Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto de Oceanografia

CÁLCULO II

Notas, Exercícios e Aplicações

J. Mauro Xavier Elsas

Conteúdo

Ementa de Cálculo II

1. Integral Definida: Aplicações
   1.1. Cálculo de área sob uma curva
   1.2. Integral de Riemann
   1.3. Teorema fundamental do cálculo
   1.4. Área entre duas curvas
   1.5. Volume de sólido de revolução
   1.6. Comprimento de arco
   1.7. Integral imprópria
2. Derivadas Parciais
   2.1. Funções de duas ou mais variáveis, limite, continuidade
   2.2. Curva de nível
   2.3. Derivada direcional e gradiente
   2.4. Plano tangente
   2.5. A ”Regra da Cadeia”
   2.6. Diferencial total
   2.7. Derivadas de ordem superior
   2.8. Máximos e Mínimos; Multiplicadores de Lagrange
   2.9. Integrais Múltiplas
   2.10. Integral dupla; Área
   2.11. Coordenadas polares

1 Integral Definida: Aplicações

1.1 Cálculo de área sob uma curva

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo fechado e limitado, tal que:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Nessas condições, pode-se associar à função f uma região do plano limitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. A medida dessa região é chamada de **área sob a curva** de f no intervalo $[a, b]$.

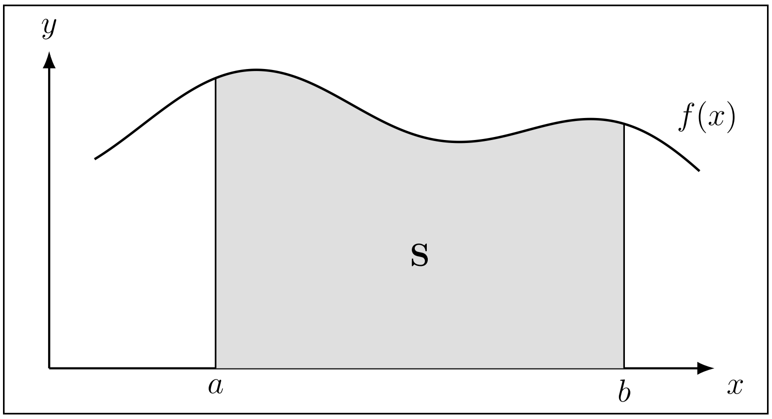


Figura 1: Região S sob o gráfico de $f(x)$ entre a e b.

Do ponto de vista geométrico, essa área é o objeto que se deseja calcular. Entretanto, não existe, em geral, uma fórmula elementar direta para essa medida. Por isso, recorre-se a métodos de aproximação.

1.1.1 Aproximação por retângulos

Para estimar a área sob a curva, divide-se o intervalo $[a, b]$ em subintervalos:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, constrói-se um retângulo de base:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

e altura dada por um valor da função nesse respectivo subintervalo.
A soma das áreas desses retângulos fornece uma aproximação da área total. Quanto maior o número de retângulos (ou menor a largura dos subintervalos), melhor tende a ser essa aproximação.

1.1.2 Área e sinal da função

A interpretação geométrica apresentada só é válida quando $f(x) \geq 0$. Quando a função assume valores negativos, a região correspondente situa-se abaixo do eixo x, e a noção de área geométrica deve ser tratada com cuidado, pois a integral pode resultar em valores negativos.
Nesse caso, a ferramenta matemática adequada para tratar o problema de forma sistemática é a integral definida, que será formalmente introduzida na próxima seção.

1.2 Integral de Riemann

A integral de Riemann é um conceito matemático que formaliza o processo de passagem ao limite das somas usadas para aproximar áreas. Ela independe de interpretações geométricas sendo definida de forma puramente analítica.

1.2.1 Partições e somas de Riemann

A área do **círculo** (disco) pode ser aproximada particionando-se o disco em n triângulos, cujos vértices estão no centro O e cujas bases são **cordas** consecutivas da **circunferência**. Essa construção equivale a considerar um **polígono inscrito** de n lados e decompor sua área em n triângulos.
À medida que tomamos mais triângulos (isto é, quando n aumenta), as cordas passam a aproximar pequenos arcos da circunferência e a soma das áreas dos triângulos aproxima a área do círculo.

Em cada triângulo, a **apótema** (segmento perpendicular do centro à base) coincide com a **altura** do triângulo. Assim, a área do i-ésimo triângulo é

$$A_i = \frac{b_i\, h_i}{2},$$

em que b_i é o comprimento da corda (base) e h_i é a apótema correspondente. Somando as áreas dos n triângulos, obtemos a aproximação

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i\, h_i}{2}.$$

Quando n é grande, as apótemas h_i tornam-se cada vez mais próximas do raio r. Além disso, a soma das bases $\sum_{i=1}^{n} b_i$ é o **perímetro** do polígono inscrito, que tende ao comprimento da circunferência. Logo,

$$A_n \approx \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) r \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2}\,(2\pi r)\, r = \pi r^2.$$

Portanto, a área do círculo é

$$A = \pi r^2.$$

Nota (opção sem índices). Se tomarmos os n triângulos como **congruentes** (mesma base b e mesma apótema h), então

$$A_n = n \cdot \frac{b\,h}{2}.$$

Nesse caso, $n \cdot b$ é o perímetro do polígono inscrito e, quando $n \to \infty$, temos $nb \to 2\pi r$ e $h \to r$, concluindo novamente $A = \pi r^2$.

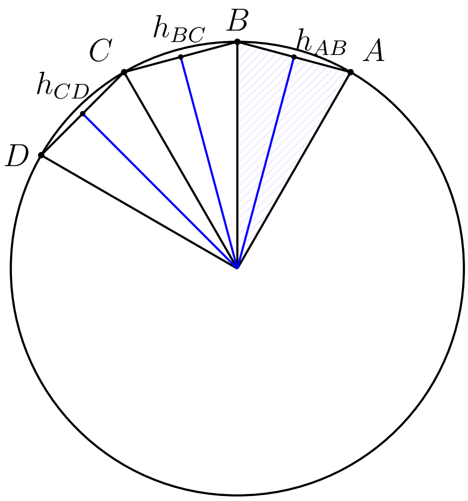


Figura 2: Triangulação por cordas e apótemas: a soma das áreas aproxima a área do círculo quando n cresce.

Se a mesma ideia for usada para uma $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, temos:
Dada uma partição P do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, definimos a largura de cada intervalo como

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Para cada subintervalo, escolhe-se um ponto amostral $C_i \in [x_{i-1}, x_i]$. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\,\Delta x_i$$

é chamada de **soma de Riemann** associada à partição P.
Define-se ainda a **norma da partição** por

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i.$$

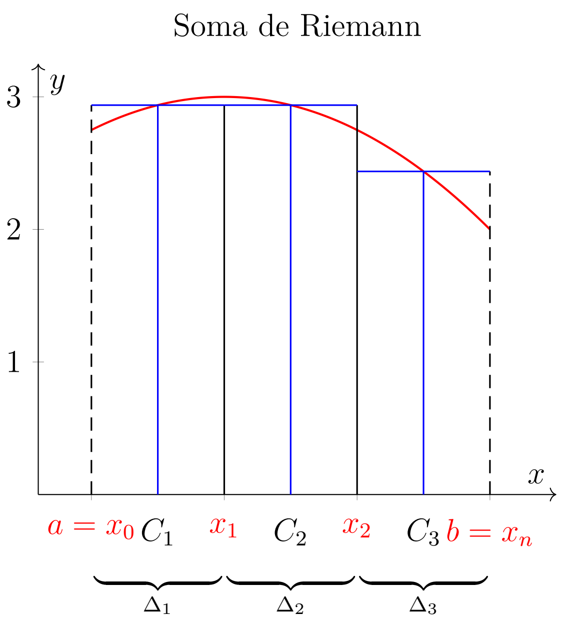


Figura 3: Aproximação da área sob $f(x) = 2x - x^2 + 2$ por retângulos.

1.2.2 Definição de integral de Riemann

Dizemos que a função f é **integrável no sentido de Riemann** em $[a, b]$ se existe o limite

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\,\Delta x_i,$$

e esse limite é o mesmo para qualquer escolha dos pontos C_i nos subintervalos. Quando esse limite existe, ele é chamado de **integral definida de Riemann** de f em $[a, b]$ e é denotado por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

1.2.3 Condições suficientes de integrabilidade

Teorema 1 (Condições Suficientes de Integrabilidade)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo fechado e limitado. Então f é integrável no sentido de Riemann em $[a, b]$ se satisfaz pelo menos uma das condições a seguir:*

- *f é contínua em $[a, b]$;*
- *f é monótona em $[a, b]$;*
- *f é limitada em $[a, b]$ e possui somente um número finito de pontos de descontinuidade.*

1.3 Teorema Fundamental do Cálculo

1.3.1 Exemplos clássicos

- $f(x) = x$ em $[0,1]$: contínua $\Rightarrow$ integrável e $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.
- **Dirichlet:** $f(x) = 1$ se x é racional e 0 se irracional em $[0,1]$. Não é integrável no sentido de Riemann.
- **Thomae ("pipoca"):** $f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \ (\gcd(p,q) = 1) \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$. É integrável no sentido de Riemann e $\int_0^1 f\,dx = 0$.

1.3.2 Exemplo por somas superior/inferior

Para $f(x) = x$ em $[0,1]$, use a partição uniforme $x_i = i/n$. Temos $m_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ e $M_i = x_i = \frac{i}{n}$. Logo,

$$L(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n-1}{2n},$$

$$U(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2n}.$$

Como $L(P_n, f), U(P_n, f) \to \frac{1}{2}$, conclui-se que $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

1.3.3 Relação do TFC com as integrais definidas

Se F é uma primitiva de f $(F' = f)$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

1.3.4 Integrais impróprias (observação)

Se f não é limitada em $[a,b]$ ou se o intervalo é infinito, define-se por limites:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

1.3.5 Propriedades úteis

Para funções integráveis f, g e escalares α, β:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx,$$
$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx,$$
$$\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx.$$

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \geq 0$$

$$f(x) = 0,9\,\mathrm{sen}(0,8x)$$

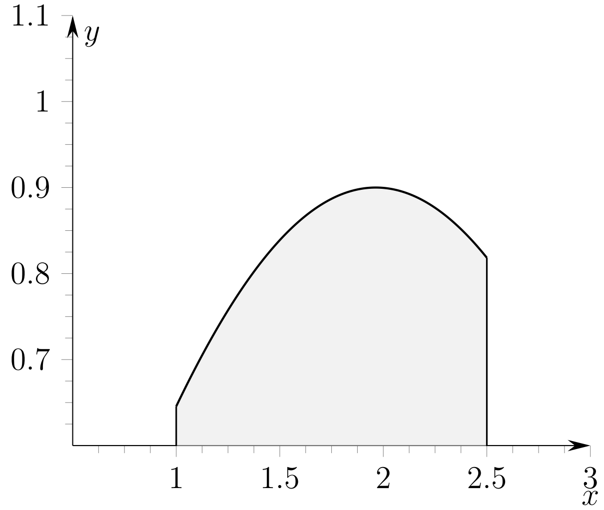


Figura 4: Área sob o gráfico.

Se, por hipótese, deseja-se calcular a área sob a curva, calcula-se a integral da função entre os limites de integração $[a,b]$, ou seja, a integral de Riemann.

A área de S é:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se F é uma primitiva de f, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercício 1.3.1. *Calcule a integral definida:*

$$\int_0^5 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5$$
$$= \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$
$$= \boxed{\frac{125}{3}\,u.a.}$$

Exercício 1.3.2. *Calcule a integral definida:*

$$\int_{-1}^1 e^x\,dx = \left.e^x\right|_{-1}^1$$
$$= e^1 - e^{-1}$$
$$= \boxed{e - \frac{1}{e}}\,u.a.$$

Exercício 1.3.3. *Calcule a integral definida:*

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \int_0^2 x^2\,dx - 2\int_0^2 x\,dx$$
$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - \left.x^2\right|_0^2$$
$$= \frac{8}{3} - 4 = \boxed{-\frac{4}{3}}\,u.a.$$

Exercício 1.3.4. *Calcule a Intedgral definida:*

$$\int_2^4 (4x - x^2)\,dx$$
$$= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4$$
$$= (2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}) - (2\cdot 2^2 - \frac{2^3}{3})$$
$$= \left(32 - \frac{64}{3}\right) - \left(8 - \frac{8}{3}\right)$$
$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

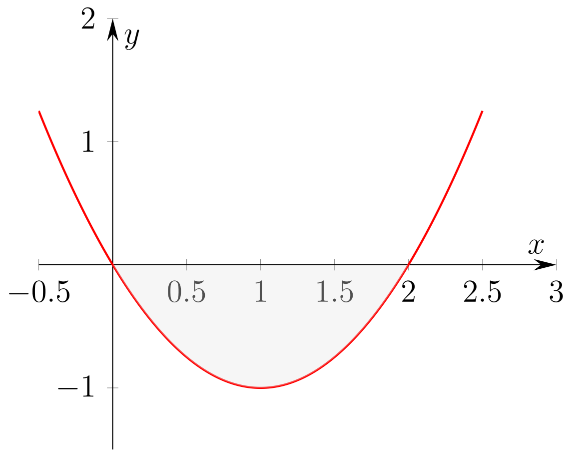


Figura 5: Função $f(x) = x^2 - 2x$ e a área (abaixo do eixo x).

1.3.6 O Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1)

O TFC estabelece que a derivada de uma função definida por uma integral é o próprio integrando avaliado no limite de integração superior. Quando o limite superior é uma função $g(x)$, aplicamos a Regra da Cadeia:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exercício 1.3.5. *Encontre a derivada da função:*

$$F(x) = \int_3^{x^2} \ln(t+1)\,dt.$$

a. *Identificamos o integrando* $f(t) = \ln(t+1)$ *e o limite superior* $g(x) = x^2$.

b. *Substituímos* t *por* $g(x)$ *na função:*

$$f(g(x)) = \ln(x^2+1)$$

c. *Multiplicamos pela derivada de* $g(x)$*, sendo*

$$g'(x) = 2x :$$
$$F'(x) = \ln(x^2+1) \cdot 2x$$

$$F'(x) = 2x\ln(x^2+1)$$

1.3.7 Caso Geral – Ambos os limites são funções

Se a função possui variáveis em ambos os limites de integração:

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\, dt$$

A derivada é dada por:

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Exercício 1.3.6. *Seja $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = (-x^2 - 2x)$ calcule a área sob as curvas entre os limites [-3,0]*

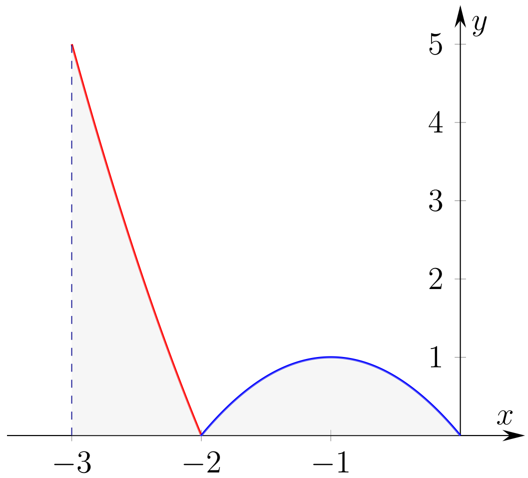


Figura 6: Função $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = -x^2 - 2x$.

Primeira Integral

$$\int_{-3}^{-2} (x^2 - 4)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-3}^{-2}$$

$$= \left[\frac{(-2)^3}{3} - (4 \cdot (-2))\right] - \left[\frac{(-3)^3}{3} - (4 \cdot (-3))\right]$$

$$-\frac{8}{3} - (-8) - (-\frac{27}{3} - (-12))$$

$$-\frac{8}{3} + \frac{24}{3} - \left(-\frac{27}{3} + \frac{36}{3}\right)$$

$$\frac{16}{3} - \frac{9}{3} = \frac{7}{3}$$

Segunda Integral

$$\int_{-2}^{0} (-x^2 - 2x)\, dx$$

$$\left[\left(-\frac{x^3}{3}\right) - \left(x^2\right)\right]_{-2}^{0}$$

$$0 - \left[\left(-\frac{-2^3}{3}\right) - \left(-2^2\right)\right]$$

$$0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Área total

$$\frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{11}{3}}\, u.a.$$

1.4 Área entre curvas

Nesta seção, ”área entre curvas”significa **área geométrica** (sempre não-negativa), calculada por integrais definidas. Em todos os casos, a ideia central é somar a área de tiras (verticais ou horizontais) que preenchem a região. O cálculo de áreas utilizando integrais baseia-se no princípio fundamental de somar infinitos retângulos de altura infinitesimal. A altura de cada retângulo é definida pela diferença entre o ”teto”(limite superior) e o ”chão”(limite inferior) da região. Abaixo, detalhamos os quatro cenários principais.

1.5 Área sob uma Curva (Acima do Eixo X)

Conforme visto na seção 1.2 sobre integral de Riemann, quando uma função $f(x)$ é contínua e positiva em um intervalo $[a, b]$, a área é calculada entre a curva e o eixo x. Neste caso, o eixo x atua como o limite inferior ($y = 0$).

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

Caso 1: $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$

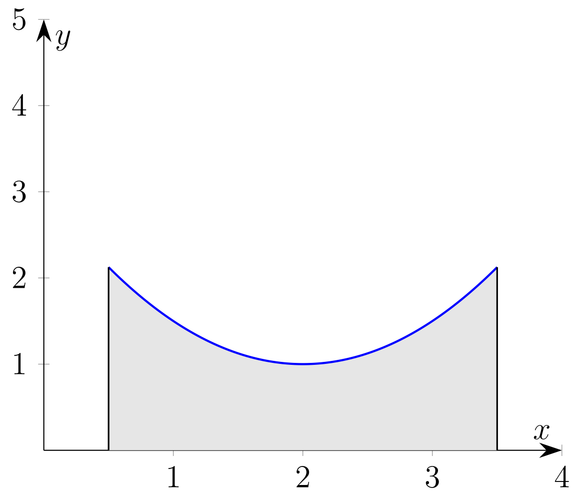


Figura 7: Se $f(x) \geq 0$, então $A = \int_a^b f(x)\, dx$.

1.6 Área entre Duas Curvas (integralmente no primeiro quadrante)

Quando temos duas funções $f(x)$ e $g(x)$ em um intervalo $[a, b]$, onde $f(x) \geq g(x)$ para todo x, a área da região delimitada por elas é a integral da diferença entre a função superior e a inferior.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \tag{2}$$

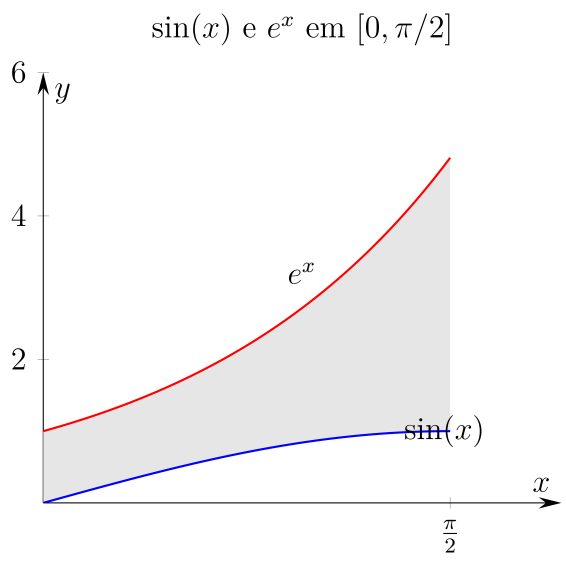


Figura 8: Área entre e^x e $\sin(x)$ no intervalo $[0, \pi/2]$.

Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sin(x)$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$, então a área entre essas duas curvas é dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(e^x - \sin(x)\Big)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx. \end{aligned}$$

Primeira integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\, dx = \Big[e^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - 1.$$

Segunda integral:

$$\begin{aligned} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = -\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \\ = 0 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Assim, a área entre as curvas é:

$$A = \Big(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\Big) + (-1) = e^{\frac{\pi}{2}} - 2 \approx 2{,}81 \text{ u.a.}$$

Exercício 1.6.1. *sejam $f(x) = 4x - x^2$ e $g(x) = x^2$, calcular a área entre as curvas. Embora não seja obrigatório, vou fazer o gráfico para ter uma noção maior do problema. Pelo gráfico, a interseção entre as curvas parece ser em (0,0 e)(2,4) mas isso precisa ser demontrado algebricamente. As interseções são no pontos onde as funções são iguais.*

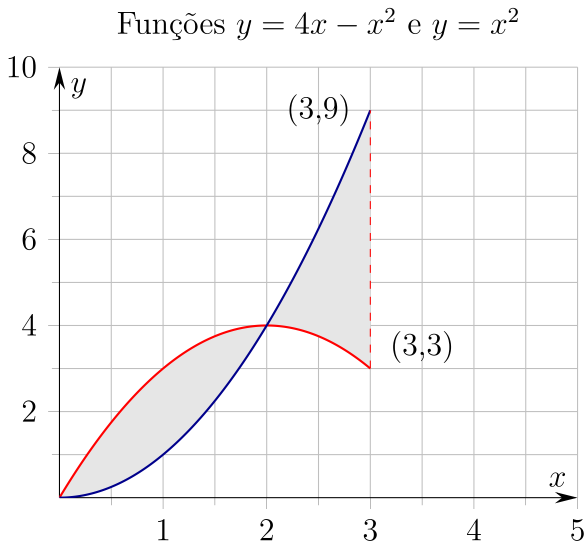


Figura 9: Área entre as curvas que se cruzam

Então:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = g(x)\\
&4x - x^2 = x^2\\
&-2x^2 + 4x = 0\\
&x(-2x + 4) = 0\\
&x' = 0\\
&2x = 4 \therefore x" = 2
\end{aligned}
$$

conforme mostrado no gráfico, podemos dizer que os limites da primeira integral é dado por: [0,2] e para a segunda integral é [2,2,5]
Primeira Integral

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 (4x - x^2)\,dx - \int_0^2 x^2\,dx\\
&= \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\\
&= \left[2(2^2) - \frac{2^3}{3}\right] - 0 - \left[\frac{2^3}{3}\right] - 0\\
&= \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[\frac{8}{3}\right] = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}
\end{aligned}
$$

Segunda Integral

$$
\begin{aligned}
&\int_2^3 x^2\,dx - \int_2^3 (4x - x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 - \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 \\
&= \left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right] - \left[\left[2(3^2) - \frac{3^3}{3}\right] - \left[2(2^2) - \frac{2^3}{3}\right]\right] \\
&= \frac{19}{3} - \left[18 - \frac{27}{3} - \left(8 - \frac{8}{3}\right)\right] \\
&= \frac{19}{3} - \left[\frac{54}{3} - \frac{27}{3} - \frac{16}{3}\right] \\
&= \frac{19}{3} - \frac{11}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

então a área total é,

$$\frac{16}{3} + \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = \boxed{8u.a.}$$

1.7 Tipo 1: Uma função sempre acima da outra (posição relativa fixa)

Considere duas funções contínuas f e g em $[a, b]$ tais que, para todo $x \in [a, b]$, vale

$$f(x) \geq g(x).$$

Nesse caso, a região entre as curvas $y = f(x)$ (curva superior) e $y = g(x)$ (curva inferior), limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$, tem área dada por

$$A = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx.$$

Exemplo (sem números): área limitada superiormente por $y = f(x)$, inferiormente por $y = g(x)$ e lateralmente por $x = a$ e $x = b$, sem que as curvas se cruzem no intervalo.

Observação importante. Não importa se f e g estão acima ou abaixo do eixo x. O que importa é somente qual delas está *acima da outra*. Mesmo que $f(x)$ e $g(x)$ sejam negativos, a área continua sendo $\int(\text{superior} - \text{inferior})\,dx$.

1.8 Tipo 2: As curvas se entrecruzam (troca de quem está por cima)

Suponha que f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e que existam pontos de interseção:
c_1, $c_2, \ldots, c_n$ no intervalo, isto é,

$$f(c_k) = g(c_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

de modo que a posição relativa (quem está acima) pode mudar de um subintervalo para outro. Nesse caso, a área geométrica deve ser calculada **particionando o intervalo** nos pontos de interseção e somando as contribuições:

$$A = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} \Big(\text{curva superior} - \text{curva inferior}\Big)\, dx,$$

onde $c_0 = a$ e $c_{n+1} = b$, e em cada subintervalo $[c_k, c_{k+1}]$ escolhe-se corretamente qual função é a superior.
Uma forma compacta (quando só há duas curvas) é

$$A = \int_a^b \Big|f(x) - g(x)\Big|\, dx,$$

mas, na prática, a forma particionada é a mais segura, pois explicita a troca de posição.
Exemplo (sem números): duas curvas que se cruzam uma vez dentro de $[a, b]$, sendo f superior em $[a, c]$ e g superior em $[c, b]$. A área é a soma de duas integrais, uma em cada trecho.

1.9 Tipo 3: Área em relação ao eixo x (curva(s) acima/abaixo do eixo)

Quando o problema envolve o eixo x como fronteira (por exemplo, "área entre a curva e o eixo x"), a mudança de sinal passa a ser essencial. Para uma função contínua f em $[a, b]$:

(a) Curva toda acima do eixo

Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então a área entre $y = f(x)$ e o eixo x é

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exemplo (sem números): região limitada por $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, com f sempre positiva.

(b) Curva toda abaixo do eixo

Se $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$, a área geométrica é

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx \;=\; -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Exemplo (sem números): região limitada por $y = f(x)$, pelo eixo x e por $x = a$, $x = b$, com f sempre negativa.

(c) Curva cruza o eixo (muda de sinal)

Se existem pontos $r_1, r_2, \ldots, r_m$ em $[a, b]$ tais que $f(r_j) = 0$, então deve-se **particionar** o intervalo nesses zeros e somar as áreas positivas:

$$A = \sum_{j=0}^{m} \int_{r_j}^{r_{j+1}} |f(x)|\, dx,$$

com $r_0 = a$ e $r_{m+1} = b$. **Exemplo (sem números):** uma curva que cruza o eixo x uma vez: calcula-se a integral em dois trechos e somam-se os módulos.

1.10 Resumo operacional

- **Entre duas curvas:** em cada trecho, use superior $-$ inferior. Se cruzarem, **parta** nos pontos de interseção.
- **Com o eixo x:** use $|f(x)|$ ou parta nos zeros de f e some áreas positivas.
- O eixo x **só importa** quando ele é fronteira do problema.
  Caso contrário, ”acima/abaixo do eixo”não altera a fórmula: o critério é sempre **quem está acima de quem**.

1.11 Curvas que se Cruzam

Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ se cruzam em um ponto c, a posição relativa de ”teto”e ”chão”se inverte. Para calcular a área total, devemos dividir a integral nos pontos de interseção.

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\, dx \tag{3}$$

Exercício 1.11.1. *No caso da área da Figura 10, as funções $f(x)$ e $g(x)$ são:*

$$f(x) = (x-2)^2 + 1,$$
$$g(x) = x + 1.$$

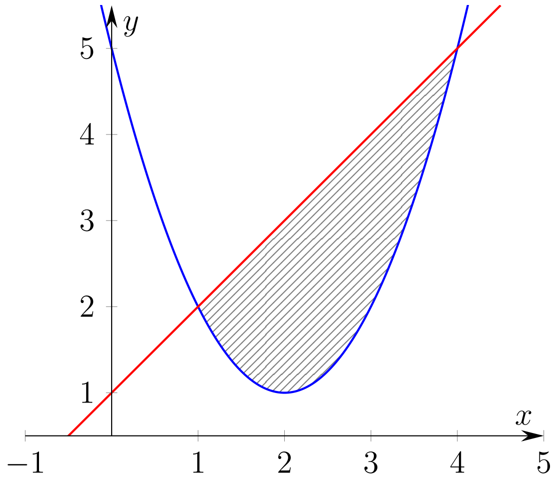


Figura 10: Área entre curvas que se cruzam.

Nesse caso, diferentemente do que já foi feito no Exercício 1.6.1o cálculo será feito entre os pontos de interseção das funções, sem incluir parte entre 0 e o primeiro cruzamento das funções. (Esse exercício pode ser revisado porsteriormente.)

$$f(x) = g(x)$$

$$(x-2)^2 + 1 = x + 1$$

$$(x-2)^2 = x$$

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x = -4$$

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad \checkmark$$

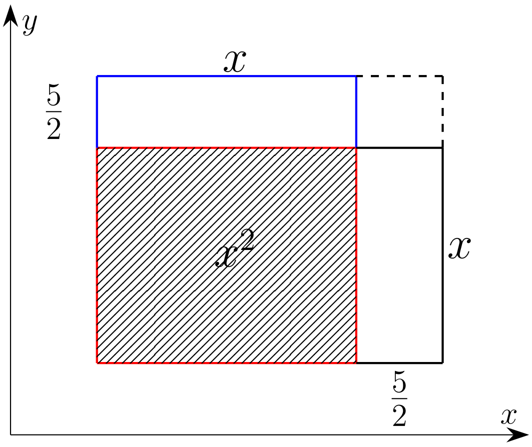


Figura 11: Completar quadrados.

Assim, fica definido que a área entre os pontos de interseção das curvas é calculada por:

$$\int_1^4 (x+1)\,dx - \int_1^4 \Big((x-2)^2+1\Big)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\int_1^4 (x+1)\,dx - \int_1^4 \Big((x-2)^2+1\Big)\,dx \\
&= \int_1^4 x\,dx + \int_1^4 1\,dx - \left(\int_1^4 (x-2)^2\,dx + \int_1^4 1\,dx\right) \\
&= \int_1^4 x\,dx - \int_1^4 (x-2)^2\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 - \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right) + (2\cdot 16 - 2\cdot 1) - (16-4) \\
&= \frac{15}{2} - 21 + 18 = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

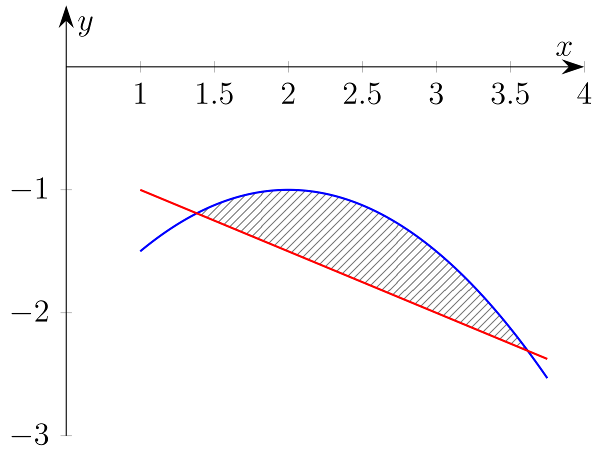


Figura 12: Área hachurada entre as intersecções.

No segundo caso, as funções são:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\Big(0{,}5(x-2)^2+1\Big) = -0{,}5x^2+2x-3,\\
g(x) &= -\Big(0{,}5x+0{,}5\Big).
\end{aligned}$$

Cálculo dos pontos de interseção:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\\
-0{,}5x^2+2x-3 &= -(0{,}5x+0{,}5)\\
-0{,}5x^2+2{,}5x &= 2{,}5\\
0{,}5x^2-2{,}5x &= -2{,}5\\
x^2-5x &= -5\\
x^2-5x+\frac{25}{4} &= -5+\frac{25}{4}\\
\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4}\\
x &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, a área é calculada por:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x_1}^{x_2} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx \\
&= \int_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right) - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\right] dx \\
&= \int_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}\right) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{4} - \frac{5x}{2}\right]_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{5\sqrt{5}}{12} \approx 0{,}932.
\end{aligned}$$

Resumo Prático

A fórmula será sempre:

$$\int_{esquerda}^{direita} (\mathit{Teto} - \mathit{Chão})\,dx$$

Exercício 4.

Calcular a área entre a curva e o eixo x para o intervalo $[2, 5]$.

$$f(x) = 4x - x^2$$

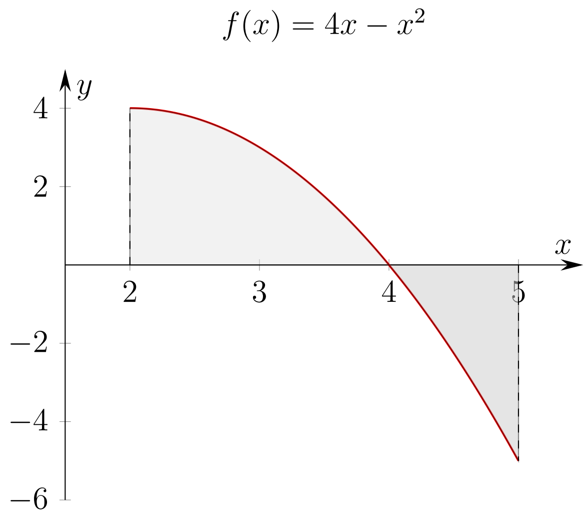


Figura 13: Área entre $f(x)$ e o eixo x no intervalo $[2, 5]$.

Como parte da curva fica abaixo do eixo x, separamos a área em dois trechos: $[2, 4]$ (acima do eixo) e $[4,5]$ (abaixo do eixo). Assim:

$$A = \int_2^4 (4x - x^2)\, dx - \int_4^5 (4x - x^2)\, dx.$$

Primeira integral:

$$\int_2^4 (4x - x^2)\, dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \left(32 - \frac{64}{3}\right) - \left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Segunda integral (com sinal de área):

$$\begin{aligned}-\int_4^5 (4x - x^2)\, dx &= -\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^5 = -\left(\left(50 - \frac{125}{3}\right) - \left(32 - \frac{64}{3}\right)\right)\\ &= -\left(\frac{25}{3} - \frac{32}{3}\right) = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

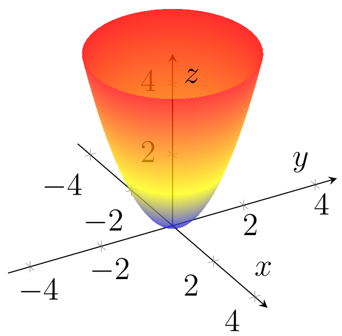
Logo, a área total sob a curva no intervalo $[2,5]$ é:

$$A = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{23}{3}\text{ u.a.}}$$

1.12 Funções no espaço tridimensional

São funções do tipo: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Superfícies de nível são um conjunto de pontos no espaço tridimensional onde uma função de três variáveis atinge um valor constante. Elas são obtidas ao igualar a função a uma constante, como $f(x,y,z) = k$. Essa visualização tridimensional é análoga às curvas de nível usadas em mapas topográficos para representar a altitude.



1. **Equação do Plano:**

$$z = ax + by + c$$

$$\left\{(x,y,z) \in \text{Dom}(f) \;\middle|\; f(x,y,z) = k\right\}$$

2. **Paraboloide Elíptico.** Para $a, b > 0$:

$$z = ax^2 + by^2$$

3. **Paraboloide Hiperbólico.**

$$z = ax^2 - by^2$$

4. **Cilindros.**
   (a) **Cilindro Parabólico.** Cada corte $y = c$ é uma parábola.

$$z = x^2$$

   (b) **Cilindro Elíptico.**

$$x^2 + y^2 = 1$$

5. **Superfícies Quádricas.**
   (a) **Elipsoide.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   (b) **Hiperboloide de uma folha.**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   (c) **Hiperboloide de duas folhas.**

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tabela 1: Sinais dos coeficientes das superfícies quádricas usuais

Superfície	**a**	**b**	**c**
Elipsoide	+	+	+
Hiperboloide 1 folha	+	+	-
Hiperboloide 2 folhas	-	-	+

6. **Superfícies Esféricas.** A esfera não é uma função de (x, y).
7. **Superfícies Compostas.**
   (a) **Cone.**

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   (b) **Superfície Helicoidal.**

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = c\,\theta \end{cases}$$

onde: r é o raio; θ é o parâmetro angular (rad); c controla o passo da hélice.

Para funções de uma variável $y = f(x)$, temos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Exemplo.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Domínio: $D(f) = \mathbb{R}^3$ e Imagem: $I(f) = [0, \infty)$.
As **superfícies de nível** são dadas por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

- Se $c > 0$: esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{c}$.
- Se $c = 0$: reduz-se ao ponto $(0, 0, 0)$.
- Se $c < 0$: não existe superfície de nível (conjunto vazio).

Exemplo. Seja a equação $z^2 - 3(x^2 + y^2) = 0$. Isolando os termos:

$$\frac{z^2}{3} = x^2 + y^2$$

Isso representa um **cone circular duplo**.

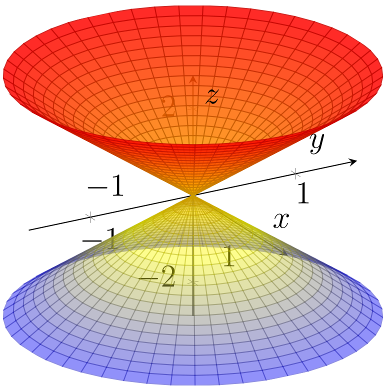


Figura 14: Cone circular duplo: $z^2 - 3(x^2 + y^2) = 0$.

Se $c = 1$ na equação $\frac{z^2}{3} - x^2 - y^2 = c$, temos um **hiperboloide de duas folhas**. Se $c = -1$, o gráfico será um **hiperboloide de uma folha**.

1.12.1 Interpretação Geométrica

Modelo geral

Para qualquer $f(x, y)$ e $x(t), y(t)$, temos:

$$\boxed{\frac{d}{dt} f\Big(x(t), y(t)\Big) = f_x\Big(x(t), y(t)\Big)\, x'(t) + f_y\Big(x(t), y(t)\Big)\, y'(t)}.$$

Exercício. Suponha que o seu peso (z) em kg segue a função $z = f(c, n)$, onde c é o número de calorias que você consome diariamente e n é o número de minutos de exercícios físicos diários.
(FALTA COMPLETAR O EXERCÍCIO.)

Páginas referenciadas de A a D.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cálculo fora da origem $(x,y) \neq (0,0)$

Derivada em relação a x pela regra do quociente:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$u = x^3 - y^2 \quad \Rightarrow \quad u_x = 3x^2$$
$$v = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad v_x = 2x$$

$$f_x = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$f_x = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$f_x = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Derivada em relação a y:

$$u = x^3 - y^2 \quad \Rightarrow \quad u_y = -2y$$
$$v = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad v_y = 2y$$

$$f_y = \frac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^3 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$f_y = \frac{-2yx^2 - 2y^3 - 2yx^3 + 2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$f_y = \frac{-2x^2y - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2y(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Cálculo na origem $(0,0)$ pela definição

Para $f_x(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-0}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Para $f_y(0,0)$:

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0-k^2}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-1}{k}$$

Como $k \to 0$, o limite tende a $\pm\infty$. Logo, $\nexists f_y(0,0)$.
Nota: Uma função de várias variáveis pode ter derivadas parciais em um ponto e não ser contínua nesse ponto. Contudo, se uma das derivadas parciais tende ao infinito, a função não é diferenciável naquele ponto.

Exercício: Inclinação de Superfície

Determine a inclinação da superfície dada por:

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

1. **Na direção do eixo x:**

$$f_x = -x \quad \Rightarrow \quad f_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

2. **Na direção do eixo y:**

$$f_y = -2y \quad \Rightarrow \quad f_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Curvas de Nível

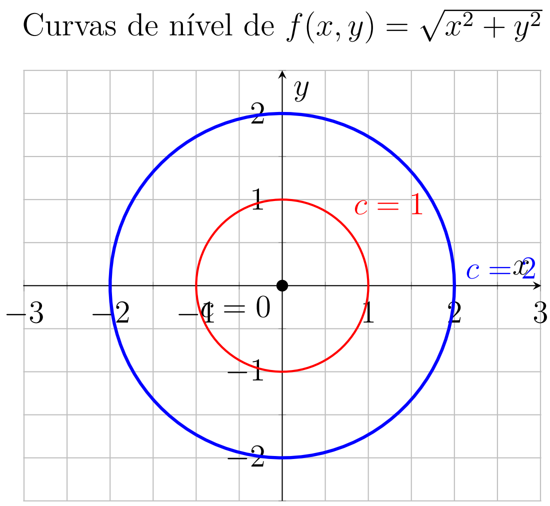


Figura 15: Curvas de nível para $c = 0, 1, 2$ (Cones).

Plano Tangente

Seja a função:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-4y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1.12.2 Exercício 5 da Lista 2

2 Derivadas Parciais

2.1 Funções de duas ou mais variáveis, limite, continuidade

2.2 Curva de nível

2.3 Derivada direcional e gradiente

2.4 Plano tangente

2.5 A Regra da Cadeia

2.6 Diferencial total

2.7 Derivadas de ordem superior

2.8 Máximos e Mínimos; Multiplicadores de Lagrange

2.9 Otimização Condicionada

Otimização Condicionada – Multiplicadores de Lagrange

Maximizar $f(x, y)$ quando (x, y) satisfazem a condição $g(x, y) = 0$:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } f(x,y) \\ \text{s.a. } g(x,y) = 0 \end{cases}$$

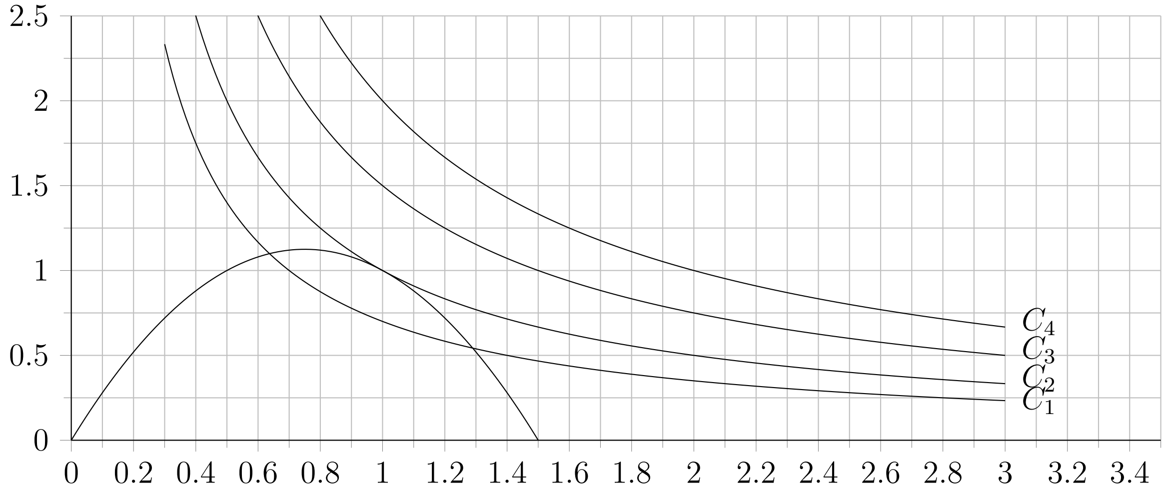


Figura 16: Curvas de nível e tangência (exemplo ilustrativo).

$$\nabla g(P) \perp \text{curva } g = 0, \qquad \nabla f(P) \perp \text{curva } f = C.$$

No ponto P que fornece $f_{\max}$ (ou $f_{\min}$) sob a condição $g = 0$, as curvas de nível de g e de f são tangentes. Logo, $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ têm a mesma direção, isto é, são múltiplos. Assim, existe um número real λ tal que

$$\nabla f(P) = \lambda \, \nabla g(P),$$

onde λ é chamado de *multiplicador de Lagrange*.
Para encontrar máximos e mínimos de $f(x, y)$ sob a restrição $g(x, y) = 0$, devemos resolver:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \, \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Isto é:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \, \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \, \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Exercício 1. Determinar, dentre todos os retângulos de perímetro 12, aquele que possui a maior área.

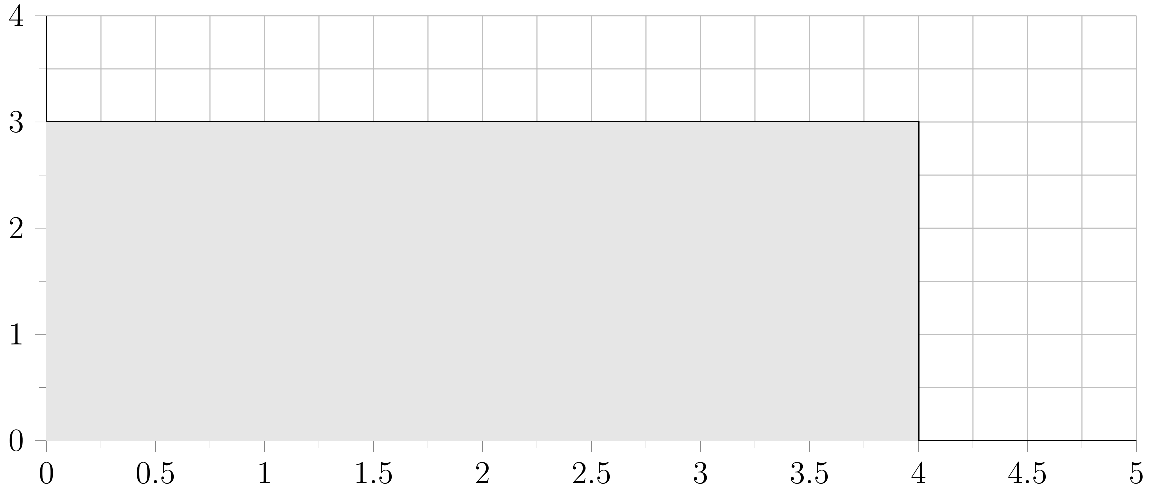


Figura 17: Retângulo com lados x e y (ilustrativo).

$$\begin{cases} \text{Maximizar } f(x,y) = xy \\ \text{s.a. } g(x,y) = 2x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

Nota. $g(x, y) = 0$ representa o perímetro fixado em 12.

Como $\nabla f = (y, x)$ e $\nabla g = (2, 2)$, a condição $\nabla f = \lambda \nabla g$ resulta em:

$$\begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \\ 2x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow x = y.$$

Substituindo na restrição: $2x + 2x = 12 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$, logo $y = 3$. O retângulo de área máxima é um quadrado de lado 3, resultando em $x = 3$ e $y = 3$.

Exercício 2. Calcule os valores máximo (Max) e mínimo (Min) de $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ sob a restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Calculando os gradientes:

$$\nabla f(x, y) = (2x - y,\ -x + 2y), \qquad \nabla g(x, y) = (2x,\ 2y).$$

O sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ fornece:

$$\begin{cases} 2x - y = 2\lambda x \\ -x + 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação: $2x - y = 2\lambda x \Rightarrow -y = 2x(\lambda - 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x(1 - \lambda)}$. Da segunda equação: $-x + 2y = 2\lambda y \Rightarrow -x = 2y(\lambda - 1) \Rightarrow \boxed{x = 2y(1 - \lambda)}$.

Dividindo as equações (assumindo $xy \neq 0$):

$$\frac{y}{x} = 2(1 - \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{x}{y} = 2(1 - \lambda) \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = y^2.$$

Com $x^2 + y^2 = 1$, segue que:

$$x^2 = y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Os pontos candidatos são $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$. Deve-se avaliar f em cada ponto para determinar o máximo e o mínimo.

Exercício 3. Achar o máximo (Max) e o mínimo (Min) de $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$ sob a restrição $(x - 2)^2 + y^2 = 2$.

Derivadas parciais:

$$\begin{cases} f_x = 2 - 2x \\ f_y = 2 - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} g_x = 2(x - 2) \\ g_y = 2y \end{cases}$$

Sistema de Lagrange:

$$\begin{cases} 2-2x = \lambda\, 2(x-2) \Rightarrow (1-x) = \lambda(x-2) \\ 2-2y = \lambda\, 2y \Rightarrow 1-y = \lambda y \\ (x-2)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Da segunda equação: $\lambda = \frac{1-y}{y}$ (para $y \neq 0$). Substituindo na primeira:

$$(1-x) = \frac{1-y}{y}(x-2) \Rightarrow y(1-x) = (1-y)(x-2).$$

Expandindo:

$$y - xy = x - 2 - xy + 2y \Rightarrow y = x - 2 + 2y \Rightarrow y = 2 - x.$$

Aplicando na restrição:

$$(x-2)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (2-x)^2 = 2 \Rightarrow 2(x-2)^2 = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 1.$$

Portanto, $x = 2 \pm 1$, resultando em:

$$x_1 = 3,\ y_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = 1,\ y_2 = 1.$$

Avaliação da função:

$$f(1,1) = 2 + 2 - 1 - 1 = 2, \qquad f(3,-1) = 6 - 2 - 9 - 1 = -6.$$

Logo, $f_{\max} = 2$ em $(1,1)$ e $f_{\min} = -6$ em $(3,-1)$.

2.10 Integrais Múltiplas

2.11 Integral dupla; Área

2.12 Coordenadas polares

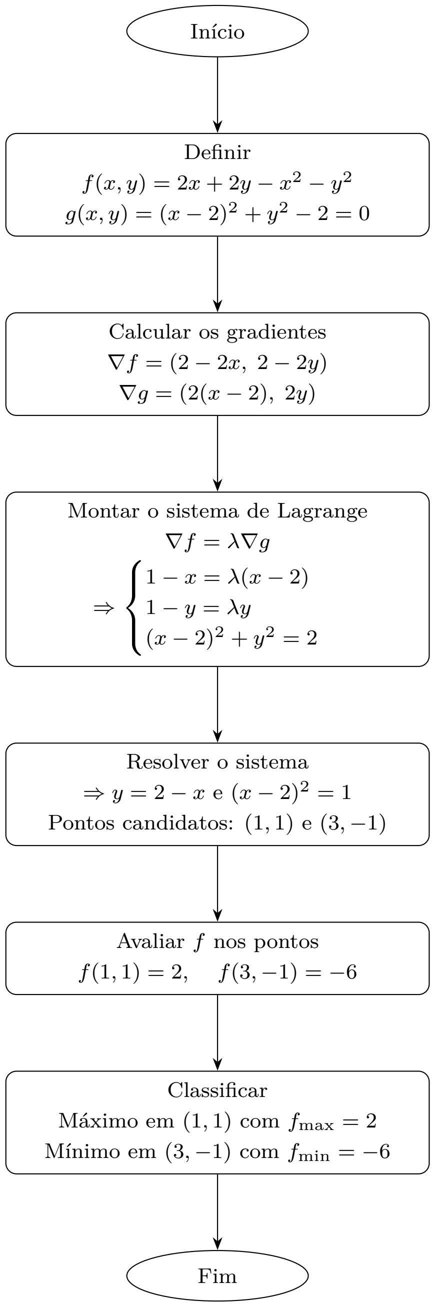


Figura 18: Fluxograma do método dos multiplicadores de Lagrange.