

Dept. Mathematik
Naturwissenschaftlich - Technische Fakultät

Über Punktprozesse und ihre Anwendungen

Bachelorarbeit

vorgelegt von
Jonathan Schmitz
am 22. August 2018

Gutachter
Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
Prof. Dr. Alfred Müller

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Vorbemerkungen	4
1. Grundlagen	9
1.1. Punktmaße und Punktprozesse	9
1.2. Beispiele für Punktprozesse	12
1.3. Endlich-dimensionale Verteilungen	13
1.4. Das Laplace-Funktional	14
2. Der Poisson-Prozess	15
2.1. Definition und elementare Eigenschaften	15
2.2. Laplace-Funktionale von Poisson-Prozessen	16
2.3. Allgemeine Konstruktion von Poisson-Prozessen	20
2.4. Die Ordnungsstatistik-Eigenschaft	21
2.5. Poisson-Prozesse als Erneuerungsprozesse	27
3. Transformation von Poisson-Prozessen	29
3.1. Transformation von Poisson-Prozessen	29
3.2. Inhomogene Poisson-Prozesse	32
3.3. Markierung und Ausdünnung von Poisson-Prozessen	33
4. Varianten von Poisson-Prozessen	41
4.1. Gemischte Poisson-Prozesse	41
4.2. Doppelt-stochastische Poisson-Prozesse	42
4.3. Zusammengesetzte Poisson-Prozesse	44
4.4. Clusterprozesse	46
Literaturverzeichnis	48
A. Anhang	49
Erklärung	52

Einleitung

Es bedarf keiner tiefgreifenden mathematischen Kenntnisse, um sich der Relevanz von Punktprozessen für Modellierungsproblematiken bewusst zu werden. Um reale Phänomene analysieren zu können, ist es oft dienlich, Zufallsverteilungen von Punkten in einem bestimmten Raum – zumeist einer Teilmenge E von \mathbb{R}^d für $d \geq 1$ – modellieren zu können. Punktprozesse N leisten als Zufallsvariablen, deren Werte jeweils Punktmaße auf E sind, einen wesentlichen Beitrag zur Darstellung und Lösung solcher Probleme und helfen somit bei der Modellierung einer Vielzahl von alltäglichen Szenarien, wie beispielsweise:

- den Zeitpunkten von Ankünften (Abfahrten u.s.w.)
- den Positionen von Objekten innerhalb eines vorgegebenen Gebietes
- den Zeitpunkten, Intensitäten und Ausbreitungsradien von Naturkatastrophen (Epidemien u.s.w.)

Der Begriff des Punktprozesses soll in dieser Arbeit direkt zu Beginn formal eingeführt werden und auf Basis dieser Definition auf seine Eigenschaften hin untersucht werden. Die grundlegenden Motivationen hinter den Definitionen und Sätzen werden wir jedoch nicht aus den Augen verlieren und mit den Aussagen an geeigneten Stellen in Bezug setzen. Als besonders anwendungsfreundlicher Vertreter von Punktprozessen wird sich hierbei der Poisson-Prozess erweisen, auf dem in den folgenden Untersuchungen das Hauptaugenmerk liegen wird. So werden wir verschiedene Beschreibungen eines Poisson-Prozesses kennenlernen und seine Eigenschaften studieren. Diese Maschinerie wird uns dann dabei helfen, weitere Typen von Punktprozessen – welche auf dem Begriff des Poisson-Prozesses fußen – einzuführen und zu analysieren.

Die vorliegende Arbeit ist im Wesentlichen eine Ausarbeitung der Resultate in SIDNEY I. RESNICKS „Adventures in Stochastic Processes“ [Res13] und gliedert sich in vier Kapitel. In Kapitel 1 werden hierbei zunächst elementare Definitionen und Aussagen angegeben, die im Rest der Arbeit als bekannt vorausgesetzt werden, sowie die Grundlagen der Theorie von Punktprozessen vorgestellt. Kapitel 2 befasst sich anschließend mit der Einführung von Poisson-Prozessen sowie deren grundlegenden Eigenschaften. Hierbei werden wir eine allgemeine Definition von Poisson-Prozessen auf Räumen $E \subset \mathbb{R}^d$ geben, einen konstruktiven Existenzbeweis liefern und verschiedene äquivalente Charakterisierungen angeben. Kapitel 3 wird diese Resultate nutzen, um darauf einzugehen, wie sich Poisson-Prozesse unter Transformationen der zugehörigen Punkte verhalten und erläutern, wie sich dies in Markierungen und Ausdünnungen von Poisson-Prozessen widerspiegelt. In Kapitel 4 werden abschließend verschiedene Typen von Punktprozessen vorgestellt, die als Varianten von Poisson-Prozessen in der Praxis Anwendung finden. Um den Lesefluss nicht unnötig zu stören, werden wir dabei rein technische Beweise überspringen und gegebenenfalls in den Anhang verlagern.

Vorbemerkungen

Zunächst sollen einige Grundbegriffe, Konventionen und Aussagen angegeben werden, die in dieser Arbeit Verwendung finden. Wir werden im Folgenden stets annehmen, dass der Zustandsraum E unserer Zufallsvariablen eine nicht-leere Teilmenge eines metrischen Raums \mathbb{R}^d oder speziell $\mathbb{R}_+^d := [0, \infty)^d$ für $d \geq 1$ ist. Ferner gehen wir davon aus, dass E über eine zugehörige Borel- σ -Algebra $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ verfügt, welche von den offenen Mengen in E erzeugt wird.

Definition 0.0.1 (Rechteck). Als **Rechtecke** einer Menge $E \subset \mathbb{R}^d, d \geq 1$ bezeichnen wir die Mengen R der Gestalt

$$R = R_1 \times \cdots \times R_d \subset E$$

wobei R_i für $i = 1, \dots, d$ nicht-leere Intervalle in \mathbb{R} seien.

Satz 0.0.2. Seien \mathbf{P}, \mathbf{P}' zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Messraum $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$, wobei $\sigma(\mathcal{A})$ die von \mathcal{A} erzeugte σ -Algebra sei und \mathcal{A} ein unter Bildung von endlichen Schnitten abgeschlossenes Mengensystem sei. Stimmen dann \mathbf{P} und \mathbf{P}' auf \mathcal{A} überein, so auch auf $\sigma(\mathcal{A})$.

Beweis. Siehe [Bil95], S.42. □

Satz 0.0.3. Es seien $(\Omega, \mathcal{F}), (\Omega', \mathcal{F}')$ Messräume, \mathcal{A}' sei ein Erzeuger von \mathcal{F}' . Eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ ist genau dann \mathcal{F} - \mathcal{F}' -messbar, wenn

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{F} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'.$$

Beweis. Siehe [Bil95], S.182. □

Konvention 0.0.4. Ist eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ messbar bezüglich der σ -Algebren \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}' auf Ω bzw. Ω' , so schreiben wir

$$f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}').$$

Konvention 0.0.5. Wir schreiben $X \stackrel{d}{=} Y$, falls zwei Zufallsvariablen X und Y die gleiche Verteilung besitzen.

Lemma 0.0.6. Seien $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen und $f_n : (\Omega_n, \mathcal{F}_n) \rightarrow (\Omega'_n, \mathcal{F}'_n)$ messbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $(f_n(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen. Gilt insbesondere $(\Omega_n, \mathcal{F}_n) = (\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $f : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ messbar, so sind auch die $f(X_n)$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für die erste Aussage siehe beispielsweise [Sch09], S.237. Die zweite Aussage ergibt sich aus der ersten mit

$$\mathbf{P}[f(X_i) \in A] = \mathbf{P}[X_i \in f^{-1}(A)] = \mathbf{P}[X_1 \in f^{-1}(A)] = \mathbf{P}[f(X_1) \in A]$$

für $A \in \mathcal{F}'_1$ falls X_i und X_1 die gleiche Verteilung besitzen. □

Satz 0.0.7. Sei I eine beliebige Indexmenge. Zu jeder Familie $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)_{i \in I}$ von Wahrscheinlichkeitsräumen existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, die unabhängig sind und für welche $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Beweis. Siehe [Sche02], S.69. □

Satz 0.0.8 (Starkes Gesetz der großen Zahlen). Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[X_n] = m < \infty$. Dann gilt

$$\mathbf{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = m \right] = 1.$$

Beweis. Siehe [Bil95], S.85. □

Lemma 0.0.9. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbar. Dann existiert eine Folge messbarer Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ der Gestalt

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n} \mathbf{1}_{A_{i,n}}(x), \quad \lambda_{i,n} \in \mathbb{R}, A_{i,n} \in \mathcal{F},$$

sodass $0 \leq f_n \uparrow f$ falls $f \geq 0$ bzw. $f_n \downarrow f \leq 0$ falls $f \leq 0$ und die $A_{i,n}$ für festes n paarweise disjunkt sind.

Beweis. Siehe [Bil95], S.185. □

Satz 0.0.10 (Monotone Konvergenz). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar. Gilt dann $0 \leq f_n \uparrow f$ μ -fast überall für eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, so folgt

$$\int_{\Omega} f_n d\mu \uparrow \int_{\Omega} f d\mu.$$

Beweis. Siehe [Bil95], S.208. □

Satz 0.0.11. Sei (Ω, \mathcal{F}) ein Messraum und $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf \mathcal{F} . Für eine nicht-negative, messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ und das Maß $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ gilt dann

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f d\mu_n.$$

Beweis. Folgt mittels algebraischer Induktion und Satz (0.0.10), siehe [Bil95], S.209. □

Satz 0.0.12 (Dominierte Konvergenz). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar. Gilt dann $|f_n| \leq g$, $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall für eine integrierbare Funktion $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ und eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so folgt

$$\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu.$$

Beweis. siehe [Bil95], S.209. □

Satz 0.0.13 (Dichtetransformationsformel). *Sei μ ein Maß auf \mathbb{R}^n mit stückweise stetiger Lebesguedichte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$. Seien U, V offene Teilmengen des \mathbb{R}^n mit $\mu(\mathbb{R}^n \setminus U) = 0$ sowie $T : U \rightarrow V$ bijektiv und stetig differenzierbar mit Ableitung T' und stetig differenzierbarer Umkehrabbildung T^{-1} . Dann hat das Bildmaß $\mu \circ T^{-1}$ die Dichte*

$$f_T(x) = \begin{cases} \frac{f(T^{-1}(x))}{|\det(T'(T^{-1}(x)))|}, & \text{falls } x \in V, \\ 0, & \text{falls } x \notin V. \end{cases}$$

Beweis. Siehe [Koe02] S.299 ff. (wobei wir T durch T^{-1} ersetzen und $\det((T^{-1})') = \det(T')^{-1}$ beachten). □

Definition 0.0.14 (Laplace-Transformierte). *Als **Laplace-Transformierte** eines Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_d)$ in \mathbb{R}_+^d bezeichnen wir die auf \mathbb{R}_+^d definierte Funktion L_X mit*

$$L_X(t) := \mathbf{E}[\exp(-\langle X, t \rangle)], \quad t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Lemma 0.0.15. *Zwei Zufallsvektoren in \mathbb{R}_+^d für $d \geq 1$ haben genau dann die gleiche Verteilung, wenn ihre Laplace-Transformierten übereinstimmen.*

Ferner ist die Laplace-Transformierte im eindimensionalen Fall auf $(0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar mit

$$\mathbf{E}[X] = -\lim_{\lambda \downarrow 0} L_X(\lambda).$$

Beweis. Siehe [Kal97], S.63 f. bzw. [Kle00], S.145 f. □

Viele Aussagen in dieser Arbeit stützen sich auf die Theorie bedingter Verteilungen und Erwartungswerte. Wir werden elementare Definitionen und Sätze wie in [Kle00] S.173-176 als bekannt voraussetzen und uns auf die folgenden Anmerkungen beschränken, deren Beweise alle in [Kle00] S.177-190 zu finden sind.

Satz 0.0.16 (Bedingter Erwartungswert). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Sub- σ -Algebra und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ integrierbar. Dann heißt eine Zufallsvariable C **bedingter Erwartungswert** von X gegeben \mathcal{F} (in Zeichen $C = \mathbf{E}[X | \mathcal{F}]$), falls C \mathcal{F} -messbar ist und $\mathbf{E}[X \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}[C \mathbf{1}_A]$ für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt. Es gilt dabei:*

1. $\mathbf{E}[X | \mathcal{F}]$ existiert und ist \mathbf{P} -fast sicher eindeutig,
2. Für $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ gilt \mathbf{P} -fast sicher $\mathbf{E}[X | Y] := \mathbf{E}[X | \sigma(Y)] = \varphi \circ Y$ für eine $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbare Funktion φ . Wir schreiben dann $\mathbf{E}[X | Y = y] := \varphi(y)$,
3. $\mathbf{E}[X | \mathcal{F}] \geq 0$ für $X \geq 0$,
4. Ist $X \leq Y$ und Y integrierbar, so gilt $\mathbf{E}[X | \mathcal{F}] \leq \mathbf{E}[Y | \mathcal{F}]$,
5. $\mathbf{E}[aX + bY | \mathcal{F}] = a\mathbf{E}[X | \mathcal{F}] + b\mathbf{E}[Y | \mathcal{F}]$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und integrierbares Y ,

6. $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X | \mathcal{F}]] = \mathbf{E}[X],$

7. Ist $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Sub- σ -Algebra, so gilt $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X | \mathcal{F}] | \mathcal{G}] = \mathbf{E}[X | \mathcal{G}],$

8. Ist Z \mathcal{F} -messbar, so gilt $\mathbf{E}[ZX | \mathcal{F}] = Z\mathbf{E}[X | \mathcal{F}].$

Satz 0.0.17 (Totaler Erwartungswert). *Es seien $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ reelle Zufallsvariablen sowie X integrierbar. Dann gilt*

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}[X|Y=y] \mathbf{P}_Y(y). \quad (0.1)$$

Beweis. Mit der zweiten Eigenschaft aus Satz (0.0.16) erhalten wir sofort:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|Y]] = \mathbf{E}[\varphi(Y)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \mathbf{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}[X|Y=y] \mathbf{P}_Y(y).$$

□

Satz 0.0.18. *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ Zufallsvektoren. Dann existiert ein **Markov-Kern** $\mathbf{P}_{X|Y} : \mathbb{R}^m \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

1. $\mathbf{P}_{X|Y}(y, \cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $y \in \mathbb{R}^m$,
2. $\mathbf{P}_{X|Y}(\cdot, A) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$,
3. $\mathbf{P}_{(X,Y)} = \mathbf{P}_{X|Y} \otimes \mathbf{P}_Y$,

wobei $\mathbf{P}_{X|Y}$ bis auf eine Nullmenge bezüglich \mathbf{P}_Y eindeutig bestimmt ist.

Definition 0.0.19. *Mit den Voraussetzungen von Satz (0.0.18) nennen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_{X|Y=y}(\cdot) := \mathbf{P}_{X|Y}(y, \cdot)$ die **bedingte Verteilung von X gegeben $Y = y$** . Wir schreiben für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$:*

$$\mathbf{P}[X \in A | Y = y] := \mathbf{P}_{X|Y=y}(A).$$

Definition 0.0.20 (Bedingte Dichte). *Für den Zufallsvektor $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m))$ mit $X \in \mathbb{R}^k, Y \in \mathbb{R}^m$ und gemeinsamer Lebesgue-Dichte $f_{X,Y}$ ist für $y \in \mathbb{R}^m$*

$$f_Y(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f_{X,Y}(x, y) dx \quad (0.2)$$

eine Lebesguedichte zu Y . Die Funktion

$$f_{X|Y=y}(x) := \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{falls } f_Y(y) > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezeichnen wir als **bedingte Dichte** von X gegeben $Y = y$.

Satz 0.0.21. Die bedingte Dichte von X gegeben $Y = y$ ist die Lebesgue-Dichte der Verteilung von X gegeben $Y = y$, d.h. es gilt \mathbf{P}_Y -fast sicher

$$\mathbf{P}[X \in A | Y = y] = \int_A f_{X|Y=y}(x) dx \quad \text{für } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k). \quad (0.3)$$

Satz 0.0.22. Ist $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen bedingten Verteilungen und bedingten Erwartungswerten dadurch, dass

$$\mathbf{E}[X | Y = y] = \int x \mathbf{P}_{X|Y=y}(dx) \quad (0.4)$$

ein bedingter Erwartungswert von X gegeben $Y = y$ ist.

Definition 0.0.23. Seien X_1, \dots, X_n unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1. Dann besitzt $S = X_1 + \dots + X_n$ bezüglich des Lebesgue-Maßes die **Gammadichte**

$$f_S(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}, \quad t \geq 0.$$

Beweis. Siehe [Sch09], S.318. □

Definition 0.0.24. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit abzählbarem Zustandsraum (E, \mathcal{E}) heißt **Markov-Kette**, wenn er die **Markov-Eigenschaft** besitzt, d.h. für alle $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ und $x_0, \dots, x_{n+1} \in E$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\mathbf{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \mathbf{P}[X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n].$$

1. Grundlagen

1.1. Punktmaße und Punktprozesse

Unsere Grundidee wird es sein, Zufallsverteilungen von Punkten in E zu konstruieren und eine geeignete Notation für jene Funktion zu finden, welche die Anzahl dieser zufälligen Punkten innerhalb von beschränkten Gebieten $A \in \mathcal{E}$ zählt. Hierzu nehmen wir an, die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ seien Zufallselemente in E , welche die zufälligen Punkte im Zustandsraum E repräsentieren. Wir führen nun folgende Notation ein:

Definition 1.1.1 (Punktmaße). Für $x \in E$ und $A \in \mathcal{E}$ definieren wir

$$\varepsilon_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

als **Punktmaß zum Punkt** x . Allgemeiner hat ein **Punktmaß** m auf E dann die Form

$$m = \sum_{i=1}^M \varepsilon_{x_i},$$

wobei $x_i \in E$ gilt, jedes beschränkte A in \mathcal{E} nur endliche viele x_i enthält und $M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der gesamten Anzahl von Punkten in E entspricht. Leere Summen der Form $\sum_{i=1}^0 a_i$ definieren wir dabei als 0.

Der Wert $m(A)$ eines Punktmaßes m auf E entspricht also der Anzahl von Punkten x_i , welche in einer messbaren Menge $A \in \mathcal{E}$ liegen. Insbesondere ergibt sich also für die Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, dass die zugehörige Funktion N mit

$$N(A) := \sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}(A), \quad A \in \mathcal{E} \tag{1.1}$$

die zufällige Anzahl an Punkten X_n misst, welche zur Menge A gehören. Man beachte, dass falls Ω der Definitionsbereich der Zufallselemente $\{X_n\}$ ist, auch N eine Funktion mit Definitionsbereich Ω ist. Für $\omega \in \Omega$ können wir somit

$$N(\omega, A) = \sum_{n=1}^{M(\omega)} \varepsilon_{X_n(\omega)}(A), \quad A \in \mathcal{E}$$

schreiben. Die Abhängigkeit der Funktion N von ω werden wir jedoch fast immer in der Notation vernachlässigen.

1. Grundlagen

Wir führen als nächstes eine formale Definition für **Punktprozesse** ein. Diese scheint auf den ersten Blick mit unserer Ursprungsidee – nämlich von Punkten im Zustandsraum E mit einer gewissen Verteilung auszugehen und anhand dieser ein Punktmaß zu definieren – nur wenig zu tun zu haben. Wir werden aber im Anschluss an die Definition einige Ergebnisse festhalten, die sichern, dass unter gewissen Voraussetzungen beide Anschauungen äquivalent sind.

Wir notieren dazu $M_p = M_p(E)$ als die Menge der Punktmaße auf E . Für $k \geq 0$ betrachten wir dann die speziellen Teilmengen von M_p der Gestalt:

$$\{m \in M_p : m(I) = k\},$$

wobei I ein beliebiges, beschränktes Rechteck in E sei. Die kleinste σ -Algebra auf M_p , die solche Mengen enthält (wobei I und k jeweils variieren), notieren wir dann als $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(E)$. Wir erhalten somit einen Messraum (M_p, \mathcal{M}_p) von Punktmaßen auf dem Zustandsraum $E \subset \mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$, dessen σ -Algebra Punktmaße im Wesentlichen danach unterscheidet, welche Werte sie auf beschränkten Rechtecken annehmen. Um nun zum Begriff eines Punktprozesses zu kommen, benötigen wir nur noch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und können dann definieren:

Definition 1.1.2 (Punktprozess). $N : \Omega \rightarrow M_p(E)$ nennen wir genau dann einen **Punktprozess**, wenn N eine messbare Abbildung von (Ω, \mathcal{F}) nach (M_p, \mathcal{M}_p) ist. Wir bezeichnen dann die von $\omega \in \Omega$ abhängigen Elemente $x_1, x_2, \dots, x_{M(\omega)} \in E$ mit $N(\omega) = \sum_{n=1}^{M(\omega)} \varepsilon_{x_n}$ als **Punkte von** $N(\omega)$ – oder nachlässig – als **Punkte von** N .

Ein Punktprozess wird also in dieser Definition als ein Zufallselement im Messraum der Punktmaße auf E eingeführt. Die hier geforderte Messbarkeit bedeutet formal, dass für $\Lambda \in \mathcal{M}_p$ gilt, dass

$$N^{-1}(\Lambda) := \{\omega \in \Omega : N(\omega) \in \Lambda\} \in \mathcal{F},$$

also bestimmte Mengen von Punktmaßen unter N Urbilder in \mathcal{F} besitzen. Mit Satz (0.0.3) ist dies äquivalent zu

$$\{N(I) = k\} := N^{-1}(\{m \in M_p : m(I) = k\}) \in \mathcal{F},$$

womit es genügen würde, diese Eigenschaft für Mengen von Punktmaßen zeigen zu können, die auf beschränkten Rechtecken $I \subset E$ bestimmte Werte $k \in \mathbb{N}_0$ annehmen.

Keine dieser Messbarkeitsbedingungen scheint dabei eine sehr intuitive, geschweige denn leicht zu überprüfende Eigenschaft von Abbildungen zu sein. Wir wollen aus diesem Grund eine weitere Äquivalenz festhalten, die den Begriff des Punktprozesses etwas greifbarer macht:

Lemma 1.1.3. $N : \Omega \rightarrow M_p(E)$ ist genau dann ein Punktprozess, wenn $\omega \mapsto N(\omega, A)$ für jedes $A \in \mathcal{E}$ eine \mathcal{F} - $\mathcal{B}([0, \infty))$ -messbare Abbildung ist.

Beweis. Siehe [Res08], S.124. □

1. Grundlagen

Anstatt also zu fordern, dass eine Menge von Punktmaßen ein gewisses Urbild besitzt, können wir äquivalent voraussetzen, dass uns N durch Einsetzen einer festen Menge $A \in \mathcal{E}$ eine Zufallsvariable $N(A)$ mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ liefert. Diese Zufallsvariable können wir dann als Anzahl von Punkten deuten, die unter N in der Menge A auftreten. Mit der Messbarkeit von $N(A)$ ist dabei garantiert, dass auch Wahrscheinlichkeiten der Form $\mathbf{P}[N(A) \leq t] := \mathbf{P}[\{\omega : N(\omega, A) \leq t\}]$ für jedes $A \in \mathcal{E}$ und $t \in \mathbb{R}$ definiert sind, falls N ein Punktprozess ist.

Wir bemerken in den obigen Definitionen von Punktprozessen, dass wir nicht – wie ursprünglich vorgeschlagen – zufällige Punkte auswählen und aus diesen eine Zählfunktion konstruieren, sondern zufällige Punktmaße auswählen, indem wir ein $\omega \in \Omega$ in die Abbildung N einsetzen. Beide Zugänge sind jedoch unter gewissen Voraussetzungen an N vereinbar, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 1.1.4. *Für eine Folge $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ von Zufallsvariablen auf Ω in E und eine Zufallsvariable $M : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ist $N : \Omega \rightarrow M_p(E)$ mit*

$$N(\omega) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \quad N(\omega)(A) = \sum_{n=1}^{M(\omega)} \varepsilon_{X_n(\omega)}(A), \quad A \in \mathcal{E}$$

ein Punktprozess, falls $N(A) < \infty$ für alle beschränkten Mengen $A \in \mathcal{E}$ gilt.

Umgekehrt existieren für jeden Punktprozess N Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots in $E \subset \mathbb{R}^d$ sowie eine $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertige Zufallsvariable M , sodass fast sicher gilt

$$N = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}.$$

Beweis. Für eine beliebige Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ gilt für jedes beschränkte Rechteck $I \subset E$, dass

$$\{\varepsilon_X(I) = k\} = \begin{cases} \{X \in I\}, & \text{falls } k = 1, \\ \{X \notin I\}, & \text{falls } k = 0, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{F},$$

womit ε_X ein Punktprozess ist. Ist nun $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Zufallsvariablen in E sowie M eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist N_n mit

$$N_n = \varepsilon_{X_1} \mathbb{1}_{M \geq 1} + \dots + \varepsilon_{X_n} \mathbb{1}_{M \geq n}$$

als endliche Summe von messbaren Abbildungen ebenfalls messbar und damit ein Punktprozess. Somit ist auch

$$N = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} N_n$$

messbar, mit $N(A) < \infty$ für alle beschränkten Mengen $A \in \mathcal{E}$ ist $N(\omega)$ immer ein Punktmaß und somit N ein Punktprozess.

1. Grundlagen

Die Rückrichtung ist aufwändiger und findet sich beispielsweise in [LasPen17], S.48 f.. Die dort in Korollar 6.5. geforderte gleichmäßige σ -Endlichkeit von N nach Definition 6.4. überlegt man sich wie folgt: Sei $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ die Metrik auf E . Mit N als Punktprozess gilt $N(A) < \infty$ für alle beschränkten Mengen $A \in \mathcal{E}$. Die Mengen $B_n := \{x \in E : d(x, a) < n\} \in \mathcal{B}(E) = \mathcal{E}$ – mit $a \in E \neq \emptyset$ und $n \in \mathbb{N}$ – sind offen und beschränkt, erfüllen also $E = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ und $\mathbf{P}[N(B_n) < \infty] = 1$. \square

Eine wichtige statistische Maßzahl für einen Punktprozesses ist das zugehörige Intensitätsmaß μ , welches durch

$$\mu(A) := \mathbf{E}[N(A)] \quad (1.2)$$

für $A \in \mathcal{E}$ definiert wird. Es gibt also $\mu(A)$ die erwartete Anzahl von Punkten innerhalb der Menge A an. Besonders für das häufig verwendete Modell des Poisson-Prozesses, welches wir im nächsten Abschnitt einführen werden, stellen die Werte des Intensitätsmaß grundlegende Größen dar.

1.2. Beispiele für Punktprozesse

Wir wollen nun den Begriff des Punktprozesses mit ein wenig Leben füllen und zwei Beispiele für Prozesse angeben, die eine Form wie in Lemma (1.1.4) haben.

Beispiel 1.2.1. Zunächst sollen die Positionen und Zeitpunkte von Erdbeben modelliert werden. Eine passende Wahl für den Ergebnisraum wäre hierbei $E = [0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ und der zugehörige Punktprozess könnte dargestellt werden als

$$N = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(T_n, (L_{n1}, L_{n2}))},$$

wobei T_n den Zeitpunkt des n -ten Erdbebens und (L_{n1}, L_{n2}) den Längen- und Breitengrad der zugehörigen Position angibt. Für $t > 0$ und eine Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ wäre somit $N([0, t] \times B)$ die Anzahl der Erdbeben, welche im Zeitintervall $[0, t]$ innerhalb von B auftreten. Wenn wir das Modell um die Intensität erweitern wollten, wäre $E = [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ ein passender Ergebnisraum und der Punktprozess könnte dargestellt werden als

$$N = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(T_n, (L_{n1}, L_{n2}), I_n)},$$

wobei $I_n \in [0, \infty)$ nun zusätzlich die Intensität des n -ten Erdbebens angibt.

Beispiel 1.2.2. Man beachte, dass die Notation in Lemma (1.1.4) nicht ausschließt, dass mehrere der Zufallsvariablen X_i den gleichen Wert annehmen.

Wir betrachten deshalb $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ als jene Folge von Zufallsvariablen in E , welche die verschiedenen Werte der X_i darstellen. Außerdem seien $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ nicht-negative, ganzzahlige Zufallsvariablen, wobei ξ_n die zufällige Anzahl der X_i angibt, welche den

1. Grundlagen

Wert Y_n haben. Der Punktprozess mit mehrfachen Punkten an den jeweiligen Positionen Y_n kann dann dargestellt werden als

$$N = \sum_{i=1}^M \varepsilon_{X_i} = \sum_{n=1}^{M'} \xi_n \varepsilon_{Y_n}.$$

Solche Darstellungen von Punktprozessen bieten sich besonders zur Modellierung von Massenankünften an. Man stelle sich Busse vor, die anhand eines Punktprozesses mit Punkten $\{Y_n, n \geq 1\}$ an einer Haltestelle ankommen, wobei der n -te Bus zum Zeitpunkt Y_n einfährt. Wenn wir die Anzahl der Passagiere im n -ten Bus als ξ_n schreiben, so ergibt

$$\sum_{n=0}^M \xi_n \varepsilon_{Y_n}([0, t]).$$

die Gesamtzahl der Reisenden, die in $[0, t]$ ankommen.

1.3. Endlich-dimensionale Verteilungen

Sei nun $N : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M_p, \mathcal{M}_p)$ ein Punktprozess sowie \mathbf{P} das Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) . Als Verteilung von N bezeichnen wir dann das Maß $\mathbf{P} \circ N^{-1}(\cdot) = \mathbf{P}[N \in \cdot]$ auf (M_p, \mathcal{M}_p) . Kennen wir also die Verteilung von N , so können wir auch die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen, welche von dem Wert von N abhängen.

Definition 1.3.1 (Endlich-dimensionale Verteilungen). Als *endlich-dimensionale Verteilungen von N* bezeichnen die Menge der multivariaten Funktionen

$$p_{I_1, \dots, I_k}(n_1, \dots, n_k) := \mathbf{P}[N(I_1) = n_1, \dots, N(I_k) = n_k],$$

wobei $I_j \subset E, 1 \leq j \leq k$ beschränkte Rechtecke und n_1, \dots, n_k nicht-negative, ganze Zahlen sind.

Satz 1.3.2. Die endlich-dimensionalen Verteilungen des Punktprozesses N bestimmen eindeutig die Verteilung $\mathbf{P} \circ N^{-1}$ von N .

Beweis. Sei \mathcal{G} die Klasse der endlichen Schnitte von Mengen der Form

$$\{m \in M_p : m(I) = k\}$$

für $k \geq 0$ und beschränkte Rechtecke $I \in \mathcal{E}$. Dann ist \mathcal{G} bzgl. der Bildung von endlichen Schnitten abgeschlossen und ein Erzeuger von \mathcal{M}_p , womit jedes Maß auf \mathcal{M}_p nach Satz (0.0.2) eindeutig durch seine Werte auf \mathcal{G} bestimmt wird. Insbesondere ist $\mathbf{P} \circ N^{-1}$ ein auf \mathcal{M}_p definiertes Maß und seine Werte auf \mathcal{G} sind mit

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \circ N^{-1} \left[\bigcap_{i=1}^k \{m \in M_p : m(I_i) = n_i\} \right] &= \mathbf{P} \left[N \in \bigcap_{i=1}^k \{m \in M_p : m(I_i) = n_i\} \right] \\ &= \mathbf{P}[N(I_1) = n_1, \dots, N(I_k) = n_k] \end{aligned}$$

durch die endlich-dimensionalen Verteilungen gegeben. □

1.4. Das Laplace-Funktional

Ein weiteres nützliches Hilfsmittel, welches eng im Zusammenhang mit der Verteilung eines Punktprozesses N steht, ist das *Laplace-Funktional*. Sei hierzu \mathcal{B}_+ die Menge der nicht-negativen, messbaren und beschränkten Funktionen auf E . Dann definieren wir für das Punktmaß $m = \sum_{i=1}^M \varepsilon_{x_i} \in M_p$ und $f \in \mathcal{B}_+$:

$$m(f) = \int_{x \in E} f(x) dm(x) = \sum_{i=1}^M f(x_i),$$

wobei $\{x_i\}$ die Punkte des Punktmaßes m sind. Mit der Freiheit, dass f eine beliebige Funktion in \mathcal{B}_+ sein darf, liefert uns $m(f)$ durch die Gleichheit $m(\mathbb{1}_A) = m(A)$ für $A \in \mathcal{E}$ mit $\mathbb{1}_A \in \mathcal{B}_+$ alle in m enthaltenen Informationen. Integrale von Maßen hinsichtlich beliebiger Testfunktionen liefern uns somit genauso viele Informationen wie das Auswerten von Maßen bezüglich beliebiger Mengen. Eben diesen Gedanken nutzt das Laplace-Funktional aus:

Definition 1.4.1 (Laplace-Funktional). *Das **Laplace-Funktional** des Punktprozesses N ist die nicht-negative Funktion Ψ_N auf \mathcal{B}_+ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \Psi_N(f) &= \mathbf{E} [\exp(-N(f))] = \int_{\Omega} \exp(-N(\omega, f)) d\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{M_p} \exp(-m(f)) \mathbf{P} \circ N^{-1}(dm). \end{aligned}$$

Satz 1.4.2. *Das Laplace-Funktional von N bestimmt eindeutig die Verteilung von N .*

Beweis. Für beschränkte Rechtecke $I_1, \dots, I_k \in \mathcal{E}$ sei f eine elementare Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{I_i}(x), \quad x \in E,$$

mit $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Psi_N(f) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(-N \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{I_i} \right) \right) \right] = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{I_i}(X_j) \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^M \mathbb{1}_{I_i}(X_j) \right) \right] = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^k \lambda_i N(I_i) \right) \right] \end{aligned}$$

die Laplace-Transformierte des Zufallsvektors $(N(I_1), \dots, N(I_k))$. Diese bestimmt nach Lemma (0.0.15) eindeutig die Verteilung des Zufallsvektors und damit offensichtlich die endlich-dimensionalen Verteilungen von N . Nach Satz (1.3.2) bestimmt das Laplace-Funktional somit auch eindeutig die Verteilung von N . \square

2. Der Poisson-Prozess

2.1. Definition und elementare Eigenschaften

Wir beginnen dieses Kapitel mit der Definition von Poisson-Prozessen als spezielle Typen von Punktprozessen.

Definition 2.1.1 (Poisson-Prozess). Sei μ ein Maß auf (E, \mathcal{E}) , das auf beschränkten Mengen endlich ist. Ein Punktprozess N ist dann ein **Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß** μ oder auch ein **Poisson-Zufallsmaß** ($PZM(\mu)$), falls gilt:

(1) Für $A \in \mathcal{E}$ ist

$$\mathbf{P}[N(A) = k] = \begin{cases} \frac{e^{-\mu(A)}(\mu(A))^k}{k!}, & \text{falls } \mu(A) < \infty, \\ 0, & \text{falls } \mu(A) = \infty. \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Sind A_1, \dots, A_k paarweise disjunkte Teilmengen von E in \mathcal{E} , so sind $N(A_1), \dots, N(A_k)$ unabhängige Zufallsvariablen.

Somit ist N also ein Poisson-Prozess, falls die zufällige Anzahl der Punkte in einer Menge $A \in \mathcal{E}$ Poisson-verteilt ist mit Parameter $\mu(A)$ und die Anzahlen der Punkte in disjunkten Gebieten unabhängige Zufallsvariablen sind. Man beachte, dass für $\mu(A) = \infty$ fast sicher $N(A) = \infty$ gilt.

Wir werden im Folgenden sagen, dass Poisson-Prozesse **unabhängige Zuwächse** besitzen und damit meinen, dass sie die zweite in der Definition geforderte Eigenschaft erfüllen. Für den Fall $E = \mathbb{R}$ ist dieser Begriff besonders anschaulich, da für beliebige $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ dann

$$N((t_i, t_{i+1}]) = N((t_1, t_{i+1}]) - N((t_1, t_i]), i = 1, \dots, k-1$$

die Zuwächse von N bei Ausweitung des Intervalls $(t_1, t_i]$ darstellen und unabhängige Zufallsvariablen sind.

Ist das Intensitätsmaß ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes auf E (d.h. der Länge falls $E = [0, \infty)$ oder \mathbb{R} , Fläche falls $E = \mathbb{R}^2$, Volumen falls $E = \mathbb{R}^3$ etc.), so sprechen wir von einem **homogenen** Poisson-Prozess. Im homogenen Fall gibt es also einen Parameter $\alpha \geq 0$, sodass für beliebiges $A \in \mathcal{E}$ gilt, dass $N(A)$ Poisson-verteilt ist mit Erwartungswert $\mathbf{E}[N(A)] = \alpha|A|$, wobei $|A|$ das Lebesgue-Maß zu A sei. Für $E = [0, \infty)$ nennen wir den Parameter α die **Rate** des (homogenen) Poisson-Prozesses.

2. Der Poisson-Prozess

Nehmen wir an, N sei ein homogener Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit Rate $\alpha > 0$. Wir wissen dann, dass für $t \in [0, \infty)$ gilt, dass $\mathbf{E}[N((0, t])] = \alpha|(0, t]| = \alpha t$, womit sich α als die erwartete Punktrate auf Intervallen interpretieren lässt.

Im Folgenden repräsentiere $o(h)$ stets eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{h \rightarrow 0} o(h)/h = 0.$$

Durch eine Taylorentwicklung der Exponentialfunktion im Nullpunkt erhalten wir mit $1 - e^0 = 0$, $\frac{d^n}{dh^n}(1 - e^{-\alpha h})(0) = (-1)^{n-1}\alpha^n$ für $n \geq 1$, dass $1 - e^{-\alpha h} = \alpha h + o(\alpha h) = \alpha h + o(h)$. Die Relevanz dieser Aussage für Poisson-Prozesse ergibt sich wie folgt: Für $h > 0$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[N((t, t+h]) = 1] &= e^{-\alpha h} \alpha h \\ &= (1 - \alpha h - o(h)) \alpha h \\ &= \alpha h - \alpha^2 h^2 - o(h) \alpha h \\ &= \alpha h + o(h) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[N((t, t+h]) > 1] &= 1 - e^{-\alpha h} - e^{-\alpha h} \alpha h \\ &= \alpha h + o(h) - e^{-\alpha h} \alpha h \\ &= \alpha h(1 - e^{-\alpha h}) + o(h) \\ &= \alpha^2 h^2 + o(h) \alpha h + o(h) = o(h). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, genau einen Punkt eines Poisson-Prozesses innerhalb eines Intervalls der Länge h zu finden, ist für kleine h somit ungefähr proportional zu h mit Proportionalitätsfaktor α .

2.2. Laplace-Funktionale von Poisson-Prozessen

Das im letzten Kapitel eingeführte Laplace-Funktional liefert eine alternative Charakterisierung von Poisson-Prozessen, die sich beim Beweis von weiteren Eigenschaften als nützlich erweisen wird.

Lemma 2.2.1. *Man beachte im Folgenden, dass die Laplace-Transformierte L_X einer Poisson-verteilten Zufallsvariable X mit Parameter $\mu(A) \geq 0$ folgende Form für $\lambda > 0$ besitzt:*

$$\begin{aligned} L_X(\lambda) &= \mathbf{E}[e^{-\lambda X}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \frac{e^{-\mu(A)} (\mu(A))^k}{k!} \\ &= e^{-\mu(A)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{-\lambda} \mu(A))^k}{k!} = \exp(-(1 - e^{-\lambda})\mu(A)). \end{aligned}$$

2. Der Poisson-Prozess

Wegen der Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten ist umgekehrt jede Zufallsvariable X mit einer Laplace-Transformierten der obigen Form Poisson-verteilt mit Parameter $\mu(A)$.

Es ergibt sich damit das folgende Resultat:

Satz 2.2.2. *Die Verteilung eines $PZM(\mu)$ ist durch die Bedingungen (1) und (2) in der zugehörigen Definition eindeutig bestimmt. Ferner ist ein Punktprozess N ein $PZM(\mu)$ genau dann, wenn sein Laplace-Funktional folgende Form besitzt:*

$$\Psi_N(f) = \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right), \quad f \in \mathcal{B}_+. \quad (2.1)$$

Ein $PZM(\mu)$ kann also durch die charakteristische Form seines Laplace-Funktional identifiziert werden.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Bedingungen (1) und (2) ein Laplace-Funktional der Form (2.1) implizieren. Für $f = \lambda \mathbb{1}_A$ mit $\lambda > 0, A \in \mathcal{E}$ erhalten wir wegen $N(f) = \lambda N(A)$ und $N(A)$ als Poisson-Prozess mit Parameter $\mu(A)$:

$$\begin{aligned} \Psi_N(f) &= \mathbf{E} [e^{-\lambda N(A)}] \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.2.1}}{=} \exp \left(-(1 - e^{-\lambda}) \mu(A) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-\lambda}) \mathbb{1}_A(x) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-\lambda \mathbb{1}_A(x)}) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right) \quad (*_1), \end{aligned}$$

was der Form in (2.1) entspricht.

Als nächstes habe f die kompliziertere Gestalt

$$f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{A_i},$$

wobei $\lambda_i \geq 0, A_i \in \mathcal{E}$ für $1 \leq i \leq k$ und A_1, \dots, A_k paarweise disjunkt seien.

2. Der Poisson-Prozess

Dann ergibt sich mit der Unabhängigkeit der $N(A_i)$:

$$\begin{aligned}
 \Psi_N(f) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^k \lambda_i N(A_i) \right) \right] \\
 &= \mathbf{E} \left[\prod_{i=1}^k \exp(-\lambda_i N(A_i)) \right] \\
 &= \prod_{i=1}^k \mathbf{E} [\exp(-\lambda_i N(A_i))] \\
 &\stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^k \exp \left(- \int_E (1 - e^{-\lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x)}) \mu(dx) \right) \\
 &= \exp \left(- \int_E \sum_{i=1}^k (1 - e^{-\lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x)}) \mu(dx) \right).
 \end{aligned}$$

Wegen der Disjunktheit der A_i ist dabei $\sum_{i=1}^k (1 - e^{-\lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x)}) = 1 - e^{-\lambda_m}$, falls $x \in A_m$ für genau ein $1 \leq m \leq k$ gilt oder $\sum_{i=1}^k (1 - e^{-\lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x)}) = 0$ sonst. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
 \Psi_N(f) &= \exp \left(- \int_E \sum_{i=1}^k (1 - e^{-\lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x)}) \mu(dx) \right) \\
 &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x)}) \mu(dx) \right) \\
 &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right),
 \end{aligned}$$

was wiederum der Form (2.1) entspricht.

Für allgemeine $f \in \mathcal{B}_+$ nutzen wir die Existenz einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $0 \leq f_n(x) \uparrow f(x)$ gilt und alle $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_{i,n} \mathbb{1}_{A_{i,n}}$ einer der Formen entsprechen, die wir zuvor bereits berücksichtigt haben.

Der Satz von der monotonen Konvergenz (0.0.10) liefert uns dann

$$N(f_n) = \int_E f_n(x) N(dx) \uparrow \int_E f(x) N(dx) = N(f)$$

für alle ω . Mit $e^{-N(g)} \leq 1$ für alle $g \in \mathcal{B}_+$ erhalten wir somit mit dem Satz über dominierte Konvergenz:

$$\Psi_N(f) = \mathbf{E} [\exp(-N(f))] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\exp(-N(f_n))] = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f_n(x)}) \mu(dx) \right).$$

Aus $f_n \uparrow f$ folgt auch $1 - e^{-f_n} \uparrow 1 - e^{-f}$, sodass uns ein erneutes Anwenden des Satzes

2. Der Poisson-Prozess

von der Monotonen Konvergenz sowie die Stetigkeit von e^{-t} liefert, dass

$$\begin{aligned}\Psi_N(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f_n(x)}) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (1 - e^{-f_n(x)}) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right),\end{aligned}$$

womit die erste Behauptung folgt.

Sei umgekehrt N ein Punktprozess, der ein Laplace-Funktional der Form (2.1) für ein Maß μ besitzt. Für $f = \lambda \mathbb{1}_A$ mit $\lambda \geq 0$, $A \in \mathcal{E}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned}L_{N(A)}(\lambda) &= \mathbf{E} [e^{-\lambda N(A)}] = \mathbf{E} [e^{-N(f)}] = \Psi_N(f) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right) = \exp \left(-(1 - e^{-\lambda}) \mu(A) \right),\end{aligned}$$

womit $N(A)$ wegen der Eindeutigkeit von Laplace-Transformierten Poisson-verteilt mit Parameter $\mu(A)$ sein muss.

Ähnlich erhält man für $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit $\lambda_i \geq 0$ und disjunkte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, dass

$$\begin{aligned}L_{(N(A_1), \dots, N(A_k))}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) &= \mathbf{E} [e^{-\sum_{i=1}^k \lambda_i N(A_i)}] = \mathbf{E} [e^{-N(f)}] = \Psi_N(f) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}}) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E \sum_{i=1}^k (1 - e^{-\lambda_i \mathbb{1}_{A_i}}) \mu(dx) \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \exp \left(- \int_E (1 - e^{-\lambda_i \mathbb{1}_{A_i}}) \mu(dx) \right) \\ &= \prod_{i=1}^k L_{N(A_i)}(\lambda_i).\end{aligned}$$

Da die Laplace-Transformierte eines Zufallsvektors $X = (X_1, \dots, X_k) \in \mathbb{R}_+^k$ eindeutig seine Verteilung bestimmt, folgt insbesondere, dass

$$L_{(N(A_1), \dots, N(A_k))}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \mathbf{E} \left[\prod_{i=1}^k e^{-\lambda_i N(A_i)} \right] = \prod_{i=1}^k \mathbf{E} [e^{-\lambda_i N(A_i)}] = \prod_{i=1}^k L_{N(A_i)}(\lambda_i)$$

dann und nur dann gilt, wenn seine Komponenten $N(A_i)$ unabhängig sind. N erfüllt somit die Bedingungen (1) und (2) in Definition (2.1.1) und ist damit ein $PZM(\mu)$. \square

2.3. Allgemeine Konstruktion von Poisson-Prozessen

Obwohl nun bereits zwei äquivalente Definitionen von Poisson-Prozessen gegeben wurden, sichern diese natürlich nicht ab, dass solche Prozesse überhaupt existieren. Eine konstruktive Lösung für dieses Problem liefert der folgende Satz:

Satz 2.3.1. *Für jedes auf beschränkten Mengen endliche Maß μ auf E existiert ein zugehöriger Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ .*

Beweis. Für den Fall $\mu = 0$ ist trivialerweise $N = 0$ ein entsprechender Poisson-Prozess. Sei also ohne Einschränkung $\mu(E) \neq 0$.

Zu Beginn nehmen wir an, dass μ endlich ist, d.h. $\mu(E) < \infty$, und definieren durch Skalierung von μ das Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu := \mu/\mu(E)$. Sei dann $\{X_n, n \geq 1\}$ eine u.i.v. Folge von Zufallsvariablen in E mit gleicher Verteilung ν , also $\mathbf{P}[X_i \in A] = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{E}$. Ferner sei M unabhängig von $\{X_n\}$ und Poisson-verteilt mit Parameter $\mu(E)$. Wir definieren dann

$$N := \begin{cases} \sum_{i=1}^M \varepsilon_{X_i}, & \text{falls } M \geq 1 \\ 0, & \text{falls } M = 0 \end{cases},$$

und behaupten, dass N ein $PZM(\mu)$ ist.

Nach Lemma (1.1.4) ist N ein Punktprozess und für $f \in \mathcal{B}_+$ gilt wegen der Unabhängigkeit der X_n von M für das Laplace-Funktional:

$$\begin{aligned} \Psi_N(f) &= \mathbf{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^M f(X_i)} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^j f(X_i)} \right] \mathbf{P}[M = j]. \end{aligned}$$

Für u.i.v. X_n sind nach Lemma (0.0.6) auch die $f(X_n)$ u.i.v., womit folgt:

$$\begin{aligned} \Psi_N(f) &= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{E} [e^{-f(X_1)}])^j \mathbf{P}[M = j] \\ &= e^{-\mu(E)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{E} [e^{-f(X_1)}] \mu(E))^j}{j!} \\ &= \exp(\mu(E) (\mathbf{E} [e^{-f(X_1)}] - 1)) \\ &= \exp \left(-\mu(E) \left(\int_E (1 - e^{-f(x)}) \frac{\mu(dx)}{\mu(E)} \right) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right). \end{aligned}$$

Wegen der charakteristischen Form des Laplace-Funktionalen ist somit N ein $PZM(\mu)$. Falls die Bedingung $\mu(E) < \infty$ nicht erfüllt ist, existiert wegen der Endlichkeit von μ auf beschränkten Mengen eine Zerlegung von E in disjunkte, beschränkte Mengen

2. Der Poisson-Prozess

$(E_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}$, sodass $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ ist mit $\mu(E_i) < \infty$ für jedes i einer Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$ (wähle z.B. für die Metrik d die Bälle $B_n := \{x \in E : d(x, a) < n\}$ für $a \in E \subset \mathbb{R}^d$ und dann $E_1 = B_1, E_n = B_n \setminus B_{n-1}$ für $n \geq 2$). Ohne Einschränkung sei hier $I = \mathbb{N}$ (falls nicht, wähle $E_j = \emptyset$ für $j \in \mathbb{N} \setminus I$).

Für das endliche Maß $\mu_i(\cdot) = \mu(\cdot \cap E_i)$ sei dann N_i ein $PZM(\mu_i)$ auf E , welcher durch die zuvor beschriebene Konstruktion gebildet werden kann. Ferner seien wie in Satz (0.0.7) die N_i so gewählt, dass $\{N_i, i \in \mathbb{N}\}$ unabhängig ist. Für $f \in \mathcal{B}_+$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Psi_N(f) &= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^{\infty} N_i(f) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^n N_i(f) \right) \right],\end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit mit $\sum_{i=1}^n N_i(f) \geq 0$, also $|\exp(-\sum_{i=1}^n N_i(f))| \leq 1$ aus dem Satz der dominierten Konvergenz folgt. Die Unabhängigkeit der Poisson-Prozesse N_i liefert dann

$$\begin{aligned}\Psi_N(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \mathbf{E} [\exp(-N_i(f))] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu_i(dx) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu_i(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (1 - e^{-f(x)}) \sum_{i=1}^n \mu_i(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx) \right).\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt wegen $1 - e^{-f(x)} \geq 1 - e^0 = 0$ aus Satz (0.0.11) und $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \mu$. Der Prozess $N := \sum_{i=1}^{\infty} N_i$ ist somit ein $PZM(\mu)$ und es folgt die Behauptung. \square

Man beachte, dass die obige Konstruktion von N zufällige Punkte in den Teilmengen E_i simuliert, die der Verteilung $\mu(dx)/\mu(E_i)$ folgen, wobei die Anzahl dieser Punkte in den E_i jeweils Poisson-verteilt mit Parameter $\mu(E_i)$ ist. Diese Konstruktionsmethode werden wir im nächsten Abschnitt benutzen, um eine weitere, wichtige Eigenschaft von Poisson-Prozessen zu zeigen.

2.4. Die Ordnungsstatistik-Eigenschaft

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, ergibt sich ein Konstruktions-Weg für einen homogenen Poisson-Prozess dadurch, auf beschränkten Mengen $A \in \mathcal{E}$ mit $|A| \neq 0$ anhand einer

2. Der Poisson-Prozess

Poissonverteilung eine zufällige Anzahl von u.i.v. Zufallsvariablen zu streuen, welche die Verteilung $\nu(\cdot) = |A|^{-1}|A \cap \cdot|$ besitzen, also gleichverteilt auf A sind. Unter der Bedingung, dass es in dem beschränkten Gebiet A genau n Punkte gibt, sind diese Punkte also so verteilt wie n u.i.v. gleichverteilte Zufallselemente auf A .

In diesem Abschnitt werden wir von dem Zustandsraum $E = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ausgehen und hierfür die vorangegangenen Überlegungen weiter ausführen. Zunächst benötigen wir dazu das Konzept der Ordnungsstatistik:

Definition 2.4.1 (Ordnungsstatistik). Seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ u.i.v. Zufallsvariablen mit der gleichen, stetigen Verteilungsfunktion F . Die **Ordnungsstatistik** $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ ist dann für $\omega \in \Omega$ definiert durch

$$\begin{aligned} X_{(1)}(\omega) &= \min\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \\ X_{(2)}(\omega) &= \text{zweitkleinstes Element aus } \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \\ &\vdots \\ X_{(n-1)}(\omega) &= \text{zweitgrößtes Element aus } \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \\ X_{(n)}(\omega) &= \max\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass wenn $F(x)$ als stetige Verteilungsfunktion angenommen wird, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_i = X_j \text{ für beliebige } i \neq j] &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}[X_i = X_j] \\ &\leq n^2 \max_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}[X_i = X_j] \\ &= n^2 \max_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}} d\mathbf{P}_{(X_i, X_j)}(x) \\ &= n^2 \max_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{t\}} d\mathbf{P}_{X_i}(s) \right) d\mathbf{P}_{X_j}(t) \\ &= n^2 \max_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{R}} 0 d\mathbf{P}_{X_j}(t) = 0, \end{aligned}$$

also Gleichheiten der verschiedenen X_i nur mit Wahrscheinlichkeit 0 auftreten. Es folgt somit fast sicher

$$X_{(1)} < \dots < X_{(n)},$$

weshalb wir Gleichheiten der X_i im Folgenden vernachlässigen werden.

Wir leiten jetzt die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken her, wobei F die Verteilungsfunktion einer Gleichverteilung auf $(0, t)$ sei.

Lemma 2.4.2. (a) Seien U_1, \dots, U_n unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen auf $(0, t)$ sowie $U_{(1)} < \dots < U_{(n)}$ die zugehörige Ordnungsstatistik. Dann ist die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistik gegeben durch:

$$f_{U_{(1)}, \dots, U_{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & \text{falls } 0 < u_1 < \dots < u_n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Der Poisson-Prozess

(b) Sei $\{E_n\}$ eine Folge unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter 1 sowie $\Gamma_n := E_1 + \dots + E_n$ für $n \geq 1$. Die gemeinsame Dichte von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ unter der Bedingung $\Gamma_{n+1} = t$ ist dann

$$f_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n | \Gamma_{n+1}=t}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & \text{falls } 0 < u_1 < \dots < u_n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist die bedingte Verteilung von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ gegeben $\Gamma_{n+1} = t$ identisch zu der der Ordnungsstatistik einer Gleichverteilung auf $(0, t)$.

Den zweiten Teil des Lemmas werden wir erst wieder im nächsten Abschnitt benötigen, wenn wir klären, weshalb eine erneuerungstheoretische Konstruktion mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten ebenfalls einen Poisson-Prozess liefert.

Beweis. **(a)** Sei Π die Menge der insgesamt $n!$ Permutationen der Zahlen $1, \dots, n$. Für jedes $\pi \in \Pi$ gilt dann auf der Menge $\{U_{\pi(1)} < \dots < U_{\pi(n)}\}$, dass

$$(U_{(1)}, \dots, U_{(n)}) = (U_{\pi(1)}, \dots, U_{\pi(n)}) .$$

Für jede beschränkte Funktion $g(u_1, \dots, u_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt somit

$$\mathbf{E} [g(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})] = \sum_{\pi \in \Pi} \mathbf{E} \left[g(U_{\pi(1)}, \dots, U_{\pi(n)}) \mathbf{1}_{\{U_{\pi(1)} < \dots < U_{\pi(n)}\}} \right] .$$

Da mit der unabhängigen, identischen Verteilung der U_i die gemeinsame Dichte von $(U_{\pi(1)}, \dots, U_{\pi(n)})$ unabhängig von der Reihenfolge der Komponenten ist, ergibt sich dies als

$$f_{U_{\pi(1)}, \dots, U_{\pi(n)}}(u_1, \dots, u_n) = f_{U_1, \dots, U_n}(u_1, \dots, u_n)$$

und wir erhalten mit der Gleichverteilung der U_i auf $(0, t)$, dass

$$f_{U_{\pi(1)}, \dots, U_{\pi(n)}}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} t^{-n}, & \text{falls } (u_1, \dots, u_n) \in [0, t]^n \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [g(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})] &= \sum_{\pi \in \Pi} \int_{\{0 < u_1 < \dots < u_n < t\}} g(u_1, \dots, u_n) t^{-n} du_1 \dots du_n \\ &= n! \int_{[0, t]^n} \mathbf{1}_{\{u_1 < \dots < u_n\}}(u_1, \dots, u_n) g(u_1, \dots, u_n) t^{-n} du_1 \dots du_n \\ &= \int_{[0, t]^n} g(u_1, \dots, u_n) \left(\frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{u_1 < \dots < u_n\}}(u_1, \dots, u_n) \right) du_1 \dots du_n . \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Dichte des Zufallsvektors $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ für $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ als

$$\frac{n!}{t^n} \mathbf{1}_{\{u_1 < \dots < u_n\}}(u_1, \dots, u_n),$$

2. Der Poisson-Prozess

was zu zeigen war.

(b) Da E_1, \dots, E_{n+1} unabhängig sind, ergibt sich die gemeinsame Dichte als

$$\begin{aligned} f_{E_1, \dots, E_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \prod_{i=1}^{n+1} e^{-x_i} \\ &= e^{-\sum_{i=1}^{n+1} x_i} \quad \text{für } x_i > 0, \quad 1 \leq i \leq n+1. \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer bijektiven, differenzierbaren Transformation der Variablen können wir damit auch die Dichte von $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+1})$ bestimmen. Für $i = 1, \dots, n+1$ definieren wir dazu

$$\begin{aligned} T : (0, \infty)^{n+1} &\rightarrow \{s \in (0, \infty)^{n+1} \mid s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1}\}, \\ T(x_1, \dots, x_{n+1}) &= (x_1, \dots, \sum_{j=1}^i x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} x_j), \end{aligned}$$

sodass sich als inverse Transformation T^{-1} ergibt

$$T^{-1}(s_1, \dots, s_{n+1}) = (s_1, s_2 - s_1, \dots, s_{n+1} - s_n).$$

Für die Jacobi-Matrix der inversen Transformation gilt somit

$$\left| \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial s_j} \right) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1^n = 1,$$

und es folgt für die gemeinsame Dichte von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+1}$ mit Satz (0.0.13):

$$f_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+1}}(s_1, \dots, s_{n+1}) = \frac{f(T^{-1}(s))}{|\det(T'(T^{-1}(s)))|} = e^{-s_{n+1}} \quad \text{für } 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1}.$$

Da Γ_{n+1} als Summe von $n+1$ unabhängigen, exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1 nach Lemma (0.0.23) die Gammadichte

$$f_{\Gamma_{n+1}}(t) = \frac{e^{-t} t^n}{n!}$$

für $t \geq 0$ besitzt, erhalten wir die bedingte Dichte von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ für gegebenes Γ_{n+1} nach Definition (0.0.20) per Division als

$$\begin{aligned} f_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n | \Gamma_{n+1}=t}(s_1, \dots, s_n) &= \frac{f_{\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n+1}}(s_1, \dots, s_n, t)}{f_{\Gamma_{n+1}}(t)} \\ &= \frac{n!}{t^n} \quad \text{für } 0 < s_1 < \dots < s_n < t. \end{aligned}$$

Die letzte Dichte entspricht dabei nach (a) der Dichte der Ordnungsstatistik von n unabhängigen, auf dem Intervall $(0, t)$ gleichverteilten Zufallsvariablen. \square

2. Der Poisson-Prozess

Wir zeigen nun, dass ein homogener Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ die **Ordnungsstatistik-Eigenschaft** besitzt.

Satz 2.4.3. *Ist N ein homogener Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit Rate $\alpha = 1$, dann sind unter der Bedingung*

$$N([0, t]) = n$$

die Punkte von N auf $[0, t]$ in aufsteigender Ordnung so verteilt wie die Ordnungsstatistik von n unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen U_i auf $[0, t]$, d.h.

$$(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \mid N([0, t]) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(n)}).$$

Ist also $g(x_1, \dots, x_n)$ eine nicht-negative, symmetrische Funktion – d.h., dass g für alle $\pi \in \Pi$ die Gleichung

$$g(x_1, \dots, x_n) = g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

erfüllt – dann gilt die folgende Gleichheit in Verteilung für die bedingte Verteilung von $g(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, gegeben dass genau n Punkte von N in $[0, t]$ liegen:

$$(g(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \mid N([0, t]) = n) \stackrel{d}{=} g(U_{(1)}, \dots, U_{(n)}) = g(U_1, \dots, U_n). \quad (2.2)$$

Beweis. Sei $N' = N(\cdot \cap [0, t])$ die Einschränkung von N auf die beschränkte Menge $[0, t]$. Da N' weiterhin die Bedingungen (1) und (2) für das Maß $\mu = |\cdot \cap [0, t]|$ erfüllt, ist N' ein $PZM(\mu)$. Aus den allgemeinen Konstruktionsüberlegungen für Poisson-Prozesse und der Eindeutigkeit aus Satz (2.2.2) wissen wir, dass für die Zufallselemente N' und $\sum_{i=1}^{\tau} \varepsilon_{U_i}$ auf $M_p([0, t])$ gilt, dass

$$N' \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\tau} \varepsilon_{U_i},$$

wobei $\{U_i\}$ unabhängige, gleichverteilte Zufallselemente auf $[0, t]$ seien und τ unabhängig von $\{U_i\}$ sowie Poisson-verteilt mit Parameter t sei. Sind $\{\Gamma_k, k \geq 1\}$ die Punkte von N mit $\Gamma_1 \leq \Gamma_2 \leq \dots \leq \Gamma_n$, so folgt (siehe dazu Bemerkung (A.0.1) im Anhang):

$$(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \mid N([0, t]) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(n)} \mid \tau = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(n)}).$$

□

Beispiel 2.4.4 (Schrotrauschen). Als Schrotrauschen bezeichnen wir Prozesse, die durch Überlagerung von u.i.v. Impulsen entstehen. Man nehme an, die Ankunft von Elektronen an einer Barriere sei durch einen homogenen Poisson-Prozesses N auf $(0, \infty)$ mit Rate α beschrieben. Ein ankommendes Elektron erzeugt beim Durchdringen der Barriere einen elektrischen Strom, dessen Intensität $t > 0$ Zeiteinheiten nach der Ankunft des Elektrons noch $w(t)$ beträgt. Eine typische Wahl für die Funktion w ist dabei eine Exponentialfunktion der Form

$$w(t) = \exp(-\theta t) \quad \text{mit } \theta > 0.$$

2. Der Poisson-Prozess

Wenn die Ankünfte der Elektronen zu den Zeitpunkten $\{\Gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ erfolgen, ergibt sich der Gesamtstrom zum Zeitpunkt $t > 0$ als

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N((0,t])} w(t - \Gamma_i).$$

Wir können nun die Ordnungsstatistikeigenschaft benutzen, um die Verteilung von $X(t)$ für jedes feste t zu bestimmen. Die Laplace-Transformierte zu $X(t) \geq 0$ lautet dabei für $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} L_{X(t)}(\lambda) &= \mathbf{E}[\exp(-\lambda X(t))] = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{N((0,t])} w(t - \Gamma_i)\right)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n w(t - \Gamma_i)\right) \middle| N((0,t]) = n\right] \mathbf{P}[N((0,t]) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n w(t - U_{(i)})\right)\right] \mathbf{P}[N((0,t]) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n w(t - U_i)\right)\right] \mathbf{P}[N((0,t]) = n], \end{aligned}$$

wobei die Gleichung (2.2) zweimal für die symmetrische Funktion $\exp(\sum_{i=1}^n w(x_i))$ benutzt wurde und die U_i jeweils unabhängige, auf $(0, t]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind.

Sei nun U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Dann gilt für $s \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[U \leq s] &= s = 1 - (1 - s) = \mathbf{P}[U > 1 - s] = \mathbf{P}[1 - U \leq s], \\ \mathbf{P}[tU \leq ts] &= \mathbf{P}[U \leq s] = s = \mathbf{P}[U_1 \leq ts], \end{aligned}$$

und für $A \in \{U, 1 - U\}$ und $B \in \{tU, U_1\}$, dass $\mathbf{P}[A \leq 1] = \mathbf{P}[B \leq t] = 1$, $\mathbf{P}[A \leq 0] = \mathbf{P}[B \leq 0] = 0$. Somit ist $U \stackrel{d}{=} 1 - U$ und $tU \stackrel{d}{=} U_1$, also $t - U_1 \stackrel{d}{=} t - tU = t(1 - U) \stackrel{d}{=} tU$ und wir können die obigen Laplace-Transformierten mit der Unabhängigkeit der U_i umformen zu:

$$\begin{aligned} L_{X(t)}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{E}[\exp(-\lambda w(t - tU))]^n \mathbf{P}[N([0, t]) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{E}[\exp(-\lambda w(tU))]^n \mathbf{P}[N([0, t]) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{E}[\exp(-\lambda w(tU))]^n \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!} \\ &= \exp(\alpha t (\mathbf{E}[e^{-\lambda w(tU)}] - 1)) \\ &= \exp\left(\alpha t \int (e^{-\lambda w(tu)} - 1) du\right). \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformierte eines Schrotrauschens wie oben beschrieben lautet also

$$\mathbf{E} [\exp (-\lambda X(t))] = \exp \left(\alpha t \int (e^{-\lambda w(tu)} - 1) du \right). \quad (2.3)$$

2.5. Poisson-Prozesse als Erneuerungsprozesse

Alternativ zu der zu Beginn des Kapitels angegebenen Definition werden homogene Poisson-Prozesse auf $[0, \infty)$ oft als Punktprozesse auf $[0, \infty)$ eingeführt, deren Abstände zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten unabhängig exponentialverteilt mit Parameter $\alpha > 0$ sind. Solche Punktprozesse stellen eine spezielle Form von **Erneuerungsprozessen** dar. Es muss also geprüft werden, ob diese beiden Definitionen verträglich sind, was für den Fall $\alpha = 1$ durch folgenden Satz geschieht:

Satz 2.5.1. *Sei $\{E_j, j \geq 1\}$ eine abzählbar unendliche Folge unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter 1. Wir definieren dann $\Gamma_n = \sum_{i=1}^n E_i$ und setzen $N = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n}$. Dann ist N ein homogener Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit dem Lebesgue-Maß $\mu(\cdot) = |\cdot|$ als Intensitätsmaß.*

Beweis. Wir zeigen, dass das Laplace-Funktional von $N = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n}$ die Form (2.1) besitzt mit $E = [0, \infty)$ und $\mu(\cdot) = |\cdot|$.

Für $f \in \mathcal{B}_+$ gilt mit dem Satz von der Dominierten Konvergenz, dass

$$\Psi_N(f) = \mathbf{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^{\infty} f(\Gamma_i)} \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^m f(\Gamma_i)} \right].$$

Der Satz vom totalen Erwartungswert (0.0.17) liefert uns durch Bedingen nach dem Wert von Γ_{m+1} , dass

$$\Psi_N(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \mathbf{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^m f(\Gamma_i)} \middle| \Gamma_{m+1} = s \right] d\mathbf{P}_{\Gamma_{m+1}}(s). \quad (2.4)$$

Wir wissen aus Lemma (2.4.2)(b) und den Überlegungen in Beispiel (2.4.4), dass falls U_1, \dots, U_m unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen auf $(0, 1)$ sind, sowie $U_{(1)}, \dots, U_{(m)}$ die zugehörige Ordnungsstatistik in aufsteigender Reihenfolge ist, sich die bedingte Verteilung der Γ_n ergibt als

$$(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m | \Gamma_{m+1} = s) \stackrel{d}{=} (sU_{(1)}, \dots, sU_{(m)}).$$

Somit folgt aus Symmetrie der Funktion $\sum_{i=1}^m f(x_i)$ für $m \in \mathbb{N}$, dass

$$\left(\sum_{i=1}^m f(\Gamma_i) \middle| \Gamma_{m+1} = s \right) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^m f(sU_{(i)}) \right) = \left(\sum_{i=1}^m f(sU_i) \right).$$

2. Der Poisson-Prozess

Nun sind wir in der Lage, das Laplace-Funktional von N zu berechnen. Die obige Gleichung (2.4) formen wir dazu um als:

$$\begin{aligned}
 \Psi_N(f) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty \mathbf{E} \left[e^{-\sum_{i=1}^m f(sU_i)} \right] d\mathbf{P}_{\Gamma_{m+1}}(s) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty (\mathbf{E} [e^{-f(sU_1)}])^m d\mathbf{P}_{\Gamma_{m+1}}(s) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-f(x)} \frac{dx}{s} \right)^m d\mathbf{P}_{\Gamma_{m+1}}(s) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\left(\int_0^{\Gamma_{m+1}} e^{-f(x)} \frac{dx}{\Gamma_{m+1}} \right)^m \right] \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\left(1 - \frac{\int_0^{\Gamma_{m+1}} (1 - e^{-f(x)}) dx}{\Gamma_{m+1}} \right)^m \right]
 \end{aligned}$$

Hierbei nutzt die zweite Gleichheit die Unabhängigkeit der $e^{-f(sU_i)}$ nach Lemma (0.0.6) aus. Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen erhalten wir $\Gamma_{m+1}/m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_i \rightarrow \mathbf{E}[E_1] = 1$ für $m \rightarrow \infty$ fast sicher und damit insbesondere $\Gamma_{m+1} = \frac{\Gamma_{m+1}}{m} m \rightarrow \infty$ für $m \rightarrow \infty$ fast sicher. Es gilt also $\frac{m}{\Gamma_{m+1}} \int_0^{\Gamma_{m+1}} (1 - e^{-f(x)}) dx \rightarrow \int_0^\infty (1 - e^{-f(x)}) dx$ für $m \rightarrow \infty$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 I_m &:= \left(1 - \frac{\int_0^{\Gamma_{m+1}} (1 - e^{-f(x)}) dx}{\Gamma_{m+1}} \right)^m = \left(1 - \frac{\frac{m}{\Gamma_{m+1}} \int_0^{\Gamma_{m+1}} (1 - e^{-f(x)}) dx}{m} \right)^m \\
 &\rightarrow \exp \left(- \int_0^\infty (1 - e^{-f(x)}) dx \right) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Der Satz von der Dominierten Konvergenz liefert schließlich mit

$$0 = \left(1 - \frac{\int_0^{\Gamma_{m+1}} 1 dx}{\Gamma_{m+1}} \right)^m \leq I_m \leq \left(1 - \frac{0}{\Gamma_{m+1}} \right)^m = 1$$

die Behauptung

$$\begin{aligned}
 \Psi_N(f) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}[I_m] = \mathbf{E} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} I_m \right] \\
 &= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_0^\infty (1 - e^{-f(x)}) dx \right) \right] = \exp \left(- \int_0^\infty (1 - e^{-f(x)}) dx \right).
 \end{aligned}$$

□

Für den allgemeinen Fall $\alpha > 0$ beachte man, dass für $\{E_j, j \geq 1\}$ wie im obigen Satz die Zufallsvariablen $\{\alpha^{-1}E_j, j \geq 1\}$ ebenfalls unabhängig und exponentialverteilt zum Parameter α sind. Das folgende Kapitel liefert uns als Resultat, dass der Punktprozess $N_\alpha := \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_{\alpha^{-1}\Gamma_n}$ mit den Punkten $\alpha^{-1}\Gamma_n = \sum_{i=1}^n \alpha^{-1}E_i$ dann ebenfalls einen homogenen Poisson-Prozess mit Rate α , d.h. mit dem Intensitätsmaß

$$\mu'(A) = |\{x \in [0, \infty) : \alpha^{-1}x \in A\}| = |\alpha A| = \alpha|A|$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ bildet.

3. Transformation von Poisson-Prozessen

3.1. Transformation von Poisson-Prozessen

Viele interessante Eigenschaften von Poisson-Prozessen ergeben sich aus Überlegungen, was mit Poisson-Prozessen unter verschiedenen Arten von Transformationen passiert. Die erste Erkenntnis, die sich gewinnen lässt, ist zwar elementar, jedoch sehr hilfreich für das Verständnis von Homogenität. Als Vorbereitung nehmen wir an, dass $\sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}$ ein Poisson-Prozess mit Zustandsraum E und Intensitätsmaß μ auf (E, \mathcal{E}) sei. Sei nun T eine beliebige, messbare Abbildung mit Definitionsbereich E und Wertebereich E' , wobei E' ein weiterer metrischer Raum mit zugehöriger Borelscher σ -Algebra $\mathcal{E}' := \mathcal{B}(E')$ sei, also

$$T : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (E', \mathcal{E}').$$

Die Urbildabbildung T^{-1} definiert dann wegen der Messbarkeit von T eine Mengenabbildung von Mengen in \mathcal{E}' in die Mengen in \mathcal{E} als

$$T^{-1}(A') := \{e \in E : T(e) \in A'\}, \quad \text{für } A' \in \mathcal{E}'.$$

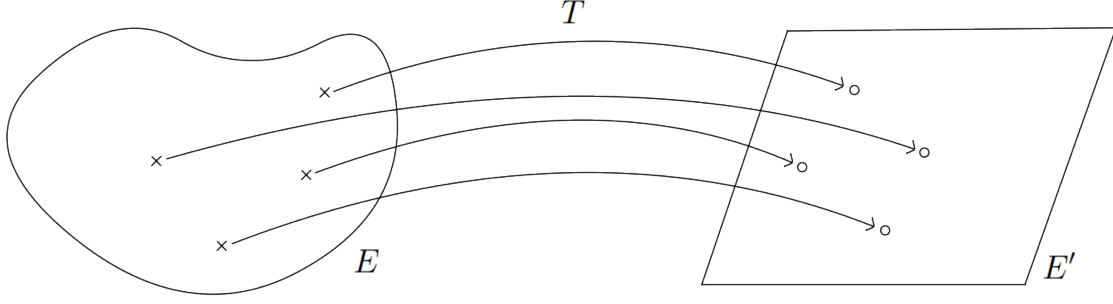
Sind die Maße N, μ auf den Teilmengen von E gegeben, können wir T benutzen, um die induzierten Maße N', μ' auf den Teilmengen von E' zu definieren. Für $A' \in \mathcal{E}'$ definieren wir dazu

$$N'(A') = N(T^{-1}(A')), \quad \mu'(A') = \mu(T^{-1}(A')).$$

Um also das Maß von A' zu erhalten, bilden wir A' zurück nach E ab und benutzen das Maß des Urbilds von A' unter T . Analog – falls N die Punkte $\{X_n\}$ besitzt – hat N' die Punkte $\{X'_n\} = \{T(X_n)\}$, da für $A' \in \mathcal{E}'$ gilt

$$\begin{aligned} N'(A') &= N(T^{-1}(A')) = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}(T^{-1}(A')) \\ &= \sum_{n=1}^M \mathbb{1}_{[X_n \in T^{-1}(A')]} = \sum_{n=1}^M \mathbb{1}_{[T(X_n) \in A']} = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{T(X_n)}(A'). \end{aligned}$$

3. Transformation von Poisson-Prozessen



Transformation der Punkte von N unter T

Aus diesen Überlegungen erhalten wir, dass falls N die Darstellung

$$N = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n},$$

hat, folgt dass

$$N' = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{T(X_n)}.$$

Der folgende Satz sagt uns somit, dass durch bestimmte Transformationen der Punkte eines Poisson-Prozesses immer neue Poisson-Prozesse entstehen.

Satz 3.1.1. *Sei*

$$T : (E, \mathcal{E}) \rightarrow (E', \mathcal{E}')$$

eine messbare Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen E, E' mit der Eigenschaft, dass falls $B' \in \mathcal{E}'$ in E' beschränkt ist, auch $T^{-1}(B') := \{e \in E : T(e) \in B'\} \in \mathcal{E}$ in E beschränkt ist. Ist N ein PZM(μ) auf E mit den Punkten $\{X_n\}$, dann ist auch $N' := N \circ T^{-1}$ ein PZM(μ') auf E' mit den Punkten $\{T(X_n)\}$ und dem Intensitätsmaß $\mu' := \mu \circ T^{-1}$.

Beweis. Wir weisen die Bedingungen für einen Poisson-Prozess aus Definition (2.1.1) nach. Mit μ als Intensitätsmaß eines Poisson-Prozesses und der Voraussetzung, dass die Urbilder von beschränkten Mengen unter T wieder beschränkt sind, ist $\mu'(B') = \mu \circ T^{-1}(B')$ für beschränkte $B' \in \mathcal{E}'$ endlich. Ferner gilt für $B' \in \mathcal{E}'$ sowie $k \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\mathbf{P}[N'(B') = k] = \mathbf{P}[N(T^{-1}(B')) = k] = \begin{cases} \frac{e^{-\mu(T^{-1}(B'))} (\mu(T^{-1}(B')))^k}{k!}, & \text{falls } \mu(T^{-1}(B')) < \infty, \\ 0, & \text{falls } \mu(T^{-1}(B')) = \infty, \end{cases}$$

womit $N(B')$ Poisson-verteilt mit Parameter $\mu \circ T^{-1}(B') = \mu'(B')$ ist. Die Unabhängigkeits-Eigenschaft ergibt sich dadurch, dass für disjunkte B'_1, \dots, B'_m auch $T^{-1}(B'_1), \dots, T^{-1}(B'_m)$ disjunkt sind, womit der Zufallsvektor

$$(N'(B'_1), \dots, N'(B'_m)) = (N(T^{-1}(B'_1)), \dots, N(T^{-1}(B'_m)))$$

3. Transformation von Poisson-Prozessen

unabhängige Komponenten besitzt, da N ein Poisson-Prozess war. Somit sind die Bedingungen (1), (2) in Definition (2.1.1) erfüllt, also N' ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\mu' = \mu \circ T^{-1}$. \square

Beispiel 3.1.2. Für die folgenden Beispiele (1) und (3) sei $N = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate $\alpha = 1$ auf dem Zustandsraum $E = [0, \infty)$. Das Intensitätsmaß μ sei also das Lebesgue-Maß, sodass $\mu(A) = |A|$ und insbesondere $\mu([0, t]) = t$ für $A \in \mathcal{E}, t \geq 0$ gilt. Man erinnere sich, dass wir – wie in Satz (2.5.1) gezeigt – einen solchen Poisson-Prozess immer durch Summation von unabhängigen, exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1 erhalten können.

1. Für $T : E \rightarrow E \times E, T(x) = (x, x^2)$ ergibt sich der Poisson-Prozess $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{T(\Gamma_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{(\Gamma_n, \Gamma_n^2)}$ auf $E \times E$. Das zugehörige Intensitätsmaß ist dann auf Mengen außerhalb des Graphen $\{(x, x^2) : x \geq 0\}$ stets 0.
2. N sei ein homogener Poisson-Prozess auf $E = (-\infty, \infty)$ mit Rate $\alpha = 1$ und $T : E \rightarrow (0, \infty)$ sei definiert durch $T(x) = e^x$. Dann ist $N' = N(T^{-1}(\cdot))$ ein Poisson-Prozess auf $(0, \infty)$ mit Intensitätsmaß μ' , dass für $0 < a < b$ gegeben ist durch:

$$\mu'(a, b] = \mu(\{x : e^x \in (a, b]\}) = \log b - \log a.$$

μ' besitzt somit die Lebesgue-Dichte

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt} \log(t) = \frac{1}{t}, \text{ für } t > 0.$$

3. Für den homogenen Poisson-Prozess N auf $[0, \infty)$ ist $N' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n^{-1}}$ ein Poisson-Prozess auf $(0, \infty]$, wobei wir $1/0 := \infty$ und $1/\infty := 0$ definieren. N' besitzt dann das Intensitätsmaß μ' , welches für $t > 0$ gegeben ist als

$$\mu'((t, \infty]) = \mu(\{s \geq 0 : s^{-1} \geq t\}) = \mu([0, t^{-1}]) = t^{-1} = (-\infty^{-1}) - (-t^{-1}).$$

μ' hat somit die Lebesgue-Dichte

$$\alpha(t) = -\frac{d}{dt} t^{-1} = t^{-2}.$$

Man beachte, dass die Dichte für $t \rightarrow 0$ beliebig groß wird. Wir wissen über Punktprozesse, dass beschränkte Teilgebiete von $E' = (0, \infty]$ nur eine endliche Anzahl von Punkten beinhalten dürfen. Damit darf aber das Intervall $(0, 1]$ in E' nicht beschränkt sein, da es eine unendliche Anzahl von Punkten $\{\Gamma_n^{-1}, n \geq 1\}$ enthält. Dies folgt daraus, dass das Urbild-Intervall $[1, \infty)$ mit $\mu([1, \infty)) = |[1, \infty)| = \infty$ fast sicher eine unendliche Anzahl von Punkten $\{\Gamma_n, n \geq 1\}$ enthält. In E' dürfen genauer die beschränkten Mengen nur jene Mengen sein, die keine beliebig kleinen Zahlen größer 0 beinhalten. Die Transformation von E nach E' vertauscht also in diesem Fall essentiell die Rollen von 0 und ∞ . Der Abstandsbegriff zweier Zahlen in E' kann aber so angepasst werden, dass diese Besonderheit kein Problem darstellt, beispielsweise durch Wahl der Metrik d' , die für $e'_1, e'_2 \in E'$ definiert ist durch

$$d'(e'_1, e'_2) = \left| \frac{1}{e'_1} - \frac{1}{e'_2} \right|.$$

3.2. Inhomogene Poisson-Prozesse

Definition 3.2.1 (Inhomogene Poisson-Prozesse). *Sei N ein Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit Intensitätsmaß μ , wobei μ absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes ist – das heißt, jede Lebesgue-Nullmenge auch eine Nullmenge bezüglich μ ist – und die Lebesgue-Dichte $\alpha(t)$ für $t \geq 0$ besitzt. Wir nennen N dann einen **inhomogenen Poisson-Prozess mit lokaler Intensität** $\alpha(t)$.*

Solche Prozesse können durch Transformation von homogenen Poisson-Prozessen gewonnen werden. Dazu definieren wir

$$m(t) := \mu([0, t]) = \int_0^t \alpha(s) ds,$$

für $t \geq 0$ sowie die zugehörige verallgemeinerte Inverse

$$m^{\leftarrow}(x) = \inf\{u : m(u) \geq x\}.$$

Es ist dabei m^{\leftarrow} unter der Annahme $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$ wohldefiniert, streng monoton wachsend, stetig und die Urbilder von m^{\leftarrow} bezüglich beschränkten Mengen in \mathcal{E} sind stets beschränkt (siehe dazu Bemerkung (A.0.2) im Anhang). Ist also $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate 1, so ist nach Satz (3.1.1) mit der Abbildung m^{\leftarrow} auch

$$N' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m^{\leftarrow}(\Gamma_n)}$$

ein Poisson-Prozess. Das zugehörige Intensitätsmaß ist dann (mit $|A|$ als Lebesguemaß von $A \in \mathcal{E}$):

$$\begin{aligned} \mu'([0, t]) &= |\{x : m^{\leftarrow}(x) \leq t\}| \\ &= |\{x : x \leq m(t)\}| = |[0, m(t)]| \\ &= m(t) = \mu([0, t]). \end{aligned}$$

Wir haben somit ein $PZM(\mu)$ aus einem homogenen Poisson-Prozess generiert. Ist umgekehrt $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{X_n}$ ein $PZM(\mu)$ auf $[0, \infty)$ mit den Punkten $\{X_n\}$, dann gilt wegen der Eindeutigkeit aus Satz (2.2.2), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{X_n} \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m^{\leftarrow}(\Gamma_n)}$$

und somit durch erneutes Anwenden des Transformationssatzes für Poisson-Prozesse für die stetige Funktion m , dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m(X_n)} \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m(m^{\leftarrow}(\Gamma_n))} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n},$$

3. Transformation von Poisson-Prozessen

da $m(m^{\leftarrow}(x)) = m(\inf\{u : m(u) \geq x\}) = x$. Die Prozesse $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m(X_n)}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n}$ haben also die gleiche Verteilung, womit $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m(X_n)}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Rate 1 ist.

Sei nun N ein inhomogener Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ und lokaler Intensität $\alpha(t)$ für $t \geq 0$. Dann ist für jede Stetigkeitsstelle $t > 0$ von α die Funktion $f(h) := \mu((t, t+h]) = \int_t^{t+h} \alpha(u) du$ in 0 differenzierbar, sodass

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}[N((t, t+h]) = 1]}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu((t, t+h]) e^{-\mu((t, t+h])} - 0}{h - 0} \\ &= (f(x) e^{-f(x)})'(0) \\ &= f'(0) e^{-f(0)} - f(0) f'(0) e^{-f(0)} \\ &= \alpha(t) \end{aligned}$$

gilt, wobei $f(0) = \mu(\emptyset) = 0$ ist und $f'(0) = \left(\int_t^{t+h} \alpha(u) du \right)'(0) = \alpha(t+0) = \alpha(t)$ nach dem Hauptsatz der Analysis gilt. Somit ist

$$\mathbf{P}[N((t, t+h]) = 1] = \alpha(t)h + o(h).$$

Ähnlich zum homogenen Fall ist also die Wahrscheinlichkeit, in einer kleinen, rechten Umgebung von t genau einen Punkt zu finden ungefähr proportional zur Größe dieser Umgebung. Der Proportionalitätsfaktor entspricht dabei der lokalen Intensität $\alpha(t)$.

3.3. Markierung und Ausdünnung von Poisson-Prozessen

Für Poisson-Prozesse ist es unter gewissen Voraussetzungen möglich, die Dimension der zugehörigen Punkte zu erhöhen, ohne dabei die strukturellen Eigenschaften von Poisson-Prozessen zu verlieren. Eine Möglichkeit, dies zu tun, wurde bereits durch das zweite Beispiel in (3.1.2) gegeben. Dieses hatte jedoch nur eine scheinbare Vergrößerung der Dimension zur Folge, da sich die Punkte des neuen Poisson-Prozesses lediglich auf den Graphen $\{(x, x^2) : x > 0\}$, also auf eine eindimensionale Menge konzentrierten. Der folgende Satz wird es hingegen erlauben, den Punkten von Poisson-Prozessen unabhängige Komponenten hinzuzufügen.

Satz 3.3.1. *Seien $\{X_n\}$ Zufallselemente eines metrischen Raums (E_1, \mathcal{E}_1) , sodass*

$$\sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}$$

*ein PZM(μ) ist. Sei außerdem (E_2, \mathcal{E}_2) ein zweiter metrischer Raum sowie $K : E_1 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, 1]$ ein zugehöriger **Markov-Kern**, d.h. $K(\cdot, A_2)$ eine messbare Funktion in der*

3. Transformation von Poisson-Prozessen

ersten Variable für jedes feste $A_2 \in \mathcal{E}_2$ sowie für jedes $x \in E_1$ die Abbildung $K(x, \cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{E}_2 . Seien $\{J_n\}$ E_2 -wertige Zufallselemente, die für gegebene $\{X_n\}$ bedingt unabhängig sind mit

$$\mathbf{P}[J_i \in A_2 \mid X_i = x, M, \{X_j, j \neq i\}, \{J_j, j \neq i\}] = K(x, A_2). \quad (3.1)$$

Dann ist der Punktprozess

$$N^* := \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, J_n)}$$

ein PZM auf $E_1 \times E_2$ mit Intensitätsmaß

$$\mu^*(dx, dy) = \mu(dx)K(x, dy).$$

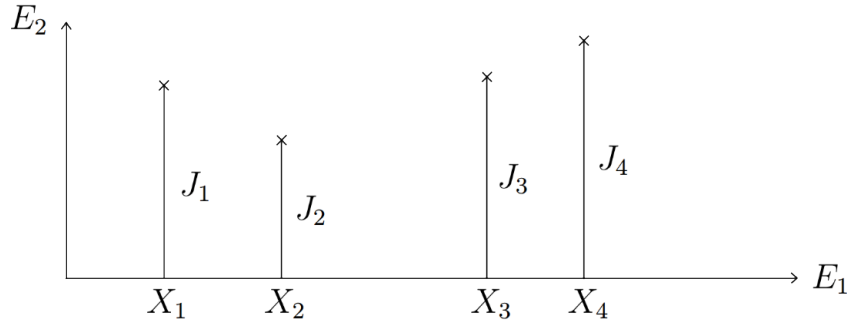
Einen Spezialfall des Satzes erhalten wir, falls die J_n die gleiche Verteilung F besitzen, unabhängig untereinander, von den X_i und von M sind. Dann können wir K für $x \in E_1, A_2 \in \mathcal{E}_2$ durch

$$K(x, A_2) := \mathbf{P}[J_i \in A_2 \mid X_i = x, M, \{X_j, j \neq i\}, \{J_j, j \neq i\}] = \mathbf{P}[J_i \in A_2] = F(A_2)$$

definieren und erhalten wegen $K(x, \cdot) = F(\cdot), K(\cdot, A_2) \equiv F(A_2)$ einen Markov-Kern. $N^* := \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, J_n)}$ ist somit ein Poisson-Prozess mit dem Intensitätsmaß

$$\mu^*(dx, dy) = \mu(dx)K(x, dy) = \mu(dx)F(dy) = \mu \times F(dx, dy).$$

Um die obige Vergrößerung der Punktdimension zu beschreiben, sagt man oft, dass dem Punkt X_n die **Marke** J_n gegeben wird. Die folgende Abbildung stellt diese Art der Konstruktion dar. Die Punkte des ursprünglichen Poissonprozesses $\{X_n\}$ werden dabei auf der horizontalen Achse, die markierten Punkte in der $E_1 \times E_2$ Ebene notiert.



Markierung der Punkte X_n durch Hinzufügen der Komponenten J_n

Für den Beweis des vorangegangenen Satzes benötigen wir zunächst zwei Lemmata. Die zugehörigen Beweise sind zwar elementar, jedoch lang und werden hier weggelassen. Sie finden sich jedoch als Beweise von Lemma 2 und 6 in ausführlicher Form in [Fin96].

3. Transformation von Poisson-Prozessen

Lemma 3.3.2. Sei $f : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, \infty)$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt für alle i fast sicher

$$\mathbf{E}[f(X_i, J_i) \mid \{X_n\}, M] = \int_{E_2} f(X_i, y) K(X_i, dy). \quad (3.2)$$

Lemma 3.3.3. Für $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -messbares $g : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, 1]$ gilt für alle i und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ fast sicher

$$\mathbf{E} \left[\prod_{i=1}^r g(X_i, J_i) \mid \{X_n\}, M \right] = \prod_{i=1}^r \mathbf{E}[g(X_i, J_i) \mid \{X_n\}, M]. \quad (3.3)$$

Wir können nun zum ursprünglichen Satz zurückkehren:

Beweis von Satz 3.3.1. Wir zeigen die Behauptung mit Hilfe des Laplace-Funktional. Zunächst bemerken wir, dass mit $M \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ folgt

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{M=k\}} + \mathbb{1}_{\{M=\infty\}}.$$

Sei als nächstes $f \geq 0$ eine $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -messbare Funktion auf $E_1 \times E_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{N^*}(f) &= \mathbf{E}[\exp(-N^*(f))] = \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{j=1}^M f(X_j, J_j) \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^M e^{-f(X_j, J_j)} \right] = \mathbf{E} \left[\mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^M e^{-f(X_j, J_j)} \mid \{X_n\}, M \right] \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{M=k\}} \right) \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^M e^{-f(X_j, J_j)} \mid \{X_n\}, M \right] \right] \\ &\quad + \mathbf{E} \left[\mathbb{1}_{\{M=\infty\}} \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^M e^{-f(X_j, J_j)} \mid \{X_n\}, M \right] \right]. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{1}_{\{M=k\}} \prod_{j=1}^M e^{-f(X_j, J_j)} \geq 0$ ist, liefert der Satz von der Monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungswerte sowie die Lemmata (3.3.2), (3.3.3):

$$\begin{aligned} \Psi_{N^*}(f) &= \mathbf{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{M=k\}} \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^k e^{-f(X_j, J_j)} \mid \{X_n\}, M \right] + \mathbb{1}_{\{M=\infty\}} \mathbf{E} \left[\prod_{j=1}^{\infty} e^{-f(X_j, J_j)} \mid \{X_n\}, M \right] \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{M=k\}} \prod_{j=1}^k \mathbf{E} [e^{-f(X_j, J_j)} \mid \{X_n\}, M] + \mathbb{1}_{\{M=\infty\}} \prod_{j=1}^{\infty} \mathbf{E} [e^{-f(X_j, J_j)} \mid \{X_n\}, M] \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{M=k\}} \prod_{j=1}^k \int_{E_2} e^{-f(X_j, y)} K(X_j, dy) + \mathbb{1}_{\{M=\infty\}} \prod_{j=1}^{\infty} \int_{E_2} e^{-f(X_j, y)} K(X_j, dy) \right]. \end{aligned}$$

3. Transformation von Poisson-Prozessen

Wir definieren nun $\theta : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in E_1$ als

$$\theta(x) := \int_{E_2} e^{-f(x,y)} K(x, dy) \in \left(\int_{E_2} 0 K(x, dy), \int_{E_2} 1 K(x, dy) \right] = (0, 1]$$

und erhalten somit

$$\Psi_N^*(f) = \mathbf{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{M=k\}} \prod_{j=1}^k \theta(X_j) + \mathbb{1}_{\{M=\infty\}} \prod_{j=1}^{\infty} \theta(X_j) \right].$$

Mit $\theta(x) \in (0, 1]$ ist $\ln \theta(x) \in (-\infty, 0]$ für alle $x \in E_1$ wohldefiniert und es folgt

$$\begin{aligned} \Psi_{N^*}(f) &= \mathbf{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{M=k\}} e^{-\sum_{j=1}^k (-\ln \theta(X_j))} + \mathbb{1}_{\{M=\infty\}} e^{-\sum_{j=1}^{\infty} (-\ln \theta(X_j))} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\mathbb{1}_{\{M < \infty\}} e^{-\sum_{j=1}^M (-\ln \theta(X_j))} + \mathbb{1}_{\{M=\infty\}} e^{-\sum_{j=1}^{\infty} (-\ln \theta(X_j))} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \sum_{j=1}^M (-\ln \theta(X_j)) \right) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_{E_1} (-\ln \theta(x)) N(dx) \right) \right] \\ &= \Psi_N(-\ln \theta). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung war aber N ein Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß μ , also

$$\begin{aligned} \Psi_{N^*}(f) &= \Psi_N(-\ln \theta) \\ &= \exp \left(- \int_{E_1} (1 - e^{-(-\ln \theta(x))}) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_{E_1} (1 - \theta(x)) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_{E_1} \left(1 - \int_{E_2} e^{-f(x,y)} K(x, dy) \right) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_{E_1} \left(\int_{E_2} 1 - e^{-f(x,y)} K(x, dy) \right) \mu(dx) \right). \end{aligned}$$

Da $1 - e^{-f(x,y)} \geq 0$ eine $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -messbare Funktion darstellt, liefert uns somit schließlich der Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \Psi_{N^*}(f) &= \exp \left(- \int_{E_1 \times E_2} 1 - e^{-f(x,y)} K(x, dy) \mu(dx) \right) \\ &= \exp \left(- \int_{E_1 \times E_2} 1 - e^{-f(x,y)} \mu^*(dx, dy) \right), \end{aligned}$$

was dem Laplace-Funktional eines $PZM(\mu^*)$ entspricht. Damit folgt die Behauptung. \square

3. Transformation von Poisson-Prozessen

Der Satz (3.3.1) geht mit einer Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten einher. Wir wollen im Folgenden einige Beispiele für Poisson-Prozesse geben, die durch Transformation und Markierung anderer Poisson-Prozesse entstehen.

Beispiel 3.3.4 (Stationäre $M/G/\infty$ -Warteschlangen). Die Eingangszeitpunkte von Anrufen bei einer Telefonzentrale seien durch einen Poisson-Prozess auf \mathbb{R} mit dem Intensitätsmaß μ beschrieben. Die Längen der Anrufe seien unabhängig von den Eingangszeitpunkt der jeweiligen Anrufe und beschrieben durch u.i.v., beschränkte Zufallsvariablen $\{J_n\}$ auf \mathbb{R}_+ mit gleicher Verteilung F . Wir werden zeigen, dass die Zeitpunkte, zu denen die Anrufe enden unter diesen Voraussetzungen ebenfalls einen Poisson-Prozess bilden.

Wir nehmen an, der Punktprozess der Telefoneingänge sei repräsentiert durch den Punktprozess $\sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}$, welcher ein $PZM(\mu)$ bildet. Nach Satz (3.3.1) ist dann auch

$$\sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, J_n)}$$

ein PZM mit Intensitätsmaß $\mu \times F$. Aufgrund der Beschränktheit der J_n gilt $(X_n, J_n) \in \mathbb{R} \times [0, M]$ für ein passendes $M \in \mathbb{R}$. Da die Abbildung $+: \mathbb{R} \times [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, j) \mapsto x + j$ beschränkte Urbilder bezüglich beschränkter Mengen in \mathbb{R} besitzt, ist mit Satz (3.1.1) außerdem

$$\sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n + J_n}$$

ein Poisson-Prozess, welcher die Zeitpunkte repräsentiert, zu denen die einzelnen Anrufe enden. Dieser besitzt das Intensitätsmaß μ_1 , welches für $a < b \in \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} \mu_1((a, b]) &= \mu \times F(\{(x, y) : x + y \in (a, b]\}) \\ &= \iint_{\{(x, y) : x + y \in (a, b]\}} \mu(dx) F(dy). \end{aligned}$$

Man beachte, dass falls der ursprüngliche Poisson-Prozess auf \mathbb{R} als homogen angenommen wird, d.h. μ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} ist, gilt, dass

$$\begin{aligned} \mu_1((a, b]) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x : x + y \in (a, b]\}} \mu(dx) F(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha |(a - y, b - y]| F(dy) = \alpha \int_{\mathbb{R}} (b - a) F(dy) = \alpha(b - a), \end{aligned}$$

also auch μ_1 ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes ist. Bilden also die Zeitpunkte der Anrufeingänge einen homogenen Poisson-Prozess mit Rate α , so auch die Zeitpunkte, zu denen die Anrufe enden. Ein zufälliges Verschieben der Zeitpunkte eines homogenen Poisson-Prozesses auf \mathbb{R} um u.i.v. Werte führt also zu einem neuen, weiterhin homogenen Poisson-Prozess.

3. Transformation von Poisson-Prozessen

Beispiel 3.3.5 (Konstruktion eines homogenen, planaren Poisson-Prozesses). Es sei durch $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{(X_n, Y_n)}$ ein homogener Poisson-Prozess auf \mathbb{R}^2 gegeben. Was passiert dann, wenn wir eine Transformation zu Polarkoordinaten durchführen? Wir betrachten dazu den Raum $E_2 := [0, \infty) \times [0, 2\pi)$. Sei dann durch

$$T : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \rightarrow (E_2, \mathcal{B}(E_2)), T(x, y) = (r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \varphi(x, y))$$

die Transformation gegeben, welche kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten überführt, wobei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 2\pi)$, je nach Konvention, beispielsweise die Form

$$\varphi(x, y) := \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{für } y \geq 0, (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

besitzt. Da T eine bijektive Abbildung darstellt, können wir – für eine beliebige Metrik d auf \mathbb{R}^2 – die von T induzierte Metrik d_2 auf E_2 verwenden, welche für $z_1, z_2 \in E_2$ definiert ist als

$$d_2(z_1, z_2) := d(T^{-1}(z_1), T^{-1}(z_2)).$$

Durch Wahl dieser Metrik besitzen beschränkte Mengen in E_2 trivialerweise unter T auch beschränkte Urbilder. Auch ist T somit Lipschitz-stetig und damit messbar bezüglich der borelschen σ -Algebren. Nach Satz (3.1.1) ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{T(X_n, Y_n)}$$

ein zweidimensionaler Poisson-Prozess. Das zugehörige Intensitätsmaß μ' ergibt sich dabei für $r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ als

$$\mu'([0, r] \times [0, \theta]) = \iint_{\{(x, y) : T(x, y) \in [0, r] \times [0, \theta]\}} 1 \, dx dy.$$

Eine Substitution mit Polarkoordinaten zum Lösen des Integrals liefert dann

$$\begin{aligned} &= \iint_{\{0 \leq s \leq r, 0 \leq \eta \leq \theta\}} s \, ds \, d\eta = \int_0^\theta \frac{r^2 - 0^2}{2} \, d\eta \\ &= \frac{1}{2} r^2 \theta = \pi r^2 \frac{\theta}{2\pi} = \int_{[0, r]} 2\pi u \, du \cdot \int_{[0, \theta]} \frac{1}{2\pi} \, dv \\ &= \mu([0, r]) F([0, \theta]), \end{aligned}$$

also $\mu' =: \mu \times F$, wobei μ das Maß auf \mathbb{R}_+ mit der Lebesgue-Dichte $2\pi t$ und F die Verteilung einer auf $[0, 2\pi)$ gleichverteilten Zufallsvariable sei.

Nach Abschnitt 3.2 kann ein inhomogener Poisson-Prozess mit lokaler Intensität $\alpha(t) = 2\pi t$ dargestellt werden als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{m \leftarrow (\Gamma_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\Gamma_n^{1/2} / \sqrt{\pi}},$$

3. Transformation von Poisson-Prozessen

wobei $\{\Gamma_n, n \geq 1\}$ die Partialsummen von unabhängigen, exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1 seien und für die verallgemeinerte Inverse gilt, dass

$$m^{\leftarrow}(x) = \inf \left\{ u \geq 0 : \int_0^u 2\pi r dr = \pi u^2 \geq x \right\} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Für weitere u.i.v. Zufallsvariablen $\{U_n\}$, die gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ und unabhängig von $\{\Gamma_n\}$ sind, erhalten wir aus Satz (3.3.1), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{(\Gamma_n^{1/2}/\sqrt{\pi}, U_n)}$$

ein Poisson-Prozess mit dem gleichen Intensitätsmaß wie $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{(R_n, \Theta_n)}$ ist.

Diese Beobachtung liefert uns zusätzlich zu Satz (2.3.1) eine weitere Methode zur Konstruktion homogener, planarer Poisson-Prozesse: Wir simulieren einen eindimensionalen Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit den Punkten $\{\Gamma_n\}$ und eine davon unabhängige u.i.v. Familie $\{U_n\}$ von Zufallsvariablen, wobei jedes U_n gleichverteilt auf $[0, 2\pi)$ ist. Damit bauen wir einen Poisson-Prozess auf $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ mit den Punkten $(\Gamma_n^{1/2}/\sqrt{\pi}, U_n)$. Wir transformieren diese Punkte von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten durch Anwendung der Abbildung $T^{-1}(r, \theta) = (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ und erhalten die Punkte eines homogenen, planaren Poisson-Prozesses.

Beispiel 3.3.6 (Ausdünnung von Poisson-Prozessen). Es sei für eine Folge $\{X_n\}$ von Zufallsvariablen $\sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}$ ein Poisson-Prozess auf dem Zustandsraum E mit Intensitätsmaß μ . Wir wollen jeden Punkt des Poisson-Prozesses einzeln betrachten und uns entweder mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ dafür entscheiden, den Punkt zu behalten oder ihn mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = q$ zu entfernen. Durch Aufteilung der Punktmenge ergeben sich zwei neue Abbildungen N_r der behaltenen bzw. N_d der entfernten Punkte, welche für $A \in \mathcal{B}(E)$ die Anzahl der behaltenen bzw. entfernten Punkte in A angeben. Wir werden zeigen, dass N_r und N_d wieder Poisson-Prozesse mit den Intensitätsmaßen $p\mu$ bzw. $q\mu$ bilden.

Sei hierzu $\{B_i\}$ eine unabhängige Folge von Bernoulli-Zufallsvariablen, die unabhängig von den Punkten $\{X_n\}$ des Poisson-Prozesses sind und für die gilt

$$\mathbf{P}[B_1 = 1] = p = 1 - \mathbf{P}[B_1 = -1].$$

Aus Satz (3.3.1) wissen wir dann, dass

$$N' := \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, B_n)}$$

ebenfalls ein PZM auf $E \times \{-1, 1\}$ mit dem Intensitätsmaß $\mu \times \mathbf{P}[B_1 = \cdot]$ ist. Es stelle nun $\{X_n : B_n = 1\}$ die Menge der behaltenen und analog $\{X_n : B_n = -1\}$ die Menge

3. Transformation von Poisson-Prozessen

der entfernten Punkte dar. Als Poisson-Prozess besitzt N' unabhängige Zuwächse. Es ergibt sich also, dass mit

$$N_r(\cdot) = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, B_n)}((\cdot) \times \{1\}) = \sum_{n: B_n=1} \varepsilon_{X_n}$$

und

$$N_d(\cdot) = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, B_n)}((\cdot) \times \{-1\}) = \sum_{n: B_n=-1} \varepsilon_{X_n}$$

die Abbildungen $N_r(A_1), N_d(A_2)$ für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ unabhängige Zufallsvariablen sind, da sie auf den Werten von N' in zwei disjunkten Mengen des Zustandsraums basieren. Somit sind N_r und N_d unabhängige Punktprozesse und erfüllen als Einschränkungen von N' auf die Mengen $\mathcal{B}(E) \times \{1\}$ bzw. $\mathcal{B}(E) \times \{-1\}$ ebenfalls die Definition eines Poisson-Prozessen mit den Intensitätsmaßen

$$\mu \times \mathbf{P}[B_1 = \cdot] \big|_{\mathcal{B}(E) \times \{1\}} = p\mu \quad \text{bzw.} \quad \mu \times \mathbf{P}[B_1 = \cdot] \big|_{\mathcal{B}(E) \times \{-1\}} = q\mu.$$

Dieses Ergebnis kann natürlich verallgemeinert werden. Statt die Punkte auf nur zwei Arten zu markieren, könnten wir genauso gut die Punkte zufällig auf k Kategorien aufteilen. Die B_n der Überlegungen im vorigen Absatz würden dann durch multinomiale Zufallsvariablen mit k möglichen Werten ersetzt werden. Dass die resultierenden Abbildungen N_1, \dots, N_k unabhängige Poisson-Prozesse bilden, überlegt man sich dann vollkommen analog zu oben.

Ebenso können wir eine **ortsabhängige** Ausdünnung durchführen. Es sei dazu ein homogener Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit Rate a gegeben. Fällt ein Punkt des Prozesses auf den Zeitpunkt t , so behalten wir ihn nun mit einer Wahrscheinlichkeit von $p(t) \in [0, 1]$ oder entfernen ihn mit einer Wahrscheinlichkeit von $q(t) := 1 - p(t)$.

Analog zur obigen Diskussion können wir dazu Bernoulli-Zufallsvariablen $\{B_i\}$ mit Werten in $\{-1, 1\}$ simulieren. Ist der homogene Poisson-Prozess $\sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}$ auf $[0, \infty)$, so soll

$$\mathbf{P}[B_i = 1 \mid X_i = t] = p(t) =: K(t, \{1\})$$

gelten. Der Prozess

$$\sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, B_n)}$$

ist dann ein *PZM*, für dessen Intensitätsmaß μ^* wie behauptet gilt

$$\mu^*(dt \times \{1\}) = \mu(dt)K(t, \{1\}) = ap(t)dt, \quad \mu^*(dt \times \{-1\}) = aq(t)dt.$$

Die behaltenen Punkte bilden also einen inhomogenen Poisson-Prozess mit lokaler Intensität $ap(t)$. Man beachte, dass der Prozess der behaltenen Punkte dabei weiterhin von dem Prozess der entfernten Punkte unabhängig ist, da beide auf Werten in disjunkten Gebieten eines Zustandsraums basieren.

4. Varianten von Poisson-Prozessen

Um Modellierungsproblematiken genügen zu können, wurden in der Vergangenheit viele Abwandlungen von Poisson-Prozessen eingeführt. Wir werden in diesem letzten Kapitel der Arbeit einige dieser Varianten kurz diskutieren und mit Hilfe der zuvor gezeigten Transformationsaussagen einfache Eigenschaften herleiten.

4.1. Gemischte Poisson-Prozesse

Definition 4.1.1 (Gemischte Poisson-Prozesse). *Sei Λ eine reelle Zufallsvariable mit $\Lambda > 0$ fast sicher und N ein von Λ unabhängiger Poisson-Prozess auf dem Zustandsraum $E = [0, \infty)$ mit Intensitätsmaß μ . Dann nennen wir den Prozess $\{N'(t), t \geq 0\}$ mit*

$$N'(t) := N([0, \Lambda t])$$

*einen **gemischten Poisson-Prozess**.*

Wegen der von Λ induzierten, zufälligen Änderung der Zeit müssen gemischte Poisson-Prozesse keine unabhängigen Zuwächse besitzen, da für $0 = t_0 < t_1 < t_2$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ im Allgemeinen gilt (siehe dazu Beispiel (A.0.3) im Anhang), dass

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} [N'(t_1) - N'(t_0) = k_1, N'(t_2) - N'(t_1) = k_2] \\ &= \int_0^\infty \prod_{i=1,2} \frac{\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])^{k_i}}{k_i!} e^{-\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])} d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) \\ &\neq \prod_{i=1,2} \int_0^\infty \frac{\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])^{k_i}}{k_i!} e^{-\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])} d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) \\ &= \prod_{i=1}^2 \mathbf{P} [N'(t_i) - N'(t_{i-1}) = k_i]. \end{aligned}$$

Falls N homogen ist, besitzt der gemischte Poisson-Prozess eine Ordnungsstatistik-Eigenschaft. So gilt für die aufsteigenden Punkte $\{T_k\}$ zu N' und $t_1, \dots, t_n, t \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{P} [T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n \mid N'(t) = n] &= \int_0^\infty \mathbf{P} [T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n \mid N'(t) = n, \Lambda = \lambda] d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P} [\Gamma_1 \leq \lambda t_1, \dots, \Gamma_n \leq \lambda t_n \mid N([0, \lambda t]) = n] d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P} [\lambda U_{(1)} \leq \lambda t_1, \dots, \lambda U_{(n)} \leq \lambda t_n] d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P} [U_{(1)} \leq t_1, \dots, U_{(n)} \leq t_n] d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) = \mathbf{P} [U_{(1)} \leq t_1, \dots, U_{(n)} \leq t_n], \end{aligned}$$

wobei $\{\Gamma_i\}$ die aufsteigenden Punkte zu N und $\{U_i\}$ unabhängige, auf dem Intervall $[0, t]$ gleichverteilte Zufallsvariablen seien.

Dieses Ergebnis zeigt, dass die Ordnungsstatistik-Eigenschaft nicht zur Charakterisierung von Poisson-Prozessen dienen kann. Tatsächlich ist bei korrekter Formulierung der Ordnungsstatistik-Eigenschaft aber die Klasse der gemischten Poisson-Prozesse genau die Klasse der Prozesse, welche die Ordnungsstatistik-Eigenschaft besitzen (siehe dazu [Fei79]).

Um die Verteilungen von $N'(t)$ zu erhalten, ist es hilfreich, die Laplace-Transformierten $L_{N'(t)}$ zu berechnen: Der Einfachheit halber sei dabei N ein homogener Poisson-Prozess mit Rate 1. Für $\lambda > 0$ bedingen wir dann nach Λ und erhalten

$$L_{N'(t)}(\lambda) = \mathbf{E} \left[e^{-\lambda N'(t)} \right] = \int_0^\infty \mathbf{E} \left[e^{-\lambda N([0, \alpha t])} \right] d\mathbf{P}_\Lambda(\alpha),$$

was wir mit $N([0, \alpha t])$ als Poisson-verteilter Zufallsvariable mit Parameter αt wegen Lemma (2.2.1) umformen können zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda N'(t)} \right] &= \int_0^\infty e^{-\alpha t(1-e^{-\lambda})} d\mathbf{P}_\Lambda(\alpha) \\ &= L_\Lambda(t(1-e^{-\lambda})), \end{aligned}$$

wobei L_Λ die Laplace-Transformierte von Λ ist.

Hiermit kann der Erwartungswert einfach berechnet werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [N'(t)] &= - \lim_{\lambda \downarrow 0} L'_{N'(t)}(\lambda) \\ &= - \lim_{\lambda \downarrow 0} L'_\Lambda(t(1-e^{-\lambda}))te^{-\lambda} \\ &= \left(- \lim_{\lambda \downarrow 0} L'_\Lambda(0) \right) t \\ &= \mathbf{E} [\Lambda] t, \end{aligned}$$

was anhand der Erwartungswerte von homogenen und inhomogenen Poisson-Prozessen ein naheliegendes Resultat darstellt.

4.2. Doppelt-stochastische Poisson-Prozesse

Definition 4.2.1 (Doppelt-stochastischer Poisson-Prozess). *Sei N ein Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ sowie $\{\Lambda(t), t \geq 0\}$ ein stochastischer, von N unabhängiger Prozess mit Werten in \mathbb{R}_+ und nicht-fallenden Pfaden, d.h. Λ in jeder Realisation monoton steigend in t . Dann nennen wir N^* mit*

$$N^*((a, b]) := N((\Lambda(a), \Lambda(b)])$$

für $0 \leq a < b$ einen **doppelt-stochastischen** Poisson-Prozess. Wir können uns hierbei $\Lambda(t)$ als eine zufällige Transformation des Zeitraums vorstellen.

4. Varianten von Poisson-Prozessen

Wir wollen ein Beispiel für einen doppelt-stochastischen Prozess konstruieren. Es seien dazu $\{U_n, n \geq 1\}, \{D_n, n \geq 1\}$ zwei unabhängige Folgen u.i.v. Zufallsvariablen mit Werten in $[0, \infty)$. Wir definieren anhand dieser Folgen die Zufallsvariablen $S_0 = 0, S_1 = U_1, S_2 = U_1 + D_1, S_3 = U_1 + D_1 + U_2, S_4 = U_1 + D_1 + U_2 + D_2$ etc.

Man stelle sich nun einen Übertragungsknoten in einem Telefonnetzwerk vor, welcher abwechselnd Phasen durchläuft, in denen er funktioniert (aktiv ist) bzw. nicht funktioniert (inaktiv ist). Die n -te aktive Phase hat dabei die Länge U_n , die n -te inaktive Phase die Länge D_n . Sei ξ nun jene Funktion, sodass $\xi(t) = 1$ ist, falls der Knoten zum Zeitpunkt t aktiv ist und sonst 0, d.h.:

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [S_{2n}, S_{2n+1}), \\ 0, & \text{falls } t \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [S_{2n+1}, S_{2n+2}). \end{cases}$$

Wir definieren $\Lambda(t)$ als die gesamte Zeit im Intervall $[0, t]$, die der Knoten bereits aktiv war. Es gilt also

$$\Lambda(t) = \int_0^t \xi(s) ds.$$

Sei nun N ein homogener Poisson-Prozess, der die Ankünfte von Anrufen im Knoten beschreibt und unabhängig davon ist, ob der Knoten aktiv ist oder nicht. Anrufe, die während einer aktiven Phasen eingehen, werden sofort bearbeitet und weitergeleitet, während Anrufe, die während einer inaktiven Phase eingehen, einfach verloren gehen. Aufgrund der Homogenität von N besitzt die Anzahl $N([0, t] \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} [S_{2n}, S_{2n+1}))$ der weitergeleiteten Anrufe in $[0, t]$ dann wegen

$$|[0, t] \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} [S_{2n}, S_{2n+1})| = \int_0^t \xi(s) ds = \Lambda(t) = |(0, \Lambda(t))|$$

die gleiche Verteilung wie $N^*((0, t]) = N((0, \Lambda(t)))$, während die Anzahl der verlorenen Anrufe in $[0, t]$ die gleiche Verteilung wie $N((0, t - \Lambda(t)))$ besitzt.

Eine wesentliche Eigenschaft von doppelt-stochastischen Poisson-Prozessen wird durch Bedingen der Verteilung nach dem Wert des Prozesses Λ deutlich. Ist beispielsweise N ein homogener Poisson-Prozess mit Rate 1 und die Werte von Λ als $\Lambda(t) = L(t)$ für $t \geq 0$ bekannt, so gilt für $0 \leq a < b, k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[N^*((a, b]) = k \mid \Lambda(t) = L(t), t \geq 0] &= \mathbf{P}[N((L(a), L(b))) = k] \\ &= \frac{(L(b) - L(a))^k}{k!} e^{-(L(b) - L(a))}. \end{aligned}$$

Der Prozess N^* wird also unter dieser Bedingung zu einem Poisson-Prozess, wobei das zugehörige Intensitätsmaß dem Intervall $(a, b]$ den Wert $\Lambda(b) - \Lambda(a)$ zuordnet.

Spezielle Typen von doppelt-stochastischen Poisson-Prozessen sind gemischte Poisson-Prozess (für $\Lambda(t) = \Lambda t$) sowie **Markov-Modulierte Poisson-Prozesse**. Bei einem

Markov-Modulierten Poisson-Prozess geht man dabei von einer zeitstetigen Markov-Kette $X = (X(t))_{t \geq 0}$ wie in Definition (0.0.24) aus, die auf $m \in \mathbb{N}$ Zuständen lebt und unabhängig von dem homogenen Poisson-Prozess N auf $[0, \infty)$ ist. Während sich die Markov-Kette im Zustand j (für $1 \leq j \leq m$) befindet, soll der Prozess N^* eine Rate $\alpha(j)$ besitzen. Eine entsprechende Darstellung als doppelt-stochastischen Prozess erhalten wir also durch

$$\Lambda(t) := \int_0^t \alpha(X(s)) ds.$$

Somit verhält sich der Markov-Modulierte Poisson-Prozess, bedingt nach den Werten der Markov-Kette X , wie ein inhomogener Poisson-Prozess mit lokaler Intensität $\alpha(X(t))$.

4.3. Zusammengesetzte Poisson-Prozesse

Definition 4.3.1 (Zusammengesetzte Poisson-Prozesse). *Sei N ein homogener Poisson-Prozess mit Zustandsraum $E = [0, \infty)$ und Rate $\alpha > 0$, welcher unabhängig von einer Folge $\{D_n, n \geq 1\}$ von u.i.v. Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung \mathbf{P}_D ist. Wir bezeichnen dann*

$$C(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N((0,t])} D_i, & \text{falls } N((0,t]) > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $t \geq 0$ als einen **zusammengesetzten Poisson-Prozess**.

Wir stellen uns eine Versicherung vor, deren Schäden zu den Zeitpunkten eines homogenen Poisson-Prozesses auf \mathbb{R}_+ auftreten, wobei der n -te Schaden jeweils einen Wert von D_n besitzt. Dann gibt $C(t)$ den Gesamtschaden der Versicherung bis zum Zeitpunkt t an.

Bemerkung 4.3.2. Der Prozess $(C(t))_{t \geq 0}$ ist ein einfaches Beispiel für einen **Lévy-Prozess**, d.h. einen Prozess mit $C(0) = 0$ sowie **stationären** und **unabhängigen Zuwächsen**. Dies bedeutet, dass für beliebige $0 \leq s < t$ die Zufallsvariable $C(t) - C(s)$ die gleiche Verteilung wie $C(t-s)$ besitzt und dass für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ sowie $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k$ die Zufallsvariablen $C(t_i) - C(t_{i-1})$ für $1 \leq i \leq k$ unabhängig sind.

Beweis. Mit Lemma (1.1.4) können wir ohne Einschränkung annehmen, dass N die Form $N = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}$ besitzt. Mit dem Markierungssatz (3.3.1) wissen wir dann, dass

$$N' = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{(X_n, D_n)}$$

ebenfalls ein Poisson-Prozess ist mit $\mathbf{E}[N'((t_{i-1}, t_i] \times B)] = \alpha(t_i - t_{i-1}) \mathbf{P}_D(B)$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wegen der unabhängigen Zuwächse von Poisson-Prozessen sind dann

$$N'((t_{i-1}, t_i] \times \cdot) = \sum_{n=1}^M \mathbf{1}_{[X_n \in (t_{i-1}, t_i]]} \varepsilon_{D_n}(\cdot), \quad i = 1, \dots, k,$$

4. Varianten von Poisson-Prozessen

unabhängig, d.h. die Zufallsvariablen $N'((t_0, t_1] \times B_1), \dots, N'((t_{k-1}, t_k] \times B_k)$ sind für beliebige $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ unabhängig, da die verschiedenen Zählprozesse in disjunkten Gebieten nach Punkten suchen. Somit sind dann auch die Zuwächse

$$C(t_i) - C(t_{i-1}) = \sum_{\{i: X_i \in (t_{i-1}, t_i]\}} D_i = \int_{\mathbb{R}} y N'((t_{i-1}, t_i] \times dy), \quad i = 1, \dots, k$$

unabhängig.

Um zu zeigen, dass die Verteilung von $C(t) - C(s)$ nur von $t - s$ abhängt, können wir in ähnlicher Weise vorgehen. Zunächst bemerken wir, dass für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathbf{E}[N'((0, t - s] \times B)] = \alpha(t - s) \mathbf{P}_D(B) = \mathbf{E}[N'((s, t] \times B)].$$

Somit besitzen die Poisson-Prozesse $N'((0, t - s] \times \cdot)$ und $N'((s, t] \times \cdot)$ das gleiche Intensitätsmaß $\alpha(t - s) \mathbf{P}_D$, haben also nach Satz (2.2.2) die gleiche Verteilung. Damit folgt

$$C(t) - C(s) = \int_{\mathbb{R}} y N'((s, t] \times dy) \stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{R}} y N'((0, t - s] \times dy) = C(t - s),$$

C hat also stationäre Zuwächse. □

Wir können nun auf einfache Weise die Transformierte der Verteilung von $C(t)$ berechnen. Für nicht-negative D_n – auf die wir uns hier beschränken – können wir dazu die Laplace-Transformierte wählen. Sei dabei $L_{D_1}(\lambda) = \mathbf{E}[e^{-\lambda D_1}]$ die Laplace-Transformierte zu D_1 . Für $\lambda > 0$ gilt dann mit der Unabhängigkeit von N und den D_i , sowie der identischen Verteilung der D_i , dass

$$\begin{aligned} L_{D_1}(\lambda) &= \mathbf{E}\left[e^{-\lambda \sum_{i=1}^{N((0, t])} D_i}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda \sum_{i=1}^n D_i}\right] \mathbf{P}[N((0, t]) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \mathbf{E}[e^{-\lambda D_i}] \mathbf{P}[N((0, t]) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_{D_1}^n(\lambda) \mathbf{P}[N((0, t]) = n]. \end{aligned}$$

Mit der Poisson-Verteilung von $N((0, t])$ zum Parameter αt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} L_{D_1}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_{D_1}^n(\lambda) \frac{e^{-\alpha t} (\alpha t)^n}{n!} \\ &= e^{-\alpha t} e^{\alpha t L_{D_1}(\lambda)} \\ &= e^{\alpha t (L_{D_1}(\lambda) - 1)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Erwartungswert von $C(t)$ in Analogie zu den bisherigen Ergebnissen als:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[C(t)] &= -\lim_{\lambda \downarrow 0} L'_{C(t)}(\lambda) \\ &= -\lim_{\lambda \downarrow 0} e^{\alpha t(L_{D_1}(\lambda)-1)} \alpha t L'_{D_1}(\lambda) \\ &= \alpha t \left(-\lim_{\lambda \downarrow 0} L'_{D_1}(0) \right) \\ &= \alpha t \mathbf{E}[D_1] = \mathbf{E}[N((0, t])] \mathbf{E}[D_1],\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit wegen $\lim_{\lambda \downarrow 0} L_{D_1}(\lambda) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathbf{E}[e^{-\lambda D_1}] = 1$ also damit auch $\lim_{\lambda \downarrow 0} e^{\alpha t(L_{D_1}(\lambda)-1)} = 1$ aus der Stetigkeit von $f(x) = e^x$ folgt.

4.4. Clusterprozesse

Wir wollen zwei Typen von Prozessen vorstellen, die durch **Clustering** von Poisson-Prozessen entstehen. Das Prinzip des Clusterings besteht darin, die Punkte eines **Vaterpunktprozesses** zu betrachten und um jeden dieser Punkte einen neuen Punktprozess zu bilden.

Der einfachste Typ solcher **Cluster-Prozesse**, die auf einem Poisson-Prozess basieren, ergibt sich durch Behandlung der Punkte des Poissonprozess als Standorte. Jedem Standort wird dabei eine zufällige Anzahl von Punkten zugeordnet. Seien dazu $\{\xi_n\}$ u.i.v. nicht-negative, ganzzahlige Zufallsvariablen, die unabhängig von dem homogenen Poisson-Prozess $N = \sum_{n=1}^M \varepsilon_{X_n}$ auf (E, \mathcal{E}) mit Rate $\alpha > 0$ und Punkten $\{X_n\}$ sind. Ähnlich zu der Definition eines zusammengesetzten Poisson-Prozess, ist dann

$$N_{CL} = \sum_{n=1}^M \xi_n \varepsilon_{X_n},$$

ein simpler Clusterprozess, sodass sich für ein Gebiet $A \in \mathcal{E}$ die Anzahl der Punkte innerhalb von A ergibt als

$$N_{CL}(A) = \sum_{\{n: X_n \in A\}} \xi_n.$$

Um also die Anzahl der Punkte innerhalb von A zu berechnen, untersuchen wir, welche Standorte X_n in A liegen und summieren die zugehörigen ξ_n .

Für disjunkte Gebiete $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ sind dabei die Zufallsvariablen $N_{CL}(A_1), \dots, N_{CL}(A_k)$ unabhängig, womit der Prozess N_{CL} unabhängige Zuwächse besitzt. Der Beweis funktioniert dabei analog zu dem der Eigenschaft unabhängiger Zuwächse von zusammengesetzten Poisson-Prozessen. Die Laplace-Transformierte zu $N_{CL}(A)$ lässt sich analog zu den zusammengesetzten Poisson-Prozessen auf Grund der unabhängigen, identischen Verteilung der ξ_i berechnen. Wir definieren dazu für $n \in \mathbb{N}_0$ und $I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ das Ereignis $B_{n,I}(A) := \{N(A) = n, X_i \in A \forall i \in I\}$, wobei $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ die Menge aller n -elementigen

4. Varianten von Poisson-Prozessen

Teilmengen von \mathbb{N} sei. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 L_{N_{CL}(A)}(\lambda) &= \mathbf{E} \left[e^{-\lambda N_{CL}(A)} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda \sum_{i=1}^M \xi_i \varepsilon_{X_i}(A)} \mid B_{n,I}(A) \right] \mathbf{P} [B_{n,I}(A)] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda \sum_{i \in I} \xi_i} \right] \mathbf{P} [B_{n,I}(A)] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{I \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda \sum_{i=1}^n \xi_i} \right] \mathbf{P} [B_{n,I}(A)] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[e^{-\lambda \sum_{i=1}^n \xi_i} \right] \mathbf{P} [N(A) = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} L_{\xi_1}^n(\lambda) \mathbf{P} [N(A) = n] = e^{\alpha |A| (L_{\xi_1}(\lambda) - 1)},
 \end{aligned}$$

für $\lambda > 0$ und somit

$$\mathbf{E} [N_{CL}(A)] = \mathbf{E} [N(A)] \mathbf{E} [\xi_1].$$

Einen komplizierteren Typ von Clusterprozessen erhalten wir, indem wir die konkreten Werte der zu einem Vaterpunkt gehörenden **Tochterpunkte** berücksichtigen. Wir gehen dazu von einer zufälligen Anzahl von Tochterpunkten für jeden Vaterpunkt aus. Die Positionen der Tochterpunkte sollen sich dann durch Verschiebungen des jeweiligen Vaterpunkts anhand einer Zufallsverteilung ergeben.

Seien also E der Zustandsraum, $\{X_n, n \geq 0\}$ die E -wertigen Vaterpunkte, die durch einen Poisson-Prozess gegeben sind, und ξ_n die Anzahl der Tochterpunkte im n -ten Vaterpunkt X_n . Die Verschiebung des j -ten Tochterpunkt relativ zum jeweiligen Vaterpunkt X_n sei für $1 \leq j \leq \xi_n$ gegeben durch $Y_{n,j}$, sodass jedes $Y_{n,j}$ Werte in E annimmt. Wir nehmen an, dass $\{X_n\}$, $\{\xi_n\}$ und $\{Y_{n,j}\}$ voneinander unabhängige Folgen von Zufallsvariablen sind sowie $\{\xi_n\}$, $\{Y_{n,j}\}$ jeweils u.i.v sind. Der Clusterprozess der Verschiebungen ergibt sich dann als

$$N_{CLD} = \sum_{n=1}^M \sum_{j=1}^{\xi_n} \varepsilon_{X_n + Y_{n,j}},$$

sodass die Punkte von N_{CLD} die Form

$$\{X_n + Y_{n,j}, 1 \leq j \leq \xi_n, n \geq 0\}$$

besitzen.

Literaturverzeichnis

- [Bil95] Billingsley, Patrick: *Probability and Measure*. Third Version, John Wiley & Sons, 1995.
- [Fei79] Feigin, Paul D.: *On the Characterization of Point Processes with the Order Statistic Property*. Journal of Applied Probability 16, no. 2 (1979), S. 297-304.
- [Fin96] Finkelstein, Mark et al.: *Point Processes without Topology* in: Ferguson, S.T. et al.: *Statistics, Probability and Game Theory*. Hayward, California: Lecture Notes - Monograph Series, Volume 30, Institute of Mathematical Statistics, 1996, S.75-78.
- [Kal97] Kallenberg, Olav: *Foundations of Modern Probability*. Springer, 1997.
- [Kle00] Klenke, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013.
- [Koe02] Königsberger, Konrad.: *Analysis 2*. Berlin Heidelberg: Springer, 2002.
- [LasPen17] Last, Günter und Penrose, Mathew: *Lectures on the Poisson Process*. http://www.math.kit.edu/stoch/~last/seite/lectures_on_the_poisson_process/media/lastpenrose2017.pdf. Eingesehen am 20. August 2018.
- [Res08] Resnick, Sidney I.: *Extrem Values, Regular Variation and Point Processes*. New York: Springer Science & Business Media, 2008.
- [Res13] Resnick, Sidney I.: *Adventures in Stochastic Processes*. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2013.
- [Sche02] Scheffler, Hans-Peter: *Stochastik II*. https://www.uni-siegen.de/fb6/src/scheffler/lehre/stochastik_ii/stochastik2_20021126.pdf. Eingesehen am 20. August 2018.
- [Sch09] Schmidt, Klaus D.: *Maß und Wahrscheinlichkeit*. Berlin Heidelberg: Springer, 2009.
- [Ser09] Serfonzo, Richard: *Basics of Applied Stochastic Processes*. Berlin Heidelberg: Springer, 2009, S.214 f.

A. Anhang

Bemerkung A.0.1 (ad 2.4.3). Seien N' und $\sum_{i=1}^{\tau} \varepsilon_{U_i} =: N''$ die beiden Punktprozesse aus dem Beweis von Satz (2.4.3) mit $N' \stackrel{d}{=} N''$. Dann gilt für die aufsteigenden Punkte $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ von N :

$$(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \mid N([0, t]) = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(n)} \mid \tau = n) \stackrel{d}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(n)}).$$

Beweis. Die zweite Gleichheit ist offensichtlich, da τ unabhängig von $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ ist. Für die erste Gleichheit genügt es, die Gleichheit der Verteilungsfunktionen zu zeigen, also für $t_1, \dots, t_n \in [0, t]$, dass

$$\mathbf{P} [\Gamma_1 \leq t_1, \dots, \Gamma_n \leq t_n \mid N([0, t]) = n] = \mathbf{P} [U_{(1)} \leq t_1, \dots, U_{(n)} \leq t_n \mid \tau = n]. \quad (\text{A.1})$$

Mit $\Gamma_i \leq \Gamma_{i+1}, U_{(i)} \leq U_{(i+1)}$ gilt $\Gamma_i \leq t_i \Rightarrow \Gamma_j \leq t_i$ bzw. $U_{(i)} \leq t_i \Rightarrow U_{(j)} \leq t_i$ für alle $j \leq i$. Somit lassen sich Wahrscheinlichkeiten der obigen Form (A.1) ausdrücken als

$$\mathbf{P} [\Gamma_1 \leq t'_1, \dots, \Gamma_n \leq t'_n \mid N([0, t]) = n], \quad \mathbf{P} [U_{(1)} \leq t'_1, \dots, U_{(n)} \leq t'_n \mid \tau = n]$$

für passende $0 \leq t'_1 \leq \dots \leq t'_n \leq t$. Für solche $t'_i, i = 1, \dots, n$ gilt aber nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{P} [\Gamma_1 \leq t'_1, \dots, \Gamma_n \leq t'_n \mid N'([0, t]) = n] \\ &= \mathbf{P} [N'([0, t]) = n]^{-1} \mathbf{P} [N'([0, t'_1]) \geq 1, \dots, N'([0, t'_n]) \geq n, N'([0, t]) = n] \\ &= \mathbf{P} [N'([0, t]) = n]^{-1} \sum \mathbf{P} [N'([0, t'_1]) = k_1, \dots, N'((t_{n-1}, t'_n]) = k_n, N'((t'_n, t]) = 0] \\ &= \mathbf{P} [N'([0, t]) = n]^{-1} \sum \mathbf{P} [N'([0, t'_1]) = k_1] \cdots \mathbf{P} [N'((t_{n-1}, t'_n]) = k_n] \mathbf{P} [N'((t'_n, t]) = 0], \end{aligned}$$

wobei die angegebene Summe über alle $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{i=1}^n k_i = n$ und $\sum_{i=1}^j k_i \geq j$ für alle $j = 1, \dots, n$ läuft. Mit analoger Rechnung für die Ordnungsstatistik der U_i und der identischen Verteilung von N', N'' folgt somit

$$\begin{aligned} \mathbf{P} [\Gamma_1 \leq t'_1, \dots, \Gamma_n \leq t'_n \mid N'([0, t]) = n] \\ &= \mathbf{P} [N'([0, t]) = n]^{-1} \sum \mathbf{P} [N'([0, t'_1]) = k_1] \cdots \mathbf{P} [N'((t_{n-1}, t'_n]) = k_n] \mathbf{P} [N'((t'_n, t]) = 0] \\ &= \mathbf{P} [N''([0, t]) = n]^{-1} \sum \mathbf{P} [N''([0, t'_1]) = k_1] \cdots \mathbf{P} [N''((t_{n-1}, t'_n]) = k_n] \mathbf{P} [N''((t'_n, t]) = 0] \\ &= \mathbf{P} [N''([0, t]) = n]^{-1} \mathbf{P} [N''([0, t'_1]) \geq 1, \dots, N''([0, t'_n]) \geq n, N''([0, t]) = n] \\ &= \mathbf{P} [U_{(1)} \leq t'_1, \dots, U_{(n)} \leq t'_n \mid \tau = n] \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Bemerkung A.0.2 (ad 3.2.1). Sei μ ein absolut stetiges Maß auf $([0, \infty), \mathcal{B}([0, \infty)))$ mit der Verteilungsfunktion $m(t) := \mu([0, t]) = \int_0^t \alpha(t) dt$ für $t \geq 0$, sodass μ auf beschränkten Mengen endlich ist. Dann ist die verallgemeinerte Inverse $m^\leftarrow(x) := \inf\{t : m(t) \geq x\}$ unter der Annahme $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$ wohldefiniert, streng monoton steigend, stetig und besitzt beschränkte Urbilder bezüglich beschränkter Mengen in $\mathcal{B}([0, \infty))$.

Beweis. Wenn wir $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \infty$ annehmen, muss mit $m(0) = \mu(\{0\}) = 0$ die Menge $\{u : m(u) \geq x\}$ für alle x nicht-leer sein, sodass

$$m^\leftarrow : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

wohldefiniert ist.

Für $t \geq 0$ seien $(a_n), (b_n) \geq 0$ beliebige reelle Folgen mit $a_n \uparrow t, b_n \downarrow t$, also $[0, a_n] \uparrow [0, t], [0, b_n] \downarrow [0, t]$. Dann gilt mit μ als absolut stetigem Maß bezüglich des Lebesgue-Maßes und da alle vorigen Intervalle beschränkt sind:

$$\begin{aligned} m(t) - \lim_{a_n \uparrow t} m(a_n) &= \mu([0, t]) - \mu([0, t)) = \mu(\{t\}) = 0, \quad \text{da } |\{t\}| = 0, \\ m(t) - \lim_{b_n \downarrow t} m(b_n) &= \mu([0, t]) - \lim_{b_n \downarrow t} \mu([0, b_n]) = \mu([0, t]) - \mu([0, t]) = 0, \end{aligned}$$

womit m stetig ist. Somit gilt für $x_1 > x_2 \geq 0$ mit $m(0) = 0$, dass

$$\begin{aligned} m^\leftarrow(x_1) - m^\leftarrow(x_2) &= \inf\{s : m(s) \geq x_1\} - \inf\{t : m(t) \geq x_2\} \\ &= \min\{s : m(s) = x_1\} - \min\{t : m(t) = x_2\} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Die verallgemeinerte Inverse ist also streng monoton steigend. Alle Urbilder von der Form $\{m^\leftarrow \leq t\}$ sind somit Intervalle und als solche in $\mathcal{B}([0, \infty))$ enthalten. Damit ist m^\leftarrow messbar. Genauer gilt für $x, t \geq 0$ wegen der Monotonie von m , dass

$$m^\leftarrow(x) = \inf\{u : m(u) \geq x\} \leq t \Leftrightarrow m(u) \geq x \quad \forall u \geq t \Leftrightarrow x \leq m(t).$$

Falls $A \subset [0, \infty)$ also eine beschränkte Menge in $\mathcal{B}([0, \infty))$ ist mit $x \leq M \in \mathbb{N}$ für alle $x \in A$, so ist also auch

$$\{m^\leftarrow(t) \in A\} \subset \{m^\leftarrow(t) \leq M\} = \{t \leq m(M)\} = [0, m(M)]$$

beschränkt. □

Beispiel A.0.3 (ad 4.1.1). Um zu zeigen, dass gemischte Poisson-Prozesse im Allgemeinen keine unabhängigen Zuwächse besitzen, betrachte man folgendes Beispiel: Seien N ein homogener Poisson-Prozess auf $[0, \infty)$ mit Rate 1, N' wie in Definition (4.1.1) und Λ so gewählt, dass N und Λ unabhängig sind, sowie Λ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ die Werte $\ln(2)$ bzw. $\ln(3)$ annimmt. Dann gilt mit $t_i = i, k_i = 0$ für

A. Anhang

$i = 0, 1, 2$, dass

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} [N'(t_1) - N'(t_0) = k_1, N'(t_2) - N'(t_1) = k_2] \\
 &= \int_0^\infty \prod_{i=1,2} \frac{\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])^{k_i}}{k_i!} e^{-\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])} d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) \\
 &= \frac{(e^{-\ln(2)})^2 + (e^{-\ln(3)})^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) = \frac{26}{144},
 \end{aligned}$$

aber

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=1,2} \mathbf{P} [N'(t_i) - N'(t_{i-1}) = k_i] \\
 &= \prod_{i=1,2} \int_0^\infty \frac{\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])^{k_i}}{k_i!} e^{-\mu((\lambda t_{i-1}, \lambda t_i])} d\mathbf{P}_\Lambda(\lambda) \\
 &= \left(\frac{e^{-\ln(2)} + e^{-\ln(3)}}{2} \right)^2 = \left(\frac{5}{12} \right)^2 = \frac{25}{144}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\mathbf{P} [N'(t_1) - N'(t_0) = k_1, N'(t_2) - N'(t_1) = k_2] \neq \prod_{i=1}^2 \mathbf{P} [N'(t_i) - N'(t_{i-1}) = k_i],$$

womit N' keine unabhängigen Zuwächse besitzt.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende schriftliche Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die von mir angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, wurden in jedem Fall unter Angabe der Quellen (einschliesslich des World Wide Web und anderer elektronischer Text- und Datensammlungen) kenntlich gemacht. Dies gilt auch für die beigegebenen Zeichnungen, bildlichen Darstellungen, Skizzen und dergleichen. Mir ist bewusst, dass jedes Zuwiderhandeln als Täuschungsversuch zu gelten hat, der die Anerkennung der Bachelorarbeit ausschließt und weitere angemessene Sanktionen zur Folge haben kann.

Siegen, 20. August 2018

Ort, Datum

Jonathan Schmitz