieren wir die obere natürliche Dichte $\overline{\mathbf{d}}(A)$ bzw. untere natürliche Dichte $\underline{\mathbf{d}}(A)$, indem wir den obigen Limes durch einen Limes superior bzw. Limes inferior ersetzen.

Alternativ beschreibt das folgende Lemma die natürliche Dichte.

Lemma 1.2.2. *Für eine unendliche Menge $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\} \subset \mathbb{N}$ mit $a_1 < a_2 < ...$ gilt $\boldsymbol{d}(A) = \alpha$ für ein $\alpha \in [0, 1]$ genau im Falle*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = \alpha. \tag{1.2.1}$$

Beweis. Die Notwendigkeit ergibt sich im Falle der Existenz einer natürlichen Dichte mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ als

$$\alpha = \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{a \leq x : a \in A\}}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{a \leq a_n : a \in A\}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}.$$

Die Bedingung ist hinreichend, da für $A(x) := \#\{a \leq x : a \in A\}$ bzw. $A(x) = \max\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq x\}$ mit $\lim_{x\to\infty} A(x) = \infty$ aus (1.2.1) folgt, dass

$$1 \cdot \alpha \xleftarrow{x\to\infty} \frac{A(x)}{A(x)+1} \cdot \frac{A(x)+1}{a_{A(x)+1}} = \frac{A(x)}{a_{A(x)+1}} \leq \frac{A(x)}{x} \leq \frac{A(x)}{a_{A(x)}} \xrightarrow{x\to\infty} \alpha.$$

Also ist mit obiger Abschätzung auch

$$\boldsymbol{d}(A) = \lim_{x\to\infty} \frac{\#\{a \leq x : a \in A\}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = \alpha. \qquad \square$$

Bemerkung 1.2.3. Zwischen der natürlichen Dichte und den Zähldichten in der Wahrscheinlichkeitstheorie lässt sich neben den Bemerkungen vor Definition 1.1.3 ein weiterer Zusammenhang feststellen. Sei dazu $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ die Folge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{N}$, für die v_N jeweils die Gleichverteilung auf $\{1, ..., N\}$ darstellt als

$$v_N(\{a\}) = \begin{cases} 1/N, & \text{falls } a \in \{1, ..., N\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls dann die natürliche Dichte $\boldsymbol{d}(A)$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ existiert, erhalten wir aus der Definition von $\boldsymbol{d}$ sofort, dass

$$\boldsymbol{d}(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{a \leq N : a \in A\}}{N} = \lim_{N\to\infty} v_N(A).$$

Auf diese Weise liefert die natürliche Dichte $\boldsymbol{d}(A)$ eine sehr intuitive Größe. Sie beschreibt für $N \to \infty$ den Grenzwert der Wahrscheinlichkeiten, mit denen wir Elemente aus A bei einer zufälligen, gleichverteilten Ziehung aus den ersten N Zahlen ziehen würden.

Beispiel 1.2.4. 1. Jede arithmetische Progression $n + q\mathbb{N}$ für $n, q \in \mathbb{N}$ besitzt eine natürliche Dichte, nämlich

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(n+q\mathbb{N}) &= \lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{n<a\leq x\\ a\equiv n \bmod q}} 1 \overset{a'=a-n}{=} \lim_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{\substack{a'\leq x-n\\ q\mid a'}} 1\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor (x-n)/q \rfloor}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x/q + \mathcal{O}(1)}{x} = \frac{1}{q}.\end{aligned}$$

Damit ist die natürliche Dichte insbesondere mit unserer gewünschten Forderung $\boldsymbol{d}(a\mathbb{N}) = 1/a$ für alle $a \in \mathbb{N}$ kompatibel.

2. Es gibt Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$, die keine natürliche Dichte besitzen. Es sei als Beispiel A die Menge der natürlichen Zahlen mit Führungsziffer 1 in der Dezimaldarstellung, d.h.

$$A = \bigcup_{k\geq 0} \{n \in \mathbb{N} : 10^k \leq n < 2 \cdot 10^k\}.$$

Setzen wir $A(x) := \#\{a \leq x : a \in A\}$, gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass

$$A(10^m - 1) = \sum_{k=0}^{m-1} \#\{n : 10^k \leq n < 2 \cdot 10^k\} = \sum_{k=0}^{m-1} 10^k = \frac{1}{9}\,(10^m - 1)$$

sowie

$$A(2\cdot 10^m - 1) = \sum_{k=0}^{m} 10^k = \frac{1}{9}\left(10^{m+1} - 1\right) = \frac{5}{9}\,(2\cdot 10^m - 1) + \frac{4}{9}.$$

Somit ist

$$\underline{\boldsymbol{d}}(A) \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{9}\,(10^m - 1)}{10^m - 1} = \frac{1}{9} < \frac{5}{9} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{5}{9}\,(2\cdot 10^m - 1) + \frac{4}{9}}{2\cdot 10^m - 1} \leq \overline{\boldsymbol{d}}(A),$$

womit $\boldsymbol{d}(A)$ nicht existiert.

1.3 Die logarithmische Dichte

Neben der natürlichen Dichte ist die **logarithmische Dichte** eine oft verwendete Größe, welche wir aus Definition 1.1.3 über $\lambda_n = 1/n$ für $n \geq 1$ erhalten. Der Beziehung $\sum_{n \leq x} 1/n = \log(x) + \mathcal{O}(1)$ für $x \geq 1$ nach Lemma 0.0.38 verdankt diese Dichte ihren Namen. Mit

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sum_{n \leq x} 1/n}{\log(x)} = 1 \tag{1.3.1}$$

können wir also die folgende Definition festhalten.

Definition 1.3.1 (Logarithmische Dichte)**.** *Die* ***logarithmische Dichte*** $\boldsymbol{\delta}(A)$ *einer Menge* $A \subseteq \mathbb{N}$ *definieren wir – falls der Grenzwert existiert – als*

$$\boldsymbol{\delta}(A) := \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log(x)} \sum_{a \leq x, a \in A} \frac{1}{a} \overset{(1.3.1)}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\sum_{a \leq x, a \in A} 1/a}{\sum_{n \leq x} 1/n}.$$

Die obere logarithmische Dichte $\overline{\boldsymbol{\delta}}(A)$ *bzw. untere logarithmische Dichte* $\underline{\boldsymbol{\delta}}(A)$ *definieren wir auch hier durch Ersetzen des Limes durch den Limes superior bzw. Limes inferior.*

Beispiel 1.3.2.

1. Auch die logarithmische Dichte erfüllt die Forderung $\boldsymbol{\delta}(a\mathbb{N}) = 1/a$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Dies folgt mit $\sum_{n \leq y} 1/n = \log(y) + \mathcal{O}(1)$ für $y \geq 1$ nach Lemma 0.0.38 als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}(a\mathbb{N}) &= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\log(x)} \sum_{n \leq x/a} \frac{1}{an} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\log(x/a) + \mathcal{O}(1)}{\log(x)} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{\log(x) - \log(a) + \mathcal{O}(1)}{\log(x)} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

2. Mit dem Satz 1.1.2 von Mertens gilt

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}\,(\mathbb{P}) = \limsup_{x \to \infty} \frac{1}{\log(x)} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\log(\log(x)) + \mathcal{O}(1)}{\log(x)} = 0 \leq \underline{\boldsymbol{\delta}}\,(\mathbb{P}),$$

womit die Primzahlen $\mathbb{P}$ die logarithmische Dichte $\boldsymbol{\delta}(\mathbb{P}) = 0$ besitzen.

Wie auch bei der natürlichen Dichte lassen sich – siehe dazu das folgende Beispiel 1.3.5 – Mengen konstruieren, die keine logarithmische Dichte besitzen. Der folgende Satz zeigt jedoch, dass solche Mengen zu jenen gehören müssen, die auch keine natürliche Dichte besitzen. Stärker gilt sogar, dass die logarithmische Dichte eine Fortsetzung der natürlichen Dichte darstellt.

Satz 1.3.3. *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt*

$$\underline{\boldsymbol{d}}(A) \leq \underline{\boldsymbol{\delta}}(A) \leq \overline{\boldsymbol{\delta}}(A) \leq \overline{\boldsymbol{d}}(A).$$

Mengen A, die eine natürliche Dichte $\boldsymbol{d}(A) = \underline{\boldsymbol{d}}(A) = \overline{\boldsymbol{d}}(A)$ besitzen, haben also auch eine logarithmische Dichte. Ferner stimmen in diesem Fall beide Dichten überein.

Beweis. Wir setzen die Funktionen $L(x) := \sum_{a \leq x, a \in A} 1/a$ sowie $A(x) := \sum_{a \leq x, a \in A} 1 = \#\{a \leq x : a \in A\} \leq x$. Über partielle Summation erhalten wir dann für $x \geq 1$, dass

$$L(x) = \sum_{x \geq a \in A} \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{A(x)}{x} - \int_1^x A(t) \left(\frac{d}{dt} t^{-1} \right) dt = \frac{A(x)}{x} + \int_1^x \frac{A(t)}{t^2}\, dt. \quad (1.3.2)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden dann $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\underline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) := \underline{\boldsymbol{d}}(A) - \varepsilon = \left(\liminf_{x \to \infty} A(x)/x \right) - \varepsilon \leq A(t)/t \quad \text{für alle } t > t_1,$$
$$\overline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) := \overline{\boldsymbol{d}}(A) + \varepsilon = \left(\limsup_{x \to \infty} A(x)/x \right) + \varepsilon \geq A(t)/t \quad \text{für alle } t > t_2$$

gilt. Somit ist $\underline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) \leq A(t)/t \leq \overline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon)$ für alle $t > t_0 := \max\{t_1, t_2\}$. Ein Abschätzen der Terme $A(x)/x$ bzw. $A(t)/t$ in (1.3.2) liefert für $x > t_0$, dass

$$\underline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) \left[1 + \int_{t_0}^x \frac{dt}{t} \right] + \int_1^{t_0} \frac{A(t)dt}{t^2} \leq L(x) \leq \overline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) \left[1 + \int_{t_0}^x \frac{dt}{t} \right] + \int_1^{t_0} \frac{A(t)dt}{t^2}.$$

Mit der Abschätzung $0 \leq A(t)/t^2 \leq 1/t$ für $t \geq 1$ und durch Auswertung der Integrale erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon)\,(1 + \log(x) - \log(t_0)) \leq L(x) &\leq \overline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon)\,(1 + \log(x) - \log(t_0)) + \int_1^{t_0} \frac{dt}{t} \\ &= \overline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon)\,(1 + \log(x) - \log(t_0)) + \log(t_0).\end{aligned}$$

Eine Division durch $\log(x)$ für $x > 1$ liefert also

$$\underline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) \left(1 + \frac{1 - \log(t_0)}{\log(x)} \right) \leq \frac{L(x)}{\log(x)} \leq \overline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) \left(1 + \frac{1 - \log(t_0)}{\log(x)} \right) + \frac{\log(t_0)}{\log(x)}.$$

Für $x \to \infty$ liefert dies mit Übergang zu $\liminf_{x \to \infty} L(x)/\log(x) = \underline{\boldsymbol{\delta}}(A)$ bzw. $\limsup_{x \to \infty} L(x)/\log(x) = \overline{\boldsymbol{\delta}}(A)$, dass

$$(\underline{\boldsymbol{d}}(A) - \varepsilon) = \underline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) \leq \underline{\boldsymbol{\delta}}(A) \leq \overline{\boldsymbol{\delta}}(A) \leq \overline{\boldsymbol{d}}(A, \varepsilon) = \left(\overline{\boldsymbol{d}}(A) + \varepsilon \right).$$

Für $\varepsilon \to 0$ zeigt dies schließlich die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.3.4. Die logarithmische Dichte stellt eine echte Fortsetzung der natürlichen Dichte dar. Die Umkehrung des Satzes 1.3.3, dass aus der Existenz einer logarithmischen Dichte auch die Existenz einer natürlichen Dichte folgt, ist also falsch. Ein Gegenbeispiel dafür finden wir erneut im Beispiel 1.2.4. Für die dortige Menge $A = \bigcup_{k\geq 0}\{n \in \mathbb{N} : 10^k \leq n < 2 \cdot 10^k\}$ der natürlichen Zahlen mit Führungsziffer 1 zur Basis 10 hatten wir gezeigt, dass keine natürliche Dichte $\boldsymbol{d}(A)$ existiert. Für die Menge A, $x \geq 10$ und $\ell := \lfloor \log_{10}(x) \rfloor \geq 1$ lässt sich dabei $L(x)$ wie aus dem letzten Beweis schreiben als

$$L(x) = \sum_{x\geq a\in A} \frac{1}{a} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{n=10^k}^{2\cdot 10^k-1} \frac{1}{n} + \sum_{10^\ell \leq n \leq \min(x,\, 2\cdot 10^\ell - 1)} \frac{1}{n}. \tag{1.3.3}$$

Wir nutzen nun die Abschätzung $\sum_{k=0}^{m} 10^{-k} \leq \sum_{k\geq 0} 10^{-k} = \mathcal{O}(1)$ für $m \in \mathbb{N}$ sowie die Asymptotik aus Lemma 0.0.38. Mit $\ell - \log_{10}(x) \in (-1, 0]$, also $\ell = \log_{10}(x) + \mathcal{O}(1)$, gilt dabei

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{n=10^k}^{2\cdot 10^k-1} \frac{1}{n} &= \sum_{k=0}^{\ell-1}\left(\sum_{n=10^k+1}^{2\cdot 10^k} \frac{1}{n} + \mathcal{O}\Big(10^{-k}\Big)\right) = \sum_{k=0}^{\ell-1}\Big(\underbrace{\log(2\cdot 10^k) - \log(10^k)}_{=\log(2)} + \mathcal{O}\Big(10^{-k}\Big)\Big) \\ &= \ell \log(2) + \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{\ell-1} 10^{-k}\right) = \log_{10}(x)\log(2) + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Auch gilt wegen $\ell \geq 1$, dass

$$\begin{aligned}\sum_{10^\ell \leq n \leq \min(x,\, 2\cdot 10^\ell - 1)} \frac{1}{n} &\leq \sum_{10^\ell \leq n \leq 2\cdot 10^\ell} \frac{1}{n} + \mathcal{O}(1) = \log(2\cdot 10^\ell) - \log(10^\ell) + \mathcal{O}(1) \\ &= \log(2) + \mathcal{O}\left(1\right) = \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Einsetzen von (1.3.4) und (1.3.5) in (1.3.3) liefert für $x \geq 10$ zusammen mit $\log_{10}(x) = \log(x)/\log(10)$ also insgesamt

$$\frac{L(x)}{\log(x)} = \frac{\log(2)\log_{10}(x)}{\log(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right) = \frac{\log(2)}{\log(10)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right).$$

Da also $\boldsymbol{\delta}(A) = \lim_{x\to\infty} L(x)/\log(x) = \log(2)/\log(10)$ existiert, besitzt A eine logarithmische Dichte trotz der Nichtexistenz von $\boldsymbol{d}(A)$.

Beispiel 1.3.5. Wir betrachten zum Abschluss des Kapitels eine Menge, die keine logarithmische Dichte, also nach Satz 1.3.3 auch keine natürliche Dichte besitzt. Wir setzen dazu induktiv $\alpha_1 := 2$ und $\alpha_k := \alpha_{k-1}^{2^k}$ für $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Dann ist offensichtlich $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$, also $\lim_{k\to\infty} 1/\log(\alpha_{k+1}) = 0$. Ferner ist $\log(\alpha_k)/\log(\alpha_{k+1}) = \log(\alpha_k)/\log(\alpha_k^{2^k}) = 2^{-k} = o(1)$ für $k \to \infty$.

Zusammen mit der Asymptotik $\sum_{n=1}^{N} 1/n = \log(N) + \mathcal{O}(1)$ für $N \geq 1$ nach Lemma 0.0.38 ist somit

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{\sum_{n \leq \alpha_k} 1/n}{\log(\alpha_{k+1})} = \frac{\log(\alpha_k) + \mathcal{O}(1)}{\log(\alpha_{k+1})} = o(1), \\ ii) \quad & \frac{\sum_{\alpha_k < n \leq \alpha_{k+1}} 1/n}{\log(\alpha_{k+1})} = \frac{\log(\alpha_{k+1}) - \log(\alpha_k) + \mathcal{O}(1)}{\log(\alpha_{k+1})} = 1 + o(1) \end{aligned}$$

jeweils für $k \to \infty$. Wir setzen nun A als die Menge aller natürlichen n mit $\alpha_{2k-1} < n \leq \alpha_{2k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, also $A = \mathbb{N} \cap \bigcup_{k \geq 1} (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}]$. Für $L(x) := \sum_{x \geq n \in A} 1/n$ aus Satz 1.3.3 gilt mit den Asymptotiken $i)$ und $ii)$ dann

$$\begin{aligned} \frac{L(\alpha_{2k+1})}{\log(\alpha_{2k+1})} &= \frac{\sum_{\alpha_{2k+1} \geq n \in A} 1/n}{\log(\alpha_{2k+1})} \leq \frac{\sum_{n \leq \alpha_{2k}} 1/n}{\log(\alpha_{2k+1})} \xrightarrow[i)]{k \to \infty} 0, \\ \frac{L(\alpha_{2k})}{\log(\alpha_{2k})} &= \frac{\sum_{\alpha_{2k} \geq n \in A} 1/n}{\log(\alpha_{2k})} \geq \frac{\sum_{\alpha_{2k-1} < n \leq \alpha_{2k}} 1/n}{\log(\alpha_{2k})} \xrightarrow[ii)]{k \to \infty} 1 \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\underline{\boldsymbol{\delta}}(A) \leq \lim_{k \to \infty} \frac{L(\alpha_{2k+1})}{\log(\alpha_{2k+1})} = 0 < 1 = \lim_{k \to \infty} \frac{L(\alpha_{2k})}{\log(\alpha_{2k})} \leq \overline{\boldsymbol{\delta}}(A),$$

womit keine logarithmische Dichte $\boldsymbol{\delta}(A)$ existiert.

Kapitel 2

Normalordnungen

2.1 Erwartungswert und Varianz

In der Stochastik basieren viele Methoden auf der approximativen Beschreibbarkeit einer Zufallsvariablen durch ihren Erwartungswert und ihre Varianz, falls diese Größen denn existieren. Wir werden für arithmetische Funktionen f analoge Begriffe definieren, um ähnlich aussagekräftige Größen zu erhalten.

Definition 2.1.1. *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine arithmetische Funktion und $N \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir den **N-ten Erwartungswert** $\mathbb{E}_N(f)$ bzw. die **N-te Varianz** $\mathbb{V}_N(f)$ von f als*

$$\mathbb{E}_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n) \quad \textit{bzw.} \quad \mathbb{V}_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n) - \mathbb{E}_N(f)|^2 .$$

Beispiel 2.1.2. Eine erste nützliche Anwendung des Erwartungswerts ergibt sich bei der Untersuchung der Quotienten $f(n) := \varphi(n)/n$ für die Eulersche φ-Funktion mit $\varphi(n) := \#\{1 \le k \le n : (k,n) = 1\}$. Für diese, eine beliebige Primzahl $p \in \mathbb{P}$ und beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \frac{p-1}{p} \xrightarrow{p\to\infty} 1, \qquad \frac{\varphi(2^\ell)}{2^\ell} = \frac{\#\{1 \le n \le 2^\ell : 2 \nmid n\}}{2^\ell} = \frac{2^{\ell-1}}{2^\ell} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\ell\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Die linke Grenzwertbildung ist dabei wegen der Existenz von unendlich vielen Primzahlen möglich. Mit den beiden Limiten ist

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} \le \frac{1}{2} < 1 \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n},$$

also der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \varphi(n)/n$ nicht existent. Ein Ersetzen der Quotienten $f(N) := \varphi(N)/N$ durch die Erwartungswerte $\mathbb{E}_N(f)$ erlaubt jedoch eine Grenzwertbildung, d.h. die Angabe eines „globalen “ Erwartungswerts von f, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.1.3 (Mertens, 1874). *Für $N \geq 2$ gilt*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} N + \mathcal{O}\left(\log(N)\right).$$

Mit $\log(N) = o(N)$ *für* $N \to \infty$ *ist somit insbesondere*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_N \left(\frac{\varphi(n)}{n} \right) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.608.$$

Bemerkung 2.1.4. Mit dem obigen Resultat lässt sich für eine „zufällig“ gewählte Zahl $n \in \mathbb{N}$ also $6/\pi^2$ als eine geeignete Schätzung für den Anteil der zu n teilerfremden Zahlen $1 \leq k \leq n$ interpretieren. Man ist versucht, $6/\pi^2$ somit als Wahrscheinlichkeit dafür zu interpretieren, dass zwei „gleichverteilt zufällig“ gegebene natürliche Zahlen teilerfremd zueinander sind. Da jedoch weder eine Gleichverteilung auf $\mathbb{N}$ noch eine Verteilung im Sinne von Satz 1.1.1 existiert, zeigt sich auch hier die Schwierigkeit, Intuition mit formaler Exaktheit zu vereinbaren.

Beweis zu 2.1.3. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi(n) = \sum_{a=1}^{n} \mathbb{1}_{((a,n)\,=\,1)}$ erhalten wir wegen $\mathbb{1}_{(k\,=\,1)} = \sum_{d|k} \mu(d)$ wie nach Lemma 0.0.27, dass

$$\varphi(n) = \sum_{a\leq n} \sum_{d|(a,n)} \mu(d) = \sum_{a\leq n} \sum_{\substack{d|a\\ d|n}} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{\substack{a\leq n\\ d|a}} 1 = \sum_{d|n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Dies liefert für $N \geq 1$, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq N} \frac{\varphi(n)}{n} &= \sum_{n\leq N} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d\leq N} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{n\leq N,\, d|n} 1 = \sum_{d\leq N} \frac{\mu(d)}{d} \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor \\
&= \sum_{d\leq N} \frac{\mu(d)}{d} \left(\frac{N}{d} + \mathcal{O}(1) \right) = N \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathcal{O}\left(N \sum_{d>N} \frac{\mu(d)}{d^2} + \sum_{d\leq N} \frac{\mu(d)}{d} \right) \\
&= N \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathcal{O}\left(N \sum_{d>N} \frac{1}{d^2} + \sum_{d\leq N} \frac{1}{d} \right), \qquad (2.1.1)
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung mit $|\mu(d)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Die Reihe $\sum_{d\geq 1} \mu(d)/d^2$ konvergiert dabei aufgrund der Abschätzung

$$0 \leq \sum_{d=1}^{\infty} \left| \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

nach Satz 0.0.40 absolut. Anwenden von Satz 0.0.30 und Lemma 0.0.27 liefert konkreter noch, dass

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c^2} \cdot \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbb{1} * \mu)(n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{(n=1)}}{n^2} = 1. \tag{2.1.2}$$

Somit folgt $\sum_{d\geq 1} \mu(d)/d^2 = \left(\sum_{b\geq 1} b^{-2}\right)^{-1} = \zeta(2)^{-1} = 6/\pi^2$ aus (2.1.2). Mit

$$\sum_{d>N} \frac{1}{d^2} = \int_N^{\infty} \frac{dt}{\lceil t\rceil^2} = \int_N^{\infty} \frac{1}{t^2} + \underbrace{\frac{1}{\lceil t^2\rceil} - \frac{1}{t^2}}_{\in(-1/t^2,0]} dt = \mathcal{O}\left(\int_N^{\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

für $N \geq 1$, der Asymptotik aus Lemma 0.0.38 und $1 + \log(N) = \mathcal{O}(\log(N))$ für $N \geq 2$ folgt aus (2.1.1) schließlich die Behauptung

$$\sum_{n\leq N} \frac{\varphi(n)}{n} = N \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + \mathcal{O}\left(1 + \log(N)\right) = \frac{6}{\pi^2} N + \mathcal{O}\left(\log(N)\right). \qquad \square$$

2.2 Mittlere Ordnung und Normalordnung

Wie wir im Beispiel 2.1.2 gesehen haben, kann es aufschlussreich sein, die Entwicklung der Erwartungswerte $\mathbb{E}_N(f)$ einer arithmetischen Funktion f asymptotisch festzuhalten. Unser Ziel wird es sein, mit einer solchen Asymptotik auch f selbst gut durch andere, einfachere Funktionen approximieren zu können, deren Erwartungswerte die gleiche Asymptotik aufweisen. Dies motiviert den Begriff der mittleren Ordnung.

Definition 2.2.1. *Für zwei arithmetische Funktionen f, g sagen wir, dass g eine **mittlere Ordnung** zu f ist bzw. f die mittlere Ordnung g besitzt, falls*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n\leq N} f(n)}{\sum_{n\leq N} g(n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{E}_N(f)}{\mathbb{E}_N(g)} = 1 \text{ gilt.}$$

Ein erstes Beispiel für eine arithmetische Funktion mit mittlerer Ordnung einfacher Gestalt ist die Teileranzahlfunktion τ aus Definition 0.0.23.

Satz 2.2.2. *Für $N \geq 1$ gilt*

$$\sum_{n\leq N} \tau(n) = N\log(N) + \mathcal{O}(N).$$

Inbesondere hat τ somit den Logarithmus als mittlere Ordnung.

Beweis. Wir erhalten durch Summenvertauschung, dass

$$\sum_{n\leq N}\tau(n)=\sum_{n\leq N}\sum_{d|n}1=\sum_{d\leq N}\sum_{\substack{n\leq N\\ d|n}}1=\sum_{d\leq N}\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor=N\sum_{d\leq N}\frac{1}{d}+\mathcal{O}\left(N\right).$$

Mit der Asymptotik $\sum_{d\leq N}1/d=\log(N)+\mathcal{O}(1)$ für $N\geq 1$ nach Lemma 0.0.38 folgt somit

$$\sum_{n\leq N}\tau(n)=N\left(\log(N)+\mathcal{O}(1)\right)+\mathcal{O}(N)=N\log(N)+\mathcal{O}(N).$$

Über partielle Summation und mit $\log(N)=\mathcal{O}(N)$ für $N\geq 1$ nach Lemma 0.0.35 erhalten wir ferner, dass

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq N}\log(n)\cdot 1&=\lfloor N\rfloor\log(N)-\int_1^N\frac{\lfloor u\rfloor}{u}\,du=N\log(N)+\mathcal{O}\left(\log(N)+\int_1^N du\right)\\&=N\log(N)+\mathcal{O}(N).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die mittlere Ordnung mit $1=\mathcal{O}\left(\log(N)\right)$ für $N\geq 2$ als

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n\leq N}\tau(n)}{\sum_{n\leq N}\log(n)}=\lim_{N\to\infty}\frac{N\log(N)+\mathcal{O}(N)}{N\log(N)+\mathcal{O}(N)}=\lim_{N\to\infty}\frac{\log(N)+\mathcal{O}(1)}{\log(N)+\mathcal{O}(1)}=1.\qquad\square$$

Eine weitere arithmetische Funktion, die wir besser verstehen wollen, ist die Primteilerzählfunktion ω aus Definition 0.0.23. Während sich diese auf allen Primpotenzen zu 1 auswertet, liefern die Fakultäten eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim_{n\to\infty}\omega(n!)=\lim_{n\to\infty}\sum_{p\leq n}1=\lim_{n\to\infty}\pi(n)=\infty$. Trotz dieser Unregelmäßigkeit liefert der folgende Satz für ω eine mittlere Ordnung.

Satz 2.2.3. *Für $N\geq 3$ gilt*

$$\sum_{n\leq N}\omega(n)=N\log(\log(N))+\mathcal{O}(N).$$

Insbesondere hat also ω die mittlere Ordnung $n\mapsto\log(\log(n))$ für $n\geq 3$ bzw. die mittlere Ordnung $n\mapsto\mathbb{1}_{[3,\infty)}(n)\cdot\log(\log(n))$.

Beweis. Es gilt zunächst die Abschätzung

$$\sum_{n\leq N}\omega(n)=\sum_{n\leq N}\sum_{p|n}1=\sum_{p\leq N}\sum_{\substack{n\leq N\\ p|n}}1=\sum_{p\leq N}\left\lfloor\frac{N}{p}\right\rfloor=N\sum_{p\leq N}\frac{1}{p}+\mathcal{O}\left(N\right).$$

Mit der zweiten Abschätzung aus Satz 1.1.2 von MERTENS folgt somit

$$\sum_{n\leq N} \omega(n) = N\Bigg(\log(\log(N)) + \mathcal{O}(1)\Bigg) + \mathcal{O}\left(N\right) = N\log(\log(N)) + \mathcal{O}(N).$$

Partielle Summation liefert mit $0 \leq \lfloor u-2\rfloor/(u\log(u)) \leq 1$ für $u \geq 3$ und $\log(\log(N)) = \mathcal{O}(N)$ für $N \geq 3$ ferner, dass

$$\begin{aligned}\sum_{3\leq n\leq N} \log(\log(n))\cdot 1 &= \log(\log(N))\lfloor N-2\rfloor - \int_3^N \frac{\lfloor u-2\rfloor}{u\log(u)}\,du \\ &= N\log(\log(N)) + \mathcal{O}\left(\log(\log(N))\right) + \mathcal{O}\left(\int_3^N du\right) \\ &= N\log(\log(N)) + \mathcal{O}(N).\end{aligned}$$

Die Aussage über die mittlere Ordnung ergibt sich somit als

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n\leq N}\omega(n)}{\sum_{3\leq n\leq N}\log(\log(n))} = \lim_{N\to\infty} \frac{N\log(\log(N)) + \mathcal{O}(N)}{N\log(\log(N)) + \mathcal{O}(N)} = 1. \qquad \square$$

Für das weitere Vorgehen werden sich eine Reihe von Abschätzungen im Stil von Satz 1.1.2 von MERTENS als nützlich erweisen.

Lemma 2.2.4. *Es seien $a, x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq a \geq 2$. Dann gilt*

i) $$\sum_{\substack{p^k\leq x,\\ k\geq 2}} \frac{1}{p^k} = \mathcal{O}(1),$$

ii) $$\sum_{\substack{p>x\\ k\geq 2}} \frac{1}{p^k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right),$$

iii) $$\sum_{p^k\leq x} \frac{1}{p^k} = \log(\log(x)) + \mathcal{O}(1),$$

iv) $$\sum_{n\leq \log_a(x)} a^n = \mathcal{O}\left(x\right).$$

Beweis. Die erste Abschätzung folgt mit $(1-1/p)^{-1} \leq (1-1/2)^{-1} = 2$ als

$$\sum_{\substack{p^k\leq x,\\ k\geq 2}} \frac{1}{p^k} \leq \sum_{p\leq x}\frac{1}{p^2}\sum_{k\geq 0} p^{-k} = \sum_{p\leq x}\frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{1-1/p}\right) \leq 2\sum_{p\leq x}\frac{1}{p^2} \leq 2\zeta(2) = \mathcal{O}(1).$$

Mit der Rechnung zu $i)$ konvergiert die Reihe $\sum_{p>x,\,k\geq 2} p^{-k}$ absolut. Die zweite Abschätzung erhalten wir damit durch Umordnen der Summanden als

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p>x\\ k\geq 2}} \frac{1}{p^k} = \sum_{\substack{p>x\\ k\geq 2,\, 2|k}} \frac{1}{p^k}\left(1+\frac{1}{p}\right) &\leq \sum_{n>x}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &\leq \left(1+\frac{1}{x}\right)\int_x^\infty \frac{1}{y^2}\,dy = \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Die dritte Abschätzung ergibt sich aus Satz 1.1.2 von MERTENS und $i)$ als

$$\sum_{p^k \leq x} \frac{1}{p^k} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p^k \leq x,\\ k \geq 2}} \frac{1}{p^k} = \log(\log(x)) + \mathcal{O}(1).$$

Die vierte Abschätzung erhalten wir mit $\log_a(x) \geq 1$ wegen $x \geq a \geq 2$ als

$$\sum_{n \leq \log_a(x)} a^n = \frac{\overbrace{a^{\lfloor \log_a(x) \rfloor + 1} - 1}^{>0}}{\underbrace{a-1}_{\geq 1}} \leq \frac{a^{\log_a(x)+1}}{a/2} = 2x = \mathcal{O}(x). \qquad \square$$

Bemerkung 2.2.5. Viele der Resultate über die Primteileranzahlfunktion ω lassen sich auf die arithmetische Funktion Ω aus Definition 0.0.23 übertragen. Grund dafür ist die Ähnlichkeit beider Funktionen in Form von

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \Omega(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{p^k \mid n} 1 = \sum_{n \leq x} \sum_{p \mid n} 1 + \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{p^k \mid n\\ k \geq 2}} 1 = \sum_{n \leq x} \omega(n) + \sum_{\substack{p^k \leq x\\ k \geq 2}} \sum_{\substack{n \leq x\\ p^k \mid n}} 1\\ &= \sum_{n \leq x} \omega(n) + \sum_{\substack{p^k \leq x\\ k \geq 2}} \left\lfloor x/p^k \right\rfloor = \sum_{n \leq x} \omega(n) + x \sum_{\substack{p^k \leq x\\ k \geq 2}} p^{-k} + \mathcal{O}(x)\\ &= \sum_{n \leq x} \omega(n) + \mathcal{O}(x),\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung aus Lemma 2.2.4, $i)$ folgt. Mit dieser Abschätzung erhalten wir aus Satz 2.2.3 sofort das folgende Korollar.

Korollar 2.2.6. *[zu Satz 2.2.3] Für $N \geq 3$ gilt*

$$\sum_{n \leq N} \Omega(n) = N \log(\log(N)) + \mathcal{O}(N).$$

Insbesondere hat also Ω die mittlere Ordnung $n \mapsto \log(\log(n))$ für $n \geq 3$ bzw. die mittlere Ordnung $n \mapsto \mathbb{1}_{[3,\infty)}(n) \cdot \log(\log(n))$.

Bemerkung 2.2.7. Auch wenn mittlere Ordnungen oft ein gutes Gefühl für das Verhalten von arithmetischen Funktionen geben, müssen letztere im Allgemeinen keine Werte in der Nähe ihrer mittleren Ordnungen annehmen. Wir betrachten als Beispiel die Anzahl $\tau(n)$ der Teiler einer Zahl $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{N}$ als $\tau(n) = \prod_{i=1}^{r}(1 + \alpha_i)$. Für die $\alpha_i \in \mathbb{N}$ gilt dabei, dass

$$2 \leq 1 + \alpha_i \leq 2^{\alpha_i}. \tag{2.2.1}$$

Für die bereits erwähnten Funktionen ω und Ω mit $\omega(n) = r$ und $\Omega(n) = \alpha_1 + ... + \alpha_r$ für obiges n gilt also (2.2.1) die Abschätzung

$$2^{\omega(n)} = \prod_{i=1}^{r} 2 \leq \tau(n) \leq \prod_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i} = 2^{\Omega(n)}. \tag{2.2.2}$$

Da wir wissen, dass ω und Ω die mittlere Ordnung $n \mapsto \log(\log(n))$ besitzen, würde man mit (2.2.2) vermuten, dass $\tau(n)$ die mittlere Ordnung

$$2^{\log(\log(n))} = e^{\log(2)\log(\log(n))} = \log(n)^{\log(2)}$$

besitzt. Wir werden nun zeigen, dass diese Vermutung jedoch unvereinbar mit dem Logarithmus als mittlerer Ordnung von τ ist, die wir in Satz 2.2.2 hergeleitet haben. Für $\alpha := \log(2) \in (0,1)$ und $u \geq 3$ (d.h. $\log(u) > 1$) erhalten wir nämlich, dass

$$\frac{\lfloor u-2 \rfloor}{u \log(u)^{1-\alpha}} = \overbrace{\frac{\lfloor u-2 \rfloor}{u}}^{\in(0,1)} \cdot \overbrace{\frac{1}{\log(u)^{1-\alpha}}}^{\in(0,1)} \in (0,1).$$

Für das gleiche α und $N, u \geq 3$ folgt also über partielle Summation, dass

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq N} \log(n)^\alpha &= \alpha^\alpha + \sum_{3 \leq n \leq N} \log(n)^\alpha \cdot 1 = \alpha^\alpha + \log(N)^\alpha \lfloor N-2 \rfloor - \alpha \int_3^N \frac{\lfloor u-2 \rfloor \, du}{u \log(u)^{1-\alpha}} \\ &= N\log(N)^\alpha + \mathcal{O}\left(\alpha^\alpha + \log(N)^\alpha + \int_1^N du\right) = N\log(N)^\alpha + \mathcal{O}(N).\end{aligned}$$

Mit dieser Abschätzung und Satz 2.2.2 ergibt sich somit schließlich, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n\leq N} \tau(n)}{\sum_{n \leq N} \log(n)^\alpha} = \lim_{N\to\infty} \frac{N\log(N) + \mathcal{O}(N)}{N\log(N)^\alpha + \mathcal{O}(N)} = \lim_{N\to\infty} \log(N)^{1-\alpha} = \infty,$$

womit $\log^\alpha = \log^{\log(2)}$ keine weitere mittlere Ordnung zu τ ist.

Aufgrund solcher Trugschlüsse möchten wir neben den mittleren Ordnungen auch Normalordnungen einer Funktion f einführen. Während die mittleren Ordnungen nur auf den Erwartungswerten $\mathbb{E}_N(f)$ aufbauen, werden die Normalordnungen auf den konkreten, einzelnen Werten der Funktion f basieren. Die Bemerkung 2.4.8 wird zeigen, dass es dies eher zulässt, von ω und Ω auf das Verhalten von τ zu schließen.

Unser Vorgehen wird sich stark an der Wahrscheinlichkeitstheorie orientieren. Dort ist es hilfreich, sich nur mit fast-sicheren Eigenschaften von Zufallsvariablen zu befassen, um deren Verhalten zwar weniger präzise, dafür aber einfacher beschreiben zu können. Analog sollen Normalordnungen eine einfache Approximation von arithmetischen Funktionen liefern, wobei wir größere Abweichungen auf einem „kleinen Teil" der natürlichen Zahlen, d.h. auf einer Menge A mit natürlicher Dichte 0, zulassen wollen.

Definition 2.2.8. *Für $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nennen wir g eine* ***Normalordnung*** *von f, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ mit natürlicher Dichte $\boldsymbol{d}(A_\varepsilon) = 1$ und*

$$|f(n) - g(n)| \leq \varepsilon |g(n)|$$

für alle $n \in A_\varepsilon$ existiert.

Beispiel 2.2.9. Ein erstes Beispiel für eine Normalordnung liefert die Indikatorfunktion der Primzahlen

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n) := \pi(n) - \pi(n-1) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{P} \\ 0, & n \notin \mathbb{P} \end{cases}.$$

Nach Lemma 0.0.36 gilt für ein geeignetes $C > 0$ und hinreichend große x die Abschätzung $\pi(x) \leq Cx/\log(x)$, also auch

$$\overline{\boldsymbol{d}}(\mathbb{P}) = \limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} \leq C \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0.$$

Zusätzlich zu der logarithmischen Dichte $\boldsymbol{\delta}(\mathbb{P}) = 0$ nach Beispiel 1.3.2, hat die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen also auch die natürliche Dichte 0. Somit gilt die Abschätzung $|\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n)| = |\mathbb{1}_{\mathbb{P}}(n) - 0| \leq \varepsilon \cdot 0$ für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$. Da $\mathbb{N} \setminus \mathbf{P}$ eine Menge mit natürlicher Dichte 1 ist, ist somit die konstante Nullfunktion eine Normalordnung zu $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$.

Um für die komplizierteren additiven Funktionen ω und Ω eine Normalordnung anzugeben, müssen wir etwas genauer auf das Verhalten von additiven Funktionen schauen. Das Werkzeug, welches uns hierbei helfen wird, ist die Turán-Kubilius-Ungleichung. Ihre Bedeutung für alle weiteren Resultate machen sie nicht nur zum Namensgeber des nächsten Abschnitts, sondern der gesamten Arbeit.

2.3 Die Turán-Kubilius-Ungleichung

Wir wollen im Folgenden versuchen, das Verhalten additiver arithmetischer Funktionen über die Angabe von Normalordnungen besser zu verstehen. Hierzu werden wir zunächst das folgende wichtige Resultat aus der Stochastik auf additive arithmetische Funktionen übertragen.

Lemma 2.3.1 (Bienaymé-Tschebyscheff)**.** *Sei X eine quadratintegrierbare Zufallsvariable sowie $\varepsilon > 0$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Beweis. Wir erhalten sofort, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(|X - \mathbb{E}(X)|^2\right) &\geq \mathbb{E}\Big(\overbrace{|X - \mathbb{E}(X)|^2}^{\geq 0} \cdot \mathbb{1}_{\{|X-\mathbb{E}(X)|\geq\varepsilon\}}\Big)\\ &\geq \mathbb{E}\left(\varepsilon^2 \mathbb{1}_{\{|X-\mathbb{E}(X)|\geq\varepsilon\}}\right) = \varepsilon^2 \mathbf{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right). \qquad \square\end{aligned}$$

Diese Abschätzbarkeit der Abweichungen $|X - \mathbb{E}(X)|$ durch die Varianz $\mathbb{V}(X)$ impliziert eine wichtige Eigenschaft von Folgen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängiger Zufallsvariablen mit gleichem Erwartungswert $\mathbb{E}(X_i) = \mu \in \mathbb{C}$ und beschränkten Varianzen $\mathbb{V}(X_i) \leq M$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und ein $M < \infty$. Für $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ ist in diesem Fall

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu = \mu \quad \text{und} \quad \mathbb{V}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{V}(X_n) \leq \frac{M}{N}.$$

Mit dem Lemma 2.3.1 von Bienaymé-Tschebyscheff folgt also, dass

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{N\varepsilon^2} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Mit einer steigenden Stichprobengröße $N \in \mathbb{N}$ wird also die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest der Mittelwert von X_1 bis X_n von μ abweicht, verschwindend klein. Wir sagen in diesem Zusammenhang, dass die X_i dem **schwachen Gesetz der großen Zahlen** genügen.

Definition 2.3.2. *Für eine additive arithmetische Funktion und $x \geq 2$ definieren wir den **angepassten Erwartungswert** $\mathcal{E}_f(x)$ und die **angepasste Abweichung** $\mathcal{D}_f(x)$ als*

$$\mathcal{E}_f(x) := \sum_{p^k \leq x} \frac{f(p^k)}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad \textit{und} \quad \mathcal{D}_f(x) := \left(\sum_{p^k\leq x}\frac{|f(p^k)|^2}{p^k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Turán-Kubilius-Ungleichung liefert für eine additive arithmetische Funktion f, ähnlich zur Bienaymé–Tschebyscheff-Ungleichung, eine Abschätzung der Werte $|f(n) - \mathcal{E}_f(x)|^2$ mit $1 \leq n \leq x$ im Verhältnis zu $\mathcal{D}_f(x)^2$.

Satz 2.3.3 (Turán-Kubilius-Ungleichung, 1955)**.** *Es gibt eine Funktion $\varepsilon(x)$ mit $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x) = 0$, sodass die Abschätzung*

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}|f(n) - \mathcal{E}_f(x)|^2 \leq (2 + \varepsilon(x))\mathcal{D}_f(x)^2$$

für jedes reelle $x \geq 2$ und für alle additiven arithmetischen Funktionen f gilt. Ist f eine nicht-negative Funktion, können wir die rechte Seite sogar durch $(1 + \varepsilon(x)/2)\,\mathcal{D}_f(x)^2$ ersetzen.

Vergleicht man dies mit der Notation der BIENAYMÉ–TSCHEBYSCHEFF-Ungleichung, lassen sich also die $\mathcal{E}_f(x)$ als Erwartungswerte von f und $\mathcal{D}_f(x)$ als Abweichungen von f interpretieren. Man beachte, dass die zur Vereinfachung der folgenden Rechnungen angepassten Größen $\mathcal{E}_f(N)$ bzw. $\mathcal{D}_f(N)$ für $N \in \mathbb{N}$ nicht mit den in Definition 2.1.1 definierten Erwartungswerten $\mathbb{E}_N(f)$ bzw. den Wurzeln der Varianzen $\mathbb{V}_N(f)$ übereinstimmen müssen. Diese Diskrepanz stellt für den Ertragsreichtum der Ungleichung jedoch keine Einschränkung dar.

Beweis von 2.3.3. Wir definieren für $x \geq 2$ zunächst

$$\varepsilon(x) := \frac{4}{x}\left(\sum_{\substack{p^k q^\ell \leq x \\ p \neq q}} p^k q^\ell\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{x}\left(\sum_{\substack{p^k \leq x, \\ q^\ell \leq x}} p^{-k} q^\ell\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.1}$$

als von den f unabhängige Funktion. Wir werden als Erstes zeigen, dass diese Funktion wie behauptet $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ erfüllt. Mit Lemma 2.2.4, *iv*) und $\pi(x) \ll x/\log(x)$ für $x \geq 5$ nach Lemma 0.0.36 erhalten wir dazu die Abschätzung

$$\sum_{q^\ell \leq x} q^\ell = \sum_{q \leq x} \sum_{\ell \leq \log_q(x)} q^\ell \ll \sum_{q \leq x} x = x\pi(x) \ll \frac{x^2}{\log(x)}. \tag{2.3.2}$$

Nach Lemma 2.2.4, *iii*) und (2.3.2) gilt also für die zweite Summe von $\varepsilon(x)$ und $x \geq 5$, dass

$$\sum_{\substack{p^k \leq x \\ q^\ell \leq x}} p^{-k} q^\ell = \sum_{p^k \leq x} p^{-k} \sum_{q^\ell \leq x} q^\ell \ll x^2 \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}. \tag{2.3.3}$$

Für die erste Summe von $\varepsilon(x)$ erhalten wir die Identität

$$\sum_{\substack{p^k q^\ell \leq x \\ p \neq q}} p^k q^\ell = 2 \sum_{\substack{p^k q^\ell \leq x \\ p^k < q^\ell}} p^k q^\ell = 2 \sum_{p^k < \sqrt{x}} p^k \sum_{p^k < q^\ell \leq x/p^k} q^\ell, \tag{2.3.4}$$

wobei wir ausnutzen, dass zwei Primpotenzen p^k, q^ℓ mit $k, \ell \geq 1$ und $p \neq q$ niemals gleich sind und mit $p^k q^\ell \leq x$ die kleinere der beiden Primpotenzen kleiner als $\sqrt{x}$ ausfallen muss. Mit Lemma 2.2.4, *iv*) und Lemma 0.0.36 können wir (2.3.4) für $x \geq 25$ weiter abschätzen als

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p^k q^\ell \leq x \\ p \neq q}} p^k q^\ell &\ll \sum_{p^k < \sqrt{x}} p^k \sum_{q \leq x/p^k} \sum_{\ell \leq \log_q(x/p^k)} q^\ell \ll \sum_{p^k < \sqrt{x}} p^k \sum_{q \leq x/p^k} \frac{x}{p^k} \\ &= x \sum_{p^k < \sqrt{x}} \pi\Big(\underbrace{x/p^k}_{\geq \sqrt{x} \geq 5}\Big) \ll x \sum_{p^k < \sqrt{x}} \frac{x}{p^k \log(x/p^k)} \leq \frac{x^2}{\log(\sqrt{x})} \sum_{p^k < \sqrt{x}} \frac{1}{p^k}.\end{aligned}$$

Die letzte Summe dieser Abschätzung können wir dabei mit Lemma 2.2.4, *iii*) abschätzen und erhalten insgesamt für $x \geq 25$, dass

$$\sum_{\substack{p^k q^\ell \leq x \\ p \neq q}} p^k q^\ell \ll \frac{x^2}{\log(x)/2} \log\left(\log\left(\sqrt{x}\right)\right) \ll x^2 \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}. \tag{2.3.5}$$

Zusammen liefern uns also (2.3.3) und (2.3.5) die obere Schranke

$$0 \leq \varepsilon(x) \ll \frac{1}{x}\left(x^2 \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\log(\log(x))}{\log(x)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Schranke konvergiert für $x \to \infty$ gegen 0, womit $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ folgt.

Es bleibt für die Funktion ε die Ungleichung des Satzes zu beweisen. Multipliziert mit x hat diese die Form

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - \mathcal{E}_f(x)|^2 \leq (2x + x\varepsilon(x))\, \mathcal{D}_f(x)^2. \tag{2.3.6}$$

Für x auf Intervallen $[n, n+1)$ mit $n \in \mathbb{N}$ lässt sich aus den Definitionen von $\mathcal{E}_f$, $\mathcal{D}_f$ und ε direkt ablesen, dass neben $2x \geq 2\lfloor x \rfloor$ auch

$$\sum_{n \leq x} |f(n) - \mathcal{E}_f(x)|^2 = \sum_{n \leq \lfloor x \rfloor} |f(n) - \mathcal{E}_f(\lfloor x \rfloor)|^2,$$
$$(2x + x\varepsilon(x))\, \mathcal{D}_f(x)^2 = (2x + \lfloor x \rfloor \varepsilon(\lfloor x \rfloor))\, \mathcal{D}_f(\lfloor x \rfloor)^2$$

gilt. Können wir also die Forderung (2.3.6) für $x = \lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{N}$ zeigen, impliziert dies die Ungleichung auch für alle anderen $x \in (n, n+1)$. Es genügt daher, nur diesen Fall zu betrachten. Außerdem nehmen wir zunächst an, dass f reellwertig und nicht-negativ ist.

Mit der Notation $\nu_p(n) = k$ für $p^k \,||\, n$ und der Additivität von f gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} f(n)^2 &= \frac{1}{x}\sum_{n \leq x}\left(\sum_{p|n} f(p^{\nu_p(n)})\right)^2 = \frac{1}{x}\sum_{n \leq x}\sum_{p|n,\, q|n} f(p^{\nu_p(n)}) f(q^{\nu_q(n)}) \\ &= \frac{1}{x}\sum_{p^k \leq x} f(p^k)^2 \sum_{\substack{n \leq x \\ \nu_p(n) = k}} 1 + \frac{1}{x}\sum_{\substack{p^k \leq x,\, q^\ell \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^\ell) \sum_{\substack{n \leq x \\ p^k \,||\, n,\, q^\ell \,||\, n}} 1 \\ &= \frac{1}{x}\sum_{p^k \leq x} f(p^k)^2 \sum_{\substack{n \leq x \\ \nu_p(n) = k}} 1 + \frac{1}{x}\sum_{\substack{p^k q^\ell \leq x \\ p \neq q}} f(p^k) f(q^\ell) \sum_{\substack{n \leq x \\ p^k \,||\, n,\, q^\ell \,||\, n}} 1. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Die erste innere Summe $\sum_{n \leq x,\, \nu_p(n) = k} 1$ zählt höchstens alle Vielfachen von p^k bis x ab, übersteigt also nicht den Wert $\lfloor x/p^k \rfloor \leq x/p^k$. Für die zweite innere Summe in (2.3.7) gilt mit dem In- und Exklusionsprinzip, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\ p^k \,||\, n,\, q^\ell \,||\, n}} 1 &= \sum_{\substack{n\le x\\ p^k q^\ell | n}} 1 \;-\; \sum_{\substack{n\le x\\ p^{k+1} q^\ell | n}} 1 \;-\; \sum_{\substack{n\le x\\ p^k q^{\ell+1} | n}} 1 \;+\; \sum_{\substack{n\le x\\ p^{k+1} q^{\ell+1} | n}} 1 \\
&= \left\lfloor \frac{x}{p^k q^\ell} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{p^{k+1} q^\ell} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{p^k q^{\ell+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{p^{k+1} q^{\ell+1}} \right\rfloor \\
&\le \frac{x}{p^k q^\ell} - \frac{x}{p^{k+1} q^\ell} - \frac{x}{p^k q^{\ell+1}} + \frac{x}{p^{k+1} q^{\ell+1}} + 2 \\
&= \frac{x}{p^k q^\ell}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) + 2.
\end{aligned}$$

Das Ersetzen der inneren Summen in (2.3.7) durch diese Abschätzungen und Ausnutzen der Nicht-Negativität von f liefert somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n)^2 &\le \sum_{p^k\le x} \frac{f(p^k)^2}{p^k} + \sum_{\substack{p^k q^\ell \le x\\ p\ne q}} \left[\frac{f(p^k) f(q^\ell)}{p^k q^\ell}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right) + \frac{2}{x} f(p^k) f(q^\ell) \right] \\
&\le \mathcal{D}_f(x)^2 + \left(\sum_{p^k\le x} \frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right) \right)^2 + \frac{2}{x} \sum_{\substack{p^k q^\ell \le x\\ p\ne q}} f(p^k) f(q^\ell) \\
&= \mathcal{D}_f(x)^2 + \mathcal{E}_f(x)^2 + \frac{2}{x} \sum_{\substack{p^k q^\ell \le x\\ p\ne q}} f(p^k) f(q^\ell). \qquad (2.3.8)
\end{aligned}$$

Ferner erhalten wir für $\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n)$ ähnlich zu den obigen Abschätzungen, dass

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) = \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\sum_{p|n} f(p^{\nu_p(n)}) = \frac{1}{x}\sum_{p^k\le x} f(p^k) \sum_{\substack{n\le x\\ p^k \,||\, n}} 1. \qquad (2.3.9)$$

Die letzte innere Summe ist hierbei nach unten beschränkt als

$$\sum_{\substack{n\le x\\ p^k \,||\, n}} 1 = \sum_{\substack{n\le x\\ p^k | n}} 1 \;-\; \sum_{\substack{n\le x\\ p^{k+1} | n}} 1 = \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{p^{k+1}} \right\rfloor \ge \frac{x}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right) - 1. \qquad (2.3.10)$$

Wir folgern aus (2.3.9) und (2.3.10), dass

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) \ge \sum_{p^k\le x}\left[\frac{f(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right) - \frac{f(p^k)}{x} \right] = \mathcal{E}_f(x) - \frac{1}{x}\sum_{p^k\le x} f(p^k). \qquad (2.3.11)$$

Die Abschätzungen (2.3.8) und (2.3.11) liefern für reellwertige f somit, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x}\sum_{n\le x}|f(n)-\mathcal{E}_f(x)|^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n)^2 - \frac{2\mathcal{E}_f(x)}{x}\sum_{n\le x} f(n) + \mathcal{E}_f(x)^2\\
&\le \left[\mathcal{D}_f(x)^2+\mathcal{E}_f(x)^2+\frac{2}{x}\sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} f(p^k)f(q^\ell)\right]-\frac{2\mathcal{E}_f(x)}{x}\left[\mathcal{E}_f(x)-\frac{1}{x}\sum_{p^k\le x} f(p^k)\right]+\mathcal{E}_f(x)^2\\
&= \mathcal{D}_f(x)^2 + \frac{2}{x}\sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} f(p^k)f(q^\ell) + 2\frac{\mathcal{E}_f(x)}{x}\sum_{p^k\le x} f(p^k). \qquad (2.3.12)
\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung können wir die Terme im obigen Ausdruck abschätzen als

$$\begin{aligned}
i)\ \sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} f(p^k)f(q^\ell) &= \sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} \frac{f(p^k)f(q^\ell)}{p^{k/2}q^{\ell/2}} p^{k/2}q^{\ell/2} \le \left(\sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} \frac{f(p^k)^2 f(q^\ell)^2}{p^k q^\ell}\sum_{\substack{\tilde{p}^k \tilde{q}^\ell\le x\\ \tilde{p}\ne\tilde{q}}} \tilde{p}^k\tilde{q}^\ell\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(\sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)^2}{p^k}\right)\left(\sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} p^k q^\ell\right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_f(x)^2\left(\sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} p^k q^\ell\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$ii)\qquad \mathcal{E}_f(x) = \sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^{k/2}}\underbrace{p^{-k/2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}_{\le p^{-k/2}} \le \mathcal{D}_f(x)\left(\sum_{p^k\le x} p^{-k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$iii)\qquad \sum_{p^k\le x} f(p^k) = \sum_{p^k\le x}\frac{f(p^k)}{p^{k/2}}p^{k/2} \le \mathcal{D}_f(x)\left(\sum_{p^k\le x} p^k\right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_f(x)\left(\sum_{q^\ell\le x} q^\ell\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Einsetzen von $i), ii)$ und $iii)$ in (2.3.12) liefert, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{n\le x}|f(n)-\mathcal{E}_f(x)|^2 &\le \mathcal{D}_f(x)^2\left[1+\frac{2}{x}\left(\sum_{\substack{p^k q^\ell\le x\\ p\ne q}} p^k q^\ell\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{x}\left(\sum_{p^k\le x} p^{-k}\sum_{q^\ell\le x} q^\ell\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon(x)\right)\mathcal{D}_f(x)^2. \qquad (2.3.13)
\end{aligned}$$

Dies stellt – wie im Satz erwähnt – für unser reelles, nicht-negatives f ein um den Faktor 2 stärkeres Resultat als das allgemein formulierte dar.

Sei nun f reellwertig ohne Einschränkungen an das Vorzeichen. Dann zerlegen wir f für $n\in\mathbb{N}$ als $f(n) = f^+(n) - f^-(n)$ mit $f^\pm(n) := \max\{\pm f(n), 0\}$.

Wegen $f^+ f^- \equiv 0$ gilt $f^2 = (f^+ - f^-)^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2$ und wir erhalten für alle $1 \le n \le x$, dass

$$\mathcal{D}_f(x)^2 = \sum_{p^k \le x} \frac{f(p^k)^2}{p^k} = \sum_{p^k \le x} \frac{f^+(p^k)^2 + f^-(p^k)^2}{p^k} = \mathcal{D}_{f^+}(x)^2 + \mathcal{D}_{f^-}(x)^2,$$

$$\begin{aligned}(f(n) - \mathcal{E}_f(x))^2 &= \left[f(n) - \sum_{p^k \le x} \frac{f(p^k)}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right]^2 = \Big((f^+ - f^-)(n) - (\mathcal{E}_{f^+} - \mathcal{E}_{f^-})(x)\Big)^2 \\ &\le 2\left(f^+(n) - \mathcal{E}_{f^+}(x)\right)^2 + 2\left(f^-(n) - \mathcal{E}_{f^-}(x)\right)^2.\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus der zu $(a+b)^2 \ge 0$ äquivalenten Ungleichung $(a-b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Anwenden von (2.3.13) auf die nicht-negativen Funktionen f^+ und f^- liefert mit diesen Abschätzungen, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n \le x} |f(n) - \mathcal{E}_f(x)|^2 &\le \frac{2}{x}\left[\sum_{n \le x} \left|f^+(n) - \mathcal{E}_{f^+}(x)\right|^2 + \sum_{n \le x} \left|f^-(n) - \mathcal{E}_{f^-}(x)\right|^2\right] \\ &\le (2 + \varepsilon(x))\left(\mathcal{D}_{f^+}(x)^2 + \mathcal{D}_{f^-}(x)^2\right) = (2 + \varepsilon(x))\mathcal{D}_f(x)^2.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Aussage für alle additiven $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Für komplexwertige f erhalten wir schließlich durch Anwenden des Satzes auf Real- und Imaginärteil von f, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n \le x} |f(n) - \mathcal{E}_f(x)|^2 &= \frac{1}{x}\sum_{n \le x}\left[\Big(\mathrm{Re}(f)(n) - \mathcal{E}_{\mathrm{Re}(f)}(x)\Big)^2 + \Big(\mathrm{Im}(f)(n) - \mathcal{E}_{\mathrm{Im}(f)}(x)\Big)^2\right] \\ &\le (2 + \varepsilon(x))\left(\mathcal{D}_{\mathrm{Re}(f)}(x)^2 + \mathcal{D}_{\mathrm{Im}(f)}(x)^2\right) \\ &= (2 + \varepsilon(x))\left(\mathcal{D}_f(x)^2\right),\end{aligned}$$

wobei wir in beiden Gleichungen $|f|^2 = (\mathrm{Re}(f))^2 + (\mathrm{Im}(f))^2$ ausnutzen. Dies schließt den Beweis. □

Die Konstante 2 in der rechten Seite der Turán-Kubilius-Ungleichung lässt sich verbessern. So zeigte Kubilius in [Kub83], dass sich der Term $2 + \varepsilon(x)$ durch einen schärferen der Form $\frac{3}{2} + o(1)$ für $x \to \infty$ ersetzen lässt, welcher sich sogar als optimal herausstellt. Im folgenden Kapitel werden wir uns jedoch mit der einfacheren Version wie in Satz 2.3.3 begnügen, um den Satz von Hardy-Ramanujan zu zeigen.

2.4 Der Satz von Hardy-Ramanujan

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die mittleren quadratischen Abweichungen einer additiven arithmetischen Funktion f vom angepassten Erwartungswert $\mathcal{E}_f$ mittels der TURÁN-KUBILIUS-Ungleichung durch einen Ausdruck in $\mathcal{D}_f^2$ gut nach oben abgeschätzt werden können. Dies legt nahe, dass es möglich sein sollte, die Werte $f(n)$ für $n \leq x$ gut durch $\mathcal{E}_f(x)$ approximieren zu können, falls $\mathcal{D}_f(x)$ klein ausfällt. In diesem Zusammenhang geben wir ein hinreichendes Kriterium dafür an, wann ein additives f die Funktion $\mathcal{E}_f$ als Normalordnung besitzt.

Satz 2.4.1. *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine additive arithmetische Funktion. Dann ist $\mathcal{E}_f$ eine Normalordnung von f, falls*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{D}_f(N)}{\mathcal{E}_f(N)} = 0 \text{ gilt.} \tag{2.4.1}$$

Beweis. Es sei f additiv und erfülle die Grenzwertbedingung. Wir schätzen dann für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ ab, dass

$$\begin{aligned} v_N(\{n \in \mathbb{N} :\ |f(n) - \mathcal{E}_f(N)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(N)|\}) &= \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \mathbb{1}_{\left(|f(n)-\mathcal{E}_f(N)|>\varepsilon|\mathcal{E}_f(N)|\right)} \\ < \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} \frac{|f(n) - \mathcal{E}_f(N)|^2}{\varepsilon^2|\mathcal{E}_f(N)|^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2|\mathcal{E}_f(N)|^2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} |f(n) - \mathcal{E}_f(N)|^2. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung können wir dabei N als hinreichend groß mit $\mathcal{E}_f(N) \neq 0$ annehmen, da die Forderung (2.4.1) nicht erfüllt sein kann, wenn $\mathcal{E}_f(N) = 0$ für mehr als endlich viele $N \in \mathbb{N}$ gilt. Mittels der TURÁN-KUBILIUS-Ungleichung 2.3.3 und Bedingung (2.4.1) gilt somit

$$v_N\left(\{n \in \mathbb{N} : |f(n) - \mathcal{E}_f(N)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(N)|\}\right) \ll \frac{\mathcal{D}_f(N)^2}{\varepsilon^2\left|\mathcal{E}_f(N)\right|^2} = o(1) \tag{2.4.2}$$

für jedes feste $\varepsilon > 0$ und $N \to \infty$. Dies impliziert insbesondere, dass

$$\lim_{N\to\infty} v_N\left(\{n \in \mathbb{N} : |f(n) - \mathcal{E}_f(N)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(N)|\}\right) = 0. \tag{2.4.3}$$

Um $\mathcal{E}_f$ als Normalordnung von f zu erhalten, müssen wir die $\mathcal{E}_f(N)$ in (2.4.3) durch $\mathcal{E}_f(n)$ ersetzen. Hierzu stellen wir mit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung für $\sqrt{N} < n \leq N$ zunächst fest, dass

$$|\mathcal{E}_f(N) - \mathcal{E}_f(n)| = \left| \sum_{n<p^k\leq N} \frac{f(p^k)}{p^k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right| \leq \sum_{\sqrt{N}<p^k\leq N} \frac{1}{p^{k/2}} \frac{|f(p^k)|}{p^{k/2}}$$

$$\leq \left(\sum_{\sqrt{N}<p^k\leq N} \frac{1}{p^k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p^k\leq N} \frac{|f(p^k)|^2}{p^k}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\sqrt{N}<p^k\leq N} \frac{1}{p^k}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}_f(N). \quad (2.4.4)$$

Mit dem Lemma 2.2.4, *iii*) erhalten wir dabei für $N \geq 4$, also $\sqrt{N} \geq 2$, dass

$$\sum_{\sqrt{N}<p^k\leq N} \frac{1}{p^k} = \log(\log(N)) - \log(\log(\sqrt{N})) + \mathcal{O}(1) = -\log(1/2) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1).$$

Damit können wir die Abschätzung (2.4.4) als $|\mathcal{E}_f(N) - \mathcal{E}_f(n)| \ll \mathcal{D}_f(N)$ fortsetzen. Gilt nun zusätzlich $\lim_{N\to\infty} \mathcal{D}_f(N)/\mathcal{E}_f(N) = 0$ wie in der Voraussetzung, erhalten wir für jede beliebige Folge $(n_N)_{N\geq 2}$ mit $\sqrt{N} < n_N \leq N$, dass

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \left|1 - \frac{\mathcal{E}_f(n_N)}{\mathcal{E}_f(N)}\right| = \lim_{N\to\infty} \frac{|\mathcal{E}_f(n_N) - \mathcal{E}_f(N)|}{|\mathcal{E}_f(N)|} \ll \lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{D}_f(N)}{|\mathcal{E}_f(N)|} = 0,$$

also ist $\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_f(n_N)/\mathcal{E}_f(N) = 1$.

Wir können somit für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta := \varepsilon/(2+2\varepsilon) \leq 1/2$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $|1 - \mathcal{E}_f(n)/\mathcal{E}_f(N)| \leq \delta$ für alle $N \geq N_0$ und $\sqrt{N} < n \leq N$ gilt. Mit $\delta \leq 1/2$ impliziert dies insbesondere, dass $\mathcal{E}_f(n) \neq 0 \neq \mathcal{E}_f(N)$. Für solche $N \geq N_0$ und n gilt somit

$$\begin{aligned} 0 &\leq v_N \left(\{n \in \mathbb{N} : |f(n) - \mathcal{E}_f(n)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(n)|\}\right) \\ &\leq \frac{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}{N} + v_N\left(\left\{\sqrt{N} < n \leq N : |f(n) - \mathcal{E}_f(n)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(n)|\right\}\right) \\ &\leq \frac{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}{N} + v_N\left(\left\{\sqrt{N} < n \leq N : |f(n) - \mathcal{E}_f(N)| > \frac{\varepsilon}{2}|\mathcal{E}_f(N)|\right\}\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Die letzte Abschätzung in der obigen Ungleichungskette folgt dabei, da im Fall $|f(n) - \mathcal{E}_f(n)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(n)|$, $\sqrt{N} < n \leq N$ und $|\mathcal{E}_f(N) - \mathcal{E}_f(n)| \leq \delta|\mathcal{E}_f(N)|$ mit $\delta = \varepsilon/(2 + 2\varepsilon)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(n) - \mathcal{E}_f(N)| &\geq |f(n) - \mathcal{E}_f(n)| - |\mathcal{E}_f(N) - \mathcal{E}_f(n)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(n)| - \delta|\mathcal{E}_f(N)| \\ &= \varepsilon\,|\mathcal{E}_f(N)| \cdot \left|\frac{\mathcal{E}_f(n)}{\mathcal{E}_f(N)}\right| - \delta|\mathcal{E}_f(N)| \geq |\mathcal{E}_f(N)|\,(\varepsilon(1-\delta) - \delta) \\ &= |\mathcal{E}_f(N)| \left(\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2+2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon}{2}|\mathcal{E}_f(N)| \end{aligned}$$

stimmt. Der abschließende Grenzwert in (2.4.5) für $N \to \infty$ ergibt sich mit $\lim_{N\to\infty}\lfloor\sqrt{N}\rfloor/N = 0$ und der Aussage von (2.4.3). Aus (2.4.5) folgt für

$$A_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : |f(n) - \mathcal{E}_f(n)| > \varepsilon|\mathcal{E}_f(n)|\}$$

also $\boldsymbol{d}(A_\varepsilon) = 0$. Damit ist $\mathcal{E}_f$ eine Normalordnung von f. $\square$

Das Ergebnis des letzten Satzes wollen wir auf konkrete additive arithmetische Funktionen anwenden. Wir beginnen mit der Primteilerzählfunktion ω wie in Satz 2.2.3. Für diese gilt nach Lemma 2.2.4 für $N \geq 2$ zunächst, dass

$$\begin{aligned} i) \quad \mathcal{E}_\omega(N) &= \sum_{p^k \leq N} \frac{\omega(p^k)}{p^k}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \sum_{p^k \leq N}\left(\frac{1}{p^k}-\frac{1}{p^{k+1}}\right) \\ &= \log(\log(N)) + \mathcal{O}\left(1+\sum_{p^k \geq 1,\, k \geq 2} \frac{1}{p^k}\right) = \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1), \qquad (2.4.6) \\ ii) \quad \mathcal{D}_\omega(N)^2 &= \sum_{p^k \leq N} \frac{|\omega(p^k)|^2}{p^k} = \sum_{p^k \leq N} \frac{1}{p^k} = \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1). \qquad (2.4.7) \end{aligned}$$

Mit (2.4.6) und (2.4.7) erhalten wir somit, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{D}_\omega(N)}{\mathcal{E}_\omega(N)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(\log(N))}} = 0. \qquad (2.4.8)$$

Nach Satz 2.4.1 ist also $\mathcal{E}_\omega$ eine Normalordnung von ω.

Ohne die Werte $\mathcal{E}_\omega(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ neu zu berechnen, ist uns durch (2.4.6) nur $\mathcal{E}_\omega(n) \approx \log(\log(n))$ bis auf einen beschränkten Fehler bekannt. Dies macht $\mathcal{E}_\omega$ zu einer unhandlichen Normalordnung. Der Satz 2.4.3 wird als Lösung für dieses Problem zeigen, dass auch $n \mapsto \log(\log(n))$ eine Normalordnung von ω darstellt. Hierzu benötigen wir eine der Turán-Kubilius-Ungleichung ähnliche Abschätzung, die ebenfalls auf Turán zurückgeht.

Satz 2.4.2 (Turán-Abschätzung)**.** *Für $N \geq 3$ gilt*

$$\frac{1}{N}\sum_{n \leq N} (\omega(n) - \log(\log(N)))^2 \ll \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1).$$

Beweis. Mit (2.4.6) erhalten wir für $N \geq 3$, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{n \leq N} (\omega(n) - \log(\log(N)))^2 &= \frac{1}{N}\sum_{n \leq N} (\omega(n) - \mathcal{E}_\omega(N) + \mathcal{O}(1))^2 \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n \leq N} (\omega(n) - \mathcal{E}_\omega(N))^2 + 2\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{n \leq N}\omega(n)\right) - \mathcal{E}_\omega(N)\right) + \mathcal{O}(1) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n \leq N} (\omega(n) - \mathcal{E}_\omega(N))^2 + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Die letzte Umformung folgt dabei mit $\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\omega(n) = \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1)$ für $N \geq 3$ nach Satz 2.2.3 und $\mathcal{E}_\omega(N) = \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1)$ für $N \geq 2$ nach

(2.4.6). Die Turán-Kubilius-Ungleichung für ω als additive Funktion und Abschätzung (2.4.7) liefern somit für $N \geq 3$, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}(\omega(n)-\log(\log(N)))^2 &= \frac{1}{N}\sum_{n\leq N}(\omega(n)-\mathcal{E}_\omega(N))^2+\mathcal{O}(1)\\ &\ll \mathcal{D}_\omega(N)^2+\mathcal{O}(1)=\log(\log(N))+\mathcal{O}(1). \square\end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung ebnet den Weg für das versprochene Resultat von Hardy und Ramanujan.

Satz 2.4.3 (Hardy-Ramanujan, 1917; Turán, 1934). *Für jede reellwertige Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}\xi_n=\infty$ und hinreichend große $N\in\mathbb{N}$ gilt*

$$v_N\left(\left\{n\in\mathbb{N}:|\omega(n)-\log(\log(N))|>\xi_N\sqrt{\log(\log(N))}\right\}\right)\ll\xi_N^{-2}$$

sowie

$$\boldsymbol{d}\left(\left\{n\in\mathbb{N}:|\omega(n)-\log(\log(n))|>\xi_n\sqrt{\log(\log(n))}\right\}\right)=0.$$

Für $\varepsilon>0$ und die Wahl $\xi_n:=\varepsilon\sqrt{\log(\log(n))}$ für $n\geq 3$ ist mit der zweiten Aussage $n\mapsto\mathbb{1}_{(n\geq 3)}\cdot\log(\log(n))$ – neben $\mathcal{E}_\omega$ – eine Normalordnung von ω.

Beweis. Wir werden die verkürzte Notation $\ell\ell(n):=\log(\log(n))$ in diesem Beweis benutzen. Außerdem wählen wir ohne Einschränkung $N\geq 3$ so groß, dass neben $\ell\ell(N)>0$ auch $\xi_n>1$ für alle $n\geq N$ gilt. Für $\varepsilon_N:=\xi_N/\sqrt{\ell\ell(N)}>0$ ist dann

$$\begin{aligned}v_N\left(\left\{n\in\mathbb{N}:|\omega(n)-\ell\ell(N)|>\xi_N\sqrt{\ell\ell(N)}\right\}\right)&=\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\mathbb{1}_{(\,|\omega(n)-\ell\ell(N)|>\varepsilon_N\ell\ell(N)\,)}\\ <\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\frac{|\omega(n)-\ell\ell(N)|^2}{\varepsilon_N^2\ell\ell(N)^2}&=\frac{\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}|\omega(n)-\ell\ell(N)|^2}{\varepsilon_N^2\ell\ell(N)^2}\ll\frac{\ell\ell(N)+\mathcal{O}(1)}{\xi_N^2\ell\ell(N)}\end{aligned}$$

für $N\geq e$, wobei die letzte Abschätzung der Satz 2.4.2 ist. Da der letzte Ausdruck die Form $\xi_N^{-2}(1+o(1))$ für $N\to\infty$ hat, folgt die erste Aussage.

Für die zweite Aussage bemerken wir für alle $\sqrt{N}<n\leq N$, dass

$$|\ell\ell(N)-\ell\ell(n)|\leq\ell\ell(N)-\ell\ell(\sqrt{N})=\log(2). \tag{2.4.9}$$

Da die natürliche Dichte endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit 0 bewertet, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\xi_n\geq 1$ nicht nur für hinreichend große, sondern alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{\ell\ell(N_0)} > \log(2)$ und alle $N \geq N_0$ setzen wir dann

$$\tilde{\xi}_N := \frac{1}{\sqrt{\ell\ell(N)}} \min_{\sqrt{N}<n\leq N} \Big(\xi_n \sqrt{\ell\ell(n)} - \log(2)\Big) \geq \sqrt{\frac{\ell\ell(\sqrt{N})}{\ell\ell(N)}} \min_{\sqrt{N}<n\leq N} \xi_n - \frac{\log(2)}{\sqrt{\ell\ell(N)}}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \infty$ finden wir eine aufsteigende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mit $\xi_n > k$ für alle $n \geq n_k$, womit für $\alpha_N := \min\left\{\xi_n : \sqrt{N} \leq n \leq N\right\} \geq 1$ auch $\lim_{N\to\infty} \alpha_N = \infty$ gilt. Damit divergiert die Folge der $\tilde{\xi}_N$ bestimmt mit

$$\tilde{\xi}_N \geq \sqrt{\frac{\ell\ell(\sqrt{N})}{\ell\ell(N)}} \alpha_N - \frac{\log(2)}{\sqrt{\ell\ell(N)}} = \alpha_N \underbrace{\sqrt{\frac{\log(1/2) + \ell\ell(N)}{\ell\ell(N)}}}_{\xrightarrow{N\to\infty} 1} - \underbrace{\frac{\log(2)}{\sqrt{\ell\ell(N)}}}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0} \xrightarrow{N\to\infty} \infty.$$

Die Dichte der zweiten Aussage des Satzes schätzen wir nun ab als

$$\begin{aligned}
&0 \leq \boldsymbol{d}\left(\left\{n \leq N : |\omega(n) - \ell\ell(n)| > \xi_n \sqrt{\ell\ell(n)}\right\}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} v_N \left(\left\{n \leq N : |\omega(n) - \ell\ell(n)| > \xi_n \sqrt{\ell\ell(n)}\right\}\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \left[\underbrace{\frac{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}{N}}_{\to 0} + v_N\left(\left\{n > \sqrt{N} : |\omega(n) - \ell\ell(N)| > \xi_n \sqrt{\ell\ell(n)} - \overbrace{|\ell\ell(N) - \ell\ell(n)|}^{\leq \log(2) \text{ nach (2.4.9)}}\right\}\right)\right] \\
&\leq \lim_{N\to\infty} v_N \left(\left\{n > \sqrt{N} : |\omega(n) - \ell\ell(N)| > \xi_n \sqrt{\ell\ell(n)} - \log(2)\right\}\right). \qquad (2.4.10)
\end{aligned}$$

Aus der Definition der $\tilde{\xi}_N$ lesen wir, dass $\xi_n \sqrt{\ell\ell(n)} - \log(2) \geq \tilde{\xi}_N \sqrt{\ell\ell(N)}$ für alle $\sqrt{N} < n \leq N$ gilt. Damit folgt aus (2.4.10) und der ersten Aussage des Satzes mit $(\tilde{\xi}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ als bestimmt divergenter Folge, dass

$$\begin{aligned}
0 &\leq \boldsymbol{d}\left(\{n : |\omega(n) - \ell\ell(n)| > \xi_n \sqrt{\ell\ell(n)}\}\right) \\
&\leq \lim_{N\to\infty} v_N \left(\left\{n > \sqrt{N} : |\omega(n) - \ell\ell(N)| > \tilde{\xi}_N \sqrt{\ell\ell(N)}\right\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dies beweist die zweite Aussage. □

Bemerkung 2.4.4. Ein analoges Resultat zum vorigen Satz lässt sich auch für die Funktion Ω festhalten. Dazu benötigen wir ein weiteres Lemma.

Lemma 2.4.5. *Für $x \geq 1$ ist*

$$0 \leq \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{k}{p^k} \leq \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{k^2}{p^k} = \mathcal{O}(1).$$

Beweis. Mit $k \leq k^2$ für $k \geq 1$ genügt es, die $\mathcal{O}(1)$-Abschätzung für die zweite Summe zu zeigen. Hierzu nutzen wir, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = (1-z)^{-1}$ innerhalb ihres Konvergenzradius, d.h. für $|z| < 1$, beliebig oft differenzierbar durch Ableiten der einzelnen Summanden ist. Damit gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^2}{dz^2} z^k = \frac{d^2}{dz^2}(1-z)^{-1} = 2(1-z)^{-3}. \tag{2.4.11}$$

Für $z = 1/p$ folgt somit mit $|1/p| < 1$ und $1 - 1/p \geq 1/2$ für alle $x \geq 1$, dass

$$\sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{k^2}{p^k} \leq \sum_{p \leq x} \frac{1}{p^2} \sum_{k \geq 2} \frac{2(k-1)k}{p^{k-2}} \overset{(2.4.11)}{=} \sum_{p \leq x} \frac{4}{p^2 \underbrace{(1-1/p)^3}_{\geq 1/8}} \leq \sum_{p \leq x} \frac{32}{p^2} \leq 32\zeta(2). \quad \square$$

Zusammen mit dem Satz 1.1.2 von Mertens erhalten wir aus dem Lemma 2.4.5 sofort die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Omega(N) &= \sum_{p^k \leq N} \frac{\Omega(p^k)}{p^k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p^k \leq N} \frac{k}{p^k} - \sum_{p^k \leq N} \frac{k}{p^{k+1}} \\ &\overset{\ell = k+1}{=} \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \mathcal{O}\left(\sum_{p^k \leq N,\, k \geq 2} \frac{k}{p^k} + \sum_{p^\ell \geq 1,\, \ell \geq 2} \frac{\ell - 1}{p^\ell} \right) \\ &= \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\Omega(N) &= \sum_{p^k \leq N} \frac{\Omega(p^k)^2}{p^k} = \sum_{p^k \leq N} \frac{k^2}{p^k} = \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \frac{k^2}{p^k} \\ &= \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Mit dieser Feststellung und der Verwendung von Korollar 2.2.6 anstelle von Satz 2.2.3 erhalten wir aus den Sätzen 2.4.2 und 2.4.3 die folgenden Korollare durch einfaches Ersetzen aller ω durch Ω in den Beweisen.

Korollar 2.4.6. *Für $N \geq 3$ gilt*

$$\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \left(\Omega(n) - \log(\log(N))\right)^2 \ll \log(\log(N)) + \mathcal{O}(1).$$

Korollar 2.4.7. *Für jede reellwertige Folge* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \infty$ *und hinreichend große* $N \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$v_N\left(\{n \in \mathbb{N} : |\Omega(n) - \log(\log(N))| > \xi_N\sqrt{\log(\log(N))}\}\right) \ll \xi_N^{-2}$$

sowie

$$\boldsymbol{d}\left(\{n \in \mathbb{N} : |\Omega(n) - \log(\log(n))| > \xi_n\sqrt{\log(\log(n))}\}\right) = 0.$$

Für $\varepsilon > 0$ *und die Wahl* $\xi_n := \varepsilon\sqrt{\log(\log(n))}$ *für* $n \geq 3$ *ist mit der zweiten Aussage* $n \mapsto \mathbb{1}_{(n\geq 3)} \cdot \log(\log(n))$ *– neben* $\mathcal{E}_\Omega$ *– eine Normalordnung von* Ω.

Bemerkung 2.4.8. In Bemerkung 2.2.7 hatten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\Omega(n)}$ gezeigt. Im Zusammenhang mit den mittleren Ordnungen $n \mapsto \log(\log(n))$ von ω und Ω hatte dies zu einer falschen Intuition bezüglich einer mittleren Ordnung von τ geführt.

Da ω und Ω auch jeweils die Normalordnung $n \mapsto \log(\log(n))$ besitzen, können wir für jedes $\varepsilon > 0$ zwei Mengen $N_{1,\varepsilon}, N_{2,\varepsilon} \subseteq \mathbb{N}$ mit natürlicher Dichte 1 finden, sodass

$$(1-\varepsilon)\log(\log(n)) \leq \omega(n) \quad \text{und} \quad \Omega(n) \leq (1+\varepsilon)\log(\log(n))$$

für alle $n \in N_\varepsilon := N_{1,\varepsilon} \cap N_{2,\varepsilon}$ gilt. Dabei ist auch

$$\boldsymbol{d}(N_\varepsilon) = \boldsymbol{d}(N_{1,\varepsilon}) + \boldsymbol{d}(N_{2,\varepsilon}) - \boldsymbol{d}(N_{1,\varepsilon} \cup N_{2,\varepsilon}) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Wir finden also für alle $\varepsilon > 0$ eine Menge $N_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ mit $\boldsymbol{d}(N_\varepsilon) = 1$, sodass

$$2^{(1-\varepsilon)\log(\log(n))} \leq 2^{\omega(n)} \leq \tau(n) \leq 2^{\Omega(n)} \leq 2^{(1+\varepsilon)\log(\log(n))} \quad \text{bzw.} \tag{2.4.14}$$

$$(1-\varepsilon)\log(2)\log(\log(n)) \leq \log(\tau(n)) \leq (1+\varepsilon)\log(2)\log(\log(n)) \tag{2.4.15}$$

für alle $n \in N_\varepsilon$ gilt. Das Konzept der Normalordnung erlaubt also, mit der zweiten Abschätzung auch eine Normalordnung für $\log(\tau)$ – nämlich $n \mapsto \log(2)\log(\log(n))$ – anzugeben. Eine Normalordnung von τ erhalten wir jedoch nicht, da die Abschätzung (2.4.14) schwächer als die dazu erforderliche Bedingung ist. Dennoch können wir sagen, dass sich die Werte $\tau(n)$ überwiegend nahe der Funktion $n \mapsto 2^{\log(\log(n))} = \log(n)^{\log(2)}$ befinden.

Man beachte erneut, dass sich diese Größe erheblich vom einfachen Logarithmus als mittlere Ordnung von τ unterscheidet. Bei der Berechnung der Mittelwerte $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\tau(n)$, die in Form der mittleren Ordnung erfasst werden, sind also nicht die vielen Werte $\tau(n)$ in der Nähe der Normalordnung $n \mapsto \log(n)^{\log(2)}$ ausschlaggebend. Dominant sind hingegen die wenigen, deutlich größer ausfallenden Werte, welche die mittlere Ordnung auf den Logarithmus heben.

Kapitel 3

Wahrscheinlichkeitstheoretische Resultate

Neben der Angabe von Ordnungen arithmetischer Funktionen ist ein weiterer Ansatz in der probabilistischen Zahlentheorie, reellwertigen arithmetischen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Verteilungsfunktionen zuordnen zu wollen. Wie wir in Kapitel 1 hergeleitet haben, liefert die natürliche Dichte $\boldsymbol{d}$ dabei eine Abbildung, die bestimmten Teilmengen $A \subseteq \mathbb{N}$ einen Wert zuordnet, der unserer Vorstellung von einer Wahrscheinlichkeit der Menge A sehr nah kommt.

In diesem Sinne wäre es intuitiv, die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ zu einer Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ für $t \in \mathbb{R}$ zu definieren als

$$F(t) = \boldsymbol{d}\left(\{n \in \mathbb{N} : f(n) \leq t\}\right) = \lim_{N\to\infty} v_N\left(\{n \leq N : f(n) \leq t\}\right). \qquad (3.0.1)$$

Dabei sei wieder v_N jeweils die Gleichverteilung auf den ersten N natürlichen Zahlen. Auf diese Weise würde F den punktweisen Grenzwert einer von f definierten Folge von Verteilungsfunktionen darstellen.

Definition 3.0.1. *Sei f eine reellwertige arithmetische Funktion. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir dann $F_N : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit*

$$F_N(t) := v_N\left(\{n : f(n) \leq t\}\right) = \frac{1}{N}\#\{n \leq N : f(n) \leq t\}$$

*als N**-te Verteilungsfunktion zu** f. Dies sind die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen f_N, wobei f_N für $n \in \underline{N} = \{1, ..., N\}$ die Werte $f(n)$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\#\{k \in \underline{N} : f(k) = f(n)\}/N$ annimmt.*

Eine punktweise Konvergenz der Funktionen F_N für alle $t \in \mathbb{R}$ zu fordern, wird sich jedoch im Folgenden als sehr streng herausstellen. Das vorliegende Kapitel wird aus diesem Grund schwache Limiten solcher Verteilungsfunktionen als eine geeignetere Alternative zu den Grenzwertforderungen (3.0.1) für alle $t \in \mathbb{R}$ einführen. Dieses Konzept werden wir anschließend zur Definition 3.2.3 der Verteilungsfunktion einer arithmetischen Funktion nutzen. Resultate über die Existenz solcher schwachen Limiten werden wir im letzten Teil des

Kapitels mithilfe von charakteristischen Funktionen herleiten. Wir werden hierbei allgemeine Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ betrachten und schließlich als Korollar zum Stetigkeitssatz von LÉVY festhalten können, wann einem $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion zugeordnet werden kann.

3.1 Verteilungsfunktionen

Grundlegend vor der Untersuchung der Konvergenz von Verteilungsfunktionen ist es, sich die folgenden drei Definitionen ins Gedächtnis zu rufen.

Definition 3.1.1. *Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ nennen wir **Verteilungsfunktion**, wenn sie monoton steigend, rechtsstetig ist und die Grenzwertforderungen $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ sowie $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ erfüllt.*

Definition 3.1.2. *Sei F eine Verteilungsfunktion. Dann setzen wir $\mathcal{C}(F)$ als die Menge der Punkte, in denen F stetig ist und nennen diese Punkte **Stetigkeitsstellen**. Die restlichen Punkte $\mathcal{D}(F) = \mathbb{R} \setminus \mathcal{C}(F)$ nennen wir **Unstetigkeitsstellen**.*

Definition 3.1.3. *Eine **Sprungstelle** einer Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein $x_0 \in \mathbb{R}$ für das linksseitige und rechtsseitige Grenzwerte $\lim_{x\uparrow x_0} F(x)$ und $\lim_{x\downarrow x_0} F(x)$ existieren, aber nicht übereinstimmen.*

Es stellt sich dabei heraus, dass jede Verteilungsfunktion F durch alle Werte $F(t)$ für Stetigkeitsstellen $t \in \mathcal{C}(F)$ bereits eindeutig festgelegt ist. Unter Verwendung des folgenden Lemmas, welches die Mengen $\mathcal{D}(F)$ für monoton steigende Funktionen F als sehr klein auszeichnet, ist diese eindeutige Festlegung eine wichtige Teilaussage des Korollars 3.1.5.

Lemma 3.1.4. *Für eine monoton steigende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{D}(F)$ höchstens abzählbar und besteht nur aus Sprungstellen. Ist zusätzlich F rechtsstetig, enthält $\mathcal{D}(F)$ ausschließlich Punkte x_0 mit $\lim_{x\uparrow x_0} F(x) < F(x_0)$.*

Beweis. Mit der Monotonie von F existieren die Grenzwerte

$$F(x^-) := \lim_{\xi\uparrow x} F(\xi) \leq F(x) \quad \text{und} \quad F(x^+) := \lim_{\xi\downarrow x} F(\xi) \geq F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit $D_n := \{x \in \mathbb{R} : F(x^+) - F(x^-) \geq 1/n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir wegen $F(x^-) \leq F(x^+)$ somit die Darstellung

$$\mathcal{D}(F) = \Big\{x \in \mathbb{R} : F(x^+) > F(x^-)\Big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n. \tag{3.1.1}$$

Die Funktion F steigt nun auf jedem Intervall $[z, z+1]$ mit $z \in \mathbb{Z}$ insgesamt um den Wert $F(z+1) - F(z)$ an. Da F in allen Punkten $x \in D_n$ für $n \in \mathbb{N}$ jeweils mindestens um den Wert $1/n$ ansteigt, kann also die Menge D_n höchstens

$$\frac{F(z+1) - F(z)}{1/n} = n\,(F(z+1) - F(z)) < \infty$$

Punkte aus $[z, z+1]$ enthalten. Damit ist jedes $D_n = \cup_{z\in\mathbb{Z}}(D_n \cap [z, z+1])$ höchstens abzählbar und mit (3.1.1) auch die Menge $\mathcal{D}(F)$ höchstens abzählbar.

Sei nun $x_0 \in \mathcal{D}(F)$ eine solche Unstetigkeitsstelle. Da $F(x_0^-)$ und $F(x_0^+)$ wie oben existieren, muss x_0 eine Sprungstelle sein. Ist F rechtsstetig, muss $F(x_0^-) \neq F(x_0) = F(x_0^+)$ gelten, also ist $\lim_{x\uparrow x_o} F(x) = F(x_0^-) < F(x_0)$. $\square$

Korollar 3.1.5. *Für eine monoton steigende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liegt $\mathcal{C}(F)$ dicht in $\mathbb{R}$. Ist F zusätzlich rechtsstetig, gilt für jede weitere monoton steigende, rechtsstetige Funktion G genau dann $F = G$, wenn F und G auf $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$ übereinstimmen. Insbesondere wird jedes monoton steigende, rechtsstetige F eindeutig durch seine Werte auf $\mathcal{C}(F)$ festgelegt.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{D}(F) = \mathbb{R} \setminus \mathcal{C}(F)$ ist nach Lemma 3.1.4 höchstens abzählbar, enthält also keine Intervalle. Damit finden wir für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ein $x \in \mathcal{C}(F)$ mit $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Somit liegt $\mathcal{C}(F)$ dicht in $\mathbb{R}$.

Ist G ebenfalls monoton steigend, ist auch $\mathcal{D}(F) \cup \mathcal{D}(G)$ höchstens abzählbar. Mit der gleichen Argumentation liegt also auch $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G) = \mathbb{R}\setminus(\mathcal{D}(F) \cup \mathcal{D}(G))$ dicht in $\mathbb{R}$. Somit finden wir für beliebige $x_0 \notin \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$ eine Folge $(x_n)_n \subseteq \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$ mit $x_n \downarrow x_0$ für $n \to \infty$. Stimmen F und G nun auf $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$ überein, gilt mit der Rechtsstetigkeit von F und G auch

$$F(x_0) = \lim_{x\downarrow x_0} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} G(x_n) = \lim_{x\downarrow x_0} G(x) = G(x_0).$$

Da $x_0 \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$ beliebig war, gilt somit $F = G$ auf ganz $\mathbb{R}$. Die Eindeutigkeit von F durch Angabe der Werte auf $\mathcal{C}(F)$ folgt schließlich aus der zweiten Aussage, da ein monoton steigendes, rechtsstetiges F insbesondere mit sich selbst auf $\mathcal{C}(F)$ übereinstimmt. $\square$

3.2 Schwache Limiten

Wir wissen also, dass Verteilungsfunktionen durch ihre Werte an den jeweiligen Stetigkeitsstellen eindeutig bestimmt sind. Dies macht es natürlich, auch für die Definition des Grenzwertes F einer Folge von Verteilungsfunktionen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lediglich eine Forderung an die $F(t)$ für $t \in \mathcal{C}(F)$ zu stellen. Genau dieses Vorgehen motiviert den Begriff der schwachen Grenzwerte.

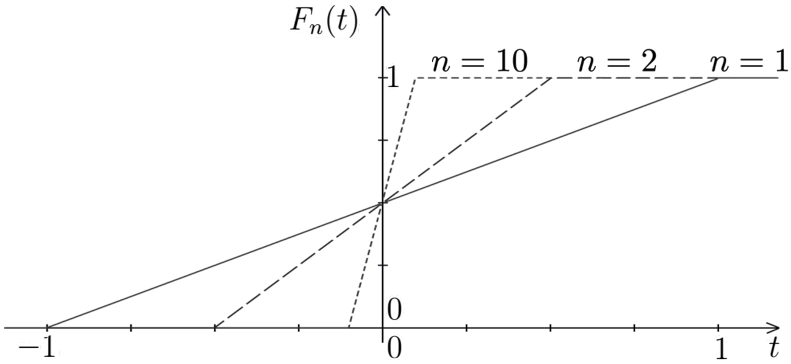
Definition 3.2.1. *Eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen heißt **schwach konvergent** gegen eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, falls $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ für alle $t \in \mathcal{C}(F)$ gilt. In diesem Fall nennen wir F einen **schwachen Grenzwert** der Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Gäbe es dabei zwei Verteilungsfunktionen F und G, die schwache Grenzwerte einer Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen wären, müssten diese als punktweise Limiten auf $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$ übereinstimmen. Nach Korollar 3.1.5 gilt damit jedoch $F = G$. Jede Folge von Verteilungsfunktionen besitzt also maximal eine Verteilungsfunktion als schwachen Grenzwert.

Beispiel 3.2.2. Man betrachte die Folge der Verteilungsfunktionen

$$F_n(t) := \begin{cases} 0, & t < -1/n, \\ \frac{1+nt}{2}, & t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 1, & t > 1/n, \end{cases}$$

wie in der folgenden Abbildung.



Für jedes $\alpha \in [0,1]$ ist dann die Funktion $G_\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$G_\alpha(t) := \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \alpha, & t = 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

monoton steigend, besitzt genau eine Unstetigkeitsstelle in $t = 0$ und ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ der punktweise gebildete Limes der F_n. Mit jedem G_α als schwachem

Grenzwert der F_n sind schwache Limiten also nicht eindeutig. Nichtsdestotrotz ist $G_1(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$ der einzige dieser Grenzwerte, der rechtsstetig ist und damit selbst wieder eine Verteilungsfunktion darstellt. Diese Art der Eindeutigkeit soll die Definition eines schwachen Grenzwerts erreichen.

Auch Verteilungsfunktionen arithmetischer Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ können und werden wir so als schwache Grenzwerte – ähnlich zur Forderung (3.0.1) zu Anfang des Kapitels – definieren.

Definition 3.2.3. *Wir sagen, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$* ***(im Grenzwert) eine Verteilungsfunktion** F **besitzt**, falls die Folge $(F_N)_{N\in\mathbb{N}}$ der Verteilungsfunktionen wie in Definition* 3.0.1 *schwach gegen F konvergiert und F eine Verteilungsfunktion ist.*

Zu klären ist nun also, wann für eine Folge von Verteilungsfunktionen ein schwacher Grenzwert existiert, der ebenfalls eine Verteilungsfunktion ist. Die Definition eines schwachen Grenzwertes weist dabei eine gewisse Schwierigkeit auf. Wir nehmen hierzu an, dass F nicht im Vorhinein bekannt sei, sondern durch das Bilden vieler punktweiser Limiten bestimmt werden soll. In diesem Fall kann es schwierig sein, a priori festzustellen, an welchen Stellen F stetig sein und somit eine punktweise Konvergenz gefordert sein wird. Eine einfachere Forderung wäre es, die punktweise Konvergenz der F_n nur auf einer hinreichend großen Menge garantieren zu müssen, welche nicht von den Eigenschaften der Funktion F abhängen muss. Solche eine Forderung stellt das folgende Lemma.

Lemma 3.2.4. *Eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen konvergiere auf einer in $\mathbb{R}$ dichten Menge M punktweise gegen eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann haben die F_n auch einen schwachen Grenzwert $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, der monoton steigend, rechtsstetig und mit diesen Eigenschaften eindeutig ist. Als monoton steigende und rechtsstetige Funktion ist dieses F nach Definition 3.1.1 genau dann eine Verteilungsfunktion, wenn*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \textit{ gilt.}$$

Beweis. Die Funktion G ist auf M beschränkt, da $0 \le F_n(t) \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt, also auch $G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in M$. Ferner ist G als punktweiser Limes der monoton steigenden F_n auf M monoton steigend, da für $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \le x_2$ gilt, dass

$$G(x_2) - G(x_1) = \lim_{n\to\infty} F_n(x_2) - \lim_{n\to\infty} F_n(x_1) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(F_n(x_2) - F_n(x_1))}_{\ge 0} \ge 0.$$

Da M dicht in $\mathbb{R}$ liegt, können wir $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ als

$$F(x) := \inf\{G(\xi) : x < \xi \in M\} \in [0,1]$$

definieren. Mit der Monotonie von G auf M ist auch F monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$. Außerdem ist F rechtsstetig aufgrund der Identitäten

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \downarrow x} F(\xi) &= \lim_{\xi \downarrow x} \inf\{G(z) : \xi < z \in M\} = \inf\{G(z) : \xi < z \in M \text{ für ein } \xi > x\} \\ &= \inf\{G(z) : x < z \in M\} = F(x).\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, dass F ein schwacher Limes der F_n ist. Seien dazu $x \in \mathcal{C}(F)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da F monoton steigend und stetig in x ist sowie M dicht in $\mathbb{R}$ liegt, können wir $r_1, r_2, s \in M$ mit $r_1 < r_2 < x < s$ so finden, dass

$$F(x) - \varepsilon < F(r_1) \leq F(r_2) \leq F(x) \leq F(s) < F(x) + \varepsilon \tag{3.2.1}$$

gilt. Mit G als monotonem, punktweisem Grenzwert der F_n auf M gilt dann

$$F_n(r_2) \xrightarrow{n\to\infty} G(r_2) \geq \inf\{G(\xi) : r_1 < \xi \leq r_2 \in M\} = F(r_1) \tag{3.2.2}$$
$$F_n(s) \xrightarrow{n\to\infty} G(s) \leq \inf\{G(\xi) : s < \xi \in M\} = F(s). \tag{3.2.3}$$

Aus (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) und der Monotonie der F_n folgt somit für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, dass

$$F(x) - \varepsilon < F_n(r_2) \leq F_n(x) \leq F_n(s) < F(x) + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \to 0$ gilt damit auch $F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$, was zu zeigen war.

Zur Eindeutigkeit: Gäbe es einen zweiten schwachen Grenzwert $\tilde{F}$, welcher monoton steigend und rechtsstetig ist, müssten F und $\tilde{F}$ auf $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(\tilde{F})$ als punktweise Limiten der F_n übereinstimmen. Mit der Monotonie und Rechtsstetigkeit beider Funktionen gilt somit $F = \tilde{F}$ nach Korollar 3.1.5. $\square$

Ein Korollar zur letzten Aussage, welches sich im Beweis des Stetigkeitssatzes von Lévy als nützlich erweisen wird, ist der Auswahlsatz von Helly.

Korollar 3.2.5 (Helly's Auswahlsatz). *Für jede Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen gibt es eine Teilfolge $(F_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine monoton steigende, rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, sodass die $F_{n(k)}$ für $k \to \infty$ schwach gegen F konvergieren.*

Beweis. Sei $(q_n)_n$ eine Abzählung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Wir setzen zunächst $m_0(j) = j$ für $j \in \mathbb{N}$. Mit $(F_n(q_k))_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es nach BOLZANO-WEIERSTRASS induktiv für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Folge $(m_k(j))_{j\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge von $(m_{k-1}(j))_{j\in\mathbb{N}}$, sodass der Limes

$$G(q_k) := \lim_{j\to\infty} F_{m_k(j)}(q_k)$$

existiert. Wir setzen nun $F_{n(k)} := F_{m_k(k)}$. Wegen der Teilfolgenbeziehung $(m_0(j))_{j\in\mathbb{N}} \supseteq (m_1(j))_{j\in\mathbb{N}} \supseteq \ldots$ gilt dann $\lim_{k\to\infty} F_{n(k)}(q) = G(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Mit Lemma 3.2.4 folgt somit für $M = \mathbb{Q}$ als in $\mathbb{R}$ dichter Teilmenge die Behauptung. □

Wie in Lemma 3.2.4 angesprochen, müssen die schwachen Grenzwerte von Verteilungsfunktionen – auch wenn sie monoton steigend und rechtsstetig sind – nicht selbst wieder Verteilungsfunktionen sein, da die Grenzwertforderungen für $x \to \pm\infty$ verletzt sein können. Die folgende Definition führt den Begriff der Straffheit für Folgen von Verteilungsfunktionen ein, welcher dieses Problem durch eine entsprechende Voraussetzung ausschließen wird.

Definition 3.2.6. *Eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$ nennen wir **straff**, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon > 0$ existiert mit*

$$\limsup_{n\to\infty} (1 - F_n(M_\varepsilon) + F_n(-M_\varepsilon)) \leq \varepsilon.$$

Ist jeweils μ_n das Wahrscheinlichkeitsmaß zu F_n und bilden die F_n eine straffe Folge von Verteilungsfunktionen, gilt insbesondere

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n((M_\varepsilon, \infty)) = \limsup_{n\to\infty} (1 - F_n(M_\varepsilon)) \leq \varepsilon,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n((-\infty, -M_\varepsilon]) = \limsup_{n\to\infty} F_n(-M_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$ und die erwähnten Schranken M_ε. Anders ausgedrückt ist für eine straffe Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen und jedes $1/2 \geq \varepsilon > 0$ sowie $\delta > 0$ somit abgesichert, dass die Werte

$$x_n := \sup\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \leq \varepsilon\} \quad \text{und} \quad y_n := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq 1 - \varepsilon\}$$

mit $x_n \leq y_n$ sich für $n \to \infty$ höchstens endlich oft außerhalb des Intervalls $[-M_\varepsilon - \delta, M_\varepsilon + \delta]$ aufhalten, d.h. betraglich nicht unendlich groß werden. Dies resultiert nach dem folgenden Satz 3.2.7 in der Eigenschaft, dass die monoton steigenden, rechtsstetigen schwachen Limiten einer straffen Folge von Verteilungsfunktionen immer auch selbst Verteilungsfunktionen sind.

Satz 3.2.7. *Sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen. Alle monoton steigenden, rechtsstetigen schwachen Grenzwerte $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu Teilfolgen von $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind genau dann selbst Verteilungsfunktionen, wenn die Folge der F_n straff ist.*

Beweis. Die Folge der F_n sei zunächst straff und $(F_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit schwachem, monoton steigendem, rechtsstetigen Grenzwert $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $x \in \mathcal{C}(F)$ gilt dabei $F_n(x) \in [0,1]$, also auch $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \in [0,1]$. Mit der Monotonie von F und Dichtheit von $\mathcal{C}(F)$ in $\mathbb{R}$ nach Korollar 3.1.5 folgt somit $F(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Es bleiben noch die Grenzwertforderungen für F zu zeigen. Für ein $\varepsilon > 0$ können wir dabei ein M_ε wie in Definition 3.2.6 finden. Da die Menge $\mathcal{C}(F)$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, können wir außerdem $r, s \in \mathcal{C}(F)$ wählen mit $r < -M_\varepsilon$ und $s > M_\varepsilon$. Für F als schwachen Limes gilt somit $\lim_{k\to\infty} F_{n(k)}(r) = F(r)$ und $\lim_{k\to\infty} F_{n(k)}(s) = F(s)$, also erhalten wir

$$\begin{aligned} 1-F(s) &= \lim_{k\to\infty}(1-F_{n(k)}(s)) \leq \limsup_{n\to\infty}(1-F_n(s)) \leq \limsup_{n\to\infty}(1-F_n(M_\varepsilon)) \leq \varepsilon, \\ F(r) &= \lim_{k\to\infty} F_{n(k)}(r) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(r) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(-M_\varepsilon) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Mit der Dichtheit von $\mathcal{C}(F)$ in $\mathbb{R}$ können wir in diesen Ungleichungsketten $s \to \infty$ sowie $r \to -\infty$ innerhalb von $\mathcal{C}(F)$ laufen lassen. Wegen der Monotonie von F folgt somit

$$\lim_{x\to\infty}(1 - F(x)) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathcal{C}(F)}}(1 - F(x)) \leq \varepsilon \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\in\mathcal{C}(F)}} F(x) \leq \varepsilon.$$

Lassen wir ε gegen 0 laufen, kann nur $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ gelten, womit F eine Verteilungsfunktion ist.

Für die Umkehrung sei die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht straff. Nach Definition 3.2.6 muss es dann ein $\varepsilon > 0$ und eine natürliche Folge $n(1) < n(2) < ...$, also mit $\lim_{k\to\infty} n(k) = \infty$ geben, sodass

$$F_{n(k)}(k) + F_{n(k)}(-k) \geq \varepsilon \tag{3.2.4}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Helly's Auswahlsatz können wir eine Teilfolge $(n(k_j))_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ finden, sodass die $F_{n(k_j)}$ für $j \to \infty$ schwach gegen ein monoton steigendes, rechtsstetiges $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ konvergieren. Wäre F eine Verteilungsfunktion, so wäre $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Wir würden also ein $x_0 > 0$ finden mit

$$1 - F(s) + F(r) < \varepsilon \quad \text{für alle } r < -x_0 \text{ und } s > x_0. \tag{3.2.5}$$

Da $(n(k_j))_{j\in\mathbb{N}}$ und $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ jeweils Folgen paarweise verschiedener natürlicher Zahlen sind, überschreiten die $n(k_j)$ bzw. k_j jede untere Schranke $n \in \mathbb{N}$ nach höchstens endlich vielen Folgegliedern dauerhaft. Somit gilt $\lim_{j\to\infty} n(k_j) = \lim_{j\to\infty} k_j = \infty$. Für alle Stetigkeitsstellen $r, s \in \mathcal{C}(F)$ mit $r < -x_0$ und

$s > x_0$ – welche aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{C}(F)$ in $\mathbb{R}$ existieren – liefert dies den Widerspruch

$$\begin{aligned}\varepsilon \overset{(3.2.5)}{>} 1 - F(s) + F(r) &= \lim_{j\to\infty} 1 - F_{n(k_j)}(s) + F_{n(k_j)}(r) \\ &\geq \liminf_{j\to\infty} 1 - F_{n(k_j)}(k_j) + F_{n(k_j)}(-k_j) \overset{(3.2.4)}{\geq} \varepsilon.\end{aligned}$$

F kann also keine Verteilungsfunktion gewesen sein. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir noch eine weitere, äquivalente Definition der schwachen Konvergenz von Verteilungsfunktionen angeben. Der Beweis ist simpel aber recht lang, weswegen wir ihn hier nur skizzieren.

Satz 3.2.8. *Eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen konvergiert genau dann schwach gegen eine weitere Verteilungsfunktion F, wenn für alle beschränkten und stetigen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x).$$

Beweis. Für einen elementaren Beweis der Version mit reellwertigen Funktionen f siehe [Dur10], Theorem 5.8. Die Version für komplexwertige f ergibt sich daraus sofort durch Aufteilen von f in Real- und Imaginärteil. Dass die schwache Konvergenz der F_n die Konvergenz der Integrale impliziert, ergibt sich durch eine geeignete Approximation der f durch Treppenfunktionen mit Sprungstellen in $\mathcal{C}(F)$ und Ausnutzen der dortigen punktweisen Konvergenz der F_n. Die umgekehrte Richtung ergibt sich anschließend durch Wahl von stetigen Approximationen der Funktionen $\mathbb{1}_{(-\infty,t]}(x)$ für $t \in \mathbb{R}$ und Ausnutzen der Beziehung

$$F_n(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(x)\, dF_n(x).$$

□

3.3 Charakteristische Funktionen

Mit den hergeleiteten Resultaten über schwache Limiten werden wir in diesem Abschnitt den Stetigkeitssatz 3.3.5 von Lévy beweisen. Dieser übersetzt die schwache Konvergenz von Verteilungsfunktionen in eine punktweise Konvergenz einer zugehörigen Folge von Funktionen. Hierzu werden wir zunächst den Begriff einer charakteristischen Funktion einführen und in den folgenden Lemmata zwei wesentliche Eigenschaften solcher Funktionen festhalten.

Definition 3.3.1. *Es sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ mit zugehörigem Wahrscheinlichkeitsmaß μ. Als* ***charakteristische Funktion*** *von F bezeichnen wir dann die Funktion $\varphi_F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit*

$$\varphi_F(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x). \tag{3.3.1}$$

Mit $x \mapsto e^{itx}$ als stetiger, also messbarer Funktion und $|e^{itx}| = 1$ für $x, t \in \mathbb{R}$ existiert dabei $\varphi_F(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit

$$|\varphi_F(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}|\, dF(x) = \mu(\mathbb{R}) = 1 = \varphi_F(0).$$

Lemma 3.3.2. *Sei F eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$. Dann ist die charakteristische Funktion φ_F stetig.*

Beweis. Für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\varphi_F(t) - \varphi_F(s)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - e^{isx}\right) dF(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \overbrace{\left|e^{i(t-s)x} - 1\right|}^{\leq 2} dF(x) \leq 2.$$

Nach dem Satz 0.0.19 von der majorisierten Konvergenz ist also

$$\lim_{s \to t} |\varphi_F(t) - \varphi_F(s)| \leq \lim_{s \to t} \int_{\mathbb{R}} \left|e^{i(s-t)x} - 1\right| dF(x) = \int_{\mathbb{R}} |e^0 - 1|\, dF(x) = 0.$$

Damit ist $\lim_{s \to t} \varphi_F(s) = \varphi_F(t)$, also φ_F stetig. $\square$

Lemma 3.3.3 (Inversionsformel)**.** *Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion mit charakteristischer Funktion φ_F. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(F)$ mit $\alpha \leq \beta$ die* ***Inversionsformel***

$$F(\beta) - F(\alpha) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it\alpha} - e^{-it\beta}}{it} \varphi_F(t)\, dt. \tag{3.3.2}$$

Beweis. Für $T > 0$ setzen wir

$$I_T := \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it\alpha} - e^{-it\beta}}{it} \varphi_F(t)\, dt = \int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-it\alpha} - e^{-it\beta}}{it} e^{itx}\, dF(x)\, dt.$$

Dieses Integral existiert, da $f(x,t) := (e^{-it\alpha} - e^{-it\beta})e^{itx}/(it)$ eine messbare Funktion ist und das Integral über $|f(x,t)|$ existiert als

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{-it\alpha} - e^{-it\beta}}{it}\right| \cdot \overbrace{\left|e^{itx}\right|}^{=1} dF(x)\, dt &= \int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{-ity}\, dy\right| dF(x)\, dt \\ &= \int_{-T}^{T} \left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{ity}\, dy\right| dt \leq \int_{-T}^{T} \int_{\alpha}^{\beta} \left|e^{-ity}\right| dy\, dt = 2T(\beta - \alpha) < \infty.\end{aligned}$$

Wir können somit den Satz von FUBINI anwenden und erhalten

$$I_T = \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it\alpha} - e^{-it\beta}}{it} e^{itx} \, dt \, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-\alpha)} - e^{it(x-\beta)}}{it} \, dt \, dF(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{\cos(t(x-\alpha)) - \cos(t(x-\beta)) + i\sin(t(x-\alpha)) - i\sin(t(x-\beta))}{it} \, dt \, dF(x).$$

Nach L'HÔPITAL gilt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ dabei

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(ta) - \cos(tb)}{it} = \lim_{t\to 0} \frac{b\sin(tb) - a\sin(ta)}{i} = 0,$$

womit die Funktion $g : t \mapsto (\cos(t(x-\alpha)) - \cos(t(x-\beta))/(it)$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine in 0 stetige Fortsetzung als $g(0) = 0$ besitzt. Da g ungerade und das Intervall $[-T, T]$ symmetrisch um 0 ist, können wir I_T also vereinfachen zu

$$\begin{aligned} I_T &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-\alpha)) - \sin(t(x-\beta))}{t} \, dt \, dF(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-\alpha))}{t} \, dt - \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-\beta))}{t} \, dt \right) dF(x). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Mit der Notation $R(\theta, T) := \int_{-T}^{T} \sin(\theta t)/t \, dt = 2\int_0^T \sin(\theta t)/t \, dt$ können wir (3.3.3) umschreiben als

$$I_T = \int_{\mathbb{R}} (R(x-\alpha, T) - R(x-\beta, T)) \, dF(x). \tag{3.3.4}$$

Auch führen wir den Integralsinus $\mathrm{Si}(T) := \int_0^T \sin(t)/t \, dt$ ein. Aufgund von

$$|\sin(x)| = \left| \int_0^x \cos(x) \, dx \right| \le \int_0^x |\cos(x)| \, dx \le x$$

für $x \ge 0$ gilt dabei $|\sin(x)/x| \le 1$, womit für jedes $T > 0$ das Integral $\mathrm{Si}(T)$ existiert. Ferner folgt damit

$$|\,\mathrm{Si}(T)| \le 3 \quad \text{für } T \ge 0, \tag{3.3.5}$$

da sogar $|\mathrm{Si}(T)| \le \int_0^T |\sin(x)/x| \, dx \le T \le 1$ für $T \in [0, 1]$ gilt und somit für $T > 1$ mittels partieller Integration folgt, dass

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Si}(T)| &\le |\,\mathrm{Si}(1)| + \left| \int_1^T \frac{\sin(x)}{x} \right| \le 1 + \left| \cos(1) - \frac{\cos(T)}{T} - \int_1^T \frac{\cos(x)}{x^2} \, dx \right| \\ &\le 2 + \frac{1}{T} + \int_1^T \frac{dx}{x^2} = 2 + \frac{1}{T} + \left(1 - \frac{1}{T}\right) = 3. \end{aligned}$$

Zu $R(\theta, T)$ gilt dabei für $\theta > 0$ über die Substitution $u := \theta t$ die Beziehung

$$R(\theta, T) = 2\int_0^T \frac{\sin(\theta t)}{t}\,dt = \frac{2}{\theta}\int_0^{T\theta} \frac{\theta\sin(u)}{u}\,du = 2\,\mathrm{Si}(T\theta).$$

Für $\theta < 0$ erhalten wir über $\sin(\theta t) = -\sin(|\theta| t)$ analog $R(\theta, T) = -2\,\mathrm{Si}(T|\theta|)$ und für $\theta = 0$, dass $R(0, T) = 2\int_0^T 0\,dt = 0$ gilt. Diese drei Identitäten können wir zusammenfassen als

$$R(\theta, T) = 2\,\mathrm{sgn}(\theta)\,\mathrm{Si}(T|\theta|), \tag{3.3.6}$$

wobei wir $\mathrm{sgn}(0) = 0$ setzen. Für den Integralsinus existiert das Integral $\int_0^\infty \sin(x)/x\,dx$ im eigentlichen LEBESGUE-Sinne nicht, es lässt sich aber

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{Si}(T) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

zeigen, indem man beispielsweise das Residuenkalkül aus der Funktionentheorie anwendet. Dies werden wir nicht tun, verweisen aber dazu auf [Fre06], S.136-138. Mit (3.3.6) gilt somit $\lim_{T\to\infty} R(\theta, T) = \mathrm{sgn}(\theta)\pi$, mit $\alpha \le \beta$ also

$$\lim_{T\to\infty} R(x-\alpha, T) - R(x-\beta, T) = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } \alpha < x < \beta, \\ \pi, & \text{falls } x \in \{\alpha, \beta\}, \\ 0, & \text{falls } x < \alpha \text{ oder } \beta < x. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Aus (3.3.5) und (3.3.6) folgt $|R(\theta, T)| = 2|\,\mathrm{Si}(T|\theta|)| \le 2\sup_{y\ge 0} |\,\mathrm{Si}(y)| \le 6$ für $T > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$, also auch

$$\int_{\mathbb{R}} |R(x-\alpha, T) - R(x-\beta, T)|\,dF(x) \le \int_{\mathbb{R}} 12\,dF(x) = 12 < \infty.$$

Damit können wir den Satz 0.0.19 von der majorisierten Konvergenz auf (3.3.4) anwenden und erhalten mit (3.3.7) wie behauptet, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-it\alpha} - e^{-it\beta}}{it}\varphi_F(t)\,dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} I_T \\
&\overset{(3.3.4)}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (R(x-\alpha, T) - R(x-\beta, T))\,dF(x) \\
&\overset{0.0.19}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} (R(x-\alpha, T) - R(x-\beta, T))\,dF(x) \\
&\overset{(3.3.7)}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{(\alpha,\beta)} 2\pi\,dF(x) + \int_{\{\alpha,\beta\}} \pi\,dF(x)\right) = F(\beta) - F(\alpha).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt dabei, da $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(F)$ waren, d.h. $\int_{(\alpha,\beta)} 2\pi\,dF(x) = 2\pi\int_{(\alpha,\beta]} dF(x) = 2\pi(F(\beta) - F(\alpha))$ und $\int_{\{\alpha,\beta\}} \pi\,dF(x) = 0$ gilt. □

Aus Lemma 3.3.3 erhalten wir direkt die folgende, namensgebende Eigenschaft der charakteristischen Funktionen.

Satz 3.3.4. *Zwei Verteilungsfunktionen auf* $\mathbb{R}$ *stimmen genau dann überein, wenn sie die gleiche charakteristische Funktion besitzen.*

Beweis. Die erste Richtung ergibt sich sofort aus der Definition der charakteristischen Funktionen. Haben für die andere Richtung zwei Verteilungsfunktionen F und G auf $\mathbb{R}$ die gleiche charakteristische Funktion, folgt nach Lemma 3.3.3, dass

$$F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha)$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$ gilt. Da die letzte Menge nach Korollar 3.1.5 dicht in $\mathbb{R}$ liegt, können wir α gegen $-\infty$ laufen lassen. Mit $\lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha) = \lim_{\alpha \to -\infty} G(\alpha) = 0$ folgt somit $F(\beta) = G(\beta)$ für alle $\beta \in \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G)$. Ebenfalls nach Korollar 3.1.5 stimmen somit F und G auf ganz $\mathbb{R}$ überein. $\square$

Wir wissen nun, dass die Menge der Verteilungsfunktionen in Bijektion zur Menge der charakteristischen Funktionen steht. Damit liegt die Frage nahe, ob sich die schwache Konvergenz einer Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen gegen eine weitere Verteilungsfunktion F auch in einem Konvergenzverhalten der zugehörigen charakteristischen Funktionen widerspiegelt. Der Stetigkeitssatz von Lévy bejaht diese Frage und bringt so als letztes Resultat dieses Kapitels die schwache Konvergenz von Verteilungsfunktionen mit der punktweisen Konvergenz charakteristischer Funktionen zusammen.

Satz 3.3.5 (Stetigkeitssatz von Lévy)**.** *Sei* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge von Verteilungsfunktionen und* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *die zugehörige Folge charakteristischer Funktionen. Dann konvergieren die* F_n *genau dann schwach gegen eine Verteilungsfunktion* F*, wenn die* φ_n *punktweise auf* $\mathbb{R}$ *gegen eine in* 0 *stetige Funktion* φ *konvergieren. In diesem Fall ist* φ *die charakteristische Funktion von* F*.*

Beweis. Sei zunächst die Folge der F_n schwach gegen eine Verteilungsfunktion F konvergent. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt mit $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_t(x) = e^{itx}$ als stetiger beschränkter Funktion nach Satz 3.2.8 dann

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, dF(x) = \varphi(t),$$

wobei φ die charakteristische Funktion zu F sei. Diese ist nach Lemma 3.3.2 auf $\mathbb{R}$ stetig, also insbesondere in 0 stetig.

Für die andere Richtung seien die φ_n punktweise gegen eine in 0 stetige Funktion φ konvergent. Wir zeigen, dass dann die F_n eine straffe Folge bilden.

Für $u > 0$ stellen wir hierzu $\int_{-u}^{u}(1 - e^{it0})\,dt = \int_{-u}^{u} 0\,dt = 0$ und

$$\int_{-u}^{u}(1 - e^{itx})\,dt = 2u - \int_{-u}^{u}\left(\cos(tx) + \underbrace{i\sin(tx)}_{\text{ungerade}}\right)dt = 2u - \frac{2\sin(ux)}{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

für $x \neq 0$ fest. Die Funktion $g_u : x \mapsto \int_{-u}^{u}(1 - e^{itx})\,dt$ ist dabei betraglich durch $4u$ beschränkt und mit dem Grenzwert in obiger Formel stetig. Wir können $x \mapsto g_u(x)/u$ also nach $dF_n(x)$ integrieren und erhalten

$$\frac{1}{u}\int_{\mathbb{R}}\int_{-u}^{u}\left(1 - e^{itx}\right)dt\,dF_n(x) = 2\int_{\mathbb{R}}\left(1 - \frac{\sin(ux)}{ux}\right)dF_n(x) \in \mathbb{R}, \tag{3.3.8}$$

wobei wir von hier an $\sin(ux)/(ux) = 1$ für $x = 0$ setzen. Da die Integrale

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\varphi_n(x)|dt \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\int_{\mathbb{R}}\overbrace{|1-e^{itx}|}^{\leq 2}\,dF_n(x)\,dt \leq \int_{\mathbb{R}}\frac{4u}{u}dF_n(x) = 4 \tag{3.3.9}$$

existieren, folgt für die linke Seite von (3.3.8) mit dem Satz von Fubini

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))\,dt = \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\int_{\mathbb{R}}\left(1-e^{itx}\right)dF_n(x)\,dt = 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin(ux)}{ux}\right)dF_n(x). \tag{3.3.10}$$

Dabei bemerken wir, dass $|\sin(x)| = |\int_0^x \cos(y)\,dy| \leq \int_0^{|x|} dy = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch $1 - \sin(ux)/(ux) \geq 0$ gilt. Eine Abschätzung der rechten Seite von (3.3.10) nach unten erhalten wir also durch Verwerfen des Integrals über $(-2/u, 2/u)$ und über die Abschätzung $|\sin(ux)| \leq 1$ als

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))\,dt &= 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\tfrac{\sin(ux)}{ux}\right)dF_n(x) \geq 2\int\limits_{\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 2/u\}}\left(\overbrace{1-\tfrac{1}{|ux|}}^{\geq 1/2}\right)dF_n(x)\\ &\geq \int\limits_{\{x\in\mathbb{R}:|x|\geq 2/u\}} dF_n(x) = \mu_n\left(\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2/u\}\right).\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Dabei sei μ_n jeweils das Wahrscheinlichkeitsmaß zu F_n. Mit φ als punktweisem Limes der φ_n ist dann $\varphi(0) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Aus der Stetigkeit von φ in $t = 0$ folgt also $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = \varphi(0) = 1$. Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir so ein $u_\varepsilon > 0$ mit $|1 - \varphi(t)| \leq \varepsilon/2$ für alle $|t| \leq u_\varepsilon$. Somit folgt

$$\left|\frac{1}{u_\varepsilon}\int_{-u_\varepsilon}^{u_\varepsilon}(1-\varphi(t))dt\right| \leq \int_{-u_\varepsilon}^{u_\varepsilon}\frac{|1-\varphi(t)|}{u_\varepsilon}dt \leq \int_{-u_\varepsilon}^{u_\varepsilon}\frac{\varepsilon}{2u_\varepsilon}\,dt = \varepsilon. \tag{3.3.12}$$

Mit (3.3.9) als Bedingung für den Satz von der majorisierten Konvergenz folgt mit $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{u_\varepsilon}\int_{-u_\varepsilon}^{u_\varepsilon}(1-\varphi_n(t))\,dt}_{\in\mathbb{R}\text{ nach (3.3.8)}} = \frac{1}{u_\varepsilon}\int_{-u_\varepsilon}^{u_\varepsilon}\lim_{n\to\infty}(1-\varphi_n(t))\,dt = \frac{1}{u_\varepsilon}\int_{-u_\varepsilon}^{u_\varepsilon}(1-\varphi(t))\,dt.$$

Damit und mit (3.3.12) finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, sodass auch

$$2\varepsilon \geq \frac{1}{u_\varepsilon} \int_{-u_\varepsilon}^{u_\varepsilon} (1 - \varphi_n(t))\, dt \overset{(3.3.11)}{\geq} \mu_n (\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2/u_\varepsilon\})$$

für alle $n \geq N$ gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist damit die Folge der F_n straff für $M_{2\varepsilon} = 2/u_\varepsilon$ wie in der Definition 3.2.6.

Als straffe Folge von Verteilungsfunktionen besitzt jede Teilfolge $(\tilde{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der F_n nach HELLY'S Auswahlsatz 3.2.5 eine weitere Teilfolge $(\tilde{F}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit einem schwachen Grenzwert $\tilde{F}$, der nach Satz 3.2.7 selbst eine Verteilungsfunktion ist. Nach der ersten Richtung des Satzes, den wir gerade zeigen, konvergieren die charakteristischen Funktionen $\tilde{\varphi}_{n_k}$ der $\tilde{F}_{n_k}$ somit punktweise gegen die charakteristische Funktion $\tilde{\varphi}$ der Verteilungsfunktion $\tilde{F}$. Da die $\tilde{\varphi}_{n_k}$ aber jeweils eine Teilfolge der $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden und letztere Folge punktweise gegen φ konvergiert, muss mit der Eindeutigkeit punktweiser Limiten auf $\mathbb{C}$ stets $\tilde{\varphi} = \varphi$ gelten. Nach Satz 3.3.4 ist somit auch die Verteilungsfunktion $\tilde{F}$ immer dieselbe, welche wir im Folgenden als F bezeichnen werden.

Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beliebige beschränkte, stetige Funktion. Da, wie begründet, alle Teilfolgen von $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge haben, die gegen die Verteilungsfunktion F schwach konvergiert, hat mit Satz 3.2.8 auch jede Teilfolge der Integrale $\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge, die gegen $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x)$ konvergiert. Mit Lemma 0.0.42 konvergiert somit ganz $\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dF(x)$. Da f beliebig war, ist somit nach Satz 3.2.8 die Verteilungsfunktion F ein schwacher Grenzwert der F_n. □

Wir werden im nächsten Kapitel den Stetigkeitssatz von LÉVY nutzen, um in Form des Satzes von ERDŐS-WINTNER eine handliche Äquivalenz zur Existenz der Verteilung einer additiven arithmetischen Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wie in Definition 3.2.3 herzuleiten. Für allgemeine reellwertige f liefert der Satz von LÉVY aber schon jetzt das folgende Korollar.

Korollar 3.3.6. *Eine arithmetische Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ besitzt genau dann eine Verteilungsfunktion F, wenn die Funktionenfolge $(\varphi_N : \mathbb{N} \to \mathbb{C})_{N\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\varphi_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e^{itf(n)}$$

punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen eine in 0 stetige Funktion φ konvergiert. In diesem Fall ist φ die charakteristische Funktion zu F.

Beweis. Es gilt $\varphi_N(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} e^{itf(n)}$ für die F_N aus Definition 3.0.1 und $t \in \mathbb{R}$. Der Rest der Behauptung ist unter Verwendung von Definition 3.2.3 also genau die Aussage des Stetigkeitssatzes 3.3.5. □

Kapitel 4

Verteilungen additiver arithmetischer Funktionen

4.1 Die Sätze von Delange

Das Korollar 3.3.6 des letzten Kapitels konnte eine Äquivalenz zur Existenz der Verteilungsfunktion einer arithmetischen Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ festhalten. Ist f speziell additiv, sind für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ die Funktionen $g_t : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $g_t(n) := e^{itf(n)}$ jeweils multiplikativ. Die Frage nach der Existenz einer Verteilungsfunktion von f ist dann nach Korollar 3.3.6 also äquivalent zur Frage nach den Existenzen von Mittelwerten

$$M(g_t) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} e^{itf(n)} = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_N(g_t)$$

einer Familie $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von multiplikativen Funktionen mit Werten auf dem Einheitskreis, wobei die Abbildung $t \mapsto M(g_t)$ stetig in $t = 0$ sein soll. Alle diese Bedingungen werden wir im nächsten Abschnitt im Satz von Erdős-Wintner als eine einfachere Äquivalenz festhalten. Zuvor betrachten wir dazu zwei Sätze von Delange, welche sich mit den Existenzen einzelner Mittelwerte $M(g)$ multiplikativer Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $|g(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschäftigen. Für ihren Beweis benötigen wir jedoch noch einige weitere Lemmata.

Lemma 4.1.1. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten die Abschätzungen*

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}, \quad |\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2}.$$

Beweis. Mit den Taylor-Entwicklungen des Sinus bzw. Cosinus in 0 bis zur zweiten bzw. ersten Potenz sowie der Restgliedabschätzung nach Lagrange (für beides siehe [Koe04], S.284) erhalten wir

$$|\sin(x) - x| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} - x\right| \leq \overbrace{\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\sin^{(3)}(\xi)|}^{=1} \frac{|x|^3}{3!} = \frac{|x|^3}{6}$$

bzw.

$$|\cos(x)-1| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} - 1\right| \leq \overbrace{\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\cos^{(2)}(\xi)|}^{=1} \frac{|x|^2}{2!} = \frac{x^2}{2}. \qquad \square$$

Lemma 4.1.2. *Seien $H \geq 0$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n, w_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ zwei Folgen, sodass $1+u_n(t)+w_n(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

i) Ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|\Big) \leq H \tag{4.1.1}$$

für ein $t \in \mathbb{R}$, konvergiert das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(t)+w_n(t))$ genau dann gegen einen Wert ungleich 0, wenn die Reihe $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ konvergiert. Ist dies der Fall, gilt die Abschätzung

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(t)+w_n(t))\right| \leq \exp\left(6H + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,(u_n(t))\right). \tag{4.1.2}$$

ii) Gilt (4.1.1) für alle $t \in \mathbb{R}$, sind die u_n und w_n stetig sowie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|^2 + |w_n|)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ kompakt konvergent auf $\mathbb{R}$, ist auch das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n+w_n)$ kompakt konvergent auf $\mathbb{R}$ und damit stetig.

Beweis. Wir definieren zunächst die Abbildung $\mathcal{M} : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ als

$$\mathcal{M}(t) := \{n \in \mathbb{N} : |u_n(t)| + |w_n(t)| \geq 1/2\}.$$

Für alle $n \in \mathcal{M}(t)$ gilt dann $|w_n(t)| \geq 1/2 - |u_n(t)|$, also

$$|u_n(t)|^2 + |w_n(t)| \geq |u_n(t)|^2 - |u_n(t)| + \frac{1}{2} = \left(|u_n(t)| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}, \tag{4.1.3}$$

womit die Menge $\#\mathcal{M}(t) \leq 4H$ gelten muss, falls die Bedingung (4.1.1) erfüllt ist. Für alle $n \notin \mathcal{M}(t)$ gilt $|u_n(t)+w_n(t)| \leq |u_n(t)| + |w_n(t)| < 1/2$. Durch Anwenden der Ungleichung $|\log(1+z) - z| \leq |z|^2$ aus Lemma 0.0.12 für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1/2$ erhalten wir so für beliebige $0 \leq m < M$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{m<n\notin\mathcal{M}(t)}^{M} (u_n(t)+w_n(t)) - \sum_{m<n\notin\mathcal{M}(t)}^{M} \log(1+u_n(t)+w_n(t))\right| \\
&\leq \sum_{m<n\notin\mathcal{M}(t)}^{M} |u_n(t)+w_n(t) - \log(1+u_n(t)+w_n(t))| \\
&\leq \sum_{m<n\notin\mathcal{M}(t)}^{M} |u_n(t)+w_n(t)|^2 \leq \sum_{m<n\notin\mathcal{M}(t)}^{M} \Big(2|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|\Big).
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Die letzte Abschätzung folgt dabei aus $(a+b)^2 \leq (a+b)^2+(a-b)^2 = 2a^2+2b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und der Abschätzung $|w_n(t)| \leq |u_n(t)| + |w_n(t)| < 1/2$ für $n \notin \mathcal{M}(t)$, womit insgesamt folgt, dass

$$\begin{aligned} |u_n(t) + w_n(t)|^2 \leq (|u_n(t)| + |w_n(t)|)^2 &\leq 2|u_n(t)|^2 + 2|w_n(t)|^2 \\ &\leq 2|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Zu *i*)**:** Gilt für ein $t \in \mathbb{R}$ nun (4.1.1), folgt auch

$$\sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} \Big(2|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|\Big) \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \Big(|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|\Big) \leq 2H.$$

Damit finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(t, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{n_0 \leq n \notin \mathcal{M}(t)}^{M} \Big(2|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|^2\Big) \leq \varepsilon \tag{4.1.6}$$

für alle $M \geq n_0$ gilt. Die Abschätzung (4.1.4) setzt sich so für jene M fort als

$$\left| \sum_{n_0 \leq n \notin \mathcal{M}(t)}^{M} (u_n(t) + w_n(t)) - \sum_{n_0 \leq n \notin \mathcal{M}(t)}^{M} \log\left(1 + u_n(t) + w_n(t)\right) \right| \leq \varepsilon. \tag{4.1.7}$$

Für $\varepsilon \downarrow 0$ konvergiert also die Reihe $\sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} (u_n(t) + w_n(t))$ nach dem Kriterium von CAUCHY genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} \log(1 + u_n(t) + w_n(t))$ konvergiert. Da die Reihe über die $w_n(t)$ nach Voraussetzung (4.1.1) bereits absolut konvergieren muss und $\mathcal{M}(t) \subset \mathbb{N}$ nach Überlegung (4.1.3) endlich ist, sind also äquivalent die Konvergenzen der vier Reihen

$$\sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} \log(1 + u_n(t) + w_n(t)), \sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} (u_n(t) + w_n(t)), \sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} u_n(t) \text{ und } \sum_{n \geq 1} u_n(t). \tag{4.1.8}$$

Nach der Voraussetzung ist $1 + u_n(t) + w_n(t) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit

$$\operatorname{Re}\left(1 + u_n(t) + w_n(t)\right) \geq 1 - (|u_n(t)| + |w_n(t)|) > 1/2 \tag{4.1.9}$$

für $n \notin \mathcal{M}(t)$, also $1+u_n(t)+w_n(t) \notin (-\infty, 0]$ für solche n, ist die Konvergenz des Produkts $\prod_{n \notin \mathcal{M}(t)} (1 + u_n(t) + w_n(t))$ gegen einen Wert ungleich 0 nach Lemma 0.0.13, *i*) äquivalent zur Konvergenz der Reihe $\sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} \log(1+u_n(t)+w_n(t))$. Zusammenfassend sind also auch die Konvergenzen von

$$\prod_{n \geq 1} (1 + u_n(t) + w_n(t)), \prod_{n \notin \mathcal{M}(t)} (1 + u_n(t) + w_n(t)) \text{ und } \sum_{n \notin \mathcal{M}(t)} \log(1 + u_n(t) + w_n(t)) \tag{4.1.10}$$

äquivalent. Nach (4.1.8) und (4.1.10) konvergiert also wie behauptet das Produkt $\prod_{n \geq 1} (1 + u_n(t) + w_n(t))$ genau dann gegen einen Wert ungleich 0, wenn die Reihe $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ konvergiert.

Es sei nun das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(t)+w_n(t))$ für ein $t\in\mathbb{R}$ konvergent. Mit $|u_n(t)+w_n(t)|\leq 1/2$ für $n\notin\mathcal{M}(t)$ erhalten wir aus Lemma 0.0.12, (iii) für $n\notin\mathcal{M}(t)$ bzw. Lemma 0.0.12, (iv) für $n\in\mathcal{M}(t)$, dass

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{n\geq 1}(1+u_n(t)+w_n(t))\right| = \prod_{n\geq 1}|1+u_n(t)+w_n(t)| \\
&\leq \prod_{n\in\mathcal{M}(t)}\exp(|u_n(t)+w_n(t)|)\prod_{n\notin\mathcal{M}(t)}\exp\Big(\mathrm{Re}\,(u_n(t)+w_n(t))+|u_n(t)+w_n(t)|^2\Big) \\
&\leq \prod_{n\in\mathcal{M}(t)}\exp(|u_n(t)|+|w_n(t)|)\prod_{n\notin\mathcal{M}(t)}\exp\Big(\mathrm{Re}\,(u_n(t)+w_n(t))+2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big) \\
&= \exp\Bigg(\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}(|u_n(t)|+|w_n(t)|)+\sum_{n\notin\mathcal{M}(t)}(\mathrm{Re}\,(u_n(t)+w_n(t))+2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|)\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Die letzte Umformung folgt dabei aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ und $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$ für $a,b\in\mathbb{R}$. Mit der Monotonie der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ sowie

$$|z|-\mathrm{Re}\,(z)\geq|\mathrm{Re}\,(z)|-\mathrm{Re}\,(z)\geq 0$$

und analog $|z|+\mathrm{Re}\,(z)\geq 0$ für $z\in\mathbb{C}$ können wir (4.1.11) fortsetzen als

$$\begin{aligned}
&\leq \exp\Bigg(\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}(|u_n(t)|+|w_n(t)|)+\sum_{n\notin\mathcal{M}(t)}(\mathrm{Re}\,(u_n(t)+w_n(t))+2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|) \\
&\quad+\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}\underbrace{(|u_n(t)|+\mathrm{Re}\,(u_n(t)))}_{\geq 0}+\sum_{n\notin\mathcal{M}(t)}\underbrace{(|w_n(t)|-\mathrm{Re}\,(w_n(t)))}_{\geq 0}\Bigg) \\
&= \exp\Bigg(\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}(2|u_n(t)|+|w_n(t)|)+2\sum_{n\notin\mathcal{M}(t)}\Big(|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big)+\sum_{n\geq 1}\mathrm{Re}\,(u_n(t))\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, $\#\mathcal{M}(t)\leq 4H$ nach (4.1.3) und Voraussetzung (4.1.1) erhalten wir zusätzlich, dass

$$\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}|u_n(t)|\leq\Bigg(\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}1\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}|u_n(t)|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\leq\Bigg(4H\sum_{n\geq 1}(|u_n(t)|^2+|w_n(t)|)\Bigg)^{\frac{1}{2}}\leq 2H.$$

Damit und mit (4.1.1) folgt also

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}(2|u_n(t)|+|w_n(t)|)+2\sum_{n\notin\mathcal{M}(t)}\Big(|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big) \\
&\leq 2\sum_{n\in\mathcal{M}(t)}|u_n(t)|+2\sum_{n\geq 1}\Big(|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big)\leq 4H+2H=6H.
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (4.1.12) als Fortsetzung von (4.1.11) liefert dies die behauptete Abschätzung.

Zu *ii)***:** Mit der kompakten Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}}(2|u_n|^2+|w_n|)$ auf $\mathbb{R}$ und

$$\sup_{t\in\mathbb{K}}\sum_{n\geq N}\Big(2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big)\geq\sup_{t\in\mathbb{K}}\sum_{n\geq N,n\notin\mathcal{M}(t)}\Big(2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big)$$

für alle $N\in\mathbb{N}$, konvergiert auch die durch Teilreihen definierte Funktionenfolge $\sum_{n\notin\mathcal{M}}(2|u_n|^2+|w_n|)$ kompakt auf $\mathbb{R}$. Für jedes Kompaktum $K\subset\mathbb{R}$ und $N\to\infty$ konvergieren außerdem die nicht-negativen Ausdrücke

$$\sup_{t\in K}\sum_{n\geq N}\Big(2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big)\geq\sup_{t\in K}\sum_{N\leq n\notin\mathcal{M}(t)}|w_n(t)|\geq\sup_{t\in K}\Big|\sum_{N\leq n\notin\mathcal{M}(t)}w_n(t)\Big|$$

gegen 0. Mit der letzten Abschätzung konvergiert somit auch die Reihe $\sum_{n\notin\mathcal{M}}w_n$ kompakt auf $\mathbb{R}$. Ist zusätzlich die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ kompakt konvergent auf $\mathbb{R}$, finden wir für jedes Kompaktum $K\subset\mathbb{R}$ und festes $\varepsilon>0$ ein $\tilde{n}_0=\tilde{n}_0(K,\varepsilon)\in\mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{\tilde{n}_0\leq n\notin\mathcal{M}(t)}^{M}\Big(2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big),\Big|\sum_{\tilde{n}_0\leq n\notin\mathcal{M}(t)}^{M}(u_n(t)+w_n(t))\Big|\leq\frac{\varepsilon}{2}\tag{4.1.13}$$

für alle $M\geq\tilde{n}_0$ und $t\in K$ gilt. Die ohnehin für alle $t\in\mathbb{R}$ gültige Abschätzung (4.1.4) liefert somit für alle $M\geq\tilde{n}_0$ und $t\in K$, dass

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{\tilde{n}_0\leq n\notin\mathcal{M}(t)}^{M}\log\left(1+u_n(t)+w_n(t)\right)\Big|\\&\leq\Big|\sum_{\tilde{n}_0\leq n\notin\mathcal{M}(t)}^{M}(u_n(t)+w_n(t)-\log(1+u_n(t)+w_n(t))\Big|+\Big|\sum_{\tilde{n}_0\leq n\notin\mathcal{M}(t)}^{M}(u_n(t)+w_n(t))\Big|\\&\overset{(4.1.4)}{\leq}\sum_{\tilde{n}_0\leq n\notin\mathcal{M}(t)}^{M}\Big(2|u_n(t)|^2+|w_n(t)|\Big)+\Big|\sum_{\tilde{n}_0\leq n\notin\mathcal{M}(t)}^{M}(u_n(t)+w_n(t))\Big|\overset{(4.1.13)}{\leq}\varepsilon.\end{aligned}\tag{4.1.14}$$

Die Reihe $\sum_{n\notin\mathcal{M}}\log(1+u_n+w_n)$ konvergiert also gleichmäßig auf K.

Um damit die kompakte Konvergenz von $\prod_{n\geq1}(1+u_n+w_n)$ auf $\mathbb{R}$ zu erhalten, werden wir im Folgenden zeigen, dass die endlichen Mengen $\mathcal{M}(t)$ für alle $t\in K$ nur Elemente unterhalb einer endlichen Schranke $N(K)$ beinhalten können. Dass dies zum Ziel führt, überlegt man sich wie folgt: Nach (4.1.9) gilt $1+u_n(t)+w_n(t)\notin(-\infty,0]$ für alle $n\notin\mathcal{M}(t)$, also auch $1+u_n(t)+w_n(t)\notin(-\infty,0]$ für alle $n\geq N(K)$ und $t\in K$. Die Funktionen $\log(1+u_n+w_n)$ sind so mit der Stetigkeit von u_n,w_n nach Lemma 0.0.12, (vi) ebenfalls stetig. Außerdem konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq N(K)}\log(1+u_n+w_n)$ als Folgerung aus (4.1.14) gleichmäßig. Somit folgt nach Lemma 0.0.13 auch die gleichmäßige Konvergenz des Produkts $\prod_{n\geq1}(1+u_n+w_n)$ auf K, mit $K\subset\mathbb{R}$ als beliebigem Kompaktum also die kompakte Konvergenz desselben Produkts auf $\mathbb{R}$.

Wir kommen nun zur Existenz einer oben beschriebenen Schranke $N(K)$. Nach (4.1.3) gilt $2|u_n(t)|^2 + |w_n(t)| \geq |u_n(t)|^2 + |w_n(t)| \geq 1/4$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathcal{M}(t)$ gilt. Gäbe es nun unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, für die ein $t(n) \in K$ mit $n \in \mathcal{M}(t(n))$ existiert, wäre für alle $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\sup_{t\in K}\left|\sum_{n\geq N}(|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|)\right| \geq \frac{1}{2}\sup_{t\in K, n\geq N}\Big(2|u_n(t)|^2 + |w_n(t)|\Big) \geq \frac{1}{8}$$

richtig. Dies widerspricht jedoch der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|^2 + |w_n|)$ auf K.

Zum Abschluss des Beweises ist die Stetigkeit des unendlichen Produkts $\prod_{n\geq 1}(1+u_n+w_n)$ mit der Stetigkeit der kompakt konvergenten Produkte $\prod_{n\leq N}(1+u_n+w_n)$ für $N \in \mathbb{N}$ eine direkte Folgerung aus Lemma 0.0.8. □

Lemma 4.1.3. *Für beliebige $u_1, ..., u_n \in \mathbb{C}$ mit $|u_j| \leq 1$ für $j = 1, ..., n$ gilt*

$$|u_1 \cdots u_n - 1| \leq \sum_{j=1}^{n} |u_j - 1|.$$

Beweis. Dies folgt durch Verwenden einer Teleskopsumme als

$$\begin{aligned} |u_1 \cdots u_n - 1| &= \left|\sum_{j=1}^{n}(u_1 \cdots u_j - u_1 \cdots u_{j-1})\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}(u_j - 1)\prod_{k=1}^{j-1} u_k\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}|u_j - 1| \cdot \underbrace{\left|\prod_{k=1}^{j-1} u_k\right|}_{\leq 1} \leq \sum_{j=1}^{n}|u_j - 1|, \end{aligned}$$

wobei wir leere Produkte als 1 verstehen. □

Lemma 4.1.4. *Für $x \in [-\pi, \pi]$ gilt die Abschätzung*

$$1 - \cos(x) \geq 2\left(\frac{x}{\pi}\right)^2.$$

Beweis. Da beide Seiten der Ungleichung gerade Funktionen sind, genügt es, die Aussage für $x \in [0, \pi]$ zu zeigen. Zunächst gilt dabei

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}$, also auch $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$. Es genügt damit, für alle $x \in [0, \pi]$ die Abschätzung $\sin(x/2) \geq x/\pi \geq 0$ zu zeigen. Für $x = 0$ ist dies sofort nachvollziehbar, für $x > 0$ definieren wir auf $(0, \infty)$ die stetig differenzierbare Funktion $f(x) := \sin(x/2)/x$. Es ist dann $f(x) \geq 1/\pi$ für $x \in (0, \pi]$ zu zeigen.

Hierzu bemerken wir für $g(x) := \frac{1}{2}\cos(x/2)\,x - \sin(x/2)$, dass $g(0) = 0$ und

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)x - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)x \leq 0$$

für $x \in [0, \pi]$ gilt. Somit ist $g(x) \leq 0$ für $x \in [0, \pi]$, also auch

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)x - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \leq 0 \quad \text{für } x \in (0, \pi]\,,$$

sodass mit $f(\pi) = \sin(\pi/2)/\pi = 1/\pi$ die Behauptung folgt. □

Mit den vorausgehenden Lemmata können wir das erste Resultat von DELANGE zeigen, welches auf der TURÁN-KUBILIUS-Ungleichung fußt.

Satz 4.1.5 (DELANGE I)**.** *Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine multiplikative arithmetische Funktion mit $|g(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls dann die Reihe*

$$\sum_p \frac{1 - \mathrm{Re}\,(g(p))}{p} \tag{4.1.15}$$

konvergiert, gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leq x} g(n) = \prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(p^k)}{p^k} + o(1) \quad \textit{für} \quad x \to \infty. \tag{4.1.16}$$

Konvergiert also die erste Reihe in (4.1.15), ist die Konvergenz der linken Seite von (4.1.16), d.h. die Existenz eines Mittelwerts von g, äquivalent zur Konvergenz der Partialprodukte auf der rechten Seite. Man beachte, dass beliebig viele Faktoren dieser Produkte gleich 0 sein könnten bzw. für die rechte Seite der Grenzwert 0 zugelassen wird. Im beschriebenen Konvergenzfall muss damit das Produkt $\prod_{p \leq x}(1 - 1/p)\sum_{k=0}^{\infty} g(p^k)/p^k$ nicht auch im Sinne von Definition 0.0.10 konvergieren.

Beweis. Für $y \geq 2$ definieren wir die multiplikative Funktion

$$g_y(n) = \prod_{p \leq y,\, p^k \,||\, n} g(p^k), \tag{4.1.17}$$

welche durch $g_y(p^k) = g(p^k)$ für $p \leq y$ und $g_y(p^k) = 1$ für $p > y$ festgelegt wird. Wir werden die Funktionen g_y als Approximationen von g nutzen, welche einfacher zu handhaben sind. Dazu betrachten wir die Dirichletprodukte $h_y := \mu * g_y$ gemäß Definition 0.0.25. Für alle $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$ ist dann

$$h_y(p^k) = \sum_{\ell=0}^{k} g_y(p^\ell)\mu(p^{k-\ell}) = g_y(p^k) - g_y(p^{k-1}). \tag{4.1.18}$$

Speziell gilt somit $h_y(p^k) = 1 - 1 = 0$ im Fall $p > y$. Als Dirichletprodukt multiplikativer Funktionen ist h_y nach Lemma 0.0.26 selbst multiplikativ. Damit ist $h_y(1) = 1$ und mit $h_y(p^k) = 0$ für $p > y$ auch $h_y(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die von einer Primzahl $p > y$ geteilt werden. Mit der Voraussetzung $|g(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit (4.1.18) ferner $|h_y(p^k)| \leq 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p \leq y$. Schreiben wir $P^+(n)$ für die größte Primzahl, die $n \in \mathbb{N}$ teilt, erhalten wir damit für alle $N \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\sum_{n \leq N} \frac{|h_y(n)|}{\sqrt{n}} = \sum_{\substack{n \leq N \\ P^+(n) \leq y}} \prod_{p^k \,||\, n} \frac{|h_y(p^k)|}{p^{k/2}} \leq \prod_{p \leq y} \sum_{k=0}^{\lfloor \log_p(N) \rfloor} \frac{|h_y(p^k)|}{p^{k/2}} \leq \prod_{p \leq y} \left(1 + \sum_{k \leq \lfloor \log_p(N) \rfloor} 2p^{-k/2}\right).$$

Die erste Identität zerlegt dabei die $h_y(n)/\sqrt{n}$ mit der Multiplikativität von h_y in Produkte, die erste Ungleichung schreibt die entstehende Produktsumme um, wobei einige nicht-negative Terme hinzukommen. Dabei nutzen wir, dass $p^{\lfloor \log_p(N) \rfloor}$ die größte Potenz von p ist, die Teiler einer Zahl $n \leq N$ sein kann. Für $N \to \infty$ erhalten wir aus der letzten Ungleichungskette, dass

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|h_y(n)|}{\sqrt{n}} \leq \prod_{p \leq y} \left(1 + 2 \sum_{k \geq 1} p^{-k/2}\right) = \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{2p^{-1/2}}{1 - p^{-1/2}}\right) = \underbrace{\prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{p} - 1}\right)}_{=: C_y} < \infty. \tag{4.1.19}$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 1} h_y(n)/\sqrt{n}$ für jedes $y \geq 2$ absolut. Das Produkt C_y hängt dabei von y ab, ist mit seinen $\pi(y)$ Faktoren aber jeweils endlich. Wir erhalten so für $x \geq 1$, dass

$$\begin{aligned} H_y(x) := \sum_{m \leq x} |h_y(m)| + \sum_{m > x} \frac{|h_y(m)| x}{m} &\leq \sum_{m \leq x} |h_y(m)| \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{m > x} |h_y(m)| \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x} \sum_{m \geq 1} \frac{|h_y(m)|}{\sqrt{m}} \overset{(4.1.19)}{\leq} C_y \sqrt{x} = \mathcal{O}_y\left(\sqrt{x}\right). \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Mit dieser Vorarbeit können wir uns nun den Approximationen g_y wie in (4.1.17) zuwenden. Um die Ausdrücke $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g(n)$ abzuschätzen, stellen wir dabei für $x \geq 1$ und fixiertes $y \geq 2$ mit Lemma 0.0.28 zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g_y(n) &\overset{0.0.28}{=} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (h_y * \mathbb{1})(n) = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \sum_{m | n} h_y(m) = \frac{1}{x} \sum_{m \leq x} h_y(m) \sum_{n \leq x,\, m | n} 1 \\ &= \frac{1}{x} \sum_{m \leq x} h_y(m) \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \sum_{m \leq x} \frac{h_y(m)}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} |h_y(m)|\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_y(m)}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x} \sum_{m \leq x} |h_y(m)| + \sum_{m > x} \frac{|h_y(m)|}{m}\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_y(m)}{m} + \mathcal{O}\left(\frac{H_y(x)}{x}\right) \overset{(4.1.20)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_y(m)}{m} + \mathcal{O}_y\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right). \quad (4.1.21)$$

Analog zur Behauptung des Satzes definieren wir auch für $y \geq 2$ die Produkte

$$M(g_y) := \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(p^k)}{p^k}. \quad (4.1.22)$$

Die endlich vielen Faktoren konvergieren dabei als Reihen jeweils absolut, da

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{g(p^k)}{p^k}\right| \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = 1.$$

Mit dieser absoluten Konvergenz und (4.1.18) können wir $M(g_y)$ nach Satz 0.0.14 und Lemma 0.0.31 umformen als

$$\begin{aligned} M(g_y) &= \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(p^k)}{p^k} \overset{0.0.14}{=} \prod_{p \leq y} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(p^k) - g(p^{k-1})}{p^k}\right) \\ &\overset{(4.1.18)}{=} \prod_{p \leq y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_y(p^k)}{p^k} \overset{0.0.31}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_y(m)}{m}. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

Man beachte, dass Lemma 0.0.31 im letzten Schritt anwendbar ist, da mit $\sum_{m \geq 1} |h_y(m)|/m \leq \sum_{m \geq 1} |h_y(m)|/\sqrt{m} < \infty$ nach (4.1.19) auch die hier verwendete Dirichletreihe absolut konvergiert. Aus (4.1.21) mit (4.1.23) erhalten wir so für $x \to \infty$, dass

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g_y(n) \overset{(4.1.21)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_y(m)}{m} + \mathcal{O}_y\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \overset{(4.1.23)}{=} M(g_y) + o_y(1). \quad (4.1.24)$$

Als nächstes definieren wir die multiplikative Funktion $r(n) := |g(n)|$ und die additive Funktion $\vartheta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch

$$\vartheta(p^k) := \begin{cases} \arg\left(g(p^k)\right), & \text{falls } g(p^k) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.1.25)$$

wobei wir für Primpotenzen p^k die Argumente $\arg(g(p^k)) \in (-\pi, \pi]$ wählen. Ferner definieren wir mit ϑ die Funktion A als $A(x) := \sum_{p \leq x} \vartheta(p)/p \in \mathbb{R}$ für $x \geq 2$. Wegen $|e^{-iA(y)}| = 1$ erhalten wir aus (4.1.24) dann für $x \to \infty$, dass

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g_y(n) e^{-iA(y)} = M(g_y) e^{-iA(y)} + o_y(1). \quad (4.1.26)$$

Diese Beziehung werden wir nutzen, um die Konvergenz der Ausdrücke

$$M(g_y)e^{-iA(y)} \tag{4.1.27}$$

in (4.1.26) für $y \to \infty$ nachzuweisen. Nach dem CAUCHY-Kriterium genügt es dazu, für $z, y \in \mathbb{R}$ mit $z \geq y \geq 2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|M(g_y)e^{-iA(y)} - M(g_z)e^{-iA(z)}\right| &\overset{(4.1.26)}{=} \left|\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leq x}\frac{g_y(n)e^{-iA(y)}}{x} - \lim_{x\to\infty}\sum_{n\leq x}\frac{g_z(n)e^{-iA(z)}}{x}\right| \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x} g_y(n)e^{-iA(y)} - \sum_{n\leq x} g_z(n)e^{-iA(z)}\right| = o(1) \end{aligned}\tag{4.1.28}$$

für $y \to \infty$ zu zeigen, wobei der $o(1)$-Term nicht von z abhängen wird. Hierzu wiederum genügt es, für beliebige $2 \leq y \leq z \leq x$ die Abschätzung

$$S(x, y, z) := \frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x} g_z(n)e^{-iA(z)} - \sum_{n\leq x} g_y(n)e^{-iA(y)}\right| = o(1) \tag{4.1.29}$$

für $y \to \infty$ zu zeigen, wobei hier der $o(1)$-Term weder von z noch von x abhängen darf.

Mit (4.1.17) und $A(y) \in \mathbb{R}$, also $|e^{-iA(y)}| = 1$, stellen wir zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\leq \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\left|g_z(n)e^{-iA(z)} - g_y(n)e^{-iA(y)}\right| \\ &\overset{(4.1.17)}{=} \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\left|e^{-iA(y)}\right| \cdot \left|e^{-i(A(z)-A(y))}\prod_{p^k\,||\,n,\, p\leq z} g(p^k) - \prod_{p^k\,||\,n,\, p\leq y} g(p^k)\right| \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\left|\prod_{p^k\,||\,n,\, p\leq y} g(p^k)\right| \cdot \left|e^{-i(A(z)-A(y))}\prod_{p^k\,||\,n,\, y<p\leq z} g(p^k) - 1\right|. \end{aligned}\tag{4.1.30}$$

Wegen $|g(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $|\prod_{p^k\,||\,n,\, p\leq y} g(p^k)| \leq 1$. Mit der Darstellung $g(p^k) = |g(p^k)|e^{i\arg(g(p^k))} = r(p^k)e^{i\vartheta(p^k)}$ folgt so aus (4.1.30), dass

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\leq \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\left|e^{-i(A(z)-A(y))}\prod_{p^k\,||\,n,\, y<p\leq z} g(p^k) - 1\right| \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\left|e^{-i(A(z)-A(y))}\prod_{p^k\,||\,n,\, y<p\leq z} r(p^k)e^{i\vartheta(p^k)} - 1\right|. \end{aligned}\tag{4.1.31}$$

Mit $\vartheta_{y,z}(p^k) := \mathbb{1}_{(y,z]}(p)\vartheta(p^k)$ definieren wir nun die additive Funktion $\vartheta_{y,z}$ als

$$\vartheta_{y,z}(n) := \sum_{p^k\,||\,n,\, y<p\leq z} \vartheta(p^k).$$

Da alle Faktoren des Produkts $e^{-i(A(z)-A(y))} \prod_{p^k \,||\, n,\, y<p\le z} r(p^k) e^{i\vartheta(p^k)}$ wegen $r(p^k) \in [0,1]$ betraglich kleiner gleich 1 ausfallen, können wir (4.1.31) mit Lemma 4.1.3 und $|1 - r(p^k)| = 1 - r(p^k)$ weiter abschätzen als

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &\le \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left| e^{-i(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))}\left(\prod_{p^k \,||\, n,\, y<p\le z} r(p^k)\right) - 1\right| \\ &\overset{4.1.3}{\le} \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left| e^{-i(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))} - 1\right| + \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\sum_{\substack{p^k \,||\, n \\ y<p\le z}}\Big(1 - r(p^k)\Big). \quad (4.1.32) \end{aligned}$$

Die Doppelsumme in (4.1.32) können wir für $2 \le y \le z \le x$ abschätzen als

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\sum_{\substack{p^k \,||\, n \\ y<p\le z}}\Big(1 - r(p^k)\Big) &= \frac{1}{x}\sum_{\substack{p^k\le x \\ y<p\le z}}\Big(\underbrace{1 - r(p^k)}_{\ge 0}\Big)\sum_{\substack{n\le x \\ p^k \,||\, n}} 1 \le \frac{1}{x}\sum_{\substack{p^k\le x \\ y<p\le z}}\Big(1 - r(p^k)\Big)\frac{x}{p^k} \\ &= \sum_{\substack{p^k\le x \\ y<p\le z}}\frac{1 - r(p^k)}{p^k} = \sum_{y<p\le z}\frac{1-r(p)}{p} + \sum_{\substack{p^k\le x \\ y<p\le z \\ k\ge 2}}\frac{1 - r(p^k)}{p^k}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.4, *ii*) erhalten wir – solange $x \ge z \ge y \ge 2$ gilt – damit unabhängig vom konkreten Wert x, dass

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\sum_{\substack{p^k \,||\, n \\ y<p\le z}}\Big(\underbrace{1 - r(p^k)}_{\in[0,1]}\Big) \le \sum_{y<p\le z}\frac{1-r(p)}{p} + \sum_{p>y,\, k\ge 2}\frac{1}{p^k} \overset{2.2.4,\, ii)}{=} \sum_{y<p\le z}\frac{1-r(p)}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y}\right). \quad (4.1.33)$$

Für die erste Summe in (4.1.32) erhalten wir mit der Ungleichung

$$\left|e^{-iu} - 1\right| = \left| i\int_0^u e^{-it}\right| \le \int_0^{|u|}\left|ie^{-it}\right| du = |u|$$

für $u \in \mathbb{R}$ sowie mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left| e^{-i(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))} - 1\right| \le \frac{1}{x}\sum_{n\le x}|A(z) - A(y) - \vartheta_{y,z}(n)| \\ &\le \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left|\vartheta_{y,z}(n) - \mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x)\right| + \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left|\mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) - (A(z) - A(y))\right|. \end{aligned}$$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Unabhängigkeit von n der Summanden in der letzten Summe setzen die letzte Abschätzung fort als

$$\leq \left(\sum_{m \leq x} \frac{1}{x^2} \cdot \sum_{n \leq x} \left(\vartheta_{y,z}(n) - \mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) \right)^2 \right)^{1/2} + \left| \mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) - (A(z) - A(y)) \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \left(\vartheta_{y,z}(n) - \mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) \right)^2 \right)^{1/2} + \left| \mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) - \sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)}{p} \right|. \tag{4.1.34}$$

Den linken Ausdruck in (4.1.34) können wir mit der Turán-Kubilius-Ungleichung für die reellwertige, additive Funktion $\vartheta_{y,z}$ und alle $x \geq z \geq y \geq 2$ abschätzen als

$$\left(\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \left(\vartheta_{y,z}(n) - \mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) \right)^2 \right)^{1/2} \ll \overbrace{\left(\sum_{p^k \leq x} \frac{\vartheta_{y,z}(p^k)^2}{p^k} \right)^{1/2}}^{=\mathcal{D}_{\vartheta_{y,z}}(x)} = \left(\sum_{\substack{p^k \leq x \\ y<p\leq z}} \frac{\vartheta(p^k)^2}{p^k} \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)^2}{p} + \sum_{y<p,\, k\geq 2} \frac{\vartheta(p^k)^2}{p^k} \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)^2}{p} \right)^{1/2} + \left(\sum_{y<p,\, k\geq 2} \frac{\vartheta(p^k)^2}{p^k} \right)^{1/2},$$

wobei die letzte Ungleichung $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a + 2\sqrt{ab} + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für $a, b \geq 0$ benutzt. Die $\mathcal{O}$-Konstante der ersten Ungleichung ist dabei nach Turán-Kubilius unabhängig von $\vartheta_{y,z}$, also insbesondere unabhängig von y und z. Mit $|\vartheta(p^k)| \leq \pi$ nach Definition (4.1.25) sowie Lemma 2.2.4, *ii*) folgt somit – solange $x \geq z \geq y \geq 2$ gilt – unabhängig von x, dass

$$\left(\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \left(\vartheta_{y,z}(n) - \mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) \right)^2 \right)^{1/2} \ll \left(\sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)^2}{p} \right)^{1/2} + \left(\sum_{\substack{y<p \\ k\geq 2}} \frac{\pi^2}{p^k} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)^2}{p} \right)^{1/2} + \mathcal{O}\left(1/\sqrt{y}\right). \tag{4.1.35}$$

Mit $\mathcal{E}_{\vartheta_{y,z}}(x) = \sum_{p^k \leq x} (1 - 1/p)\, \vartheta_{y,z}(p^k)/p^k$ für $x \geq z \geq y \geq 2$ gilt für den rechten Ausdruck in (4.1.34) die Abschätzung

$$\left| \sum_{\substack{p^k \leq x \\ y<p\leq z}} \frac{\vartheta(p^k)}{p^k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - \sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)}{p} \right| = \left| - \sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)}{p^2} + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ y<p\leq z,\, k\geq 2}} \frac{\vartheta(p^k)}{p^k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right|$$

$$\overset{|\vartheta(p^k)|\leq\pi}{\leq} \sum_{y<p\leq z} \frac{\pi}{p^2} + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ y<p\leq z,\, k\geq 2}} \frac{\pi}{p^k} \leq 2\pi \sum_{y<p,\, k\geq 2} \frac{1}{p^k} = \mathcal{O}\left(1/y\right). \tag{4.1.36}$$

Dabei benutzen wir im letzten Schritt erneut Lemma 2.2.4, *ii*). Durch Einsetzen von (4.1.33) bis (4.1.36) in (4.1.32) erhalten wir insgesamt die für $x \geq z \geq y \geq 2$ in x und z gleichmäßige Abschätzung

$$\begin{aligned} S(x,y,z) &\ll \left(\sum_{y<p\leq z} \frac{1-r(p)}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y}\right)\right) + \left(\left(\sum_{y<p\leq z} \frac{\vartheta(p)^2}{p}\right)^{1/2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y}\right) \\ &\ll \sum_{y<p} \frac{1-r(p)}{p} + \left(\sum_{y<p} \frac{\vartheta(p)^2}{p}\right)^{1/2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right). \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

Wir stellen als nächstes für beliebige Primzahlen p fest, dass

$$0 \leq 1 - r(p) \leq 1 - \operatorname{Re}(g(p)) \quad \text{und} \quad \vartheta(p)^2 \leq \pi^2 (1 - \operatorname{Re}(g(p)). \tag{4.1.38}$$

Die erste Ungleichung ist mit $r(p) = |g(p)| \geq \operatorname{Re}(g(p))$ klar. Die zweite Ungleichung ist mit $|\vartheta(p)| \leq \pi$ zumindest im Falle $|\vartheta(p)| = |\arg(g(p))| > \pi/2$, d.h. $\operatorname{Re}(g(p)) < 0$, offensichtlich. Im Fall $|\vartheta(p)| \leq \pi/2$ gilt $\cos(\vartheta(p)) \geq 0$, sodass mit $g(p) = r(p)(\cos(\vartheta(p)) + i\sin(\vartheta(p)))$ und Lemma 4.1.4 folgt, dass

$$1 - \operatorname{Re}(g(p)) = 1 - r(p)\cos(\vartheta(p)) \overset{r(p)\in[0,1]}{\geq} 1 - \cos(\vartheta(p)) \overset{4.1.4}{\geq} 2\left(\frac{\vartheta(p)}{\pi}\right)^2.$$

Einsetzen von (4.1.38) in (4.1.37) liefert für $S(x,y,z)$ mit $2 \leq y \leq z \leq x$ die finale obere Schranke

$$S(x,y,z) \ll \sum_{p>y} \frac{1-\operatorname{Re}(g(p))}{p} + \left(\sum_{p>y} \frac{1-\operatorname{Re}(g(p))}{p}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{y}} = o(1) \tag{4.1.39}$$

für $y \to \infty$. Der $o(1)$-Term ergibt sich dabei aus der Konvergenz der Reihe $\sum_p [1 - \operatorname{Re}(g(p))]/p$ nach Voraussetzung und ist nach vorigen Überlegungen von x und z unabhängig. Damit haben wir das Cauchy-Kriterium für die Ausdrücke $M(g_y)e^{-iA(y)}$ in (4.1.27) nachgewiesen. Es existiert also ein

$$M := \lim_{y\to\infty} M(g_y)e^{-iA(y)} \in \mathbb{C}. \tag{4.1.40}$$

Bemerken wir für $n \leq x$, dass

$$g_x(n) = \prod_{p^k\,||\,n,\, p\leq x} g(p^k) = \prod_{p^k\,||\,n} g(p^k) = g(n)$$

gilt, folgt nach (4.1.39) für die spezielle Wahl $z = x$ und $y \to \infty$, dass

$$S(x,y,x) = \frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq x} g(n)e^{-iA(x)} - \sum_{n\leq x} g_y(n)e^{-iA(y)}\right| = o(1).$$

Somit ist

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)e^{-iA(x)} = \frac{1}{x}\sum_{n\le x} g_y(n)e^{-iA(y)} + o(1) \tag{4.1.41}$$

für $x \ge y \to \infty$, wobei der $o(1)$-Term unabhängig vom konkreten Wert x ist.

Für jedes $\varepsilon > 0$ finden wir nach (4.1.40) und (4.1.41) ein $Y(\varepsilon)$, sodass

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)e^{-iA(x)} - \frac{1}{x}\sum_{n\le x} g_y(n)e^{-iA(y)}\right|, \left|M(g_y)e^{-iA(y)} - M\right| \le \frac{\varepsilon}{6}$$

für alle $x \ge y \ge Y(\varepsilon)$ gilt. Mit (4.1.26) finden wir für dieses fixierte $y := Y(\varepsilon)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > Y(\varepsilon)$, sodass für alle $x \ge N$ auch die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g_{Y(\varepsilon)}(n)e^{-iA(Y(\varepsilon))} - M(g_{Y(\varepsilon)})e^{-iA(Y(\varepsilon))}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Für alle $x \ge N$ gilt somit insgesamt

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)e^{-iA(x)} - M(g_x)e^{-iA(x)}\right| &\le \left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)e^{-iA(x)} - \frac{1}{x}\sum_{n\le x} g_{Y(\varepsilon)}(n)e^{-iA(Y(\varepsilon))}\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g_{Y(\varepsilon)}(n)e^{-iA(Y(\varepsilon))} - M(g_{Y(\varepsilon)})e^{-iA(Y(\varepsilon))}\right| \\ &\quad + \left|M(g_{Y(\varepsilon)})e^{-iA(Y(\varepsilon))} - M\right| + \left|M - M(g_x)e^{-iA(x)}\right| \\ &\le \varepsilon\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Mit $|e^{-iA(x)}| = 1$ gilt somit auch $\left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n) - M(g_x)\right| \le \varepsilon$. Für $\varepsilon \downarrow 0$ folgt mit $M(g_x) = \prod_{p\le x}(1-1/p)\sum_{k=0}^{\infty} g(p^k)/p^k$ so die Behauptung des Satzes. □

Das erste Resultat von Delange hält zunächst nur eine asymptotische Gleichheit fest. Wann die Konvergenz einer der beiden Seiten vorliegt, wird jedoch nicht angesprochen. Hier schließt Delanges zweites Resultat an, welches vor seinem Beweis noch ein weiteres Lemma benötigt.

Lemma 4.1.6. *Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine multiplikative arithmetische Funktion mit $|g(n)| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Existiert dann der Mittelwert*

$$M(g) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n),$$

so konvergiert für jedes $\sigma > 1$ die Reihe $G(\sigma) := \sum_{n\ge1} g(n)/n^\sigma$ absolut mit

$$M(g) = \lim_{\sigma\downarrow1}(\sigma-1)G(\sigma) = \lim_{\sigma\downarrow1}\frac{G(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \lim_{\sigma\downarrow1}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right)\sum_{k\ge0}\frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}. \tag{4.1.42}$$

Beweis. Wegen $|g(n)| \le 1$ folgt die absolute Konvergenz der $G(\sigma)$ für $\sigma > 1$ aus der absoluten Konvergenz der Reihen $\zeta(s) = \sum_{n\ge 1} n^{-s}$ für $\mathrm{Re}\,(s) > 1$ wie nach Satz 0.0.40. Partielle Summation liefert dabei für $x \ge 1$, dass

$$\begin{aligned}(\sigma-1)\sum_{n\le x}\frac{g(n)}{n^\sigma} &= \frac{\sigma-1}{x^\sigma}\sum_{n\le x} g(n) + (\sigma-1)\sigma\int_1^x \frac{\sum_{n\le u} g(n)}{u^{\sigma+1}}\,dx \\ &= \frac{\sigma-1}{x^{\sigma-1}}\left(\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)\right) + (\sigma-1)\sigma\int_1^x \frac{\sum_{n\le u} g(n)}{u^{\sigma+1}}\,dx.\end{aligned}$$

Für $x \to \infty$ konvergiert dabei der Summand $(\sigma-1)x^{1-\sigma}\big(\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)\big)$ gegen 0, da $1-\sigma < 0$ ist und der Ausdruck $\frac{1}{x}\sum_{n\le x} g(n)$ für $x \to \infty$ konvergiert. Damit erhalten wir im Grenzwert, dass

$$(\sigma-1)\sum_{n\ge 1}\frac{g(n)}{n^\sigma} = \sigma(\sigma-1)\int_1^\infty \frac{\sum_{n\le u} g(n)}{u^{\sigma+1}}\,du. \tag{4.1.43}$$

Das rechte Integral konvergiert dabei wegen

$$\left|\frac{1}{u}\sum_{n\le u} g(n)\right| \le \frac{1}{u}\sum_{n\le u}|g(n)| \le 1$$

für alle $u \ge 1$, womit $f(u) := u^{-\sigma}$ eine integrierbare Majorante für den Integranden darstellt. Einsetzen der Funktion

$$R(u) := \frac{1}{u}\sum_{n\le u} g(n) - M(g) = o(1) \quad \text{für } x \to \infty$$

in (4.1.43), wobei die o-Notation aus der Existenz von $M(g)$ folgt, liefert

$$(\sigma-1)\sum_{n\ge 1}\frac{g(n)}{n^\sigma} = \sigma(\sigma-1)\int_1^\infty \frac{M(g)+R(u)du}{u^\sigma} = \sigma M(g) + \sigma(\sigma-1)\int_1^\infty \frac{R(u)du}{u^\sigma}.$$

Wegen $R(u) = o(1)$ für $u \to \infty$ folgt nach Lemma 0.0.39 somit die erste Identität

$$\lim_{\sigma\downarrow 1}(\sigma-1)G(\sigma) = \lim_{\sigma\downarrow 1}\left[\sigma M(g) + \overbrace{\sigma(\sigma-1)\int_1^\infty \frac{R(u)du}{u^\sigma}}^{=o(1)\text{ für }\sigma\downarrow 1\text{ nach 0.0.39}}\right] = M(g).$$

Die zweite Identität des Lemmas folgt aus der ersten und Satz 0.0.41 als

$$\lim_{\sigma\downarrow 1}\frac{G(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \lim_{\sigma\downarrow 1}\frac{(\sigma-1)G(\sigma)}{(\sigma-1)\zeta(\sigma)} = \frac{\lim_{\sigma\downarrow 1}(\sigma-1)G(\sigma)}{\lim_{\sigma\downarrow 1}(\sigma-1)\zeta(\sigma)} = \frac{M(g)}{1}.$$

Für die dritte Identität nutzen wir die zweite, die Produktdarstellung von $\zeta(\sigma) := \sum_{n\geq 1} n^{-\sigma} > 0$ für $\sigma > 1$ nach Satz 0.0.40 und die Produktdarstellung der absolut konvergenten Reihe $G(\sigma)$ nach Lemma 0.0.31. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} M(g) = \lim_{\sigma\downarrow 1} G(\sigma)/\zeta(\sigma) &= \lim_{s\downarrow 1} \left(\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)\right) \cdot \left(\prod_p \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right) \\ &= \lim_{s\downarrow 1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}. \end{aligned}$$

Die Umordnung des Produkts im letzten Schritt ist dabei nach Satz 0.0.14 zulässig, da die $\zeta(\sigma)^{-1}$ und $G(\sigma)$ mit $\sum_p |p^{-\sigma}| \leq \zeta(\sigma) < \infty$ und

$$\sum_p \left|\sum_{k\geq 1} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right| \leq \sum_p \sum_{k\geq 1} \frac{1}{p^{k\sigma}} = \sum_p \frac{1}{p^\sigma - 1} \leq \sum_p \frac{2}{p^\sigma} \leq 2\zeta(\sigma) < \infty$$

ebenfalls nach Satz 0.0.14 als Produkte absolut konvergieren. □

Satz 4.1.7 (Delange II)**.** *Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine multiplikative arithmetische Funktion mit $|g(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

1. *Existiert für g der Mittelwert*

$$M(g) := \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} g(n)$$

   und ist $M(g) \neq 0$, so gilt auch, dass

   (a) *die Reihe $\sum_p (1 - g(p))/p$ konvergiert,*

   (b) *ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $g(2^k) \neq -1$.*

2. *Gilt die obere Bedingung (a), besitzt g einen Mittelwert $M(g)$ mit*

$$M(g) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(p^k)}{p^k}. \tag{4.1.44}$$

   Dieser ist genau dann 0, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} g(2^k)/2^k = 0$ ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass ein Mittelwert $M(g) \neq 0$ existiert. Nach Lemma 4.1.6 ist dann

$$M(g) = \lim_{\sigma\downarrow 1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}.$$

Mit $|M(g)| > 0$ finden wir somit ein $\delta > 0$, sodass für alle $\sigma \in (1, 1+\delta)$ die Abschätzung

$$|M(g)| - \left|\prod_p \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right| \leq \left|M(g) - \prod_p \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right| \leq \frac{1}{2}|M(g)|,$$

also auch $|M(g)| \leq 2\left|\prod_p (1-p^{-\sigma}) \sum_{k\geq 0} g(p^k)p^{-k\sigma}\right|$ gilt.

Mit $|g(p^k)| \leq 1$ sind für alle $\sigma > 1$ die Faktoren der obigen Produkte beschränkt als

$$\left|\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right| \leq \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{|g(p^k)|}{p^{k\sigma}} \leq \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{1}{p^{k\sigma}} = 1. \tag{4.1.45}$$

Somit erhalten wir für $\sigma \in (1, 1+\delta)$ durch Weglassen von Faktoren eine betragliche obere Abschätzung von $M(g)$ als

$$\begin{aligned} |M(g)| &\leq 2\left|\prod_{p\leq\exp(\frac{1}{\sigma-1})} \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right| = 2\prod_{p\leq\exp(\frac{1}{\sigma-1})} \left|\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right| \\ &= 2\prod_{p\leq\exp(\frac{1}{\sigma-1})} \left| 1 + \underbrace{\left(-\frac{1-g(p)}{p}\right)}_{=:u_p=:u_p(\sigma)} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}} - 1 + \frac{1-g(p)}{p}}_{=:w_p(\sigma)} \right|. \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

Mit der Multiplikativität von g ist $g(1) = 1$, also

$$\begin{aligned} w_p(\sigma) &= 1 - \frac{1}{p^\sigma} + \frac{g(p)}{p^\sigma} - \frac{g(p)}{p^{2\sigma}} + \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 2} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}} - 1 + \frac{1-g(p)}{p} \\ &= (1-g(p))\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^\sigma}\right) - \frac{g(p)}{p^{2\sigma}} + \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 2} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}. \end{aligned} \tag{4.1.47}$$

Mit den Abschätzungen

$$i)\ \overbrace{|1-g(p)|}^{\leq 2} \cdot \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{p^\sigma}\right| \leq 2\int_1^\sigma \left(-\frac{d}{dx}\frac{1}{p^x}\right) dx = \int_1^\sigma \frac{2\log(p)}{p^x}\, dx \leq \frac{2\,(\sigma-1)\log(p)}{p},$$

$$\begin{aligned} ii)\ &\left|-\frac{g(p)}{p^{2\sigma}} + \left(1-\frac{1}{p^\sigma}\right) \sum_{k\geq 2} \frac{g(p^k)}{p^{k\sigma}}\right| \leq \frac{|g(p)|}{p^2} + \overbrace{|1-p^{-\sigma}|}^{\leq 1} \sum_{k\geq 2} \frac{|g(p^k)|}{p^k} \\ &\leq \frac{1}{p^2} + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{1}{1-p^{-1}}\right) \leq \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{1}{1-1/2}\right) = \frac{3}{p^2} \end{aligned}$$

erhalten wir für $\sigma > 1$ aus (4.1.47), dass

$$|w_p(\sigma)| \leq \frac{2\,(\sigma-1)\log(p)}{p} + \frac{3}{p^2}. \tag{4.1.48}$$

Wegen $M(g) = \lim_{\sigma\downarrow 1}\prod_p(1 + u_p(\sigma) + w_p(\sigma)) \neq 0$ sind die Faktoren $1 + u_p(\sigma) + w_p(\sigma)$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und hinreichend kleine $\sigma > 1$ ungleich 0. Mit der Abschätzung (4.1.48), $|g(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, der Ungleichung $\sum_{p\leq\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} 1/p^2 \leq \zeta(2)$ und dem Satz 1.1.2 von Mertens gilt dabei

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \left(|u_p(\sigma)|^2 + |w_p(\sigma)|\right) &\leq \sum_{p\leq\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \left(\overbrace{\frac{|1-g(p)|^2}{p^2}}^{\leq 2^2=4} + \frac{2\,(\sigma-1)\log(p)}{p} + \frac{3}{p^2}\right)\\
&\leq \sum_{p\leq\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \left(\frac{7}{p^2} + 2(\sigma-1)\frac{\log(p)}{p}\right)\\
&\leq 7\zeta(2)+2(\sigma-1)\left(\log\left(\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)\right)+C\right)\\
&\leq 7\zeta(2)+2+2C =: H,
\end{aligned} \tag{4.1.49}$$

wobei wir ohne Einschränkung $\sigma \in (1,2]$ voraussetzen und $C > 0$ als geeignete Konstante wählen, die den $\mathcal{O}(1)$-Fehlerterm im Satz 1.1.2 abschätzt.

Da schließlich auch $\sum_{p\leq\exp(1/(\sigma-1))} u_p(\sigma)$ als endliche Summe konvergiert, können wir Lemma 4.1.2 mit der nach (4.1.49) von σ unabhängigen Konstante H anwenden. Damit und aus (4.1.46) erhalten wir für $\sigma \in (1, 1+\delta)$, dass

$$\begin{aligned}
|M(g)| &\overset{(4.1.46)}{\leq} 2\prod_{p\leq\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} |1 + u_p(\sigma) + w_p(\sigma)| \overset{4.1.2}{\leq} 2\exp\left(6H + \sum_{p\leq\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \operatorname{Re}(u_p(\sigma))\right)\\
&= 2e^{6H}\exp\left(-\sum_{p\leq\exp\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \frac{1-\operatorname{Re}(g(p))}{p}\right).
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\sigma\downarrow 1}\exp(1/(\sigma-1)) = \infty$ und $1 - \operatorname{Re}(g(p)) \geq 1 - |g(p)| \geq 0$ muss mit dieser Abschätzung für $\sigma \downarrow 1$ die Reihe $\sum_p(1-\operatorname{Re}(g(p)))/p$ konvergieren. Wäre dies nicht der Fall, wäre auch $|M(g)| \leq 2e^{6H}\cdot\lim_{x\to\infty}\exp(-x) = 0$ im Widerspruch zu $M(g) \neq 0$.

Mit der Konvergenz von $\sum_p(1 - \operatorname{Re}(g(p)))/p$ und der Existenz von $M(g)$ konvergiert nach Satz 4.1.5 also auch der Ausdruck

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k\geq 0}\frac{g(p^k)}{p^k} = \lim_{x\to\infty}\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k\geq 0}\frac{g(p^k)}{p^k} \overset{4.1.5}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} g(n) = M(g). \tag{4.1.50}$$

Wegen $M(g) \neq 0$ muss dabei für alle $p \in \mathbb{P}$ gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 &\neq \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k \geq 0} \frac{g(p^k)}{p^k} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{g(p)}{p} + \sum_{k \geq 2} \frac{g(p^k)}{p^k}\right) \\ &= 1 + \underbrace{\left(- \frac{1 - g(p)}{p}\right)}_{=:\tilde{u}_p} + \underbrace{\left(-\frac{g(p)}{p^2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k \geq 2} \frac{g(p^k)}{p^k}\right)}_{=:\tilde{w}_p} = 1 + \tilde{u}_p + \tilde{w}_p. \end{aligned}$$

Mit $|\tilde{u}_p| = | - (1 - g(p))/p| \leq (1 + |g(p)|)/p \leq 2/p$ und

$$|\tilde{w}_p| \leq \frac{|g(p)|}{p^2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k \geq 2} \frac{|g(p^k)|}{p^k} \leq \frac{1}{p^2} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k}\right) = \frac{2}{p^2}$$

konvergiert dabei die Reihe

$$\sum_p \left(|\tilde{u}_p|^2 + |\tilde{w}_p|\right) \leq \sum_p \left(\frac{4}{p^2} + \frac{2}{p^2}\right) \leq 6\zeta(2) < \infty. \tag{4.1.51}$$

Nach Lemma 4.1.2 impliziert also die in (4.1.50) bewiesene Konvergenz des Produktes $\prod_p (1 - 1/p) \sum_{k \geq 0} g(p^k)/p^k = \prod_p (1 + \tilde{u}_p + \tilde{w}_p)$ auch die Konvergenz der Reihe $\sum_p (1 - g(p))/p = - \sum_p \tilde{u}_p$.

Schließlich muss $g(2^k) \neq -1$ für mindestens ein $k \geq 1$ gelten, da ansonsten

$$M(g) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k \geq 0} \frac{g(p^k)}{p^k} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(1 - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k}\right)}_{=0} \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k \geq 0} \frac{g(p^k)}{p^k} = 0$$

im Widerspruch zu $M(g) \neq 0$ gelten würde.

Die zweite Aussage des Satzes ist eine Anwendung von Satz 4.1.5. Konvergiert die Reihe $\sum_p (1 - g(p))/p = - \sum_p \tilde{u}_p$, gilt mit $|\tilde{u}_p| \leq 2/p$ und $|\tilde{w}_p| \leq 2/p^2$ für $p \geq 3$ die Abschätzung

$$|1 + \tilde{u}_p + \tilde{w}_p| \geq 1 - |\tilde{u}_p| - |\tilde{w}_p| \geq 1 - \frac{2(p + 1)}{p^2} = \frac{(p - 1)^2 - 1}{p^2} > 0.$$

Damit besitzt das Produkt $\prod_{p \geq 3} (1 + \tilde{u}_p + \tilde{w}_p)$ mit (4.1.51) nach Lemma 4.1.2 einen von Grenzwert ungleich 0. Wegen

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k \geq 0} \left|\frac{g(2^k)}{2^k}\right| \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

konvergiert somit auch das Produkt

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{\neq 0}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{g(2^k)}{2^k}\right)\underbrace{\prod_{p\geq 3}(1+\tilde{u}_p+\tilde{w}_p)}_{\neq 0}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k\geq 0}\frac{g(p^k)}{p^k}. \tag{4.1.52}$$

Da die Konvergenz von $\sum_p(1-g(p))/p$ insbesondere die Konvergenz von $\mathrm{Re}\left(\sum_p(1-g(p))/p\right)=\sum_p(1-\mathrm{Re}\,(g(p)))/p$ impliziert, existiert nach Satz 4.1.5 auch der Mittelwert

$$M(g)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}g(n)\overset{4.1.5}{=}\lim_{x\to\infty}\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k\geq 0}\frac{g(p^k)}{p^k}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k\geq 0}\frac{g(p^k)}{p^k}.$$

Gemäß der Faktorisierung in (4.1.52) kann dieser nur genau dann 0 sein, wenn der Faktor $\sum_{k\geq 0}g(2^k)/2^k=0$ ist. □

4.2 Der Satz von Erdős-Wintner

Der folgende Satz von Erdős und Wintner wird die von uns erarbeiteten Resultate von Delange verwenden. Mit Hilfe der zu Anfang des letzten Abschnitts beschriebenen Beziehung zwischen Verteilungen additiver Funktionen und Mittelwerten multiplikativer Funktionen wird er das Korollar 3.3.6 aufgreifen und für den Spezialfall additiver Funktionen vereinfachen. So werden wir zeigen, dass im Falle einer additiven Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ keine ganze Familie $((\varphi_N(t))_{N\in\mathbb{N}})_{t\in\mathbb{R}}$ von komplexwertigen Folgen auf ihre Konvergenz hin überprüft werden muss, sondern der Konvergenznachweis von lediglich drei Reihen für die Existenz einer Verteilungsfunktion von f genügt.

Satz 4.2.1 (Erdős-Wintner, 1939)**.** *Sei $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ eine additive arithmetische Funktion. Dann besitzt f genau dann eine Verteilungsfunktion, wenn die folgenden drei Reihen simultan für mindestens ein $R>0$ konvergieren:*

$$\sum_{|f(p)|>R}\frac{1}{p},\qquad\sum_{|f(p)|\leq R}\frac{f(p)^2}{p},\qquad\sum_{|f(p)|\leq R}\frac{f(p)}{p}. \tag{4.2.1}$$

In diesem Fall ist die charakteristische Funktion $\varphi_F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ der Verteilungsfunktion F von f für $t\in\mathbb{R}$ gegeben durch das konvergente Produkt

$$\varphi_F(t)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp(itf(p^k))}{p^k}. \tag{4.2.2}$$

Beweis. Da f additiv ist, ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die durch $g_t(n) := e^{itf(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegebene Funktion $g_t : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ multiplikativ und erfüllt $|g_t(n)| = 1$. Wir nehmen zunächst an, dass f eine Verteilungsfunktion F besitzt. Nach dem Korollar 3.3.6 existiert dann für jedes g_t der Mittelwert

$$\varphi(t) := M(g_t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\le N} e^{itf(n)} = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(t), \tag{4.2.3}$$

wobei die $\varphi_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die charakteristischen Funktionen zu den F_N wie nach Definition 3.0.1 seien. Die durch (4.2.3) definierte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist nach demselben Korollar die charakteristische Funktion zu F und stetig im Punkt $t = 0$ mit $\varphi(0) = 1$. Wir finden also ein $T > 0$, sodass $|\varphi(t) - 1| \le 1/2$ für alle $|t| \le T$ gilt. Damit gilt insbesondere auch

$$|M(g_t)| = |\varphi(t)| \ge \frac{1}{2} \quad \text{für alle } |t| \le T. \tag{4.2.4}$$

Mit diesem T und für $R := 2/T > 0$ werden wir die Konvergenz der drei Reihen in (4.2.1) zeigen. Für $|t| \le T$ gilt dabei zunächst nach der ersten Aussage von Satz 4.1.7 wegen $|M(g_t)| \ge 1/2 > 0$, dass die Reihe

$$\sum_p \frac{1 - g_t(p)}{p} \tag{4.2.5}$$

konvergiert. Mit der zweiten Aussage des gleichen Satzes hat somit $\varphi(t)$ als Mittelwert von g_t die äquivalente Darstellung

$$\varphi(t) = M(g_t) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k\ge 0} \frac{g_t(p^k)}{p^k}. \tag{4.2.6}$$

Die Faktoren dieses Produkts haben für $|t| \le T$ wegen $\varphi(t) \neq 0$ und der Multiplikativität von g_t, also $g_t(1) = 1$, die Form

$$\begin{aligned}
0 &\neq \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{g_t(p)}{p} + \sum_{k\ge 2} \frac{g_t(p^k)}{p^k}\right) \\
&= 1 + \underbrace{\left(-\frac{1 - g_t(p)}{p}\right)}_{=:u_p(t)} + \underbrace{\left(-\frac{g_t(p)}{p^2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k\ge 2} \frac{g_t(p^k)}{p^k}\right)}_{=:w_p(t)} \\
&= 1 + u_p(t) + w_p(t).
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Dabei gelten für alle $t \in \mathbb{R}$ wie im Satz 4.1.7 die Abschätzungen

$$|u_p(t)| = \left|-\frac{1 - g_t(p)}{p}\right| \le \frac{1 + |e^{itf(p)}|}{p} \le \frac{2}{p}$$

und

$$|w_p(t)| = \left| -\frac{g_t(p)}{p^2} + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k\geq 2} \frac{g_t(p^k)}{p^k} \right| \leq \frac{1}{p^2}\left(1 + \overbrace{\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{1}{p^k}}^{=1}\right) = \frac{2}{p^2}.$$

Mit der Abschätzung

$$\sum_p \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |u_p(t)|^2 + \sup_{t\in\mathbb{R}} |w_p(t)| \right) \leq \sum_p \left(\frac{4}{p^2} + \frac{2}{p^2} \right) \leq 6\zeta(2) =: H \tag{4.2.8}$$

konvergiert dabei die Reihe $\sum_p(|u_p|^2 + |w_p|) \leq H$ nach Lemma 0.0.6 gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, also auch gleichmäßig für alle $|t| \leq T$. Mit der Konvergenz der Produkte $\varphi(t) = \prod_p(1 + u_p(t) + w_p(t))$ erhalten wir somit aus (4.2.8) und dem ersten Teil des Lemmas 4.1.2 für alle $|t| \leq T$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \leq |\varphi(t)| \leq \exp\left(6H + \mathrm{Re}\left(\sum_p u_p(t)\right)\right) = e^{6H} \exp\left(-\sum_p \frac{1 - \mathrm{Re}\,(e^{itf(p)})}{p}\right). \tag{4.2.9}$$

Wegen $tf(p) \in \mathbb{R}$, $e^{itf(p)} = \cos(tf(p)) + i\sin(tf(p))$ sowie $e^{6H} > 0$ folgt aus (4.2.9), für alle $|t| \leq T$, dass

$$0 < \frac{1}{2e^{6H}} \leq \exp\left(-\sum_p \frac{1 - \cos(tf(p))}{p}\right). \tag{4.2.10}$$

Die Reihe $\sum_p(1 - \cos(tf(p)))/p$ ist mit $1 - \cos(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ monoton steigend. Aus (4.2.10) erhalten wir somit die Konvergenz derselben Reihe für alle $|t| \leq T$ als

$$0 \leq \sum_p \frac{1 - \cos(tf(p))}{p} \leq -\log\left(\frac{1}{2e^{6H}}\right) =: M < \infty. \tag{4.2.11}$$

Mit der Ungleichung $1 - \cos(x) \geq 2x^2/\pi^2$ für $|x| \leq 2 < \pi$ nach Lemma 4.1.4 gilt damit insbesondere auch

$$\begin{aligned} \sum_{|f(p)|\leq 2/T} \frac{f(p)^2}{p} &= \frac{\pi^2}{2T^2} \sum_{|Tf(p)|\leq 2} \frac{2\,(Tf(p))^2}{\pi^2 p} \overset{4.1.4}{\leq} \frac{\pi^2}{2T^2} \sum_{|Tf(p)|\leq 2} \frac{1 - \cos(Tf(p))}{p} \\ &\leq \frac{\pi^2}{2T^2} \sum_p \frac{1 - \cos(Tf(p))}{p} \overset{(4.2.11)}{<} \infty. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Damit konvergiert die monoton steigende Reihe $\sum_{|f(p)|\leq R} f(p)^2/p$ aus (4.2.1).

Um die Konvergenz der zweiten Reihe in (4.2.1) zu zeigen, betrachten wir zunächst die Reihe

$$\sum_{f(p)\neq 0} \frac{1}{p}\left(1-\frac{\sin(Tf(p))}{Tf(p)}\right) = \frac{1}{T}\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}\left(T-\frac{\sin(Tf(p))}{f(p)}\right)$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}\left[t-\frac{\sin(tf(p))}{f(p)}\right]_{t=0}^{T} = \frac{1}{T}\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}\int_0^T 1-\cos(tf(p))\,dt$$
$$\overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{f(p)\neq 0}\underbrace{\frac{1-\cos(tf(p))}{p}}_{\geq 0}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\sum_p \frac{1-\cos(tf(p))}{p}}_{\leq M \text{ nach } (4.2.11)}\,dt \leq M. \tag{4.2.13}$$

Für die erste Reihe der Gleichungskette ist der Ausdruck in Klammern

$$1-\frac{\sin(Tf(p))}{Tf(p)} = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{1-\cos(tf(p))}_{\geq 0}\,dt \geq 0$$

für alle p mit $f(p)\neq 0$. Im Fall $|f(p)|>2/T$, also $T|f(p)|>2$, gilt sogar

$$1-\frac{\sin(Tf(p))}{Tf(p)} \geq 1-\frac{1}{T|f(p)|} \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{4.2.14}$$

Die zweite Reihe $\sum_{|f(p)|>R} 1/p$ des Satzes konvergiert mit (4.2.13) und (4.2.14) für $R=2/T>0$ also absolut als

$$\sum_{|f(p)|>R}\frac{1}{p} \leq 2\sum_{|f(p)|>R}\frac{1}{p}\left(1-\frac{\sin(Tf(p))}{Tf(p)}\right) \leq 2\sum_{f(p)\neq 0}\frac{1}{p}\left(1-\frac{\sin(Tf(p))}{Tf(p)}\right) \leq M.$$

Wir kommen zur dritten Reihe des Satzes. Da also die Reihe $\sum_{|f(p)|>R} 1/p$ konvergiert, ist mit der Abschätzung $|\sin(x)|\leq 1$ für $x\in\mathbb{R}$ auch die Reihe $\sum_{|f(p)|>R}\sin(Tf(p))/p$ absolut konvergent. Nach (4.2.5) konvergiert außerdem die Reihe

$$-\operatorname{Im}\left(\sum_p \frac{1-g_T(p)}{p}\right) = \sum_p \operatorname{Im}\left(\frac{-1+e^{iTf(p)}}{p}\right) = \sum_p \frac{\sin(Tf(p))}{p}. \tag{4.2.15}$$

Aus diesen beiden Konvergenzen folgt nach Lemma 0.0.15, dass auch

$$\sum_{|f(p)|\leq R}\frac{\sin(Tf(p))}{p} = \sum_p \frac{\sin(Tf(p))}{p} - \sum_{|f(p)|>R}\frac{\sin(Tf(p))}{p} \tag{4.2.16}$$

konvergiert. Nach Lemma 4.1.1 gilt nun $|\sin(\vartheta)-\vartheta|\leq|\vartheta|^3/6$ für alle $\vartheta\in\mathbb{R}$. Speziell für $\vartheta\in[-2,2]$ ist also

$$|\sin(\vartheta)-\vartheta| \leq \frac{|\vartheta|^3}{6} \leq \frac{\vartheta^2}{3}. \tag{4.2.17}$$

Mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{|f(p)|\le R}\sin(Tf(p))/p$ aus (4.2.16) und der Reihe $\sum_{|f(p)|\le R} f(p)^2/p$ nach (4.2.12) für $R = 2/T$ finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass die Abschätzungen

$$\left|\sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{\sin(Tf(p))}{p}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{f(p)^2}{p} \le \frac{3\varepsilon}{2T^2} \tag{4.2.18}$$

für alle $N \ge N_0$ gelten. Für die gleichen $N \ge N_0$ gilt somit

$$\begin{aligned}
T\left|\sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{f(p)}{p}\right| &\le \left|\sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{Tf(p)-\sin(Tf(p))}{p}\right| + \left|\sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{\sin(Tf(p))}{p}\right| \\
&\le \sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{|Tf(p)-\sin(Tf(p))|}{p} + \left|\sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{\sin(Tf(p))}{p}\right| \\
&\overset{(4.2.17)}{\le} \frac{T^2}{3}\sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{f(p)^2}{p} + \left|\sum_{|f(p)|\le R,\, p\ge N}\frac{\sin(Tf(p))}{p}\right| \overset{(4.2.18)}{\le} \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Ungleichung $|Tf(p)| \le 2$ als Äquivalenz zu $|f(p)| \le R = 2/T$ benutzt wird. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, konvergiert somit auch die Reihe $\sum_{|f(p)|\le R} f(p)/p$, was die erste Richtung des Beweises schließt.

Umgekehrt seien nun die drei Reihen des Satzes für ein $R > 0$ konvergent. Mit der Abschätzung $|1 - e^{itf(p)}| \le 1 + |e^{itf(p)}| = 2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\sum_{|f(p)|>R}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{1-e^{itf(p)}}{p}\right| \le 2\sum_{|f(p)|>R}\frac{1}{p} < \infty, \tag{4.2.19}$$

womit die Reihe $\sum_{|f(p)|>R}(1 - e^{itf(p)})/p$ nach Lemma 0.0.6 gleichmäßig für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. Insbesondere konvergiert die Reihe so für festes $T > 0$ gleichmäßig für alle $|t| \le T$. Im Falle $|f(p)| \le R$ gilt dabei mit $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
1 - e^{itf(p)} &= 1 - \cos(tf(p)) - i\sin(tf(p)) \\
&= -itf(p) + (1 - \cos(tf(p))) + i\,(tf(p) - \sin(tf(p))) \\
&= -itf(p) + \mathcal{O}\left(T^2 f(p)^2 + T^3 R f(p)^2\right)
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

gleichmäßig für $|t| \le T$. Hierbei nutzen wir erneut das Lemma 4.1.1, wonach

$$|1 - \cos(tf(p))| \le \frac{(tf(p))^2}{2} = \mathcal{O}(T^2 f(p)^2)$$

und

$$|tf(p) - \sin(tf(p))| \le \frac{|tf(p)|^3}{6} = \mathcal{O}\left(T^3 R f(p)^2\right)$$

gleichmäßig für $|t| \leq T$ und $|f(p)| \leq R$ gilt. Aus der Abschätzung (4.2.20) folgt somit für $|t| \leq T$ und $N \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}\sum_{|f(p)|\leq R,\, p\geq N} \frac{1-e^{itf(p)}}{p} &= -it \sum_{|f(p)|\leq R,\, p\geq N} \frac{f(p)}{p} + \mathcal{O}\left((T^2+T^3R) \sum_{|f(p)|\leq R,\, p\geq N} \frac{f(p)^2}{p}\right) \\ &= \mathcal{O}\left(T \sum_{|f(p)|\leq R,\, p\geq N} \frac{f(p)}{p} + (T^2+T^3R) \sum_{|f(p)|\leq R,\, p\geq N} \frac{f(p)^2}{p}\right).\end{aligned}$$

Die zuletzt auftretenden Reihen konvergieren nach der Voraussetzung und verschwinden für $N \to \infty$ gegen 0. Die Reihe $\sum_{|f(p)|\leq R}(1 - e^{itf(p)})/p = \sum_{|f(p)|\leq R}(1 - g_t(p))/p$ konvergiert somit gleichmäßig für $|t| \leq T$. Zusammen mit (4.2.19) konvergiert also – als Summe zweier für $|t| \leq T$ gleichmäßig konvergenter Reihen – insgesamt auch die Reihe

$$-\sum_p u_p(t) = \sum_p \frac{1 - g_t(p)}{p} = \sum_{|f(p)|\leq R} \frac{1 - g_t(p)}{p} + \sum_{|f(p)|>R} \frac{1 - g_t(p)}{p} \tag{4.2.21}$$

gleichmäßig für $|t| \leq T$. Da $T > 0$ beliebig war, ist $-\sum_p u_p$ als Funktion in t kompakt konvergent auf $\mathbb{R}$.

Mit dieser Konvergenz existiert nach der zweiten Aussage von Satz 4.1.5 für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Mittelwert $M(g_t) = \varphi(t)$, wobei $\varphi(t)$ die Gestalt des Produktes in (4.2.6) hat. Wir zeigen nun, dass nach dem zweiten Teil des Lemmas 4.1.2 dieses Produkt als Funktion in t ebenfalls kompakt konvergent auf $\mathbb{R}$ ist. Wir nutzen hierzu, dass die einzelnen Faktoren des Produkts die Form $1 + u_p(t) + w_p(t)$ mit der gleichen Bezeichnung und Abschätzung wie in (4.2.7) haben. Für alle Primzahlen $p \geq 3$ gilt somit

$$|1 + u_p(t) + w_p(t)| \geq 1 - |u_p(t)| - |w_p(t)| \geq 1 - \frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} > 0.$$

Nach (4.2.8) ist dabei $\sum_p \left(|u_p(t)|^2 + |w_p(t)|\right) \leq H$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ konvergent. Die Reihe $\sum_p u_p(t) = -\sum_p(1 - e^{itf(p)})/p$ ist – wie in (4.2.21) gezeigt – kompakt konvergent auf $\mathbb{R}$. Nach Lemma 4.1.2 ist also auch das Produkt $\prod_{p\geq 3}(1 + u_p + w_p)$ kompakt konvergent auf $\mathbb{R}$ und damit ebenso das um den stetigen Faktor $1 + u_2 + w_2$ ergänzte Produkt φ mit

$$\varphi(t) = \prod_p (1 + u_p(t) + w_p(t)) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k\geq 0} \frac{g_t(p^k)}{p^k}.$$

Da die Partialprodukte $\prod_{p\leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k\geq 0} g_t(p^k)/p^k$ für alle $N \in \mathbb{N}$ jeweils stetige Funktionen in t sind, ist nach Lemma 4.1.2 auch φ stetig, sodass f nach Korollar 3.3.6 eine Verteilungsfunktion besitzt. $\square$

Beispiel 4.2.2 (Schoenberg)**.** Für die arithmetische Funktion $n \mapsto \varphi(n)/n$ hatten wir in Satz 2.1.3 für $N \geq 2$ die Asymptotik

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} N + \mathcal{O}(\log(N)),$$

also die zugehörige, konstante mittlere Ordnung $6/\pi^2$ nachgewiesen. Mit φ und der Identität als jeweils multiplikativen arithmetischen Funktionen ist dabei auch $n \mapsto \varphi(n)/n \geq 1/n > 0$ multiplikativ. Damit ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(n) := \log\left(\varphi(n)/n\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

eine additive arithmetische Funktion. Für jede Primzahl p gilt dabei

$$\begin{aligned} |f(p)| &= \left|\log\left(\frac{p-1}{p}\right)\right| = -\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(-\frac{1}{p}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p-1} \leq \frac{2}{p} \leq 1. \end{aligned}$$

Somit ist $\sum_{|f(p)|>1} 1/p = 0$ und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{f(p)^2}{p} \leq \sum_{|f(p)|\leq 1} \frac{|f(p)|}{p} \leq \sum_{p} \frac{2}{p^2} \leq 2\zeta(2) < \infty.$$

Für $R = 1$ konvergieren so alle Reihen aus dem Satz von Erdős-Wintner, womit eine Verteilungsfunktion $\tilde{F}$ zu f existiert. Damit existiert auch die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ zu $n \mapsto \varphi(n)/n$ mit $F(z) = 0$ für $z \leq 0$ und

$$F(z) := \lim_{N\to\infty} \frac{\#\left\{n \leq N : \frac{\varphi(n)}{n} \leq z\right\}}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \leq N : f(n) \leq \log(z)\}}{N} = \tilde{F}(\log(z))$$

für $z > 0$. Dieses Resultat wurde erstmals von I. Schoenberg bewiesen.

Der Satz von Erdős-Wintner schafft es so also auch über die Verteilungsfunktionen multiplikativer Funktionen $g : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ eine Aussage zu machen, indem wir $n \mapsto \log(g(n))$ betrachten. In unserem speziellen Fall gilt mit $1 \leq \varphi(n) = \#\{k \leq n : (k,n) = 1\} \leq n$ dabei $F(z) = 0$ für $z \leq 0$ und $F(z) = 1$ für $z \geq 1$. Über die Form von $F(z)$ für $z \in (0,1)$ liefert der Satz von Erdős-Wintner jedoch keine konkrete Aussage. Dies stellt ein Problem dar, welches für additive Funktionen, die den Bedingungen von Erdős-Wintner genügen, leider häufig auftritt.

Bemerkung 4.2.3. 1. Man beachte, dass die Existenz einer Verteilungsfunktion nach dem Satz von Erdős-Wintner nur von den Werten von f auf den Primzahlen abhängt und nicht etwa von den Werten $f(p^k)$ für $k \geq 2$.

2. Die simultane Konvergenz aller drei Reihen aus Satz 4.2.1 für ein $R > 0$ impliziert die simultane Konvergenz der Reihen für sämtliche Werte $R' > 0$. Oft wird im Satz von Erdős-Wintner daher ohne Einschränkung der Wert $R = 1$ verwendet, um die Konvergenz der Reihen zu prüfen.

Im Falle $R' > R$ überlegt man sich dazu, dass

$$i)\ \sum_{|f(p)|>R'} \frac{1}{p} \leq \sum_{|f(p)|>R} \frac{1}{p} < \infty,$$

$$ii)\ \sum_{|f(p)|\leq R'} \frac{f(p)^2}{p} = \sum_{|f(p)|\leq R} \frac{f(p)^2}{p} + \sum_{R<|f(p)|\leq R'} \frac{f(p)^2}{p} \leq \sum_{|f(p)|\leq R} \frac{f(p)^2}{p} + \sum_{|f(p)|>R} \frac{R'^2}{p} < \infty$$

gilt. Ferner finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| \sum_{\substack{|f(p)|\leq R \\ p\geq N}} \frac{f(p)}{p} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{\substack{|f(p)|>R \\ p\geq N}} \frac{1}{p} \leq \frac{\varepsilon}{2R'}$$

für alle $N \geq N_0$ gilt. Mit den letzten Abschätzungen gilt für $N \geq N_0$ auch

$$iii)\ \left| \sum_{\substack{|f(p)|\leq R' \\ p\geq N}} \frac{f(p)}{p} \right| \leq \left| \sum_{\substack{|f(p)|\leq R \\ p\geq N}} \frac{f(p)}{p} \right| + \sum_{\substack{R<|f(p)|\leq R' \\ p\geq N}} \frac{|f(p)|}{p} \leq \left| \sum_{\substack{|f(p)|\leq R \\ p\geq N}} \frac{f(p)}{p} \right| + \sum_{\substack{|f(p)|>R \\ p\geq N}} \frac{R'}{p} < \varepsilon,$$

sodass mit $i)$, $ii)$ und $iii)$ auch die Reihen $\sum_{|f(p)|>R'} 1/p$, $\sum_{|f(p)|\leq R'} f(p)^2/p$ und $\sum_{|f(p)|\leq R'} f(p)/p$ konvergieren.

Umgekehrt gelten für $0 < R' < R$ die Beziehungen

$$i')\ \sum_{|f(p)|>R'} \frac{1}{p} = \sum_{|f(p)|>R} \frac{1}{p} + \sum_{R'<|f(p)|\leq R} \frac{1}{p} \leq \sum_{|f(p)|>R} \frac{1}{p} + \frac{1}{R'^2} \sum_{|f(p)|\leq R} \frac{f(p)^2}{p} < \infty,$$

$$ii')\ \sum_{|f(p)|\leq R'} \frac{f(p)^2}{p} \leq \sum_{|f(p)|\leq R} \frac{f(p)^2}{p} < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{|f(p)|\leq R'} f(p)/p$ konvergiert nach Lemma 0.0.15, da die Reihe $\sum_{|f(p)|\leq R} f(p)/p$ konvergiert und $\sum_{R'<|f(p)|\leq R} f(p)/p$ absolut konvergiert mit

$$\sum_{R'<|f(p)|\leq R} \frac{|f(p)|}{p} \leq R \sum_{|f(p)|>R'} \frac{1}{p} < \infty.$$

4.3 Der Satz von Erdős-Kac

Additive Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die den Bedingungen des Satzes von Erdős-Wintner nicht genügen, besitzen nach dem selben Satz keine Verteilungsfunktion. Dies trifft leider auch auf die reellwertigen und additiven Funktionen ω und Ω zu. So divergieren für diese und $R := 1$ die Reihen

$$\sum_{|\omega(p)| \leq R} \frac{\omega(p)^2}{p} = \sum_{|\Omega(p)| \leq R} \frac{\Omega(p)^2}{p} = \sum_{p} \frac{1}{p}$$

nach dem Satz 1.1.2 von Mertens. Mit dem zweiten Punkt aus Bemerkung 4.2.3 konvergieren somit für kein $R > 0$ alle Reihen des Satzes simultan.

Da also der Ansatz einer Grenzverteilung für die arithmetischen Funktionen ω und Ω keine Ergebnisse liefert, wollen wir zum Abschluss der Arbeit auf den präziseren, aber gleichzeitig auch komplizierteren Ansatz von Erdős und Kac verweisen. Hierbei wird – anstatt der Existenz einer gewöhnlichen Grenzverteilung – die punktweise Konvergenz von Verteilungsfunktionen der Form

$$\tilde{F}_{\omega,N}(x) := v_N\left(\{n \in \mathbb{N} : \omega(n) \leq A_N + xB_N\}\right)$$

bzw.

$$\tilde{F}_{\Omega,N}(x) := v_N\left(\{n \in \mathbb{N} : \Omega(n) \leq A_N + xB_N\}\right)$$

für $N \to \infty$ und geeignete reelle Folgen $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ und $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ untersucht. Neben den Grenzwerten, die von Erdős und Kac bewiesen wurden, kann dabei ein konkreter Fehlerterm angegeben werden, der auf Rényi und Turán zurückgeht.

Satz 4.3.1 (Erdős & Kac, 1939; Rényi & Turán, 1957)**.** *Für hinreichend große $N \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung*

$$v_N\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{\omega(n) - \log(\log(N))}{\sqrt{\log(\log(N))}} \leq x\right\}\right) = \Phi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log(\log(N))}}\right)$$

wobei

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist.

Beweis. Siehe [Ten15], Theorem 4.15. Hierbei wird die verkürzte Schreibweise $\ln_2(x) := \log(\log(x))$ für $x > e$ verwendet. □

Der Satz von Erdős-Kac kann in der gleichen Form auch für Ω anstatt ω gezeigt werden (siehe auch dazu [Ten15], Theorem 4.15. unter Verwendung von Theorem II.6.2. anstelle von II.6.1). Hierzu wird neben einem weitaus größeren Repertoire an Abschätzungen aus der Funktionentheorie auch die Berry-Esseen-Ungleichung benötigt. Letztere stellt eine Verknüpfung zwischen der Ähnlichkeit zweier Verteilungsfunktionen und der Ähnlichkeit ihrer charakteristischen Funktionen dar.

Satz 4.3.2 (Berry-Esseen-Ungleichung)**.** *Seien F und G zwei Verteilungsfunktionen mit charakteristischen Funktionen φ_F und φ_G. Ist G differenzierbar und G' beschränkt auf $\mathbb{R}$, gilt für alle $T > 0$ die Abschätzung*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| \leq 16 \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}} |G'(x)|}{T} + 6 \int_{-T}^{T} \left| \frac{\varphi_F(t) - \varphi_G(t)}{t} \right| dt.$$

Beweis. Siehe [Ten15], Theorem 7.16. □

Die für den Satz von Erdős-Kac nötigen Abschätzungen aus Abschnitt II.6. in [Ten15] bzw. Kapitel 15 in [Ste02] gehen von dem Problem analytischer Fortsetzungen spezieller Dirichletreihen zur Suche nullstellenfreier Gebiete der Riemannschen Zetafunktion über. Auch in anderen wichtigen zahlentheoretischen Problemen, wie dem Beweis des Primzahlsatzes, finden diese Resultate Anwendung. Dies verdeutlicht, welche Vielzahl an Problematiken oft mit einer einzigen, hinreichend differenzierten Fragestellung – wie der Existenz einer Grenzverteilung im Sinne von Erdős-Kac – einhergehen kann.

Literaturverzeichnis

[Bil95] P. Billingsley: Probability and Measure. John Wiley & Sons, New York, Dritte Auflage, 1995.

[Bor12] O. Bordellès: Arithmetic Tales. Springer-Verlag, London, 2012.

[Dur10] R. Durret: Probability. Cambridge University Press, New York, Vierte Auflage, 2010.

[Ell79] P. D. T. A. Elliot: Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York, 1979.

[Fre06] E. Freitag und R. Busam: Funktionentheorie 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Vierte Auflage, 2006.

[Hal68] G. Halász: Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 19 (3-4), S. 365-403, 1968.

[Har60] G. H. Hardy und E. M. Wright: An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press, Ely House, London, Vierte Auflage, 1960.

[Jae04] K. Jänich: Funktionentheorie. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Sechste Auflage, 2004.

[Kar93] A. F. Karr: Probability. Springer-Verlag, New York, 1993.

[Kle13] A. Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Dritte Auflage, 2013.

[Kno54] K. Knopp: Theory and Application of Infinite Series. Blackie & Son Limited, London, Glasglow, Zweite Auflage, 1954.

[Kon12] J.-M. De Koninck und F. Luca: Analytic Number Theory. Exploring the Anatomy of Integers. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012.

[Kub64] J. Kubilius: Probabilistic Methods in the Theory of Numbers. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1964.

[Kub83] J. Kubilius: Estimation of the central moment for strongly additive arithmetic functions, Lietovsk, Mat. Sb. 23, S. 110-117 (Russisch), 1983.

[Koe02] K. Königsberger: Analysis II. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Vierte Auflage, 2002.

[Koe04] K. Königsberger: Analysis I. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Sechste Auflage, 2004.

[Rem07] R. Remmert und G. Schumacher: Funktionentheorie II. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Dritte Auflage, 2007.

[Ste02] J. Steuding: Probabilistic Number Theory. Verfügbar unter `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.118.4755`. Zuletzt eingesehen am 09. August 2020.

[Ten15] G. Tenenbaum: Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Masterarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Düsseldorf, den 10. August 2020

Jonathan Schmitz