

Matemáticas

Cálculo de varias variables

Dennis G. Zill
Warren S. Wright



Matemáticas 3

Cálculo de varias variables

Matemáticas 3

Cálculo de varias variables

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Warren S. Wright
Loyola Marymount University

Adaptación y revisión técnica:
Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos

Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez

Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.

Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez

Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Hugo Villagómez Velázquez y Gabriel Nagore Cázares

MATEMÁTICAS 3. Cálculo de varias variables

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



DERECHOS RESERVADOS © 2011 respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of *The McGraw-Hill Companies, Inc.*

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-607-15-0536-1

Adaptación de la obra *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4a. edición, de Dennis G. Zill y Warren S. Wright.
Copyright © 2011 por McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V.

ISBN: 978-607-15-0502-6

Traducido de la cuarta edición de *Calculus. Early transcendentals*.
Copyright © 2010 por Jones and Bartlett Learning. All rights reserved.

ISBN: 978-0-7637-5995-7

1234567890

1098765432101

Impreso en México

Printed in Mexico

☰ Para el instructor

Filosofía

En esta serie de *Matemáticas* he intentado preservar intacto mi objetivo original de compilar un texto de cálculo que no sea sólo una colección de definiciones y teoremas, habilidades y fórmulas para memorizar, así como problemas para resolver, sino un material que se comunique con sus lectores más importantes: los estudiantes. Deseo que estos cambios hagan más relevante e interesante el texto tanto para el estudiante como para el profesor.

Características de esta obra

Secciones y ejercicios El material que se ha seleccionado para esta serie es actual. Los conjuntos de ejercicios se han organizado en problemas que requieren el uso de calculadora y computadora, problemas conceptuales y problemas de proyectos. En su mayoría, las aplicaciones consideradas pertenecen al ámbito de la “vida real” en el sentido de que se han investigado exhaustivamente usando fuentes originales. También se han incluido problemas relacionados con la interpretación de gráficas. Además, se ha hecho énfasis en las funciones trigonométricas tanto en los ejemplos como en los conjuntos de ejercicios a lo largo del texto. La serie completa (*Matemáticas 1*, *Matemáticas 2* y *Matemáticas 3*) contiene más de 7 300 problemas.

Como ayuda en la asignación de problemas, cada conjunto de ejercicios está dividido claramente en grupos de problemas identificados con títulos como *Fundamentos*, *Aplicaciones*, *Modelos matemáticos*, *Proyectos*, *Problemas con calculadora/SAC*, etcétera. Creo que la mayoría de los títulos son autosuficientes, de modo que los problemas que aparecen bajo el encabezado *Píense en ello* tratan aspectos conceptuales del material cubierto en esa sección y son idóneos como tareas o para discutir en clase. En el texto no se proporciona respuesta alguna para estos problemas. Algunos están identificados como *Clásicos matemáticos* y reflejan el hecho de que han existido durante largo tiempo, aparecen en la mayor parte de los textos o presentan algún detalle interesante, mientras que otros problemas identificados como *Un poco de historia* muestran algún aspecto histórico.

Una característica sobresaliente de *Matemáticas 3, Cálculo de varias variables*, es que provee al estudiante de herramientas importantes para incursionar en el cálculo de varias variables tales como la formalidad, elaboración de desarrollos analíticos y el fomento del uso constante de las TIC. Lo anterior desarrolla en el estudiante un pensamiento formal y heurístico que le permite la modelación de fenómenos y la solución de problemas.

En los apéndices se proporciona material de gran utilidad para los diferentes cursos. Al final de las secciones correspondientes aparecen esbozos biográficos de algunos matemáticos que han impactado de manera importante el desarrollo del cálculo bajo la rúbrica de *Posdata: Un poco de historia*.

Características especiales Cada unidad empieza con una introducción al material referido y con las competencias específicas de esa unidad. En la parte final del libro el lector encontrará la

sección *Fórmulas matemáticas*, que constituye una revisión compacta de conceptos básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo: las leyes de los exponentes, fórmulas de factorización, desarrollos binomiales, triángulo de Pascal, fórmulas de geometría, gráficas y funciones, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y fórmulas de diferenciación e integración.

La sección denominada *Evaluación diagnóstica* consta de 56 reactivos sobre cuatro amplias áreas de precálculo en matemáticas. Esta evaluación intenta alentar a los estudiantes a revisar por sí mismos algunos de los temas de prerrequisito esenciales, como valores absolutos, plano cartesiano, ecuaciones de rectas, círculos, etc., que se aplican a lo largo del texto. En la sección de respuestas se proporcionan las soluciones a todos estos reactivos.

Cada unidad incluye la sección *Notas desde el aula*. Se pretende que estas notas sean un análisis informal dirigido directamente al estudiante. Este análisis varía desde advertencias sobre errores algebraicos, de procedimiento y de notación comunes, pasando por la interpretación errónea de teoremas y consejos, hasta preguntas que piden al estudiante pensar en el tema y ampliar las ideas recién presentadas.

Asimismo, esta obra contiene un considerable número de notas al margen y anotaciones de orientación en los ejemplos.

Figuras, definiciones, teoremas Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas que hay en este texto, se ha adoptado un sistema de numeración doble decimal. Por ejemplo, la interpretación de “figura 1.2.3” es

Unidad	Sección de la unidad 1
	
	1.2.3 ← Tercera figura de la sección 1.2

Considero que este tipo de numeración facilita encontrar, por ejemplo, un teorema o una figura a la que se hace referencia en una sección o en una unidad posterior. Además, para relacionar mejor una figura con el texto, la *primera* referencia textual a cada figura aparece con el mismo estilo y color de letra que el número de la figura. Por ejemplo, la primera referencia a la primera figura en la sección 3.5 se proporciona como FIGURA 3.5.1, y todas las referencias subsecuentes se escriben en el estilo tradicional de la figura 3.5.1. También, en esta obra cada figura en el texto presenta un breve subtítulo explicatorio.

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información respecto de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

☰ Para el estudiante

Usted se ha matriculado en uno de los cursos más interesantes de matemáticas. Hace muchos años, cuando yo era estudiante de Cálculo I, me sorprendieron el poder y la belleza del material. Era distinto de cualquier tipo de matemáticas que hubiera estudiado hasta ese momento. Era divertido, emocionante y constituía un desafío. Después de enseñar matemáticas universitarias por muchos años, he conocido infinidad de tipos de estudiante, desde el genio incipiente que inventó su propio cálculo hasta estudiantes que luchaban por dominar la mecánica más elemental del tema. A lo largo de estos años también he sido testigo de un fenómeno triste: algunos estudiantes fracasan en cálculo no porque encuentren que el tema es imposible, sino porque tienen habilidades deficientes de álgebra y un conocimiento inadecuado del trabajo en trigonometría. El cálculo construye de inmediato sobre su conocimiento y habilidades previos, donde hay mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar las bases en el planteamiento formal del aula. Así, quienes enseñamos cálculo debemos asumir que usted puede factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, graficar puntos, trazar gráficas elementales y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas, la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponentes y logaritmos, así como trazar *a mano*, con rapidez y precisión, gráficas básicas que son claves para tener éxito en un curso de cálculo.

En las primeras páginas encontrará la sección “Evaluación diagnóstica”, que contiene 56 preguntas. Esta “prueba” es una oportunidad para que usted verifique sus conocimientos acerca de algunos temas que se tratan en este texto. Relájese, tome su tiempo, lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las que se proporcionan en las páginas finales. Sin tomar en cuenta su “calificación”, lo alentamos a que revise material de precálculo en algún texto acerca de la materia.

Unas palabras para los estudiantes que han cursado cálculo en preparatoria: por favor, no asuman que pueden lograrlo con un esfuerzo mínimo porque identifican algunos de los temas en cálculo diferencial e integral. Un sentimiento de familiaridad con el tema combinado con una actitud de complacencia a menudo es la razón del fracaso de algunos estudiantes.

Aprender matemáticas no es como aprender a andar en bicicleta: en que una vez que se aprende, la habilidad permanece para siempre. Las matemáticas son más como aprender otro idioma o tocar un instrumento musical: requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad. Aun los músicos experimentados continúan practicando escalas fundamentales. Por lo anterior, usted, el estudiante, sólo puede aprender matemáticas (es decir, hacer “que se le pegue”) mediante el trabajo arduo de hacer matemáticas. Aunque he intentado hacer más claros para el lector *la mayoría* de los detalles en la solución de un ejemplo, inevitablemente usted tiene que completar los pasos faltantes. No puede leer un texto de este tipo como si fuese una novela; debe abrirse camino a lo largo de él con lápiz y papel en mano.

En conclusión, le deseo la mejor de las suertes en este curso.

PRÓLOGO A ESTA EDICIÓN

Vivimos tiempos de cambio, y la educación no es ajena a este proceso. Los planes de estudio de las instituciones de educación superior se renuevan constantemente para estar a la altura de las necesidades actuales, y se establecen nuevas metodologías que deben ser respaldadas con obras editoriales de calidad.

Como una contribución a esta revolución educativa se desarrolla esta obra, dirigida a alguna materia del área básica, cursada en las principales escuelas de ciencias e ingeniería.

Los libros elaborados cubren los planes de estudio más recientes que se imparten en los institutos tecnológicos.

Aunado a lo anterior, nuestros reconocidos autores siguen ofreciendo el estilo científico preciso y de fácil comprensión que ha caracterizado a cada una de las obras.

Entre las principales características de esta serie se pueden mencionar:

- Adaptación al nuevo modelo de competencias.
- Ejemplos y ejercicios renovados.
- Utilización de las tecnologías de información y comunicación (TIC).
- Notas históricas que fundamentan los conceptos básicos.
- Notación formal de fácil accesibilidad para los alumnos.
- Estructura que contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico para modelar fenómenos y resolver problemas.
- Actividades encaminadas al desarrollo de competencias genéricas, instrumentales, sistémicas y específicas.

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca

≡ Las competencias y el cálculo vectorial

Una de las características más sobresalientes de esta nueva edición es que ha sido organizada para contribuir al desarrollo de competencias específicas, genéricas, instrumentales y sistémicas, listadas a continuación.

Competencias específicas

UNIDAD 1 *Vectores y espacio tridimensional*

- Analizar de manera intuitiva campos escalares y vectoriales del entorno.
- Identificar la manifestación de un vector en distintos contextos.
- Resolver con soltura operaciones entre vectores.

- Determinar ecuaciones de rectas y planos dados, así como asociar gráficas de planos y rectas a ecuaciones dadas.

UNIDAD 2 *Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares*

- Construir la gráfica de una curva plana en forma paramétrica eligiendo la técnica más apropiada

UNIDAD 3 *Funciones vectoriales de una variable real*

- Reconocer una función vectorial en distintos contextos y manejarla como un vector.
- Manejar con soltura ecuaciones paramétricas y el software para graficar curvas.
- Analizar gráficas de curvas de funciones vectoriales en el espacio.
- Determinar los parámetros que definen una curva en el espacio.

UNIDAD 4 *Funciones de varias variables*

- Analizar de manera formal campos escalares y vectoriales.
- Calcular derivadas parciales y direccionales, determinar gradientes, planos tangentes y valores extremos de una función.
- Resolver problemas que involucran varias variables.

UNIDAD 5 *Integrales múltiples*

- Plantear y resolver integrales a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado.
- Usar software para hallar la representación gráfica de un campo vectorial.

Competencias genéricas

- Transferir el conocimiento adquirido a otros campos de aplicación.
- Procesar e interpretar datos.
- Representar e interpretar conceptos en diferentes formas: numérica, geométrica, algebraica, trascendente y verbal.
- Comunicarse en el lenguaje matemático en forma oral y escrita.
- Modelar matemáticamente fenómenos y situaciones.
- Pensamiento lógico, algorítmico, heurístico, analítico y sintético.
- Potenciar las habilidades para el uso de tecnologías de la información.
- Resolución de problemas.
- Analizar la factibilidad de las soluciones.
- Toma de decisiones.
- Reconocimiento de conceptos o principios generales e integradores.
- Establecer generalizaciones.
- Argumentar con contundencia y precisión.
- Optimizar soluciones.

Competencias instrumentales

- Capacidad de análisis y síntesis.
- Comunicación escrita.
- Habilidades básicas de manejo de la computadora.
- Solución de problemas.

Competencias sistémicas

- Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.
- Habilidades de investigación.
- Capacidad de aprender.
- Capacidad de generar nuevas ideas.
- Habilidad para trabajar en forma autónoma.
- Búsqueda de logros.

☰ Agradecimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, mucha gente invirtió tiempo y energía en el proyecto. En primer lugar, me gustaría expresar

mi arecio para los equipos editorial, de producción y mercadotecnia de Jones y Bartlett, y a los siguientes revisores de esta obra, quienes contribuyeron con numerosas sugerencias, críticas válidas e incluso ocasionalmente con algunas palabras de apoyo:

Scott Wilde, <i>Baylor University</i>	Timothy Loughlin, <i>New York Institute of Technology</i>
Salvatore Anastasio, <i>SUNY, New Paltz</i>	Antonio Magliaro, <i>Southern Connecticut State University</i>
Thomas Bengston, <i>Penn State University, Delaware County</i>	Walter Fred Martens, <i>University of Alabama at Birmingham</i>
Steven Blasberg, <i>West Valley College</i>	William E. Mastrocola, <i>Colgate University</i>
Robert Brooks, <i>University of Utah</i>	Jill McKenney, <i>Lane Community College</i>
Dietrich Burbulla, <i>University of Toronto</i>	Edward T. Migliore, <i>Monterey Peninsula College</i>
David Burton, <i>Chabot College</i>	Carolyn Narasimhan, <i>DePaul University</i>
Maurice Chabot, <i>University of Southern Maine</i>	Harold Olson, <i>Diablo Valley College</i>
H. Edward Donley, <i>Indiana University of Pennsylvania</i>	Gene Ortner, <i>Michigan Technological University</i>
John W. Dulin, <i>GMI Engineering & Management Institute</i>	Aubrey Owen, <i>Community College of Denver</i>
Arthur Dull, <i>Diablo Valley College</i>	Marvin C. Papenfuss, <i>Loras College</i>
Hugh Easler, <i>College of William and Mary</i>	Don Poulson, <i>Mesa Community College</i>
Jane Edgar, <i>Brevard Community College</i>	Susan Prazak, <i>College of Charleston</i>
Joseph Eggar, <i>Cleveland State University</i>	James J. Reynolds, <i>Pennsylvania State University, Beaver Campus</i>
Patrick J. Enright, <i>Arapahoe Community College</i>	Susan Richman, <i>Penn State University, Harrisburg</i>
Peter Frisk, <i>Rock Valley College</i>	Rodd Ross, <i>University of Toronto</i>
Shirley Goldman, <i>University of California at Davis</i>	Donald E. Rossi, <i>De Anza College</i>
Joan Golliday, <i>Santa Fe Community College</i>	Lillian Seese, <i>St. Louis Community College at Meramec</i>
David Green, Jr., <i>GMI Engineering & Management Institute</i>	Donald Sherbert, <i>University of Illinois</i>
Harvey Greenwald, <i>California Polytechnic State University</i>	Nedra Shunk, <i>Santa Clara University</i>
Walter Gruber, <i>Mercy College of Detroit</i>	Phil R. Smith, <i>American River College</i>
Dave Hallenbeck, <i>University of Delaware</i>	Joseph Stemple, <i>CUNY Queens College</i>
Noel Harbetson, <i>California State University at Fresno</i>	Margaret Suchow, <i>Adirondack Community College</i>
Bernard Harvey, <i>California State University, Long Beach</i>	John Suvak, <i>Memorial University of Newfoundland</i>
Christopher E. Hee, <i>Eastern Michigan University</i>	George Szoke, <i>University of Akron</i>
Jean Holton, <i>Tidewater Community College</i>	Hubert Walczak, <i>College of St. Thomas</i>
Rahim G. Karimpour, <i>Southern Illinois University</i>	Richard Werner, <i>Santa Rosa Junior College</i>
Martin Kotler, <i>Pace University</i>	Loyd V. Wilcox, <i>Golden West College</i>
Carlon A. Krantz, <i>Kean College of New Jersey</i>	Jack Wilson, <i>University of North Carolina, Asheville</i>
George Kung, <i>University of Wisconsin at Stevens Point</i>	
John C. Lawlor, <i>University of Vermont</i>	

También me gustaría extender un agradecimiento extraespecial para las siguientes personas:

- Jeff Dodd, Jacksonville State University, por el proyecto compartido.
- John David Dionisio, Loyola Marymount University, y Brian y Melanie Fulton, High Point University, por proporcionar las soluciones de problemas y ejercicios.
- Roger Cooke, University of Vermont, y Fred S. Roberts, Rutgers University, por haber dedicado tiempo de sus ocupados programas y contribuido con los excelentes ensayos de cálculo.
- Carol Wright, por su ayuda en las etapas finales de preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- David Pallai, distribuidor, y Tim Anderson, editor, por soportar toda la liberación verbal de mis frustraciones.
- Jennifer Bagdigan, gerente de producción, por coordinar amablemente las fases de producción y por su paciencia para aguantar mis cambios de carácter sin fin, y a
- Irving Drooyan y Charles Carico, por iniciar todo.

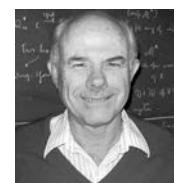
Incluso con toda la ayuda mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura contenidos en este producto final es responsabilidad del autor. Estaré muy agradecido de contar con el aviso de cualquier error o errores tipográficos que llamen la atención. Las correcciones pueden enviarse a

pablo_roig@mcgraw-hill.com

En conclusión, doy la bienvenida a Warren Scott Wright, mi colega desde hace mucho tiempo en Loyola Marymount University, y autor de muchos de los suplementos que acompañan mis textos, como coautor de este texto.



Dennis G. Zill



Warren S. Wright

Agradecimientos especiales

La presente obra es una adaptación con un enfoque basado en competencias del libro *Cálculo. Trascendentes tempranas*, cuarta edición, cuya versión en español contó con la revisión técnica de

Marlene Aguilar Ábalos

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Ciudad de México

Crisanto Castillo Castillo

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Cuernavaca

Fidel Castro López

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional

Rocío Cereceros López

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Cuernavaca

Ramón Espinosa Armenta

Instituto Tecnológico
Autónomo de México (ITAM)

Eugenio L. Fautsch Tapia

Facultad de Química,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

José Job Flores Godoy

Universidad Iberoamericana,
Ciudad de México

Enrique Arturo Galván Flores

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional

Linda Margarita Medina Herrera

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Ciudad de México

Santiago Neira Rosales

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Universidad Autónoma de Nuevo León

Ignacio Ramírez Vargas

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
campus Hidalgo

Héctor Joé Rosas Toledo

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Tonatiuh Valdez Hernández

Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Contenido

Prefacio v

Evaluación diagnóstica xv

Ensayo: La historia del cálculo xix



1

Vectores y espacio tridimensional 1

1.1 Vectores en el espacio bidimensional 2

1.2 Espacio tridimensional y vectores 8

1.3 Producto punto 14

1.4 Producto cruz 22

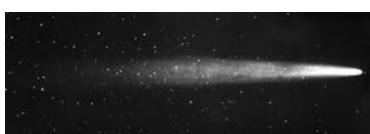
1.5 Rectas en el espacio tridimensional 29

1.6 Planos 34

1.7 Cilindros y esferas 40

1.8 Superficies cuadráticas 43

Competencia final de la unidad 1 50



2

Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares 55

2.1 Ecuaciones paramétricas 56

2.2 Cálculo y ecuaciones paramétricas 64

2.3 Sistema de coordenadas polares 69

2.4 Gráficas de ecuaciones polares 72

2.5 Cálculo en coordenadas polares 81



- 2.6 Secciones cónicas en coordenadas polares 88**
Competencia final de la unidad 2 93

3

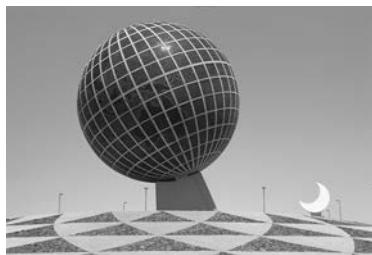
Funciones vectoriales de una variable real 97

- 3.1 Funciones vectoriales 98**
3.2 Cálculo de funciones vectoriales 103
3.3 Movimiento sobre una curva 110
3.4 Curvatura y aceleración 115
Competencia final de la unidad 3 121

**4**

Funciones de varias variables 123

- 4.1 Funciones de varias variables 124**
4.2 Límites y continuidad 130
4.3 Derivadas parciales 137
4.4 Linealización y diferenciales 145
4.5 Regla de la cadena 153
4.6 Gradiante y derivada direccional 160
4.7 Planos tangentes y rectas normales 166
4.8 Extremos de funciones multivariadas 170
4.9 Multiplicadores de Lagrange 177
4.10 Campos vectoriales 184
4.11 Rotacional y divergencia 189
Competencia final de la unidad 4 194

**5**

Integrales múltiples 201

- 5.1 La integral doble 202**
5.2 Integrales iteradas 205
5.3 Evaluación de integrales dobles 209
5.4 Centro de masa y momentos 216

- 5.5 Integrales dobles en coordenadas polares 220
- 5.6 Área de una superficie 225
- 5.7 La integral triple 228
- 5.8 Integrales triples en otros sistemas de coordenadas 235
- 5.9 Integrales de línea 242
- Competencia final de la unidad 5 248

**Apéndice****Secciones cónicas 253****Fórmulas matemáticas FM-1****Repaso de álgebra FM-1****Fórmulas de geometría FM-2****Gráficas y funciones FM-4****Revisión de trigonometría FM-5****Funciones exponencial y logarítmica FM-7****Diferenciación FM-8****Fórmulas de integración FM-9****Respuestas a la evaluación diagnóstica RES-1****Respuestas de los problemas impares RES-2****Índice analítico ÍND-1**

Evaluación diagnóstica

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-1.

Como preparación para el cálculo

☰ Matemáticas básicas

1. (Falso/verdadero) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. _____
2. (Falso/verdadero) Para $a > 0$, $(a^{4/3})^{3/4} = a$. _____
3. (Falso/verdadero) Para $x \neq 0$, $x^{-3/2} = \frac{1}{x^{2/3}}$. _____
4. (Falso/verdadero) $\frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2^n}$. _____
5. (Llene el espacio en blanco) En el desarrollo de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es _____.
6. Sin usar calculadora, evalúe $(-27)^{5/3}$.
7. Escriba lo siguiente como una expresión sin exponentes negativos:
$$x^2 \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2} 2x + 2x \sqrt{x^2 + 4}$$
8. Complete el trinomio cuadrado: $2x^2 + 6x + 5$.
9. Resuelva las ecuaciones:
a) $x^2 = 7x$ **b)** $x^2 + 2x = 5$ **c)** $\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$ **d)** $x + \sqrt{x-1} = 1$
10. Factorice completamente:
a) $10x^2 - 13x - 3$
b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2$
c) $x^3 - 27$
d) $x^4 - 16$

☰ Números reales

11. (Falso/verdadero) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. _____
12. (Falso/verdadero) $\sqrt{(-9)^2} = -9$. _____
13. (Falso/verdadero) Si $a < 0$, entonces $\frac{-a}{a} < 0$. _____
14. (Llene el espacio en blanco) Si $|3x| = 18$, entonces $x =$ _____ o $x =$ _____.
15. (Llene el espacio en blanco) Si $a - 5$ es un número negativo, entonces $|a - 5| =$ _____.
16. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales?
a) 0.25 **b)** 8.131313 ... **c)** π
d) $\frac{22}{7}$ **e)** $\sqrt{16}$ **f)** $\sqrt{2}$
g) 0 **h)** -9 **i)** $1\frac{1}{2}$
j) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ **k)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **l)** $\frac{-2}{11}$
17. Relacione el intervalo dado con la desigualdad idónea.
i) $(2, 4]$ **ii)** $[2, 4)$ **iii)** $(2, 4)$ **iv)** $[2, 4]$
a) $|x - 3| < 1$ **b)** $|x - 3| \leq 1$ **c)** $0 \leq x - 2 < 2$ **d)** $1 < x - 1 \leq 3$
18. Exprese el intervalo $(-2, 2)$ como
a) una desigualdad y **b)** una desigualdad que implique valores absolutos.
19. Trace la gráfica de $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ en la recta numérica.

20. Encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $|3x - 1| > 7$. Escriba su solución usando notación de intervalos.
21. Resuelva la desigualdad $x^2 \geq -2x + 15$ y escriba su solución usando notación de intervalos.
22. Resuelva la desigualdad $x \leq 3 - \frac{6}{x+2}$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

☰ Plano cartesiano

23. (Llene el espacio en blanco) Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el _____ cuadrante.
24. (Llene el espacio en blanco) El punto medio del segmento de recta desde $P_1(2, -5)$ hasta $P_2(8, -9)$ es _____.
25. (Llene el espacio en blanco) Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta desde $P_1(x_1, 3)$ hasta $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$ _____ y $y_2 =$ _____.
26. (Llene los espacios en blanco) El punto $(1, 5)$ está en una gráfica. Proporcione las coordenadas de otro punto de la gráfica si la gráfica es:
- simétrica con respecto al eje x . _____
 - simétrica con respecto al eje y . _____
 - simétrica con respecto al origen. _____
27. (Llene los espacios en blanco) Las intersecciones x y y de la gráfica de $|y| = 2x + 4$ son, respectivamente, _____ y _____.
28. ¿En cuáles cuadrantes del plano cartesiano es negativo el cociente x/y ?
29. La coordenada y de un punto es 2. Encuentre la coordenada x del punto si la distancia del punto a $(1, 3)$ es $\sqrt{26}$.
30. Encuentre una ecuación del círculo para el cual $(-3, -4)$ y $(3, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.
31. Si los puntos P_1 , P_2 y P_3 son colineales como se muestra en la FIGURA A.1, encuentre una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$, y $d(P_1, P_3)$.

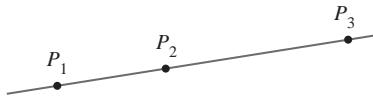


FIGURA A.1 Gráfica para el problema 31

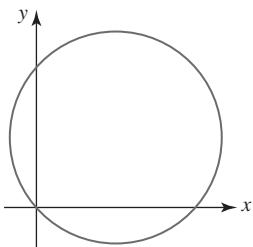


FIGURA A.2 Gráfica para el problema 32

32. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe mejor el círculo de la FIGURA A.2? Los símbolos a , b , c , d y e representan constantes diferentes de cero.
- $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
 - $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
 - $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
 - $ax^2 + ay^2 + c = 0$
 - $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$
33. (Falso/verdadero) Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. _____
34. (Llene el espacio en blanco) Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ _____.
35. (Llene el espacio en blanco) Una recta con intercepción x $(-4, 0)$ e intersección y $(0, 32)$ tiene pendiente _____.
36. (Llene los espacios en blanco) La pendiente y las intersecciones x y y de la recta $2x - 3y + 18 = 0$ son, respectivamente, _____, _____, y _____.
37. (Llene el espacio en blanco) Una ecuación de la recta con pendiente -5 e intersección y $(0, 3)$ es _____.
38. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.

39. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(6, 1)$.
40. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.
41. Una recta tangente a un círculo en un punto P del círculo es una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Encuentre la ecuación de la recta tangente L indicada en la FIGURA A.3.

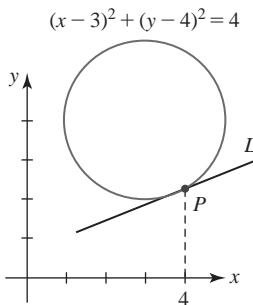


FIGURA A.3 Gráfica para el problema 41

42. Relacione la ecuación dada con la gráfica idónea en la FIGURA A.4.

- i) $x + y - 1 = 0$ ii) $x + y = 0$ iii) $x - 1 = 0$
 iv) $y - 1 = 0$ v) $10x + y - 10 = 0$ vi) $-10x + y + 10 = 0$
 vii) $x + 10y - 10 = 0$ viii) $-x + 10y - 10 = 0$

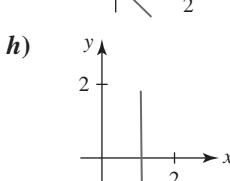
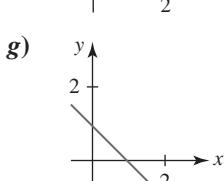
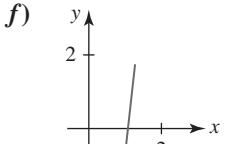
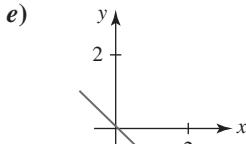
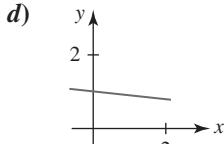
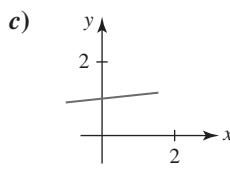
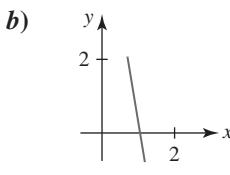
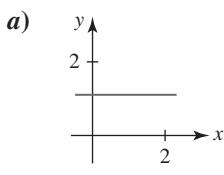


FIGURA A.4 Gráficas para el problema 42

Trigonometría

43. (Falso/verdadero) $1 + \sec^2 \theta = \tan^2 \theta$. _____
44. (Falso/verdadero) $\sin(2t) = 2 \sin t$. _____
45. (Llene el espacio en blanco) El ángulo 240 grados es equivalente a _____ radianes.
46. (Llene el espacio en blanco) El ángulo $\pi/12$ radianes es equivalente a _____ grados.
47. (Llene el espacio en blanco) Si $\tan t = 0.23$, $\tan(t + \pi) =$ _____.
48. Encuentre $\cos t$ si $\sin t = \frac{1}{3}$ y el lado terminal del ángulo t está en el segundo cuadrante.
49. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ dado en la FIGURA A.5.

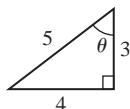


FIGURA A.5 Triángulo para el problema 49

- 50.** Exprese las longitudes b y c de la FIGURA A.6 en términos del ángulo θ .

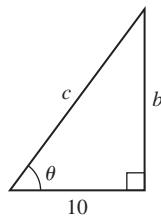


FIGURA A.6 Triángulo para el problema 50

☰ Logaritmos

- 51.** Exprese el símbolo k en la declaración exponencial $e^{(0.1)k} = 5$ como un logaritmo.
- 52.** Exprese la declaración logarítmica $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ como una declaración exponencial equivalente.
- 53.** Exprese $\log_b 5 + 3 \log_b 10 - \log_b 40$ como un logaritmo simple.
- 54.** Use una calculadora para evaluar $\frac{\log_{10} 13}{\log_{10} 3}$.
- 55.** (Llene el espacio en blanco) $b^{3\log_b 10} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 56.** (Falso/verdadero) $(\log_b x)(\log_b y) = \log_b(y^{\log_b x})$.

La historia del cálculo

Por Roger Cooke

University of Vermont

Suele considerarse que el cálculo es una creación de los matemáticos europeos del siglo xvii, cuyo trabajo más importante fue realizado por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1711). Esta percepción tradicional en general es correcta. No obstante, cualquier teoría a gran escala es un mosaico cuyas baldosas fueron colocadas a lo largo de mucho tiempo; y en cualquier teoría viviente las baldosas continúan colocándose de manera continua. La declaración más poderosa que los historiadores se arriesgan a hacer es que un patrón se hizo evidente en cierto momento y lugar. Es el caso del cálculo. Podemos afirmar con cierta confianza que los primeros trabajos del tema aparecieron en el siglo xvii y que el patrón se aclaró mucho más gracias al trabajo de Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos de los principios esenciales del cálculo se descubrieron desde mucho antes, en la época de Arquímedes (287-211 a.C.), y algunos de esos mismos descubrimientos se lograron de manera independiente en China y en Japón. Además, si se escudriña con más profundidad en los problemas y métodos del cálculo, uno pronto se encuentra en la persecución de problemas que conducen a las áreas modernas de la teoría de funciones analíticas, geometría diferencial y funciones de una variable real. Para cambiar la metáfora del arte al transporte, podemos pensar que el cálculo es una gran estación de ferrocarril, donde los pasajeros que llegan de muchos sitios diferentes están juntos durante un tiempo breve antes de embarcarse hacia destinos diversos. En este ensayo tratamos de mirar en ambas direcciones desde esta estación, hacia los puntos de origen y los destinos. Empecemos con la descripción de la estación.

¿Qué es el cálculo? El cálculo suele dividirse en dos partes, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*. El cálculo diferencial investiga las propiedades de las razones de cambio comparativas de variables que están vinculadas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, un resultado fundamental del cálculo diferencial es que si $y = x^n$, entonces la razón de cambio de y con respecto a x es nx^{n-1} . Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos —movimiento de los cuerpos, cambios en la temperatura, crecimiento de poblaciones y muchos otros—, se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como *ecuaciones diferenciales*. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina *integración*, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a *resolver* las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial.

A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele *algún* uso de las técnicas que se proponen. Segundo,



Isaac Newton



Gottfried Leibniz

estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.

Al describir los problemas que llevaron al cálculo y los problemas que pueden resolverse usando cálculo, aún no se han indicado las técnicas fundamentales que hacen de esta disciplina una herramienta de análisis mucho más poderosa que el álgebra y la geometría. Estas técnicas implican el uso de lo que alguna vez se denominó *análisis infinitesimal*. Todas las construcciones y las fórmulas de la geometría y el álgebra de preparatoria poseen un carácter finito. Por ejemplo, para construir la tangente de un círculo o para bisectar un ángulo se realiza un número finito de operaciones con regla y compás. Aunque Euclides sabía considerablemente más geometría que la que se enseña en cursos actuales modernos de preparatoria, él también se autoconfinó esencialmente a procesos finitos. Sólo en el contexto limitado de la teoría de las proporciones permitió la presencia de lo infinito en su geometría, y aun así está rodeado por tanto cuidado lógico que las demostraciones implicadas son extraordinariamente pesadas y difíciles de leer. Lo mismo ocurre en álgebra: para resolver una ecuación polinomial se lleva a cabo un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz. Cuando las ecuaciones pueden resolverse, la solución se expresa como una fórmula finita que implica coeficientes.

Sin embargo, estas técnicas finitas cuentan con un rango limitado de aplicabilidad. No es posible encontrar las áreas de la mayoría de las figuras curvas mediante un número finito de operaciones con regla y compás, y tampoco resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que cinco usando un número finito de operaciones algebraicas. Lo que se quería era escapar de las limitaciones de los métodos finitos, y esto condujo a la creación del cálculo. Ahora consideraremos algunos de los primeros intentos por desarrollar técnicas para manipular los problemas más difíciles de la geometría, luego de lo cual trataremos de resumir el proceso mediante el que se trabajó el cálculo, y finalmente exhibiremos algo de los frutos que ha producido.

Las fuentes geométricas del cálculo Uno de los problemas más antiguos en matemáticas es la cuadratura del círculo; es decir, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Como se sabe, este problema no puede resolverse con regla y compás. Sin embargo, Arquímedes descubrió que si es posible trazar una espiral, empezando en el centro de un círculo que hace exactamente una revolución antes de llegar al círculo, entonces la tangente a esa espiral, en su punto de intersección con el círculo, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya área es exactamente igual al círculo (vea la figura 1). Entonces, si es posible trazar esta espiral y su tangente, también lo es cuadrar el círculo. Arquímedes, no obstante, guardó silencio sobre cómo podría trazarse esta tangente.

Observamos que uno de los problemas clásicos en matemáticas puede resolverse sólo si es posible trazar cierta curva y su tangente. Este problema, y otros parecidos, originaron que el problema puramente matemático de encontrar la tangente a una curva se volviera importante. Este problema constituye la fuente más importante del cálculo diferencial. El truco “infinitesimal”

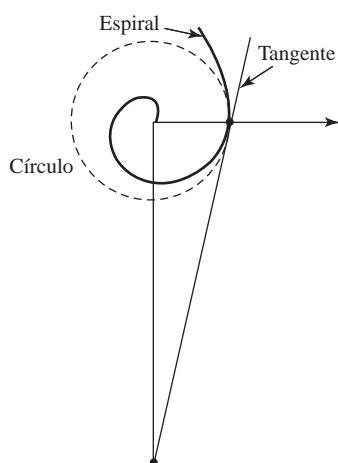


FIGURA 1 La espiral de Arquímedes. La tangente al final de la primera vuelta de la espiral y los dos ejes forman un triángulo con área igual a la del círculo centrado en el origen y que pasa por el punto de la tangente

que permite la solución del problema es considerar la tangente como la recta determinada por dos puntos en la curva “infinitamente próximos” entre sí. Otra forma de decir lo mismo es que una pieza “infinitamente corta” de la curva es recta. El problema es que resulta difícil ser preciso sobre los significados de las frases “infinitamente próximos” e “infinitamente cortos”.

Poco avance se logró en este problema hasta la invención de la geometría analítica en el siglo XVII por Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). Una vez que se pudo representar una curva por medio de una ecuación, fue posible afirmar con más confianza lo que se entendía por puntos “infinitamente próximos”, al menos para ecuaciones polinomiales como $y = x^2$. Con simbolismo algebraico para representar puntos en la curva, era posible considerar dos puntos sobre la curva con coordenadas x_0 y x_1 , de modo que $x_1 - x_0$ es la distancia entre las coordenadas x . Cuando la ecuación de la curva se escribía en cada uno de estos puntos y una de las dos ecuaciones se restaba de la otra, un lado de la ecuación resultante contenía el factor $x_1 - x_0$, que entonces podía eliminarse por división. Por lo tanto, si $y_0 = x_0^2$ y $y_1 = x_1^2$, entonces $y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$, de modo que $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando ($x_1 = x_0$), se concluye que ($y_1 = y_0$), y la expresión $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ carece de sentido. Sin embargo, la expresión $x_1 + x_0$ tiene el valor perfectamente definido $2x_0$. Entonces, es posible considerar a $2x_0$ como la razón de la diferencia infinitamente pequeña en y ; es decir, $y_1 - y_0$ a la diferencia infinitamente pequeña en x ; es decir, $x_1 - x_0$, cuando el punto (x_1, y_1) está infinitamente cerca del punto (x_0, y_0) sobre la curva $y = x^2$. Como aprenderá al estudiar cálculo, esta razón proporciona suficiente información para trazar la recta tangente a la curva $y = x^2$.

Excepto por pequeños cambios en la notación, el razonamiento anterior es exactamente la forma en que Fermat encontró la tangente a una parábola. Sin embargo, estaba abierta a una objeción lógica: en un momento, ambos lados de la ecuación se dividen entre $x_1 - x_0$, entonces en un paso posterior decidimos que $x_1 - x_0 = 0$. Puesto que la división entre cero es una operación ilegal, parece que estamos tratando de comernos nuestro pastel y no hacerlo; es decir, no se pueden hacer ambas cosas. Tuvo que pasar algún tiempo para responder de manera convincente a esta objeción.

Hemos visto que Arquímedes no pudo resolver el problema fundamental del cálculo diferencial: trazar la tangente a una curva. Sin embargo, Arquímedes *pudo* resolver algunos de los problemas fundamentales del cálculo integral. De hecho, encontró el volumen de una esfera mediante un sistema extremadamente ingenioso: consideró un cilindro que contenía un cono y una esfera e imaginó cortar esta figura en una infinidad de rebanadas delgadas. Al suponer las áreas de estas secciones del cono, la esfera y el cilindro, pudo demostrar cómo el cilindro equilibraría al cono y a la esfera si las figuras se colocan en los platos opuestos de una balanza. Este equilibrio proporcionó una relación entre las figuras, y como Arquímedes ya conocía los volúmenes del cono y del cilindro, entonces pudo calcular el volumen de la esfera.

Este razonamiento ilustra la segunda técnica infinitesimal que se encuentra en los fundamentos del cálculo: un volumen puede considerarse como una pila de figuras planas, y un área puede considerarse como una pila de segmentos de rectas, en el sentido de que si cada sección horizontal de una región es igual a la misma sección horizontal de otra región, entonces las dos regiones son iguales. Durante el Renacimiento europeo este principio se volvió de uso muy común bajo el nombre de *método de los indivisibles* para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas figuras. Hoy en día se denomina principio de Cavalieri en honor de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), quien lo usó para demostrar muchas de las fórmulas elementales que ahora forman parte del cálculo integral. El principio de Cavalieri también fue descubierto en otras tierras donde jamás llegó la obra de Euclides. Por ejemplo, los matemáticos chinos del siglo V Zu Chongzhi y su hijo Zu Geng hallaron el volumen de una esfera usando una técnica bastante parecida al método de Arquímedes.

Así, encontramos matemáticos que anticiparon el cálculo integral usando métodos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes en una etapa muy temprana de la geometría, tanto en la Grecia como la China antiguas. Así ocurre con el método infinitesimal para trazar tangentes; no obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos.

Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.

La invención del cálculo A mediados del siglo XVII se conocían muchas de las técnicas y hechos elementales del cálculo, incluso métodos para encontrar las tangentes de curvas simples y fórmulas de áreas acotadas por estas curvas. En otras palabras, muchas de las fórmulas que usted encontrará en los primeros capítulos de cualquier libro de texto de cálculo ya eran conocidas antes de que Newton y Leibniz iniciaran su obra. Lo que faltaba hasta fines del siglo XVII era tomar conciencia de que estos dos tipos de problemas están relacionados entre sí.

Para ver cómo se descubrió la relación, es necesario abundar más en las tangentes. Ya mencionamos que para trazar una tangente a una curva en un punto dado se requiere saber cómo encontrar un segundo punto en la recta. En la etapa inicial de la geometría analítica este segundo punto solía tomarse como el punto en que la tangente corta al eje x . La proyección sobre el eje x de la porción de la tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje x se denominaba *subtangente*. En el estudio de las tangentes surgió un problema muy natural: *reconstruir una curva, dada la longitud de su subtangente en cualquier punto*. Por medio del estudio de este problema fue posible percibir que las ordenadas de cualquier curva son proporcionales al área bajo una segunda curva cuyas ordenadas son las longitudes de las subtangentes a la curva original. El resultado es el teorema fundamental del cálculo. El honor de haber reconocido de manera explícita esta relación pertenece a Isaac Barrow (1630-1677), quien lo indicó en un libro denominado *Lectiones Geometricae* en 1670. Barrow planteó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del cálculo. Uno de ellos es el siguiente: *Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangente [esta razón es precisamente lo que ahora se denomina derivada] es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera*.

Estas relaciones proporcionaron un principio unificado para el gran número de resultados particulares sobre tangentes y áreas que se habían encontrado con el método de indivisibles a principios del siglo XVII: para encontrar el área bajo una curva había que hallar una segunda curva para la cual la razón de la ordenada a la subtangente sea igual a la ordenada de la curva dada. Así, la ordenada de esa segunda curva proporciona el área bajo la primera curva.

En este punto el cálculo estaba preparado para surgir. Sólo requería de alguien que proporcionara métodos sistemáticos para el cálculo de tangentes (en realidad, subtangentes) e invertiera ese proceso para encontrar áreas. Es el trabajo realizado por Newton y Leibniz. Estos dos gigantes de la creatividad matemática siguieron senderos bastante distintos en sus descubrimientos.

El método de Newton era algebraico y desarrolló el problema de encontrar un método eficiente para extraer las raíces de un número. Aunque apenas empezó a estudiar álgebra en 1662, ya alrededor de 1665 las reflexiones de Newton sobre el problema de extraer raíces lo condujeron al descubrimiento de la serie infinita que actualmente se denomina teorema del binomio; es decir, la relación

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r - 1)}{2}x^2 + \frac{r(r - 1)(r - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Al combinar el teorema del binomio con técnicas infinitesimales, Newton pudo deducir las fórmulas básicas del cálculo diferencial e integral. Crucial en el enfoque de Newton fue el uso de series infinitas para expresar las variables en cuestión, y el problema fundamental que Newton no resolvió fue establecer que tales series podían manipularse justo como sumas finitas. Por tanto, en un sentido Newton llevó al infinito desde una entrada a su madriguera sólo para encontrar que una cara estaba frente a la otra.

A partir de la consideración de las variables como cantidades físicas que cambian su valor con el tiempo, Newton inventó nombres para las variables y sus razones de cambio que reflejaban esta intuición. Según Newton, un *fluent* (x) es una cantidad en movimiento o que fluye; su *fluxión* (x) es su razón de flujo, lo que ahora se denomina velocidad o *derivada*. Newton expuso

sus resultados en 1671 en un tratado denominado *Fluxions* escrito en latín, pero su obra no fue publicada sino hasta que apareció una versión en inglés en 1736. (La versión original en latín fue publicada por primera vez en 1742.)

A pesar de la notación y de sus razonamientos que parecen insuficientes y rudimentarios hoy en día, el tremendo poder del cálculo brilla a través del *método de las fluxiones* de Newton en la solución de problemas tan difíciles como encontrar la longitud de arco de una curva. Se pensaba que esta “rectificación” de una curva era imposible, pero Newton demostró que era posible encontrar un número finito de curvas cuya longitud podía expresarse en términos finitos.

El método de Newton para el cálculo era algebraico, como hemos visto, y heredó el teorema fundamental de Barrow. Por otro lado, Leibniz trabajó el resultado fundamental desde 1670, y su enfoque era diferente al de Newton. Se considera a Leibniz como el pionero de la lógica simbólica, y su opinión acerca de la importancia de la buena notación simbólica era mucho mejor que la de Newton. Inventó la notación dx y dy que sigue en uso. Para él, dx era una abreviación de “diferencia en x ”, y representaba la diferencia entre dos valores infinitamente próximos de x . En otras palabras, expresaba exactamente lo que teníamos en mente hace poco cuando consideramos el cambio infinitamente pequeño $x_1 - x_0$. Leibniz consideraba que dx era un número “infinitesimal”, diferente de cero, pero tan pequeño que ninguno de sus múltiplos podía exceder cualquier número ordinario. Al ser diferente de cero, podía servir como denominador en una fracción, y así dy/dx era el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas. De esta forma esperaba superar las objeciones al nuevo método establecido para encontrar tangentes.

Leibniz también realizó una aportación fundamental en la técnica controvertida de encontrar áreas al sumar secciones. En lugar de considerar el área [por ejemplo, el área bajo una curva $y = f(x)$] como una colección de segmentos de recta, la consideraba como la suma de las áreas de rectángulos “infinitamente delgados” de altura $y = f(x)$ y base infinitesimal dx . Por tanto, la diferencia entre el área hasta el punto $x + dx$ y el área hasta el punto x era la diferencia infinitesimal en área $dA = f(x) dx$, y el área total se encontraba sumando estas diferencias infinitesimales en área. Leibniz inventó la S alargada (el signo integral \int) que hoy en día se usa universalmente para expresar este proceso de suma. Así expresaba el área bajo la curva $y = f(x)$ como $A = \int dA = \int f(x) dx$, y cada parte de este símbolo expresaba una idea geométrica simple y clara.

Con la notación de Leibniz, el teorema fundamental del cálculo de Barrow simplemente indica que el par de ecuaciones

$$A = \int f(x) dx, \quad dA = f(x) dx$$

son equivalentes. Debido a lo que acaba de plantearse, esta equivalencia es casi evidente.

Tanto Newton como Leibniz lograron grandes avances en matemáticas, y cada uno posee bastante crédito por ello. Resulta lamentable que la estrecha coincidencia de su obra haya conducido a una enconada discusión sobre la prioridad entre sus seguidores.

Algunas partes del cálculo, que implican series infinitas, fueron inventadas en India durante los siglos XIV y XV. Jyesthadeva, matemático indio de fines del siglo XV, proporcionó la serie

$$\theta = r \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin^3 \theta}{3 \cos^3 \theta} + \frac{\sin^5 \theta}{5 \cos^5 \theta} - \dots \right)$$

para la longitud de un arco de círculo, demostró este resultado y de manera explícita planteó que esta serie converge sólo si θ no es mayor que 45° . Si se escribe $\theta = \arctan x$ y se usa el hecho de que $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = x$, esta serie se convierte en la serie normal para $\arctan x$.

De modo independiente, otras series fueron desarrolladas en Japón casi al mismo tiempo que en Europa. El matemático japonés Katahiro Takebe (1664-1739) encontró un desarrollo en serie equivalente a la serie para el cuadrado de la función arcsen. Él consideró el cuadrado de la mitad

de arco a la altura h en un círculo de diámetro d ; esto resultó ser la función $f(h) = \left(\frac{d}{2} \arcsen \frac{h}{d}\right)^2$.

Takebe carecía de notación para el término general de una serie, aunque descubrió patrones en los coeficientes al calcular geométricamente la función en el valor particular de $h = 0.000001$, $d = 10$ hasta un valor muy grande de cifras decimales —más de 50—, y luego al usar esta precisión extraordinaria para refinar la aproximación al sumar sucesivamente términos correctivos.

Al proceder de esta manera pudo discernir un patrón en las aproximaciones sucesivas, a partir de lo cual, por extrapolación, pudo plantear el término general de la serie:

$$f(h) = dh \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} \left(\frac{h}{d} \right)^n \right]$$

Después de Newton y de Leibniz quedaba el problema de dar contenido al esqueleto inventado por estos dos genios. La mayor parte de su obra fue completada por matemáticos de la Europa continental, en especial por el círculo creado por los matemáticos suizos James Bernoulli (1655-1705) y John Bernoulli (1667-1748), así como el estudiante de este último, el marqués de L'Hôpital (1661-1704). Éstos y otros matemáticos trabajaron las conocidas fórmulas para las derivadas e integrales de funciones elementales que aún se encuentran en libros de texto actuales. Las técnicas esenciales de cálculo eran conocidas a principios del siglo XVIII, y un libro de texto del siglo XVIII como la *Introducción al análisis del infinito*, de Euler (1748), en caso de haber estado traducida al español se vería bastante como un libro de texto moderno.

El legado del cálculo Una vez que hemos abordado las fuentes del cálculo y el procedimiento con el que fue elaborado, a continuación analizaremos brevemente los resultados que produjo.

El cálculo obtuvo una cantidad impresionante de triunfos en sus dos primeros siglos. Resultó que docenas de fenómenos físicos previamente oscuros que implican calor, fluidez, mecánica celeste, elasticidad, luz, electricidad y magnetismo poseían propiedades mensurables cuyas relaciones podían describirse como ecuaciones diferenciales. La física se comprometió para siempre en hablar el lenguaje del cálculo.

Sin embargo, de ninguna manera fueron resueltos todos los problemas surgidos de la física. Por ejemplo, no era posible encontrar, en términos de funciones elementales conocidas, el área bajo una curva cuya ecuación implicaba la raíz cuadrada de un polinomio cúbico. Estas integrales surgieron a menudo tanto en geometría como en física, y llegaron a conocerse como *integrales elípticas* porque el problema de encontrar la longitud sólo podía comprenderse cuando la variable real x se sustituye por una variable compleja $z = x + iy$. El replanteamiento del cálculo en términos de variables complejas condujo a mucho descubrimientos fascinantes, que terminaron por ser codificados como una nueva rama de las matemáticas denominada teoría de funciones analíticas.

La definición idónea de integración siguió siendo un problema durante algún tiempo. Como consecuencia del uso de procesos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes surgieron las integrales. ¿Debía la integral definirse como una “suma de diferencias infinitesimales” o como la inversa de la diferenciación? ¿Qué funciones podían integrarse? En el siglo XIX se propusieron muchas definiciones de la integral, y la elaboración de estas ideas llevó al tema conocido actualmente como análisis real.

Mientras las aplicaciones del cálculo han continuado cosechando cada vez más triunfos en un flujo interminable durante los últimos trescientos años, sus fundamentos permanecieron en un estado insatisfactorio durante la primera mitad de este periodo. El origen de la dificultad era el significado que había de asociarse a la dx de Leibniz. ¿Qué era esta cantidad? ¿Cómo podía no ser positiva ni cero? De ser cero, no podía usarse como denominador; de ser positiva, entonces las ecuaciones en que aparecía no eran realmente ecuaciones. Leibniz consideraba que los infinitesimales eran entes verdaderos, que las áreas y los volúmenes podían sintetizarse al “sumar” sus secciones, como habían hecho Zu Chongzhi, Arquímedes y otros. Newton tenía menos confianza acerca de la validez de los métodos infinitesimales, e intentó justificar sus razonamientos en formas que pudiesen cumplir las normas del rigor euclídeo. En su *Principia Mathematica* escribió:

Estos lemas tienen el cometido de evitar el tedio de deducir *ad absurdum* demostraciones implícitas, según el método de los geómetras de la antigüedad. Las demostraciones son más breves según el método de indivisibles, pero debido a que la hipótesis de indivisibles parece ser algo más dura y, en consecuencia, ese método se acepta como menos geométrico, en lugar de ello elijo reducir las demostraciones de las siguientes proposiciones a las sumas y razones primera y última de cantidades que desaparecen; es decir, a los límites de estas sumas y razones... En consecuencia, si en lo sucesivo debo considerar que las cantidades están formadas de partículas, o debo usar pocas líneas curvas por las [rectas] idóneas, no debe interpretarse que estoy queriendo decir cantidades indivisibles, sino cantidades divisibles que desaparecen...

. . . En cuanto a estas últimas razones con las que desaparecen las cantidades, no son en verdad las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales las razones de cantidades decrecientes sin límite siempre convergen; y a los que tienden de manera más próxima que con cualquier diferencia dada, aunque nunca van más allá, ni en el efecto alcanzado, hasta que las cantidades disminuyen *in infinitum*.

En este pasaje Newton afirma que la falta de rigor implicado en el uso de razonamientos infinitesimales puede compensarse con el uso de límites. Sin embargo, su planteamiento de este concepto en el pasaje citado no es tan claro como uno desearía. Esta falta de claridad condujo al filósofo Berkeley a referirse desdeñosamente a los fluxiones como “fantasmas de cantidades”. Sin embargo, los avances alcanzados en física usando cálculo fueron tan sobresalientes que durante más de un siglo nadie se preocupó en proporcionar el rigor al que aludía Newton (¡y los físicos siguen sin preocuparse al respecto!). Una presentación completamente rigurosa y sistemática del cálculo llegó sólo hasta el siglo xix.

Según la obra de Augustin-Louis Cauchy (1789-1856) y Karl Weierstrass (1815-1896), la percepción era que los infinitesimales eran meramente de naturaleza heurística y que los estudiantes estaban sujetos a un riguroso enfoque “epsilon-delta” de los límites. De manera sorprendente, en el siglo xx Abraham Robinson (1918-1974) demostró que es posible desarrollar un modelo lógicamente consistente de los números reales en el que hay infinitesimales verdaderos, como creía Leibniz. Sin embargo, parece que este nuevo enfoque, denominado “análisis no estándar”, no ha sustituido a la presentación tradicional actual del cálculo.

Ejercicios

1. El tipo de espiral considerada por Arquímedes ahora se denomina así en su honor. Una espiral de Arquímedes es el lugar geométrico de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de un rayo que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo. Si la velocidad lineal a lo largo del rayo (la componente *radial* de su velocidad) es v , el punto está a una distancia vt del centro de rotación (suponiendo que es donde empieza) en el instante t . Suponga que la velocidad angular de rotación del rayo es ω (radianes por unidad de tiempo). Dados un círculo de radio R y una velocidad radial de v , ¿cuál debe ser ω para que la espiral llegue al círculo al final de su primera vuelta? Res. $(\frac{2\pi v}{R})$

El punto tendrá una velocidad circunferencial $r\omega = vt\omega$. Según un principio enunciado en la *Mecánica* de Aristóteles, la velocidad real de la partícula está dirigida a lo largo de la diagonal de un paralelogramo (en este caso un rectángulo) cuyos lados son las componentes. Use este principio para mostrar cómo construir la tangente a la espiral (que es la recta que contiene a la diagonal de este rectángulo). Compruebe que los lados de este rectángulo guardan la relación $1 : 2\pi$. Observe la figura 1.

2. La figura 2 ilustra cómo Arquímedes encontró la relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro. El diámetro AB está duplicado, haciendo $BC = AB$. Cuando esta figura se hace girar alrededor de esta recta, el círculo genera una esfera, el triángulo DBG genera un cono y el rectángulo $DEFG$ genera un cilindro. Demuestre los hechos siguientes:
 - Si B se usa como fulcro, el cilindro tiene como centro de gravedad el centro K del círculo y, en consecuencia, todo puede concentrarse ahí sin cambiar la torsión alrededor de B .
 - Cada sección del cilindro perpendicular a la recta AB , permaneciendo en su posición actual, equilibraría exactamente la misma sección del cono más la sección de la esfera si éstos dos se desplazaran al punto C .
 - Por tanto, el cilindro concentrado en K equilibraría al cono y a la esfera que se concentran en C .
 - En consecuencia, el cilindro es igual al doble de la suma del cono y la esfera.
 - Puesto que se sabe que el cono es un tercio del cilindro, se concluye que la esfera debe ser un sexto de éste.
 - Que el volumen del cilindro es $8\pi r^2$.

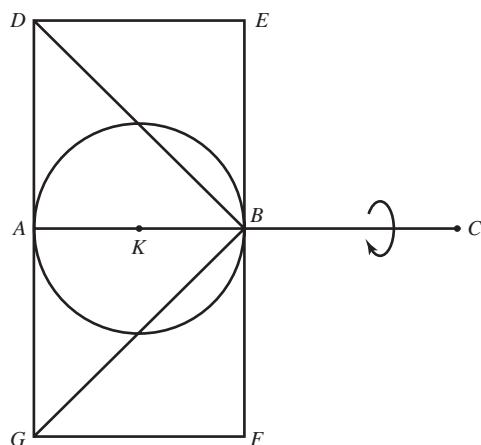


FIGURA 2 Sección de la esfera, el cono y el cilindro de Arquímedes

3. El método con el que Zu Chongzhi y Zu Geng encontraron el volumen de la esfera es el siguiente: imagine que la esfera es una pelota fuertemente adherida dentro de la intersección de dos cilindros que forma ángulos rectos entre sí. Luego, el sólido formado por la intersección de los dos cilindros (denominado *paraguas doble* en chino) y que contiene la pelota se ajusta perfectamente dentro de un cubo cuya arista es igual al diámetro de la esfera.

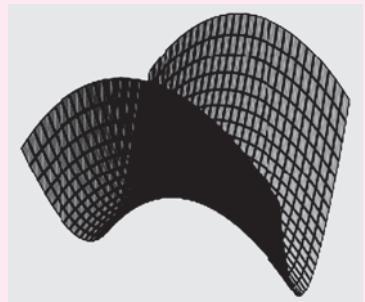
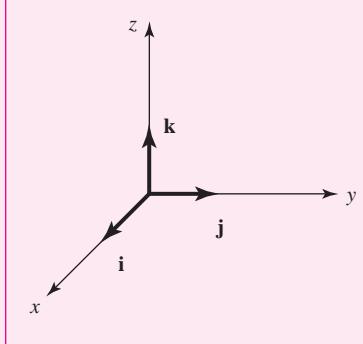
A partir de esta descripción, trace una sección de la esfera dentro del paraguas doble formado por los ejes de los dos cilindros y a una distancia h debajo de este pleno. Compruebe los hechos siguientes:

- Si el radio de la esfera es r , el diámetro de su sección circular es $2\sqrt{r^2 - h^2}$.
- Por tanto, el área del cuadrado formado por esta sección del paraguas doble es $4(r^2 - h^2)$, de modo que el área entre la sección del cubo y la sección del paraguas doble es

$$4r^2 - 4(r^2 - h^2) = 4h^2.$$

- La sección correspondiente de una pirámide cuya base es la parte inferior de un cubo y cuyo vértice está en el centro de la esfera (o del cubo) también tiene un área de $4h^2$. Por tanto, el volumen entre el paraguas doble y el cubo es exactamente el volumen de esta pirámide más su imagen especular arriba del plano central. Concluya que la región entre el paraguas doble y el cubo es un tercio del cubo.
 - En consecuencia, el paraguas doble ocupa dos tercios del volumen del cubo; es decir, su volumen es $\frac{16}{3}r^3$.
 - Cada sección circular de la esfera está inscrita en la sección cuadrada correspondiente del paraguas doble. Por tanto, la sección circular es $\frac{\pi}{4}$ de la sección del paraguas doble.
 - En consecuencia, el volumen de la esfera es $\frac{\pi}{4}$ del volumen del paraguas doble; es decir, $\frac{4}{3}\pi r^3$.
4. Proporcione un razonamiento “infinitesimal” de que el área de la esfera es tres veces su volumen dividido entre su radio, al suponer que la esfera es una colección de pirámides “infinitamente delgadas” donde todos los vértices se encuentren adheridos al origen. [Sugerencia: parte del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base multiplicada por su altura. Arquímedes afirmaba que éste es el razonamiento que lo condujo al descubrimiento del área de la esfera.]

Vectores y espacio tridimensional



En esta unidad Hasta ahora hemos efectuado la mayoría de los intentos en cálculo en la tierra plana del plano cartesiano bidimensional o espacio 2. En las siguientes unidades centraremos el interés en examinar la vida matemática en tres dimensiones o espacio 3. Iniciamos el estudio con un examen de los vectores en dos y tres dimensiones.

Competencias específicas

- Analizar de manera intuitiva campos escalares y vectoriales del entorno.
- Identificar la manifestación de un vector en distintos contextos.
- Resolver con soltura operaciones entre vectores.
- Determinar ecuaciones de rectas y planos dados, así como asociar gráficas de planos y rectas a ecuaciones dadas.

1.1 Vectores en el espacio bidimensional

Introducción Hasta este punto hemos concentrado el estudio, principalmente, en las funciones de una sola variable cuyas gráficas existen en un plano bidimensional. En esta sección iniciamos el estudio del cálculo de varias variables con una introducción a los vectores en el espacio bidimensional. En secciones y unidades subsecuentes el enfoque principal será en vectores y funciones definidos en el espacio tridimensional.

Escalares En ciencia, matemáticas e ingeniería se distinguen dos cantidades importantes: **escalares** y **vectores**. Un **escalar** es simplemente un número real y se representa mediante una letra itálica minúscula, a , k o x . Los escalares se usan para representar magnitudes y pueden tener unidades específicas asociadas; por ejemplo, 80 pies o 20 °C.

Vectores geométricos Por otro lado, un **vector** o **vector de desplazamiento** puede considerarse como una flecha que conecta dos puntos A y B en el espacio. La *cola* de la flecha se llama **punto inicial** y la *punta* de la flecha se denomina **punto final**. Como se muestra en la FIGURA 1.1.1, un vector puede representarse utilizando una letra negrita tal como \mathbf{v} o, si deseamos enfatizar los puntos inicial y final A y B , utilizamos \overrightarrow{AB} para representar el vector. Ejemplos de cantidades vectoriales mostrados en la FIGURA 1.1.2 son el peso \mathbf{p} , la velocidad \mathbf{v} y la fuerza de fricción retardadora \mathbf{F}_f .

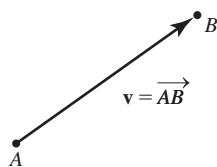


FIGURA 1.1.1 Un vector del punto inicial A al punto final B

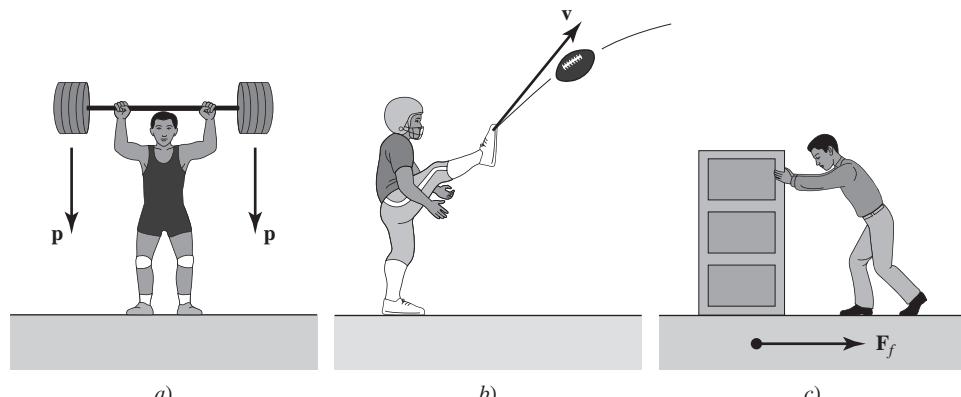


FIGURA 1.1.2 Cantidad vectoriales

Notación y terminología La distancia entre los puntos inicial y final de un vector \overrightarrow{AB} se denomina **longitud**, **magnitud** o **norma** del vector y se denota mediante $|\overrightarrow{AB}|$. Dos vectores que tienen la misma magnitud y la misma dirección se dice que son **iguales**. Así, en la FIGURA 1.1.3 tenemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. El **negativo** de un vector \overrightarrow{AB} , escrito $-\overrightarrow{AB}$, es un vector que tiene la misma magnitud que \overrightarrow{AB} pero la dirección opuesta. Si $k \neq 0$ es un escalar, el **múltiplo escalar** de un vector, $k\overrightarrow{AB}$, es un vector que es $|k|$ veces la longitud de \overrightarrow{AB} . Si $k > 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que el vector \overrightarrow{AB} ; si $k < 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección opuesta a la de \overrightarrow{AB} . Cuando $k = 0$, afirmamos que $0\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ es el **vector cero**. Dos vectores son **paralelos** si y sólo si no son múltiplos escalares uno del otro. Vea la FIGURA 1.1.4.

La pregunta relativa a cuál es la dirección de $\mathbf{0}$ suele responderse diciendo que al vector cero se le puede asignar cualquier dirección. Para agregar más al respecto, $\mathbf{0}$ se necesita para tener un álgebra vectorial.

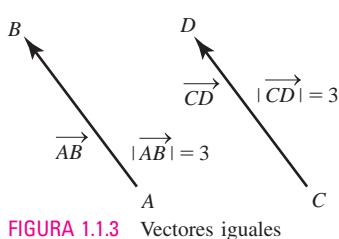


FIGURA 1.1.3 Vectores iguales

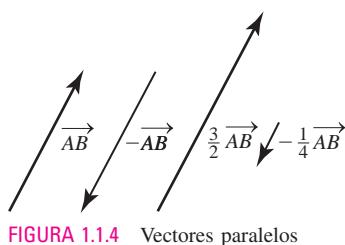


FIGURA 1.1.4 Vectores paralelos

Suma y resta Es posible considerar a dos vectores con el mismo punto inicial común, tal como A en la FIGURA 1.1.5a). Así, si vectores no paralelos \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son los lados de un paralelogramo en la figura 1.1.5b), se dice que el vector que está en la diagonal principal, o \overrightarrow{AD} , es la **suma** de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} . Se escribe

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

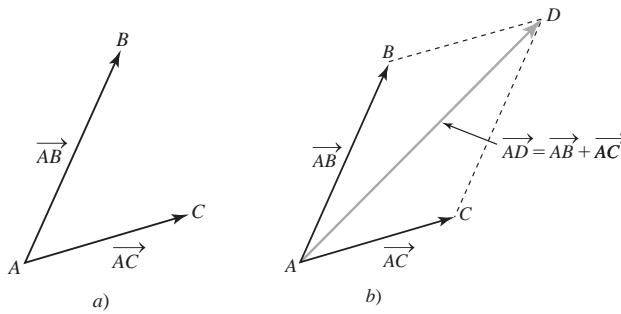


FIGURA 1.1.5 Suma de dos vectores

En ciencia y en ingeniería, si dos vectores representan fuerzas, entonces su suma se denomina la **fuerza resultante**.

La **diferencia** de dos vectores \vec{AB} y \vec{AC} se define mediante

$$\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{AB} + (-\vec{AC}).$$

Como puede observar en la FIGURA 1.1.6a), la diferencia $\vec{AB} - \vec{AC}$ puede interpretarse como la diagonal principal del paralelogramo con lados \vec{AB} y $-\vec{AC}$. Sin embargo, como muestra la figura 1.1.6b), la misma diferencia vectorial también puede interpretarse como el tercer lado de un triángulo con lados \vec{AB} y \vec{AC} . En esta segunda interpretación, observe que la diferencia de vectores $\vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC}$ apunta hacia el punto final del vector *desde* el cual se está restando el segundo vector. Si $\vec{AB} = \vec{AC}$, entonces $\vec{AB} - \vec{AC} = 0$.

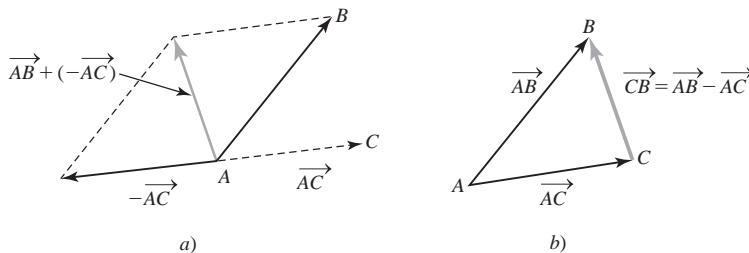


FIGURA 1.1.6 Diferencia de dos vectores

■ Vectores en un plano de coordenadas Para describir un vector analíticamente, supondremos en el resto de esta sección que los vectores a considerar yacen en un plano de coordenadas bidimensional o **espacio bidimensional**. El vector que se muestra en la FIGURA 1.1.7, cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final es $P(x_1, y_1)$, recibe el nombre de **vector posición** del punto P y se escribe

$$\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

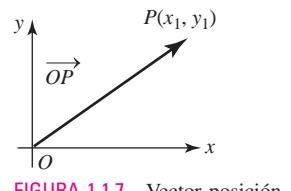


FIGURA 1.1.7 Vector posición

■ Componentes En general, cualquier vector en el espacio bidimensional puede identificarse con un vector posición único $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Los números a_1 y a_2 son las **componentes** del vector posición \mathbf{a} .

EJEMPLO 1 Vector posición

El desplazamiento desde el punto inicial $P_1(x, y)$ hasta el punto final $P_2(x + 4, y + 3)$ en la FIGURA 1.1.8a) está cuatro unidades a la derecha y tres unidades hacia arriba. Como se ve en la figura 1.1.8b), el vector posición de $\mathbf{a} = \langle 4, 3 \rangle$ es equivalente al vector de desplazamiento $\overrightarrow{P_1P_2}$ desde $P_1(x, y)$ hasta $P_2(x + 4, y + 3)$.

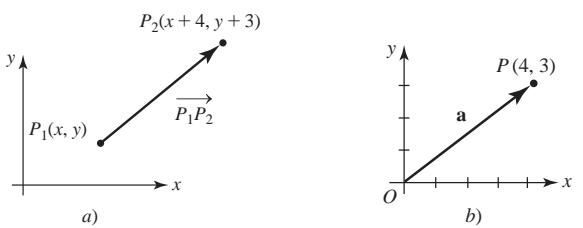


FIGURA 1.1.8 Equivalencia de vectores de desplazamiento y posición

Ya hemos definido geométricamente la suma algebraica, la multiplicación escalar y la igualdad de vectores. Ahora daremos las definiciones algebraicas equivalentes utilizando la forma de componentes de vectores.

Definición 1.1.1 Aritmética de componentes

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores en el espacio bidimensional.

$$i) \text{ Adición: } \mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \quad (1)$$

$$ii) \text{ Multiplicación escalar: } k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle \quad (2)$$

$$iii) \text{ Igualdad: } \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ si y sólo si } a_1 = b_1, a_2 = b_2 \quad (3)$$

■ Restas Utilizando (2) definimos el **negativo** del vector \mathbf{b} mediante

$$-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle.$$

Entonces es posible definir la **resta**, o la diferencia, de dos vectores como

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle. \quad (4)$$

En la FIGURA 1.1.9a) vemos ilustrada la suma de dos vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. En la figura 1.1.9b) el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, con punto inicial P_1 y punto final P_2 , es la diferencia de los vectores de posición.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

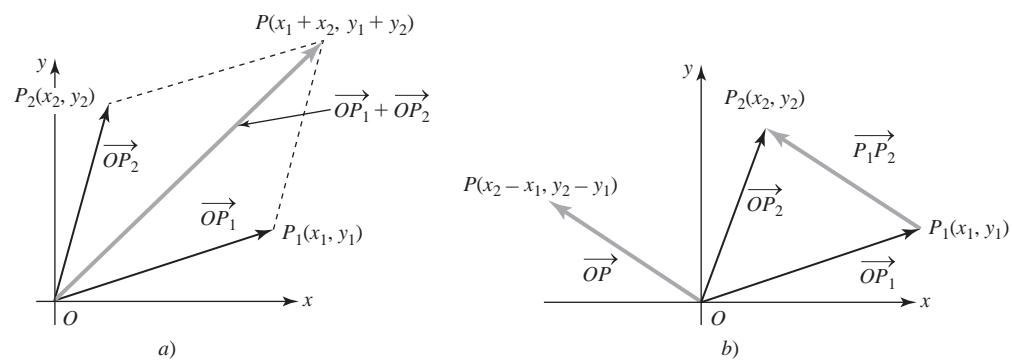


FIGURA 1.1.9 Resta de vectores

Como se muestra en la figura 1.1.9b), el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse ya sea a partir del punto final de $\overrightarrow{OP_1}$ y terminar en el punto final de $\overrightarrow{OP_2}$, o como el vector posición \overrightarrow{OP} cuyo punto final tiene las coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Recuerde, \overrightarrow{OP} y $\overrightarrow{P_1P_2}$ se consideran iguales debido a que tienen la misma magnitud y dirección.

EJEMPLO 2 Suma y diferencia de vectores

Si $\mathbf{a} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -6, 3 \rangle$, se encuentra que

$$a) \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad b) \mathbf{a} - \mathbf{b} \quad \text{y} \quad c) 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}.$$

Solución Se emplean (1), (2) y (4).

$$a) \mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 1 + (-6), 4 + 3 \rangle = \langle -5, 7 \rangle$$

$$b) \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 1 - (-6), 4 - 3 \rangle = \langle 7, 1 \rangle$$

$$c) 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 2, 8 \rangle + \langle -18, 9 \rangle = \langle -16, 17 \rangle$$

■ Propiedades La forma de componentes de un vector puede usarse para verificar cada una de las siguientes propiedades.

Teorema 1.1.1 Propiedades de la aritmética de vectores

- i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ \leftarrow ley comutativa
- ii) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ \leftarrow ley asociativa
- iii) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ \leftarrow identidad aditiva
- iv) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ \leftarrow inverso aditivo
- v) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$, k un escalar
- vi) $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$, k_1 y k_2 escalares
- vii) $(k_1)(k_2)\mathbf{a} = (k_1k_2)\mathbf{a}$, k_1 y k_2 escalares
- viii) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
- ix) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

El **vector cero $\mathbf{0}$** en las propiedades iii), iv) y ix) se define como

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle.$$

Magnitud Con base en el teorema de Pitágoras y la FIGURA 1.1.10, definimos la **magnitud, longitud o norma** de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ como

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Claramente, $|\mathbf{a}| \geq 0$ para cualquier vector \mathbf{a} , y $|\mathbf{a}| = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle 6, -2 \rangle$, entonces

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

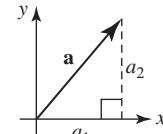


FIGURA 1.1.10 Magnitud de un vector

Vectores unitarios Un vector que tiene magnitud 1 recibe el nombre de **vector unitario**. Obtenemos un vector unitario \mathbf{u} en la misma dirección que un vector distinto de cero \mathbf{a} al multiplicar \mathbf{a} por el escalar positivo $k = 1/|\mathbf{a}|$ (recíproco de su magnitud). En este caso afirmamos que $\mathbf{u} = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ es la **normalización** del vector \mathbf{a} . La normalización del vector \mathbf{a} es el vector unitario debido a que

$$|\mathbf{u}| = \left| \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = 1.$$

Nota: A menudo es conveniente escribir el múltiplo escalar $\mathbf{u} = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ como

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

EJEMPLO 3 Vector unitario

Dado $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$, forme un vector unitario

- a) en la misma dirección de \mathbf{v} y b) en la dirección opuesta de \mathbf{v} .

Solución Primero encontramos la magnitud del vector \mathbf{v} :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

- a) Un vector unitario en la misma dirección de \mathbf{v} es entonces

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1 \rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle.$$

- b) Un vector unitario en la dirección opuesta de \mathbf{v} es el negativo de \mathbf{u} :

$$-\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle.$$

■

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores y c_1 y c_2 son escalares, entonces la expresión $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ se denomina **combinación lineal** de \mathbf{a} y \mathbf{b} . Como veremos a continuación, cualquier vector en el espacio bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de dos vectores especiales.

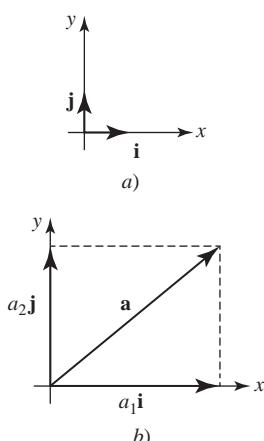


FIGURA 1.1.11 Los vectores **i** y **j** en forma de componentes

I Los vectores **i, **j**** En vista de (1) y (2), cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ puede escribirse como una suma:

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle. \quad (5)$$

Los vectores unitarios $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ suelen darse mediante los símbolos especiales **i** y **j**, respectivamente. Vea la FIGURA 1.1.11a). Así, si

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle,$$

entonces (5) se vuelve

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}. \quad (6)$$

Puesto que cualquier vector \mathbf{a} puede escribirse únicamente como una combinación lineal de **i** y **j**, estos vectores unitarios se conocen como la **base estándar** del sistema de vectores bidimensionales. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es un vector de posición, entonces la figura 1.1.11b) muestra que \mathbf{a} es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$, los cuales tienen el origen como un punto inicial común y yacen, respectivamente, sobre los ejes x y y . El escalar a_1 se denomina la **componente horizontal** de \mathbf{a} y el escalar a_2 se llama la **componente vertical** de \mathbf{a} .

EJEMPLO 4 Varias formas de vectores

- a) $\langle 4, 7 \rangle = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
- b) $(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
- c) $|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2}$
- d) $10(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$
- e) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ son paralelos, puesto que \mathbf{b} es un múltiplo escalar de \mathbf{a} . En este caso $\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{a}$.

EJEMPLO 5 Gráficas de la suma y diferencia

Sea $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Grafique los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Solución De (1) y (4) tenemos, respectivamente,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}.$$

Las gráficas de estos dos vectores en el plano xy están dadas en la FIGURA 1.1.12.

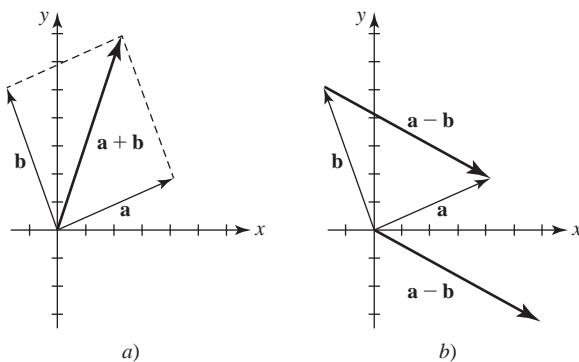


FIGURA 1.1.12 Gráficas de los vectores del ejemplo 5

1.1

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre

- a) $3\mathbf{a}$, b) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, c) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
- d) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ y e) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

- 1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
- 2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3 \rangle$
- 3. $\mathbf{a} = \langle 4, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -5 \rangle$
- 4. $\mathbf{a} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{6}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{6}\mathbf{j}$

- 5. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{j}$
- 6. $\mathbf{a} = \langle 1, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{a}$
- 7. $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$
- 8. $\mathbf{a} = \langle 7, 10 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2 \rangle$

En los problemas 9-14, determine

- a) $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ y b) $-3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.
- 9. $\mathbf{a} = \langle 1, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1 \rangle$
- 10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
- 11. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
- 12. $\mathbf{a} = \langle 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -3 \rangle$
- 13. $\mathbf{a} = \langle 4, 10 \rangle$, $\mathbf{b} = -2\langle 1, 3 \rangle$
- 14. $\mathbf{a} = \langle 3, 1 \rangle + \langle -1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 5 \rangle - \langle 1, 2 \rangle$

En los problemas 15-18, encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Grafique $\overrightarrow{P_1P_2}$ y su correspondiente vector posición.

15. $P_1(3, 2), P_2(5, 7)$

16. $P_1(-2, -1), P_2(4, -5)$

17. $P_1(3, 3), P_2(5, 5)$

18. $P_1(0, 3), P_2(2, 0)$

19. Encuentre el punto final del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ si su punto inicial es $(-3, 10)$.

20. Encuentre el punto inicial del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -5, -1 \rangle$ si su punto final es $(4, 7)$.

21. Determine cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

a) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$

b) $-\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$

c) $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$

d) $2(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 3\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{5}{12}\mathbf{j}\right)$

e) $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

f) $(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (7\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

22. Determine un escalar c de manera que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ sean paralelos.

En los problemas 23 y 24, encuentre $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ para los vectores dados.

23. $\mathbf{a} = \langle 5, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle -2, 4 \rangle, \mathbf{c} = \langle 3, 10 \rangle$

24. $\mathbf{a} = \langle 1, 1 \rangle, \mathbf{b} = \langle 4, 3 \rangle, \mathbf{c} = \langle 0, -2 \rangle$

En los problemas 25-28, encuentre un vector unitario

a) en la misma dirección de \mathbf{a} , y

b) en la dirección opuesta de \mathbf{a} .

25. $\mathbf{a} = \langle 2, 2 \rangle$

26. $\mathbf{a} = \langle -3, 4 \rangle$

27. $\mathbf{a} = \langle 0, -5 \rangle$

28. $\mathbf{a} = \langle 1, -\sqrt{3} \rangle$

En los problemas 29 y 30, normalice el vector dado cuando $\mathbf{a} = \langle 2, 8 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 3, 4 \rangle$.

29. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

30. $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

En los problemas 31 y 32, encuentre el vector \mathbf{b} que es paralelo al vector \mathbf{a} dado y tiene la magnitud indicada.

31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, |\mathbf{b}| = 2$

32. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}, |\mathbf{b}| = 3$

33. Encuentre un vector en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 4, 10 \rangle$ pero de longitud igual a $\frac{3}{4}$.

34. Dado que $\mathbf{a} = \langle 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 0 \rangle$, encuentre un vector en la misma dirección que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ pero cinco veces su longitud.

En los problemas 35 y 36, emplee la figura dada para dibujar el vector que se indica.

35. $3\mathbf{b} - \mathbf{a}$

36. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

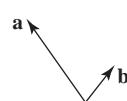


FIGURA 1.1.13 Vectores del problema 35

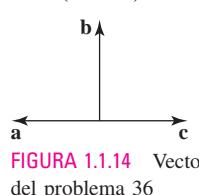


FIGURA 1.1.14 Vectores del problema 36

En los problemas 37 y 38, exprese el vector \mathbf{x} en términos de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .

37.

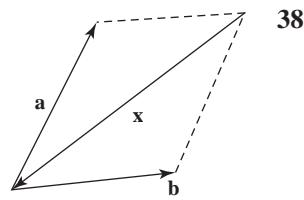


FIGURA 1.1.15 Vectores del problema 37

38.

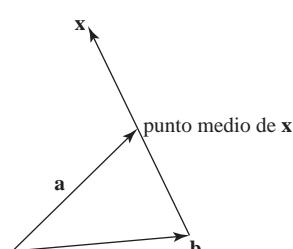


FIGURA 1.1.16 Vectores del problema 38

En los problemas 39 y 40, emplee la figura dada para demostrar el resultado que se indica.

39. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

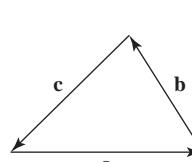


FIGURA 1.1.17 Vectores del problema 39

40. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

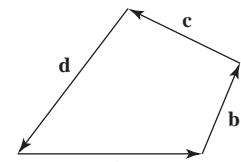


FIGURA 1.1.18 Vectores del problema 40

En los problemas 41 y 42, exprese el vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ como una combinación lineal de los vectores dados \mathbf{b} y \mathbf{c} .

41. $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

42. $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Se dice que un vector es tangente a una curva en un punto si es paralelo a la recta tangente en el punto. En los problemas 43 y 44, encuentre un vector tangente unitario a la curva dada en el punto que se indica.

43. $y = \frac{1}{4}x^2 + 1; (2, 2)$

44. $y = -x^2 + 3x; (0, 0)$

45. Sean P_1, P_2 y P_3 puntos distintos tales que $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_2P_3}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$.

a) ¿Cuál es la relación de $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ con $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

b) ¿Bajo qué condición es $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

Aplicaciones

46. Una carga eléctrica Q se distribuye de manera uniforme a lo largo del eje y entre $y = -a$ y $y = a$. Vea la FIGURA 1.1.19. La fuerza total ejercida sobre la carga q sobre el eje x por la carga Q es $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$, donde

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{L}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}} dy$$

$$F_y = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{y}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}} dy.$$

Determine \mathbf{F} .

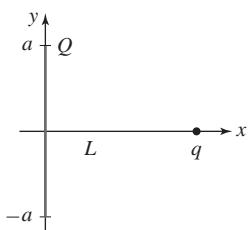


FIGURA 1.1.19 Carga eléctrica del problema 46

47. Al caminar, el pie de una persona golpea el suelo con una fuerza \mathbf{F} a un ángulo θ desde la vertical. En la FIGURA 1.1.20, el vector \mathbf{F} se descompone en dos componentes vectoriales \mathbf{F}_g , que es paralela al suelo, y \mathbf{F}_n , que es perpendicular al suelo. Para que el pie no resbale, la fuerza \mathbf{F}_g debe ser compensada por la fuerza opuesta \mathbf{F}_f de la fricción; esto es, $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_g$.

- a) Utilice el hecho de que $|\mathbf{F}_f| = \mu |\mathbf{F}_n|$, donde el símbolo μ es el coeficiente de fricción, para demostrar que $\tan \theta = \mu$. El pie no resbalará para ángulos menores o iguales que θ .
- b) Dado que $\mu = 0.6$ para un tacón de hule que golpea una acera de asfalto, encuentre el ángulo de “no resbalamiento”.

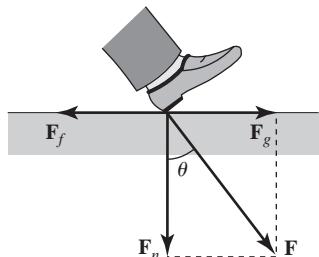


FIGURA 1.1.20 Vectores del problema 47

48. Un semáforo de 200 lb soportado por dos cables cuelga en equilibrio. Como se ilustra en la FIGURA 1.1.21b), considere que el peso del semáforo está representado por \mathbf{w} y las fuerzas en los dos cables por \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . De la figura 1.1.21c), se observa que una condición de equilibrio es

$$\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Vea el problema 39. Si

$$\mathbf{w} = -200\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_1 = (|\mathbf{F}_1| \cos 20^\circ)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_1| \sin 20^\circ)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_2 = -(|\mathbf{F}_2| \cos 15^\circ)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_2| \sin 15^\circ)\mathbf{j},$$

emplee (7) para determinar las magnitudes de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . [Sugerencia: Vuelva a leer iii) de la definición 1.1.1.]

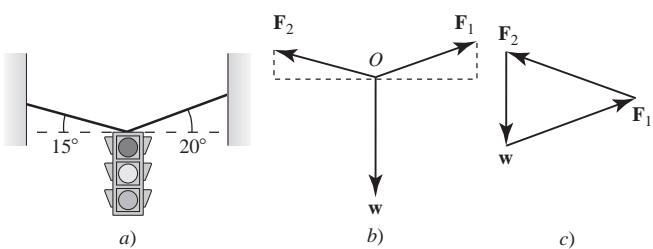


FIGURA 1.1.21 Semáforo en el problema 48

49. El agua que corre por una manguera contra incendios ejerce una fuerza horizontal \mathbf{F}_1 de magnitud igual a 200 lb. Vea la FIGURA 1.1.22. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza \mathbf{F}_3 que un bombero debe ejercer para sostener la manguera a un ángulo de 45° desde la horizontal?

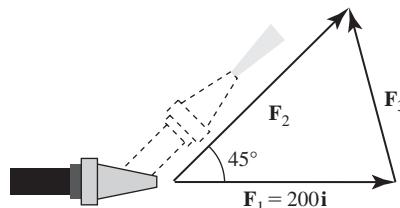


FIGURA 1.1.22 Vectores del problema 49

50. Un avión parte de un aeropuerto ubicado en el origen O y vuela a 150 mi en la dirección 20° noreste a la ciudad A. De A el avión vuela después 200 mi en la dirección 23° noroeste a la ciudad B. De B el avión vuela 240 mi en la dirección 10° suroeste a la ciudad C. Exprese la ubicación de la ciudad C como un vector \mathbf{r} igual al que se presenta en la FIGURA 1.1.23. Determine la distancia de O a C.

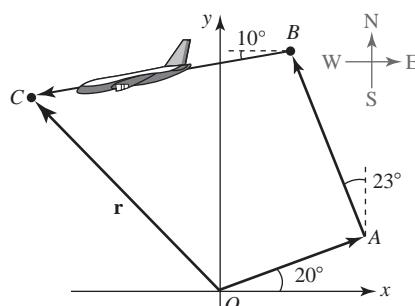


FIGURA 1.1.23 Vectores del problema 50

■ Piense en ello

51. Mediante vectores, demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí. [Sugerencia: Sea M el punto medio de una diagonal y N el punto medio de la otra.]
52. Empleando vectores, demuestre que el segmento de recta entre los puntos medios de los dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y la mitad de largo.

1.2 Espacio tridimensional y vectores

I Introducción En el plano, o espacio bidimensional, una manera de describir la posición de un punto P es asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales denominados ejes x y y . Si P es el punto de intersección de la recta $x = a$ (perpendicular al eje x) y la recta $y = b$ (perpendicular al eje y), entonces el **par ordenado** (a, b) se dice que son las coordenadas

rectangulares o cartesianas del punto. Vea la FIGURA 1.2.1. En esta sección se extenderá este método de representación al espacio tridimensional y después se considerarán vectores en el espacio tridimensional.

Sistema de coordenadas rectangular en el espacio tridimensional En tres dimensiones, o **espacio tridimensional**, se construye un sistema de coordenadas rectangulares utilizando tres ejes mutuamente perpendiculares. El punto en el cual estos ejes se intersecan se denomina **origen** O . Estos ejes, que se muestran en la FIGURA 1.2.2a), se marcan de acuerdo con la llamada **regla de la mano derecha**: Si los dedos de la mano derecha, apuntando en la dirección del eje x positivo, se curvan hacia el eje y positivo, el pulgar apuntará entonces en la dirección del nuevo eje perpendicular al plano de los ejes x y y . Este nuevo eje se denomina eje z . Las líneas punteadas en la figura 1.2.2a) representan los ejes negativos. Ahora bien, si

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

son planos perpendiculares a los ejes x , y y z , respectivamente, el punto P en el cual estos planos se intersecan puede representarse mediante una **triada ordenada** de números (a, b, c) que se dice son las **coordenadas rectangulares o cartesianas** del punto. Los números a , b y c se denominan, a su vez, las coordenadas x , y y z de $P(a, b, c)$. Vea la figura 1.2.2b).

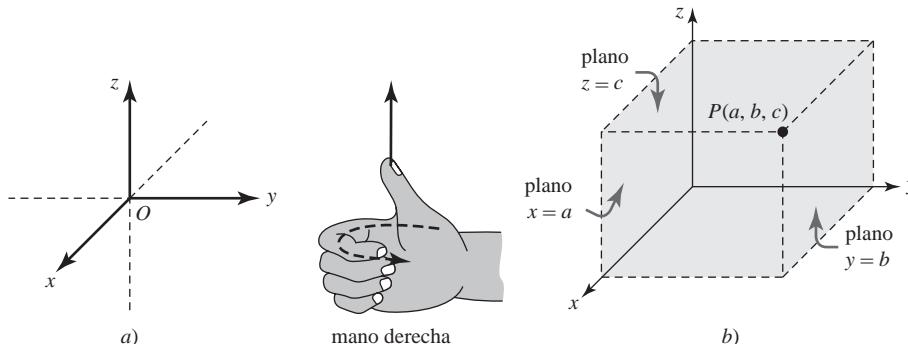


FIGURA 1.2.2 La regla de la mano derecha y un punto en el espacio tridimensional

Octantes Cada par de ejes de coordenadas determina un **plano de coordenadas**. Como se muestra en la FIGURA 1.2.3, los ejes x y y determinan al plano xy , los ejes x y z determinan al plano xz , etcétera. Los planos de coordenadas dividen el espacio tridimensional en ocho partes conocidas como **octantes**. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas* se denomina **primer octante**. No hay un acuerdo para nombrar a los otros siete octantes.

La siguiente tabla resume las coordenadas de un punto sobre un eje de coordenadas o en un plano de coordenadas. Como se ve en la tabla, también es posible describir, digamos, el plano xy mediante una simple ecuación $z = 0$. De manera similar, el plano xz es $y = 0$ y el plano yz es $x = 0$.

Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x	$(a, 0, 0)$	xy	$(a, b, 0)$
y	$(0, b, 0)$	xz	$(a, 0, c)$
z	$(0, 0, c)$	yz	$(0, b, c)$

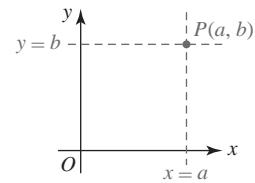


FIGURA 1.2.1 Punto en el espacio bidimensional

Si se intercambian los ejes x y y en la figura 1.2.2a), se dice que el sistema de coordenadas es de **mano izquierda**.

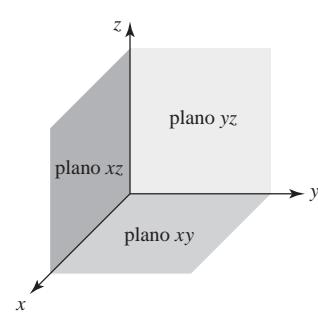


FIGURA 1.2.3 Plano de coordenadas

EJEMPLO 1 Graficación de puntos en el espacio tridimensional

Grafique los puntos $(4, 5, 6)$, $(3, -3, -1)$ y $(-2, -2, 0)$.

Solución De los tres puntos que se muestran en la FIGURA 1.2.4, sólo $(4, 5, 6)$ está en el primer octante. El punto $(-2, -2, 0)$ está en el plano xy .

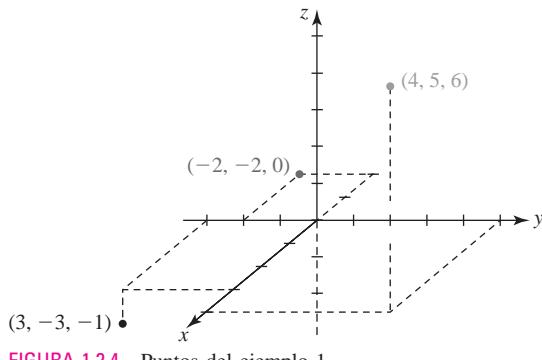


FIGURA 1.2.4 Puntos del ejemplo 1

Fórmula de la distancia Para determinar la **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio tridimensional, vamos a considerar sus proyecciones sobre el plano xy . Como puede observar en la FIGURA 1.2.5, la distancia entre $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$ sigue de la fórmula usual de la distancia en el plano y es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. En consecuencia, del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $P_1P_3P_2$ tenemos

$$\begin{aligned} [d(P_1, P_2)]^2 &= [\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ \text{o } d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

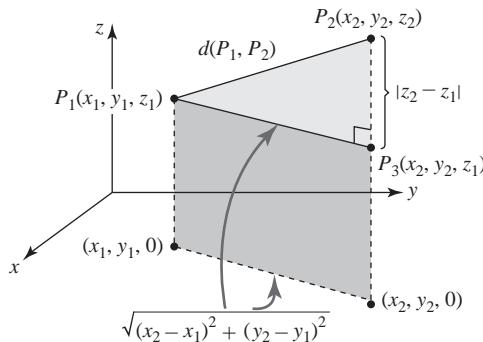


FIGURA 1.2.5 Distancia entre dos puntos en el espacio tridimensional

EJEMPLO 2 Distancia entre puntos en el espacio tridimensional

Encuentre la distancia entre $(2, -3, 6)$ y $(-1, -7, 4)$.

Solución De (1),

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-7))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$

Fórmula del punto medio Es posible utilizar la fórmula de la distancia para mostrar que las coordenadas del **punto medio del segmento de recta** en el espacio tridimensional que conecta los distintos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right). \quad (2)$$

Vea el problema 64 en los ejercicios 1.2.

EJEMPLO 3 Punto medio en el espacio tridimensional

Determine las coordenadas de punto medio del segmento de recta entre los dos puntos del ejemplo 2.

Solución De (2) obtenemos

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + (-7)}{2}, \frac{6 + 4}{2} \right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{2}, -5, 5 \right).$$

Vectores en el espacio tridimensional Un vector \mathbf{a} en el espacio tridimensional es cualquier triada ordenada de números reales

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$$

donde a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector. El **vector posición** de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio tridimensional es el vector $\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$, cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final es P . Vea la FIGURA 1.2.6.

Las definiciones de componentes de la adición, sustracción y multiplicación por un escalar, etc., son generalizaciones naturales de las que se dieron para vectores en el espacio bidimensional.

Definición 1.2.1 Aritmética de componentes

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ vectores en el espacio tridimensional.

- i) Suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
- ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
- iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$
- iv) Negativo: $-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$
- v) Resta: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
- vi) Vector cero: $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$
- vii) Magnitud: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

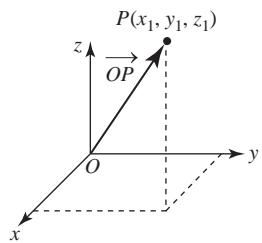


FIGURA 1.2.6 Un vector en el espacio tridimensional

Si \overrightarrow{OP}_1 y \overrightarrow{OP}_2 son los vectores de posición de los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ está dado por

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle. \quad (3)$$

Como en el espacio bidimensional, $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse ya sea como un vector cuyo punto inicial es P_1 y cuyo punto final es P_2 , o como un vector posición \overrightarrow{OP} con punto final $P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Vea la FIGURA 1.2.7.

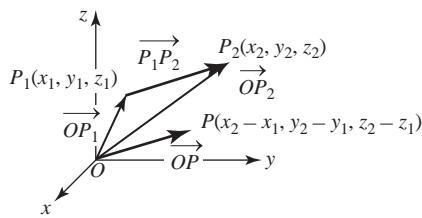


FIGURA 1.2.7 Un vector que conecta dos puntos en el espacio tridimensional

EJEMPLO 4 Vectores entre dos puntos

Determine el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ si los puntos P_1 y P_2 están dados por $P_1 = (4, 6, -2)$ y $P_2 = (1, 8, 3)$.

Solución Si los vectores de posición de los puntos son $\overrightarrow{OP}_1 = \langle 4, 6, -2 \rangle$ y $\overrightarrow{OP}_2 = \langle 1, 8, 3 \rangle$, entonces de (3) tenemos

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1 = \langle 1 - 4, 8 - 6, 3 - (-2) \rangle = \langle -3, 2, 5 \rangle. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Vector unitario

Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 6 \rangle$.

Solución Puesto que un vector unitario tiene longitud 1, primero encontramos la magnitud de \mathbf{a} y después se usa el hecho de que $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{a} . La magnitud de \mathbf{a} es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

El vector unitario en la dirección de \mathbf{a} es

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{7} \langle -2, 3, 6 \rangle = \left\langle -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle. \quad \blacksquare$$

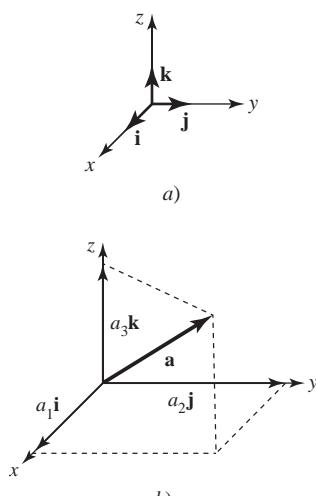


FIGURA 1.2.8 Empleo de los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} para representar un vector de posición \mathbf{a}

Los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} En la sección precedente se mencionó que el conjunto de dos vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ constituye una base para el sistema de vectores bidimensionales. Esto es, cualquier vector \mathbf{a} en el espacio bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} : $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. De igual manera, cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ en el espacio tridimensional se puede expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Para ver esto usamos *i*) y *ii*) de la definición 1.2.1 para escribir

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2, a_3 \rangle &= \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle \\ &= a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\langle 0, 0, 1 \rangle,\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} ilustrados en la FIGURA 1.2.8a) se llaman la **base estándar** del sistema de vectores tridimensionales. En la figura 1.2.8b) observamos que un vector posición $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ y $a_3\mathbf{k}$, los cuales yacen a lo largo de los ejes de coordenadas y tienen el origen como un punto inicial común.

EJEMPLO 6 Empleo de los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}

El vector $\mathbf{a} = \langle 7, -5, 13 \rangle$ es el mismo que $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$.

Cuando se toma en consideración la tercera dimensión, cualquier vector en el plano xy se describe de manera equivalente como un vector tridimensional que yace en el plano de coordenadas $z = 0$. Si bien los vectores $\langle a_1, a_2 \rangle$ y $\langle a_1, a_2, 0 \rangle$ técnicamente no son iguales, se ignorará la distinción. Ésta es la razón, por ejemplo, por la que se denotan $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 1, 0, 0 \rangle$ mediante el mismo símbolo \mathbf{i} . Un vector ya sea en el plano yz o en el plano xz también debe tener una componente cero. En el plano yz el vector $\mathbf{b} = \langle 0, b_2, b_3 \rangle$ se escribe como $\mathbf{b} = b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

EJEMPLO 7 Vectores en los planos de coordenadas

- a) El vector $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ yace en el plano xz y también puede escribirse como $\mathbf{a} = \langle 5, 0, 3 \rangle$.
- b) $|5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

EJEMPLO 8 Combinación de vectores

Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, encuentre $5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Solución Al escribir $5\mathbf{a} = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$ y $2\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ obtenemos

$$\begin{aligned}5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= (15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \\ &= 13\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 48\mathbf{k}.\end{aligned}$$

1.2

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique el punto dado. Utilice los mismos ejes de coordenadas.

1. $(1, 1, 5)$
2. $(0, 0, 4)$
3. $(3, 4, 0)$
4. $(6, 0, 0)$
5. $(6, -2, 0)$
6. $(5, -4, 3)$

En los problemas 7-10, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfagan la condición dada.

7. $z = 5$
8. $x = 1$
9. $x = 2, y = 3$
10. $x = 4, y = -1, z = 7$
11. Proporcione las coordenadas de los vértices del paralelepípedo rectangular cuyos lados son los planos de coordenadas y los planos $x = 2, y = 5, z = 8$.

12. En la **FIGURA 1.2.9** se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectangular que tiene lados paralelos a los planos de coordenadas. Determine las coordenadas de los restantes seis vértices.

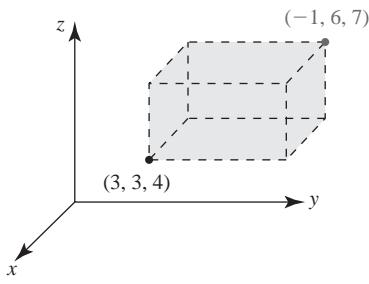


FIGURA 1.2.9 Paralelepípedo del problema 12

13. Considere el punto $P(-2, 5, 4)$.

- Si las líneas se dibujan desde P perpendicular a los planos coordinados, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de cada perpendicular?
- Si se dibuja una línea desde P al plano $z = -2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de la perpendicular?
- Determine el punto en el plano $x = 3$ que es más cercano a P .

14. Determine una ecuación de un plano paralelo a un plano de coordenadas que contenga el par de puntos indicado.

- $(3, 4, -5), (-2, 8, -5)$
- $(1, -1, 1), (1, -1, -1)$
- $(-2, 1, 2), (2, 4, 2)$

En los problemas 15-20, describa el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ en el espacio tridimensional cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada.

15. $xyz = 0$ 16. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

18. $(x - 2)(z - 8) = 0$

19. $z^2 - 25 = 0$ 20. $x = y = z$

En los problemas 21 y 22, encuentre la distancia entre los puntos indicados.

21. $(3, -1, 2), (6, 4, 8)$ 22. $(-1, -3, 5), (0, 4, 3)$

23. Determine la distancia del punto $(7, -3, -4)$ a
a) el plano yz b) el eje x .

24. Determine la distancia desde el punto $(-6, 2, -3)$ hasta
a) el plano xz b) el origen.

En los problemas 25-28, los tres puntos dados forman un triángulo. Determine cuáles triángulos son isósceles y cuáles son triángulos rectos.

25. $(0, 0, 0), (3, 6, -6), (2, 1, 2)$

26. $(0, 0, 0), (1, 2, 4), (3, 2, 2\sqrt{2})$

27. $(1, 2, 3), (4, 1, 3), (4, 6, 4)$

28. $(1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, -1, 1)$

En los problemas 29-32, utilice la fórmula de la distancia para determinar si los puntos dados son colineales.

29. $P_1(1, 2, 0), P_2(-2, -2, -3), P_3(7, 10, 6)$

30. $P_1(1, 2, -1), P_2(0, 3, 2), P_3(1, 1, -3)$

31. $P_1(1, 0, 4), P_2(-4, -3, 5), P_3(-7, -4, 8)$

32. $P_1(2, 3, 2), P_2(1, 4, 4), P_3(5, 0, -4)$

En los problemas 33 y 34, resuelva para la incógnita.

33. $P_1(x, 2, 3), P_2(2, 1, 1); d(P_1, P_2) = \sqrt{21}$

34. $P_1(x, x, 1), P_2(0, 3, 5); d(P_1, P_2) = 5$

En los problemas 35 y 36, encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta entre los puntos indicados.

35. $(1, 3, \frac{1}{2}), (7, -2, \frac{5}{2})$

36. $(0, 5, -8), (4, 1, -6)$

37. Las coordenadas del punto medio del segmento de recta entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(2, 3, 6)$ son $(-1, -4, 8)$. Encuentre las coordenadas de P_1 .

38. Sea P_3 el punto medio del segmento de recta entre $P_1(-3, 4, 1)$ y $P_2(-5, 8, 3)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta.

- entre P_1 y P_3 y
- entre P_3 y P_2 .

En los problemas 39-42, exprese el vector $\vec{P_1P_2}$ en forma de componentes.

39. $P_1(3, 4, 5), P_2(0, -2, 6)$ 40. $P_1(-2, 4, 0), P_2(6, \frac{3}{4}, 8)$

41. $P_1(0, -1, 0), P_2(2, 0, 1)$ 42. $P_1(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5), P_2(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}, 12)$

En los problemas 43-46, dibuje el vector dado.

43. $\langle -3, 5, -2 \rangle$ 44. $\langle 2, 0, 4 \rangle$

45. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ 46. $-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los problemas 47-50, determine el eje o plano en el cual yace el vector dado.

47. $\langle 7, -3, 0 \rangle$ 48. $\langle 0, 2, 0 \rangle$

49. $4\mathbf{k}$ 50. $-2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 51-58, $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 2, 6, 9 \rangle$. Encuentre el vector o escalar indicado.

51. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

52. $2\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c})$

53. $\mathbf{b} + 2(\mathbf{a} - 3\mathbf{c})$

54. $4(\mathbf{a} + 2\mathbf{c}) - 6\mathbf{b}$

55. $|\mathbf{a} + \mathbf{c}|$

56. $|\mathbf{c}||2\mathbf{b}|$

57. $\left| \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| + 5 \left| \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right|$

58. $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$

59. Determine un vector unitario en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 10, -5, 10 \rangle$.

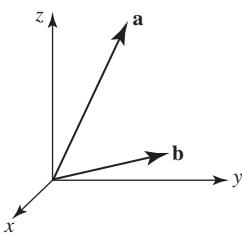
60. Encuentre un vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

61. Encuentre el vector \mathbf{b} que es cuatro veces la longitud de $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ en la misma dirección que \mathbf{a} .

62. Encuentre el vector \mathbf{b} para el cual $|\mathbf{b}| = \frac{1}{2}$ que es paralelo a $\mathbf{a} = \langle -6, 3, -2 \rangle$ pero tiene la dirección opuesta.

☰ Piense en ello

63. Mediante los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} que se muestran en la **FIGURA 1.2.10**, dibuje el “vector promedio” $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.



64. Emplee la fórmula de la distancia para demostrar que

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de recta entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. [Sugerencia: Demuestre que

$$d(P_1, M) = d(M, P_2) \text{ y } d(P_1, P_2) = d(P_1, M) + d(M, P_2).$$

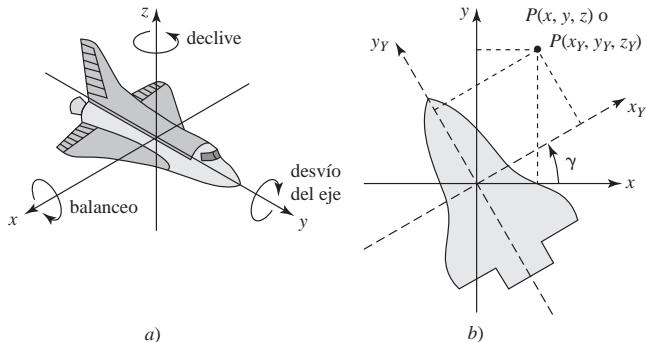
Proyectos

65. Como se ilustra en la FIGURA 1.2.11a), una nave espacial puede efectuar rotaciones denominadas **declive**, **balanceo** y **desvío del eje** alrededor de tres ejes distintos. Para descubrir las coordenadas de un punto P se recurre a dos sistemas de coordenadas: un sistema de coordenada cartesiano fijo y tridimensional en el cual las coordenadas de P son (x, y, z) y un sistema de coordenada de la nave espacial que se mueve con la rotación particular. En la figura 1.2.11b) se ha ilustrado un desvío del eje (esto es, una rotación alrededor del eje z , que es perpendicular al plano de la página). Cuando la nave espacial efectúa un declive, balanceo y desvío del eje *en secuencia* a través de los ángulos α , β y γ , respectivamente, las coordenadas finales del punto P en el sistema de la nave espacial (x_S, y_S, z_S) se obtienen a partir de la secuencia de transformaciones:

$$\begin{aligned} x_P &= x & x_R &= x_P \cos \beta - z_P \sin \beta \\ y_P &= y \cos \alpha + z \sin \alpha & y_R &= y_P \\ z_P &= -y \sin \alpha + z \cos \alpha, & z_R &= x_P \sin \beta + z_P \cos \beta, \\ x_S &= x_R \cos \gamma + y_R \sin \gamma & & \\ y_S &= -x_R \sin \gamma + y_R \cos \gamma & & \\ z_S &= z_R. & & \end{aligned}$$

Suponga que las coordenadas de un punto son $(1, 1, 1)$ en el sistema de coordenadas fijo. Determine las coordena-

das del punto en el sistema de la nave espacial si ésta efectúa un declive, balanceo y desvío del eje en secuencia a través de los ángulos $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.



66. (Para trabajar este problema, debe aprender acerca, o estar familiarizado, con la multiplicación de matrices.)

- a) Cada sistema de ecuaciones en el problema 65 puede escribirse como una ecuación matricial. Por ejemplo, el último sistema es

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \mathbf{M}_Y \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{M}_Y = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Identifique las matrices \mathbf{M}_P

y \mathbf{M}_R y escriba los primeros dos sistemas como

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \mathbf{M}_P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix} = \mathbf{M}_R \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}.$$

- b) Verifique que las coordenadas finales (x_S, y_S, z_S) en el sistema de la nave espacial después del declive, balanceo y desvío del eje se obtienen de

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \mathbf{M}_Y \mathbf{M}_R \mathbf{M}_P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- c) Con $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, efectúe la multiplicación de matrices indicada en el inciso b) y verifique que su respuesta es la misma que en el problema 65.

1.3 Producto punto

Introducción En ésta y en la siguiente sección consideraremos dos tipos de productos entre vectores que se originaron en el estudio de la mecánica, la electricidad y el magnetismo. El primero de estos productos, conocido como **producto punto**, se estudia en esta sección.

Forma de componentes del producto punto El producto punto, definido a continuación, se conoce también como **producto interior** o **producto escalar**. El producto punto de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} se denota mediante $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y es un número real, o escalar, definido en términos de las componentes de los vectores.

Definición 1.3.1 Producto punto de dos vectores

En el espacio bidimensional el **producto punto** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (1)$$

En el espacio tridimensional el **producto punto** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (2)$$

EJEMPLO 1 Productos punto utilizando (2)

Si $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, entonces se deduce de (2) que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (10)\left(-\frac{1}{2}\right) + (2)(4) + (-6)(-3) = 21.$$

■

EJEMPLO 2 Productos punto de los vectores de la base

Puesto que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, vemos de (2) que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (3)$$

De manera similar, por (2)

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \quad (4)$$

■

■ Propiedades El producto punto posee las siguientes propiedades.

Teorema 1.3.1 Propiedades del producto punto

- i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
- ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ← ley comutativa
- iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ ← ley distributiva
- iv) $\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$ k un escalar
- v) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$
- vi) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

DEMOSTRACIÓN Se prueban los incisos iii) y vi). Las demás pruebas se dejan al estudiante. Vea el problema 53 en los ejercicios 1.3. Para probar el inciso iii) se deja $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot (\langle b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle c_1, c_2, c_3 \rangle) \\ &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \quad \leftarrow \begin{cases} \text{puesto que la multiplicación de} \\ \text{números reales es distributiva} \\ \text{respecto a la adición} \end{cases} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Para demostrar el inciso vi) notamos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2.$$

■

■ Forma alterna También puede expresarse el producto punto de dos vectores en términos de las longitudes de los vectores y del ángulo entre ellos.

Esta forma más geométrica es la que se usa por lo general como la definición del producto punto en un curso de física.

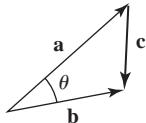


FIGURA 1.3.1 El vector \mathbf{c} en la prueba del teorema 1.3.2

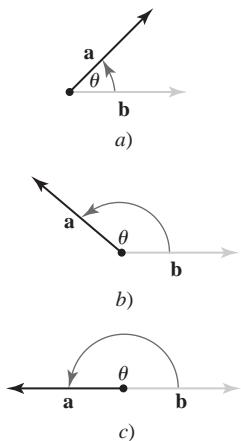


FIGURA 1.3.2 El ángulo θ en el producto punto

Teorema 1.3.2 Forma alterna del producto punto

El producto punto de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad (5)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Entonces el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k}$$

es el tercer lado del triángulo en la FIGURA 1.3.1. Por la ley de los cosenos podemos escribir

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos \theta \quad \text{o} \quad |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos \theta = \frac{1}{2}(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2). \quad (6)$$

Al emplear

$$|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

y

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2,$$

se simplifica el lado derecho de la ecuación en (6) a $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Puesto que ésta es la definición del producto punto, se observa que $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. ■

Ángulo entre vectores La FIGURA 1.3.2 ilustra tres casos del ángulo θ en (5). Si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos, entonces θ es el *más pequeño* de los dos ángulos posibles entre ellos. Al resolver para $\cos \theta$ en (5) y utilizando después la definición del producto punto en (2) tenemos una fórmula para el coseno del ángulo entre los dos vectores:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \quad (7)$$

EJEMPLO 3 Ángulo entre dos vectores

Determine el ángulo entre $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución Tenemos $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{27}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 14$. En consecuencia, (7) produce

$$\cos \theta = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{1}{9}\sqrt{42},$$

y por ello $\theta = \cos^{-1}(\sqrt{42}/9) \approx 0.77$ radianes o $\theta \approx 44.9^\circ$. ■

Vectores ortogonales Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores distintos de cero, entonces el teorema 1.3.2 implica que

- i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ si y sólo si θ es agudo,
- ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ si y sólo si θ es obtuso y
- iii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos \theta = 0$.

Sin embargo, en el último caso el único número en $[0, 2\pi]$ para el cual $\cos \theta = 0$ es $\theta = \pi/2$.

Cuando $\theta = \pi/2$, se dice que los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**. Así, se llega al siguiente resultado.

Teorema 1.3.3 Criterio para vectores ortogonales (condición de ortogonalidad)

Dos vectores distintos de cero \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Las palabras *ortogonal* y *perpendicular* se usan indistintamente. Como regla general se usará *ortogonal* al referirse a vectores y *perpendicular* cuando se involucre a una recta o a un plano.

Puesto que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$ para todo vector \mathbf{b} , el vector cero se considera ortogonal a todo vector.

EJEMPLO 4 Vectores ortogonales

Si $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3)(2) + (-1)(14) + (4)(5) = 0.$$

Del teorema 1.3.3 concluimos que \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales. ■

Cosenos directores Para un vector distinto de cero $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en el espacio tridimensional, los ángulos α , β y γ entre \mathbf{a} y los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , respectivamente, reciben el nombre de **ángulos directores** de \mathbf{a} . Vea la FIGURA 1.3.3. Ahora bien, por (7),

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{i}|}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{j}|}, \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{k}|},$$

la cual se simplifica en

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

Afirmamos que $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, son los **cosenos directores** de \mathbf{a} . Los cosenos directores de un vector distinto de cero \mathbf{a} son simplemente las componentes del vector unitario $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} &= \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\mathbf{k} \\ &= (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Puesto que la magnitud de $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es 1, se sigue de la última ecuación que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

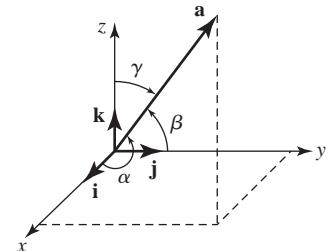


FIGURA 1.3.3 Los ángulos directores de un vector

EJEMPLO 5 Cosenos directores y ángulos directores

Determine los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Solución De $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, observamos que los cosenos directores son

$$\cos \alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}}, \quad \cos \beta = \frac{5}{3\sqrt{5}}, \quad \cos \gamma = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

Los ángulos directores son

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \approx 1.27 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \alpha \approx 72.7^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.73 \text{ radián} \quad \text{o} \quad \beta \approx 41.8^\circ$$

$$\text{y} \quad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.93 \text{ radián} \quad \text{o} \quad \gamma \approx 53.4^\circ. \quad ■$$

Observe en el ejemplo 5 que

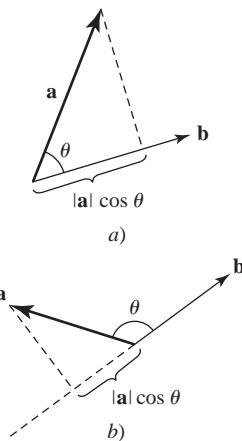
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{4}{45} + \frac{25}{45} + \frac{16}{45} = 1.$$

Componentes de a sobre b Utilizando la ley distributiva junto con (3) y (4) es posible usar las componentes de un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en términos del producto punto:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}. \quad (8)$$

De manera simbólica, se escriben las componentes de \mathbf{a} como

$$\text{comp}_i \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad \text{comp}_j \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad \text{comp}_k \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}. \quad (9)$$

FIGURA 1.3.4 Componente de un vector \mathbf{a} sobre un vector \mathbf{b}

A continuación se verá que el procedimiento indicado en (9) continúa para determinar la **componente de un vector \mathbf{a} sobre un vector \mathbf{b}** . Advierta que en cualquiera de los dos casos que se ilustran en la FIGURA 1.3.4,

$$\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta. \quad (10)$$

En la figura 1.3.4b), $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} < 0$, puesto que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. En este caso, al escribir (10) como

$$\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

observamos que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right). \quad (11)$$

En otras palabras:

- Para encontrar la componente de un vector \mathbf{a} sobre un vector \mathbf{b} , se multiplica \mathbf{a} con un vector unitario en la dirección de \mathbf{b} .

EJEMPLO 6 Componente de un vector sobre otro

Sean $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine

- a) $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ y b) $\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$.

Solución

- a) Primero se forma un vector unitario en la dirección de \mathbf{b} :

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{6} \text{ por lo que } \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Entonces de (11) tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

- b) Al modificar (11) de manera correspondiente, tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right).$$

$$\text{Entonces } |\mathbf{a}| = \sqrt{29} \text{ por lo que } \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}),$$

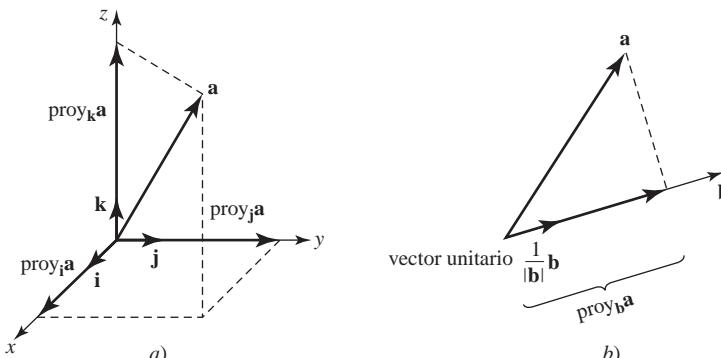
$$\text{y } \text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{29}}. \quad \blacksquare$$

■ Proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b} Como se ilustra en la FIGURA 1.3.5a), la proyección de un vector \mathbf{a} en cualquiera de las direcciones determinadas por \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} es simplemente el *vector* formado al multiplicar la componente de \mathbf{a} en la dirección especificada con un vector unitario en esa dirección; por ejemplo,

$$\text{proy}_{\mathbf{i}} \mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{i}} \mathbf{a}) \mathbf{i} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} = a_1 \mathbf{i},$$

y así sucesivamente. La figura 1.3.5b), muestra el caso general de la **proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b}** :

$$\text{proy}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \right). \quad (12)$$

FIGURA 1.3.5 Proyección de un vector \mathbf{a} sobre un vector \mathbf{b}

EJEMPLO 7 Proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b}

Determine la proyección de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Grafique.

Solución Primero se determina la componente de \mathbf{a} sobre \mathbf{b} . Puesto que $|\mathbf{b}| = \sqrt{13}$, encontramos de (11),

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Así, de (12),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \left(\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{22}{13}\mathbf{i} + \frac{33}{13}\mathbf{j}.$$

La gráfica de este vector se muestra en la FIGURA 1.3.6.

I Proyección de \mathbf{a} ortogonal sobre \mathbf{b} Como se ve en la FIGURA 1.3.7, los vectores \mathbf{a} y $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ son la hipotenusa y un lado del triángulo rectángulo, respectivamente. El segundo lado del triángulo es entonces

$$\mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Éste es un vector que es ortogonal a \mathbf{b} y se le denomina **proyección de \mathbf{a} ortogonal a \mathbf{b}** .

EJEMPLO 8 Proyección de \mathbf{a} ortogonal a \mathbf{b}

Sean $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine la proyección de \mathbf{a} ortogonal a \mathbf{b} .

Solución Primero se determina la proyección de \mathbf{a} en \mathbf{b} . Puesto que $|\mathbf{b}| = 3$, tenemos por (11) que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 5,$$

por lo que, utilizando (12),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (5)\left(\frac{1}{3}\right)(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}.$$

Entonces, la proyección de \mathbf{a} ortogonal a \mathbf{b} es

$$\mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) - \left(\frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}\right) = -\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{8}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{3}\mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

I Interpretación física del producto punto Se sabe que cuando una fuerza constante de magnitud F mueve un objeto a una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado es simplemente

$$W = Fd. \quad (13)$$

Sin embargo, si una fuerza constante \mathbf{F} aplicada a un cuerpo actúa en un ángulo θ respecto a la dirección de movimiento, entonces el trabajo realizado por \mathbf{F} se define como el producto de la componente de \mathbf{F} en la dirección del desplazamiento y la distancia $|\mathbf{d}|$ que se mueve el cuerpo:

$$W = (|\mathbf{F}| \cos \theta)|\mathbf{d}| = |\mathbf{F}||\mathbf{d}| \cos \theta.$$

Vea la FIGURA 1.3.8. Se concluye del teorema 1.3.2 que si \mathbf{F} provoca un desplazamiento \mathbf{d} de un cuerpo, entonces el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \quad (14)$$

Note que (14) se reduce a (13) cuando $\theta = 0$.

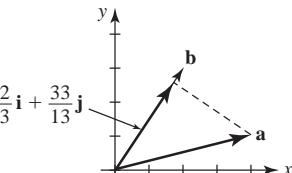


FIGURA 1.3.6 Proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b}

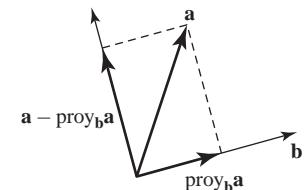


FIGURA 1.3.7 El vector $\mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ es ortogonal a \mathbf{b}

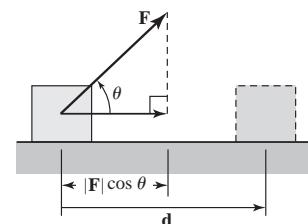


FIGURA 1.3.8 Trabajo realizado por una fuerza que actúa a un ángulo θ con la dirección de movimiento

EJEMPLO 9 Trabajo realizado por una fuerza a un ángulo

Determine el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ sobre un bloque que se mueve de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ se mide en libras y $|\mathbf{d}|$ se mide en pies.

Solución El desplazamiento del bloque está dado por

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

Se concluye de (14) que el trabajo realizado es

$$W = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 26 \text{ pies-lb.} \quad \blacksquare$$

1.3

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

Fundamentos

En los problemas 1-12, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determine el vector o escalar indicado.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
2. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
5. $\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{b})$
6. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
7. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
8. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$
9. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$
10. $(2\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$
11. $\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b}$
12. $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$

En los problemas 13-16, determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ si el ángulo más pequeño entre \mathbf{a} y \mathbf{b} es como se indica.

13. $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\theta = \pi/4$
14. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 12$, $\theta = \pi/6$
15. $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\theta = 2\pi/3$
16. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\theta = 5\pi/6$

En los problemas 17-20, determine un ángulo θ entre los vectores indicados.

17. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
18. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
19. $\mathbf{a} = \langle 2, 4, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, -1, 4 \rangle$
20. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -4, 6 \rangle$

21. Encuentre cuáles pares de los siguientes vectores son ortogonales.

- | | |
|--|---|
| a) $\langle 2, 0, 1 \rangle$ | b) $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ |
| c) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ | d) $\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ |
| e) $\langle 1, -1, 1 \rangle$ | f) $\langle -4, 3, 8 \rangle$ |

22. Determine un escalar c de manera que los vectores dados sean ortogonales.

- a) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - c\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- b) $\mathbf{a} = \langle c, \frac{1}{2}, c \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 4, c \rangle$

23. Determine un vector $\mathbf{v} = \langle x_1, y_1, 1 \rangle$ que es ortogonal tanto a $\mathbf{a} = \langle 3, 1, -1 \rangle$ como a $\mathbf{b} = \langle -3, 2, 2 \rangle$.

24. Un **rombo** es un paralelogramo de ángulos oblicuos con los cuatro lados iguales. Utilice el producto punto para demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

25. Verifique que el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a}$$

es ortogonal al vector \mathbf{a} .

26. Determine un escalar c de manera que el ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sea 45° .

En los problemas 27-30, encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector dado.

27. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
28. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

29. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, -\sqrt{3} \rangle$
30. $\mathbf{a} = \langle 5, 7, 2 \rangle$

31. Encuentre el ángulo entre la diagonal \overrightarrow{AD} del cubo que se muestra en la FIGURA 1.3.9 y el borde \overrightarrow{AB} . Determine el ángulo entre la diagonal \overrightarrow{AD} y la diagonal \overrightarrow{AC} .

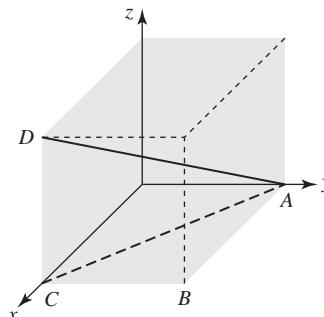


FIGURA 1.3.9 Cubo del problema 31

32. Un avión se encuentra a 4 km de altura, 5 kilómetros hacia el sur y 7 kilómetros hacia el este de un aeropuerto. Vea la FIGURA 1.3.10. Determine los ángulos directores del avión.

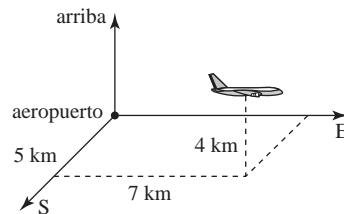


FIGURA 1.3.10 Avión del problema 32

En los problemas 33-36, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Determine el número indicado.

33. $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$
34. $\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$
35. $\text{comp}_{\mathbf{a}} (\mathbf{b} - \mathbf{a})$
36. $\text{comp}_{\mathbf{b}} (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

En los problemas 37 y 38, encuentre la componente del vector indicado en la dirección del origen al punto que se indica.

37. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $P(3, 10)$
38. $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -1 \rangle$; $P(1, -1, 1)$

En los problemas 39-42, determine a) $\text{proy}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ y b) la proyección de \mathbf{a} ortogonal a \mathbf{b} .

39. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
40. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

41. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -3, -2 \rangle$
42. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 2, -1 \rangle$

En los problemas 43 y 44, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Determine el vector indicado.

43. $\text{proy}_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})} \mathbf{a}$
44. Proyección de \mathbf{b} ortogonal a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Aplicaciones

45. Un trineo se jala horizontalmente sobre el hielo por medio de una cuerda unida a su frente. Una fuerza de 20 lb que actúa a un ángulo de 60° con la horizontal desplaza el trineo 100 pies. Determine el trabajo realizado.
46. Se empuja un tren a lo largo de un riel recto con una fuerza de 3 000 lb actuando a un ángulo de 45° en la dirección de movimiento. Determine el trabajo realizado al mover el tren 400 pies.
47. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que mueve un objeto de $P_1(3, 1, -2)$ a $P_2(2, 4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ se mide en newtons y $|\mathbf{d}|$ en metros.
48. Un bloque con un peso \mathbf{p} se jala a lo largo de una superficie horizontal sin fricción mediante una fuerza constante \mathbf{F} de 30 newtons en la dirección dada por un vector \mathbf{d} . Vea la FIGURA 1.3.11. Suponga que $|\mathbf{d}|$ se mide en metros.
- ¿Cuál es el trabajo realizado por el peso \mathbf{p} ?
 - ¿Cuál es el trabajo efectuado por la fuerza \mathbf{F} si $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

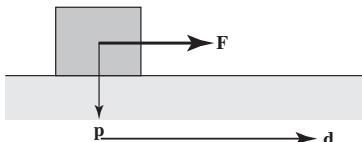


FIGURA 1.3.11 Bloque del problema 48

49. Una fuerza constante \mathbf{F} de magnitud igual a 3 lb se aplica al bloque que se muestra en la FIGURA 1.3.12. \mathbf{F} tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Determine el trabajo realizado en la dirección de movimiento si el bloque se mueve de $P_1(3, 1)$ a $P_2(9, 3)$. Suponga que la distancia se mide en pies.

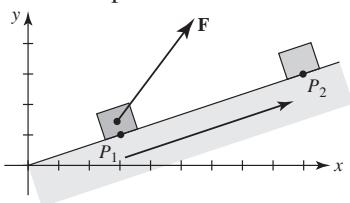


FIGURA 1.3.12 Bloque del problema 49

50. La molécula de metano CH_4 consta de cuatro átomos de hidrógeno que rodean a un solo átomo de carbono. Como se ilustra en la FIGURA 1.3.13, los átomos de hidrógeno se ubican en los vértices de un tetraedro regular. La distancia entre el centro de un átomo de hidrógeno y el centro del átomo de carbono es de 1.10 angstroms (1 angstrom = 10^{-10} m) y el ángulo del enlace hidrógeno-carbón-hidrógeno es $\theta = 109.5^\circ$. Utilizando únicamente métodos vectoriales, determine la distancia entre los dos átomos de hidrógeno.

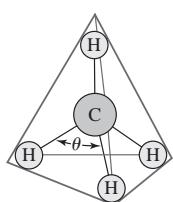


FIGURA 1.3.13 Átomos en la molécula de metano del problema 50

Piense en ello

- Demuestre que si dos vectores distintos de cero \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales, entonces sus cosenos directores satisfacen $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$.
- Determine un vector unitario cuyos ángulos directores, relativos a los tres ejes de coordenadas, son iguales.
- Utilice la definición del producto punto para demostrar los incisos *i), ii), iv) y v)* del teorema 1.3.1.
- Utilice el producto punto para demostrar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.
- Utilice el producto punto para demostrar la **desigualdad del triángulo**: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. [Sugerencia: Considere la propiedad *vi)* del teorema 1.3.1.]
- Demuestre que el vector $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta cuya ecuación es $ax + by + c = 0$. [Sugerencia: Considere que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos distintos de la recta.]
- Utilice el resultado del problema 56 y la FIGURA 1.3.14 para demostrar que la distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by + c = 0$ es $d = |ax_1 + by_1 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$.

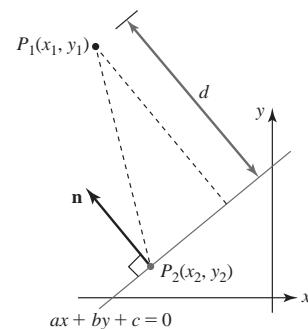


FIGURA 1.3.14 Distancia de un punto a una recta en el problema 57

Proyectos

58. La luz proveniente de una fuente en el punto $S(a, b)$ se refleja en un espejo esférico de radio 1, centrado en el origen, hacia un observador localizado en el punto $O(c, d)$ como se muestra en la FIGURA 1.3.15. El punto de reflexión $P(x, y)$ del espejo esférico yace en el plano determinado por la fuente, el observador y el centro de la esfera. (El análisis de espejos esféricos se da, entre otros lugares, en el estudio del diseño de radares.)

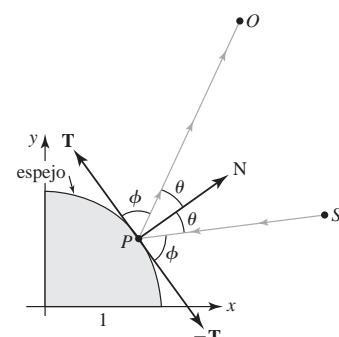


FIGURA 1.3.15 Espejo del problema 58

- a) Emplee el teorema 1.3.2 dos veces, una vez con el ángulo θ y una vez con el ángulo ϕ , para demostrar que las coordenadas del punto de reflexión $P(x, y)$ satisfacen la ecuación

$$\frac{ax + by - 1}{ay - bx} = \frac{cx + dy - 1}{dx - cy}.$$

[Sugerencia: Como se ilustra en la figura, sean \mathbf{N} y \mathbf{T} , respectivamente, un vector normal unitario y una tangente unitaria al círculo en $P(x, y)$. Si $\mathbf{N} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ¿cómo es \mathbf{T} en términos de x y y ?]

- b) Sean $a = 2, b = 0, c = 0$ y $d = 3$. Utilice la relación $x^2 + y^2 = 1$ para demostrar que la coordenada x del punto de reflexión es una raíz de una ecuación polinomial de cuarto grado.
 c) Utilice el método de Newton o un SAC para determinar el punto de reflexión en el inciso b). Quizá tenga que considerar las cuatro raíces de la ecuación en el inciso b) para encontrar la que corresponde a una solución de la ecuación en el inciso a).

1.4 Producto cruz

■ Introducción El producto punto, que se presentó en la sección anterior, opera tanto en el espacio bidimensional como en el tridimensional y genera un *número*. Por otro lado, el **producto cruz**, que se presenta en esta sección, sólo está definido para vectores en el espacio tridimensional y genera otro *vector* en el espacio tridimensional.

■ Determinantes de segundo y tercer orden Los siguientes hechos acerca de los determinantes serán importantes en la definición y discusión del producto cruz en esta sección.

Repasso de determinantes

La definición de un **determinante de segundo orden** es el número

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Un **determinante de tercer orden** se define en términos de tres determinantes de segundo orden del modo que sigue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lo anterior se denomina **expansión de determinantes por cofactores** del primer renglón.

Se lee como un determinante de "dos por dos".

Aun cuando un determinante es un *número*, es conveniente pensar en él como un arreglo cuadrado. Así, los determinantes de segundo y tercer orden se refieren, respectivamente, como **determinantes 2×2 y 3×3** . Hay determinantes de orden superior, pero como no se encontrarán en las siguientes unidades de este libro no se darán sus definiciones.

Para encontrar el valor de un determinante de 2×2 se calculan los productos de los números en las dos diagonales y se restan:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Para un determinante de 3×3 , el **cofactor** de una entrada a_{ij} en el primer renglón y la columna j -ésima, $j = 1, 2, 3$, es $(-1)^{1+j}$ veces el determinante 2×2 formado al eliminar el primer renglón y la j -ésima columna. Los cofactores de a_1, a_2 y a_3 son, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Un determinante de 2×2

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-4)3 - (-2)5 = -2 \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Un determinante de 3×3

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8(0) - 5(12) + 4(8) = -28 \quad \blacksquare$$

Las siguientes propiedades serán de utilidad en la discusión que sigue.

Tres propiedades de determinantes

- i) Si toda entrada en un renglón (o columna) de un determinante es 0, entonces el valor del determinante es cero.
- ii) Si dos renglones (o columnas) de un determinante son iguales, entonces el valor del determinante es cero.
- iii) Cuando dos renglones (o columnas) de un determinante se intercambian, el determinante que resulta es el negativo del determinante original.

■ Forma de componentes del producto cruz Como se hizo en la discusión del producto punto, definimos el producto cruz de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en términos de las componentes de los vectores.

Definición 1.4.1 Producto cruz de dos vectores

El **producto cruz** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \quad (1)$$

Los coeficientes de los vectores básicos en (1) se reconocen como determinantes de 2×2 , por lo que (1) puede escribirse como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Esta representación, a su vez, sugiere que es posible escribir el producto cruz como un determinante de 3×3 :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Técnicamente la expresión sobre el lado derecho de la igualdad en (2) *no* es un determinante, ya que sus entradas no son todas escalares. De cualquier modo, el “determinante” en (2) se usa simplemente como una manera de recordar la definición de componentes del producto cruz dada en (1).

EJEMPLO 3 El producto cruz

Sean $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución Usamos (2) y se desarrolla el determinante utilizando cofactores del primer renglón:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -3\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 10\mathbf{k}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Productos cruz de los vectores básicos

Puesto que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$, advertimos de (2) o la segunda propiedad de determinantes que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

También por (2)

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}. \quad (4)\end{aligned}\quad \blacksquare$$

El producto cruz en (4) se obtiene utilizando la mnemónica circular que se muestra en la FIGURA 1.4.1.

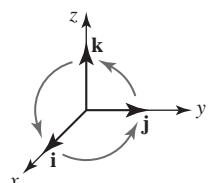


FIGURA 1.4.1 Un mnemónico para productos cruz que implican a \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k}

■ Propiedades El siguiente teorema resume algunas de las propiedades importantes del producto cruz.

Teorema 1.4.1 Propiedades del producto cruz

- i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
- ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \leftarrow$ ley distributiva
- iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \leftarrow$ ley distributiva
- v) $\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = (ka) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, k un escalar
- vi) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
- vii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$
- viii) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$

Advierta en la parte ii) del teorema 1.4.1 que el producto cruz no es commutativo. Como consecuencia de esta propiedad no commutativa hay dos leyes distributivas en los incisos iii) y iv) del teorema.

DEMOSTRACIÓN Los incisos i), ii) y vi) siguen directamente de las tres propiedades de los determinantes dadas antes. Se demuestra el inciso iii) y se dejan las restantes pruebas al estudiante. Vea el problema 60 en los ejercicios 1.4. Para demostrar el inciso iii) dejamos $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= [(a_2b_3 + a_2c_3) - (a_3b_2 + a_3c_2)]\mathbf{i} - [(a_1b_3 + a_1c_3) - (a_3b_1 + a_3c_1)]\mathbf{j} \\ &\quad + [(a_1b_2 + a_1c_2) - (a_2b_1 + a_2c_1)]\mathbf{k} \\ &= [(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}] \\ &\quad + [(a_2c_3 - a_3c_2)\mathbf{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\mathbf{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\mathbf{k}] \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

■ Vectores paralelos En la sección 1.1 vimos que dos vectores distintos de cero son paralelos si y sólo si uno es un múltiplo escalar distinto de cero del otro. Así, dos vectores son paralelos y tienen las formas \mathbf{a} y $k\mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es cualquier vector. Por las propiedades $v)$ y $vi)$ del teorema 1.4.1, el producto cruz de vectores paralelos debe ser $\mathbf{0}$. Esto se enuncia formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.2 Criterio para vectores paralelos (condición de paralelismo)

Dos vectores distintos de cero \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos si y sólo si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 5 Vectores paralelos

Determine si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ son vectores paralelos.

Solución Del producto cruz

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

y el teorema 1.4.2 concluimos que \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores paralelos. ■

■ Regla de la mano derecha Una caracterización alterna del producto cruz utiliza la **regla de la mano derecha**. Como se observa en la FIGURA 1.4.2a), si los dedos de la mano derecha apuntan a lo largo del vector \mathbf{a} y después se curvan hacia el vector \mathbf{b} , el pulgar dará la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. En la figura 1.4.1b), la regla de la mano derecha muestra la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

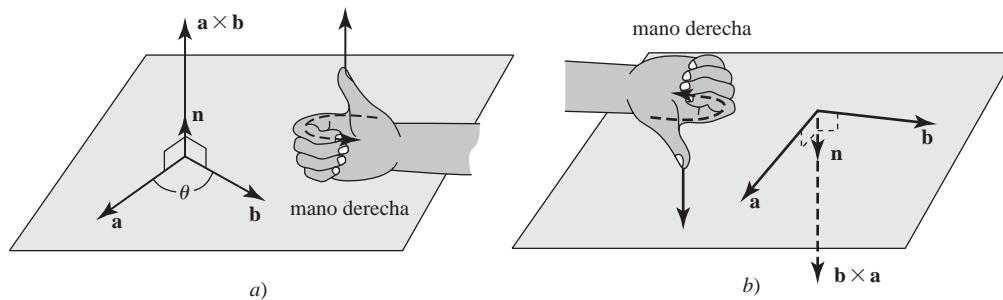


FIGURA 1.4.2 La regla de la mano derecha

Teorema 1.4.3 Forma alterna del producto cruz

Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} dos vectores distintos de cero que no son paralelos entre sí. Entonces el producto cruz de \mathbf{a} y \mathbf{b} es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta) \mathbf{n}, \quad (5)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y \mathbf{n} es un vector unitario perpendicular al plano de \mathbf{a} y \mathbf{b} con dirección dada por la regla de la mano derecha.

DEMOSTRACIÓN Se observa de las propiedades $vii)$ y $viii)$ del teorema 1.4.1 que tanto \mathbf{a} como \mathbf{b} son perpendiculares a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Así, la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular al plano de \mathbf{a} y \mathbf{b} , y puede demostrarse que la regla de la mano derecha determina la dirección apropiada. Resta demostrar que la magnitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta. \quad (6)$$

Calculamos por separado los cuadrados de los lados izquierdo y derecho de esta ecuación utilizando las formas de componentes de \mathbf{a} y \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 b_3 a_3 b_1 + a_3^2 b_1^2 \\ &\quad + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\ (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta)^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \operatorname{sen}^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 b_3 a_3 b_1 + a_3^2 b_1^2 \\ &\quad + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2. \end{aligned}$$

Puesto que ambos lados son iguales a la misma cantidad, deben ser iguales entre sí, por lo que

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta)^2.$$

Por último, tomando la raíz cuadrada de ambos lados y utilizando el hecho de que $\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta} = \operatorname{sen} \theta$ puesto que $\operatorname{sen} \theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$, tenemos $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$. ■

Combinando los teoremas 1.4.2 y 1.4.3 advertimos que para *cualquier* par de vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} ,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta) \mathbf{n}.$$

I Productos especiales El **triple producto escalar** de los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} es $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Utilizando las formas de las componentes de las definiciones de los productos punto y cruz, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot \left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right] \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Así, vemos que el triple producto escalar puede escribirse como un determinante de 3×3 :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Utilizando las propiedades de determinantes puede demostrarse que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (8)$$

Vea el problema 61 en los ejercicios 1.4.

El **triple producto vectorial** de tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} es

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

El triple producto vectorial se relaciona con el producto punto por medio de

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (9)$$

Vea el problema 62 en los ejercicios 1.4.

I Áreas Dos vectores distintos de cero y no paralelos \mathbf{a} y \mathbf{b} pueden considerarse como los lados de un paralelogramo. El **área A de un paralelogramo** es

$$A = (\text{base})(\text{altura}).$$

De la FIGURA 1.4.3a), observamos que $A = |\mathbf{b}| (|\mathbf{a}| \operatorname{sen} \theta) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$

o

$$A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \quad (10)$$

De igual modo que en la figura 1.4.3b), vemos que el **área del triángulo** con lados \mathbf{a} y \mathbf{b} es

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|. \quad (11)$$

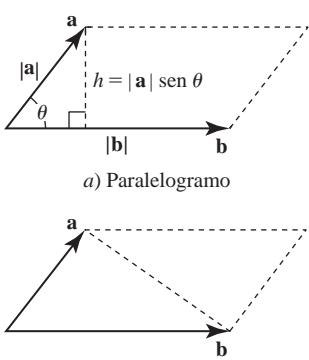


FIGURA 1.4.3 El área de un paralelogramo

EJEMPLO 6 Área del triángulo

Encuentre el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 3, 4)$ y $P_3(3, 0, -1)$.

Solución Los vectores $\vec{P_1P_2}$ y $\vec{P_2P_3}$ pueden considerarse como dos lados del triángulo. Puesto que

$$\vec{P_1P_2} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \vec{P_2P_3} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\vec{P_1P_2} \times \vec{P_2P_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.\end{aligned}$$

De (11) vemos que el área es

$$A = \frac{1}{2} |-\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}| = \frac{3}{2} \sqrt{10}. \quad \blacksquare$$

■ Volumen de un paralelepípedo Si los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} no yacen en el mismo plano, entonces el **volumen del paralelepípedo** con bordes \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} que se muestra en la FIGURA 1.4.4 es

$$\begin{aligned}V &= (\text{área de la base})(\text{altura}) \\ &= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\text{comp}_{\mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{a}| \\ &= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \left| \mathbf{a} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|} \mathbf{b} \times \mathbf{c} \right) \right| \\ &= |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|. \quad (12)\end{aligned}$$

o

Así, el volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores es el valor absoluto del triple producto escalar de los vectores.

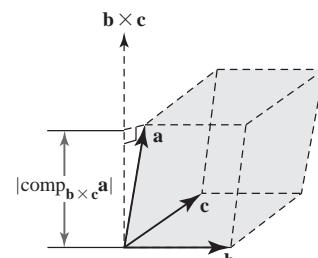


FIGURA 1.4.4 Paralelepípedo formado por tres vectores

■ Vectores coplanares Los vectores que yacen en el mismo plano se dice que son **coplanares**. Se ha visto que si los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} no son coplanares, entonces necesariamente $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$, pues el volumen de un paralelepípedo con bordes \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} tiene volumen distinto de cero. Enunciado de manera equivalente, esto quiere decir que si $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, entonces los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son coplanares. Puesto que lo inverso de este último enunciado también es cierto (vea el problema 64 en los ejercicios 1.4), ocurre que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ y } \mathbf{c} \text{ son coplanares.}$$

■ Interpretación física del producto cruz En física una fuerza \mathbf{F} que actúa en el extremo de un vector de posición \mathbf{r} , como se muestra en la FIGURA 1.4.5, se dice que produce una **torsión** τ definida por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por ejemplo, si $|\mathbf{F}| = 20 \text{ N}$, $|\mathbf{r}| = 3.5 \text{ m}$ y $\theta = 30^\circ$, entonces de (6),

$$|\tau| = (3.5)(20)\sin 30^\circ = 35 \text{ N-m.}$$

Si \mathbf{F} y \mathbf{r} están en el plano de la página, la regla de la mano derecha implica que la dirección de τ es hacia afuera de la misma, y perpendicular a ella (hacia el lector).

Como podemos advertir en la FIGURA 1.4.6, cuando una fuerza \mathbf{F} se aplica a una llave de tuercas, la magnitud de la torsión τ es una medida del efecto de rotación alrededor del punto pivote P y el vector τ se dirige a lo largo del eje de la tuerca. En este caso τ apunta hacia adentro de la página.

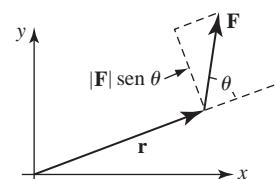


FIGURA 1.4.5 Una fuerza actuando en el extremo de un vector

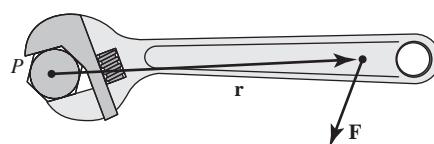


FIGURA 1.4.6 Una llave que aplica torsión a una tuerca



NOTAS DESDE EL AULA

Cuando se trabaja con vectores, debe tenerse cuidado de no mezclar los símbolos de los productos punto y cruz, esto es, \cdot y \times , con los símbolos de la multiplicación ordinaria, así como ser cuidadosos, en especial, en el uso, o falta del mismo, de paréntesis. Por ejemplo, si a , b y c son números reales, entonces el producto abc está bien definido puesto que

$$abc = a(bc) = (ab)c.$$

Por otro lado, la expresión $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ no está bien definida puesto que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Vea el problema 59 en los ejercicios 1.4. Otras expresiones, tal como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, no tienen sentido, incluso si se incluye paréntesis. ¿Por qué?

1.4

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$
3. $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, 4 \rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2, 3 \rangle$
5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 6, 0 \rangle$
8. $\mathbf{a} = \langle 0, 5, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -3, 4 \rangle$
9. $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -3, 6 \rangle$
10. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 10 \rangle$

En los problemas 11 y 12, encuentre $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$.

11. $P_1(2, 1, 3)$, $P_2(0, 3, -1)$, $P_3(-1, 2, 4)$
12. $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(1, 2, 3)$

En los problemas 13 y 14, encuentre un vector distinto de cero que sea perpendicular tanto a \mathbf{a} como a \mathbf{b} .

13. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, -1, 0 \rangle$

En los problemas 15 y 16, verifique que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ y $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

15. $\mathbf{a} = \langle 5, -2, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, -7 \rangle$
16. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

En los problemas 17 y 18,

- a) calcule $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ seguido de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.
- b) Verifique los resultados del inciso a) mediante (9) de esta sección.

17. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
18. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$
 $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

En los problemas 19-36, encuentre el escalar o vector indicado sin usar (2), (7) o (9).

19. $(2\mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
20. $\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})$
21. $\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$
22. $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$

23. $[(2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j})] \times (4\mathbf{j})$
24. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times \mathbf{i}$
25. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + 5\mathbf{k})$
26. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - 2(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
27. $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$
28. $\mathbf{i} \cdot [\mathbf{j} \times (-\mathbf{k})]$
29. $|4\mathbf{j} - 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j})|$
30. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
31. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
32. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i}$
33. $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
34. $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
35. $2\mathbf{j} \cdot [\mathbf{i} \times (\mathbf{j} - 3\mathbf{k})]$
36. $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

En los problemas 37-44, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre el escalar o vector indicado.

37. $\mathbf{a} \times (3\mathbf{b})$
38. $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
39. $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$
40. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$
41. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
42. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
43. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
44. $(4\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

En los problemas 45 y 46,

- a) verifique que el cuadrilátero dado es un paralelogramo y
- b) determine el área del paralelogramo.

45.

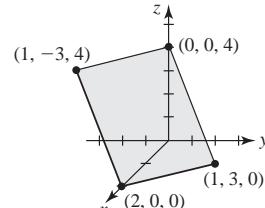


FIGURA 1.4.7 Paralelogramo del problema 45

46.

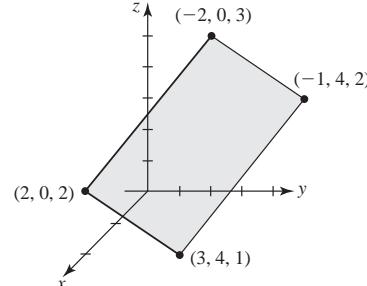


FIGURA 1.4.8 Paralelogramo del problema 46

En los problemas 47-50, encuentre el área del triángulo determinado por los puntos dados.

47. $P_1(1, 1, 1), P_2(1, 2, 1), P_3(1, 1, 2)$

48. $P_1(0, 0, 0), P_2(0, 1, 2), P_3(2, 2, 0)$

49. $P_1(1, 2, 4), P_2(1, -1, 3), P_3(-1, -1, 2)$

50. $P_1(1, 0, 3), P_2(0, 0, 6), P_3(2, 4, 5)$

En los problemas 51 y 52, encuentre el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores dados son los tres bordes.

51. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

52. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 53 y 54, determine si los vectores indicados son coplanares.

53. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \mathbf{c} = \frac{5}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

54. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \frac{3}{2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

En los problemas 55 y 56, determine si los cuatro puntos indicados yacen en el mismo plano.

55. $P_1(1, 1, -2), P_2(4, 0, -3), P_3(1, -5, 10), P_4(-7, 2, 4)$

56. $P_1(2, -1, 4), P_2(-1, 2, 3), P_3(0, 4, -3), P_4(4, -2, 2)$

57. Como se muestra en la FIGURA 1.4.9, el vector \mathbf{a} yace en el plano xy y el vector \mathbf{b} se ubica a lo largo del eje z positivo. Sus magnitudes son $|\mathbf{a}| = 6.4$ y $|\mathbf{b}| = 5$.

a) Emplee (5) para encontrar $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

b) Utilice la regla de la mano derecha para determinar la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

c) Use el inciso b) para expresar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en términos de los vectores unitarios \mathbf{i}, \mathbf{j} y \mathbf{k} .

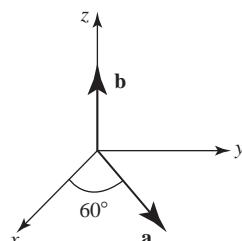


FIGURA 1.4.9 Vectores del problema 57

58. Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} yacen en el plano xz de manera que el ángulo entre ellos es 120° . Si $|\mathbf{a}| = \sqrt{27}$ y $|\mathbf{b}| = 8$, encuentre todos los valores posibles de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

■ Piense en ello

59. Si $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 4, 5, 6 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 7, 8, 3 \rangle$, muestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

60. Demuestre los incisos iv), v), vii) y viii) del teorema 1.4.1.

61. Demuestre $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

62. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

63. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

64. Demuestre que si \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} son coplanares, entonces $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.

■ Proyectos

65. Una retícula tridimensional es una colección de combinaciones enteras de tres vectores básicos no coplanares \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} . En cristalografía, una retícula puede especificar las ubicaciones de átomos en un cristal. Los estudios de difracción de rayos X de cristales utilizan la “retícula recíproca”, la cual tiene los vectores de la base

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

- a) Cierta retícula tiene los vectores de la base $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Determine los vectores de la base de la retícula recíproca.

- b) La celda unitaria de la retícula recíproca es el paralelepípedo con lados \mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{C} , en tanto que la celda unitaria de la retícula original es el paralelepípedo con lados \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} . Demuestre que el volumen de la celda unitaria de la retícula recíproca es el recíproco del volumen de la celda unitaria de la retícula original. [Sugerencia: Empiece con $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y utilice (9).]

1.5 Rectas en el espacio tridimensional

■ Introducción La clave para escribir la ecuación de una recta en el plano es la noción de la pendiente. La pendiente de una recta (o su ángulo de inclinación) proporciona un indicio de la dirección. Una recta en el plano se determina especificando ya sea un punto y una pendiente o cualesquiera dos puntos distintos. Básicamente lo mismo es cierto en el espacio tridimensional.

A continuación verá que los conceptos de vectores son una ayuda importante en la obtención de la ecuación de una recta en el espacio.

■ Ecuación vectorial Una recta en el espacio se determina especificando un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector distinto de cero \mathbf{v} . A través del punto P_0 pasa sólo una recta L paralela al vector dado. Suponga que $P(x, y, z)$ es cualquier punto sobre la recta. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ son los vectores de posición de P y P_0 , entonces debido a que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es paralelo al vector \mathbf{v} existe una escalar t tal que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. Esto proporciona una **ecuación vectorial**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \quad (1)$$

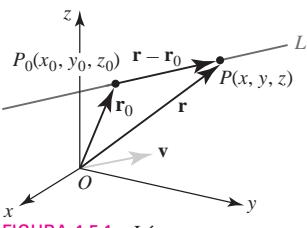


FIGURA 1.5.1 Línea que pasa por P_0 paralela a \mathbf{v}

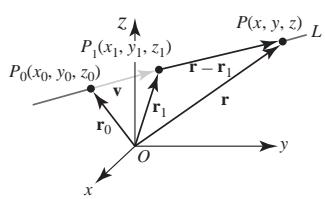


FIGURA 1.5.2 Línea que pasa por P_0 y P_1

de la recta L . Al emplear componentes, $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ advertimos que (1) es igual a

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle. \quad (2)$$

El escalar t se denomina **parámetro** y el vector \mathbf{v} distinto de cero recibe el nombre de **vector direccional**; las componentes a , b y c del vector direccional \mathbf{v} se llaman **números direccionales** de la recta L . Para cada número real t el vector \mathbf{r} en (1) es el vector de posición de un punto sobre L y por ello es posible prever la recta como si se estuviera trazando en el espacio a partir de la punta en movimiento de \mathbf{r} . Vea la **FIGURA 1.5.1**.

Cualesquier dos puntos distintos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio tridimensional determinan únicamente la recta L entre ellos. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ y $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ son vectores de posición, vemos en la **FIGURA 1.5.2** que el vector $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. De tal manera, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$. Debido a que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ también es paralelo a \mathbf{v} , una ecuación vectorial alterna para la recta es $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0). \quad (3)$$

Si escribimos $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle = \langle a, b, c \rangle$ veremos que (3) es lo mismo que (1). De hecho, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(-\mathbf{v})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(k\mathbf{v})$, con k un escalar distinto de cero, también son ecuaciones de L .

EJEMPLO 1 Ecuación vectorial de una recta

Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(4, 6, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución Con la identificación $x_0 = 4$, $y_0 = 6$, $z_0 = -3$, $a = 5$, $b = -10$ y $c = 2$ obtenemos de (2) una ecuación vectorial de la recta:

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 4, 6, -3 \rangle + t\langle 5, -10, 2 \rangle \quad \text{o} \quad \langle x, y, z \rangle = \langle 4 + 5t, 6 - 10t, -3 + 2t \rangle. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Ecuación vectorial de una recta

Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(2, -1, 8)$ y $(5, 6, -3)$.

Solución Si marcamos los puntos como $P_0(2, -1, 8)$ y $P_1(5, 6, -3)$, entonces un vector direccional para la recta que pasa por P_0 y P_1 es

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \langle 5 - 2, 6 - (-1), -3 - 8 \rangle = \langle 3, 7, -11 \rangle.$$

De (3) una ecuación vectorial de la recta es

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 2, -1, 8 \rangle + t\langle 3, 7, -11 \rangle.$$

Ésta es una de las muchas ecuaciones vectoriales posibles de la recta. Por ejemplo, dos ecuaciones alternas son

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 6, -3 \rangle + t\langle 3, 7, -11 \rangle$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle 5, 6, -3 \rangle + t\langle -3, -7, 11 \rangle. \quad \blacksquare$$

Ecuaciones paramétricas Al igualar las componentes en (2) obtenemos

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct. \quad (4)$$

Las ecuaciones en (4) se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por P_0 . La recta L completa, que se extiende indefinidamente en ambas direcciones, se obtiene al permitir que el parámetro t aumente de $-\infty$ a ∞ ; en otras palabras, el intervalo del parámetro es $(-\infty, \infty)$. Si el parámetro t se restringe a un intervalo cerrado $[t_0, t_1]$, entonces cuando t aumenta (4) define un **segmento de recta** que empieza en el punto que corresponde a t_0 y termina en el punto correspondiente a t_1 .

EJEMPLO 3 Ecuaciones paramétricas de una recta

Determine las ecuaciones paramétricas de la recta

a) que pasa por $(5, 2, 4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, y b) que pasa por $(-1, 0, 1)$ y $(2, -1, 6)$.

Solución

- a) Con las identificaciones $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $z_0 = 4$, $a = 4$, $b = 7$ y $c = -9$, vemos de (4) que las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$x = 5 + 4t, \quad y = 2 + 7t, \quad z = 4 - 9t.$$

- b) Procediendo como en el ejemplo 2, un vector direccional de la recta es

$$\mathbf{v} = \langle 2, -1, 6 \rangle - \langle -1, 0, 1 \rangle = \langle 3, -1, 5 \rangle.$$

Con números direccionales $a = 3$, $b = -1$ y $c = 5$, (4) produce

$$x = -1 + 3t, \quad y = -t, \quad z = 1 + 5t. \quad \blacksquare$$

Si se limita el intervalo del parámetro en el inciso a) del ejemplo 3, por ejemplo, $-1 \leq t \leq 0$, entonces

$$x = 5 + 4t, \quad y = 2 + 7t, \quad z = 4 - 9t, \quad -1 \leq t \leq 0$$

son ecuaciones paramétricas del segmento de recta que empieza en el punto $(1, -5, 13)$ y termina en $(5, 2, 4)$.

EJEMPLO 4 Repaso del ejemplo 1

Encuentre el punto donde la recta del ejemplo 1 interseca al plano xy .

Solución Al igualar componentes en la ecuación vectorial $\langle x, y, z \rangle = \langle 4 + 5t, 6 - 10t, -3 + 2t \rangle$ se producen las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 4 + 5t, \quad y = 6 - 10t, \quad z = -3 + 2t.$$

Puesto que una ecuación para el plano xy es $z = 0$, resolvemos $z = -3 + 2t = 0$ para t . Al sustituir $t = \frac{3}{2}$ en las restantes dos ecuaciones se producen $x = 4 + 5(\frac{3}{2}) = \frac{23}{2}$ y $y = 6 - 10(\frac{3}{2}) = -9$. El punto de intersección en el plano z es entonces $(\frac{23}{2}, -9, 0)$. \blacksquare

Ecuaciones simétricas De (4) se observa que es posible eliminar el parámetro escribiendo

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

siempre que cada uno de los tres números direccionales a , b y c sea distinto de cero. Las ecuaciones resultantes

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (5)$$

se dice que son **ecuaciones simétricas** de la recta que pasa por P_0 .

Si uno de los números direccionales a , b o c es cero, empleamos las dos ecuaciones restantes para eliminar el parámetro t . Por ejemplo, si $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, entonces (4) produce

$$x = x_0 \quad y \quad t = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

En este caso,

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (6)$$

son ecuaciones simétricas de la recta. Puesto que $x = x_0$ es una ecuación de un plano vertical perpendicular al eje x , la recta descrita por (6) yace en ese plano.

EJEMPLO 5 Repaso del ejemplo 3

Determine las ecuaciones simétricas de la recta que se encontró en el inciso a) del ejemplo 3.

Solución A partir de la identificación dada en la solución del ejemplo 3 podemos escribir de inmediato de acuerdo con (5) que

$$\frac{x - 5}{4} = \frac{y - 2}{7} = \frac{z - 4}{-9}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Ecuaciones simétricas

Encuentre las ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos $(5, 3, 1)$ y $(2, 1, 1)$.

Solución Definimos $a = 5 - 2 = 3$, $b = 3 - 1 = 2$ y $c = 1 - 1 = 0$. De acuerdo con la discusión precedente se deduce que las ecuaciones simétricas para la recta son

$$\frac{x - 5}{3} = \frac{y - 3}{2}, \quad z = 1.$$

En otras palabras, las ecuaciones simétricas describen una recta en el plano $z = 1$. ■

I Rectas perpendicular y paralela La siguiente definición proporciona una manera de usar los vectores direccionalles de dos rectas para determinar si las rectas son perpendiculares o paralelas.

Definición 1.5.1 Rectas perpendicular y paralela

Dos rectas L_1 y L_2 con vectores direccionalles \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , respectivamente, son

- i) **perpendiculares** si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ y
- ii) **paralelas** si $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$, para algún escalar k distinto de cero.

EJEMPLO 7 Rectas perpendiculares

Determine si las rectas

$$L_1: \quad x = -6 - t, \quad y = 20 + 3t, \quad z = 1 + 2t$$

$$L_2: \quad x = 5 + 2s, \quad y = -9 - 4s, \quad z = 1 + 7s$$

son perpendiculares.

Solución Al leer los coeficientes de los parámetros t y s , observamos que

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

son los vectores direccionalles de L_1 y L_2 , respectivamente. Como $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -2 - 12 + 14 = 0$ concluimos que las rectas son perpendiculares. ■

EJEMPLO 8 Rectas paralelas

Los vectores direccionales de las rectas

$$L_1: \quad x = 4 - 2t, \quad x = 1 + 4t, \quad z = 3 + 10t$$

$$L_2: \quad x = s, \quad y = 6 - 2s, \quad z = \frac{1}{2} - 5s$$

son $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Como $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$ (o $\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$), concluimos que las rectas son paralelas. ■

Advierta que i) de la definición 1.5.1 no exige que las dos rectas se intersequen para que sean perpendiculares. La FIGURA 1.5.3 muestra dos rectas perpendiculares L_1 y L_2 que no se intersecan. En otras palabras, L_1 puede ser perpendicular a un plano que contiene a L_2 .

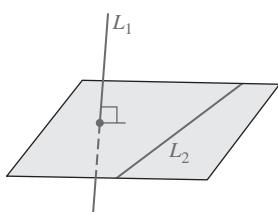


FIGURA 1.5.3 Líneas perpendiculares

EJEMPLO 9 Repaso del ejemplo 7

Determine si las rectas L_1 y L_2 del ejemplo 7 se intersecan.

Solución Puesto que un punto (x, y, z) de la intersección es común a ambas rectas, debemos tener

$$\left. \begin{array}{l} -6 - t = 5 + 2s \\ 20 + 3t = -9 - 4s \\ 1 + 2t = 1 + 7s \end{array} \right\} \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2s + t = -11 \\ 4s + 3t = -29 \\ -7s + 2t = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Después de esto resolvemos simultáneamente cualquiera de las *dos* ecuaciones en (7) y usamos la ecuación restante para la verificación. Al elegir la primera y la tercera, encontramos del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2s + t &= -11 \\ -7s + 2t &= 0 \end{aligned}$$

que $s = -2$ y $t = -7$. La sustitución de estos valores en la segunda ecuación en (7) produce la identidad $-8 - 21 = -29$. Así, L_1 y L_2 se intersecan. Para encontrar el punto de intersección, usamos, por ejemplo, $s = -2$:

$$x = 5 + 2(-2) = 1, \quad y = -9 - 4(-2) = -1, \quad z = 1 + 7(-2) = -13.$$

El punto de intersección es $(1, -1, -13)$.

En el ejemplo 9, al no haberse satisfecho las ecuaciones restantes cuando se sustituyeron los valores $s = -2$ y $t = -7$, entonces las tres ecuaciones no se satisfarían simultáneamente y por ello las rectas no se intersecarían. Dos rectas L_1 y L_2 en el espacio tridimensional que no se intersecan y que no son paralelas reciben el nombre de **rectas oblicuas**. Como se muestra en la FIGURA 1.5.4, las rectas oblicuas yacen en planos paralelos.

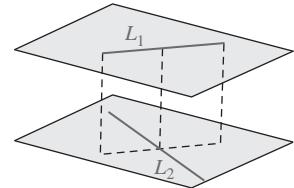


FIGURA 1.5.4 Rectas oblicuas

1.5

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-3.

Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por el punto y es paralela al vector dado.

1. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{v} = \langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$
2. $(1, 8, -2)$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
3. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
4. $(0, -3, 10)$, $\mathbf{v} = \langle 12, -5, -6 \rangle$

En los problemas 5-10, encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos indicados.

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 5. $(1, 2, 1), (3, 5, -2)$ | 6. $(0, 4, 5), (-2, 6, 3)$ |
| 7. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ | 8. $(10, 2, -10), (5, -3, 5)$ |
| 9. $(1, 1, -1), (-4, 1, -1)$ | 10. $(3, 2, 1), (\frac{5}{2}, 1, -2)$ |

En los problemas 11-16, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos indicados.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 11. $(2, 3, 5), (6, -1, 8)$ | 12. $(2, 0, 0), (0, 4, 9)$ |
| 13. $(1, 0, 0), (3, -2, -7)$ | 14. $(0, 0, 5), (-2, 4, 0)$ |
| 15. $(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (-6, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ | 16. $(-3, 7, 9), (4, -8, -1)$ |

En los problemas 17-22, encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos indicados.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 17. $(1, 4, -9), (10, 14, -2)$ | 18. $(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{4}), (1, 3, \frac{1}{4})$ |
| 19. $(4, 2, 1), (-7, 2, 5)$ | 20. $(-5, -2, -4), (1, 1, 2)$ |
| 21. $(5, 10, -2), (5, 1, -14)$ | 22. $(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}), (\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{10})$ |

23. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(6, 4, -2)$ y que es paralela a la recta $x/2 = (1 - y)/3 = (z - 5)/6$.
24. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por $(4, -11, -7)$ y que es paralela a la recta $x = 2 + 5t$, $y = -1 + \frac{1}{3}t$, $z = 9 - 2t$.

25. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(2, -2, 15)$ y que es paralela al plano xz y al plano xy .

26. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(1, 2, 8)$ que es
- paralela al eje x y
 - perpendicular al plano xy .

En los problemas 27 y 28, demuestre que las rectas L_1 y L_2 son las mismas.

27. L_1 : $\mathbf{r} = t\langle 1, 1, 1 \rangle$
 L_2 : $\mathbf{r} = \langle 6, 6, 6 \rangle + t\langle -3, -3, -3 \rangle$
28. L_1 : $x = 2 + 3t, y = -5 + 6t, z = 4 - 9t$
 L_2 : $x = 5 - t, y = 1 - 2t, z = -5 + 3t$

29. Dado que las rectas L_1 y L_2 definidas por las ecuaciones paramétricas

$$L_1: x = 3 + 2t, y = 4 - t, z = -1 + 6t$$

$$L_2: x = 5 - s, y = 3 + \frac{1}{2}s, z = 5 - 3s$$

son iguales,

- encuentre un valor de t tal que $(-7, 9, -31)$ sea un punto sobre L_1 y
- encuentre un valor de s tal que $(-7, 9, -31)$ sea un punto sobre L_2 .

30. Determine cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares y cuáles son paralelas.

- $\mathbf{r} = \langle 1, 0, 2 \rangle + t\langle 9, -12, 6 \rangle$
- $x = 1 + 9t, y = 12t, z = 2 - 6t$
- $x = 2t, y = -3t, z = 4t$
- $x = 5 + t, y = 4t, z = 3 + \frac{5}{2}t$
- $x = 1 + t, y = \frac{3}{2}t, z = 2 - \frac{3}{2}t$
- $f) \frac{x+1}{-3} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-3}{-2}$

34 UNIDAD 1 Vectores y espacio tridimensional

En los problemas 31 y 32, determine los puntos de intersección de la recta dada y los tres planos de coordenadas.

31. $x = 4 - 2t, y = 1 + 2t, z = 9 + 3t$

32. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{2}$

En los problemas 33-36, determine si las rectas L_1 y L_2 se intersecan. Si es así, encuentre el punto de intersección.

33. $L_1: x = 4 + t, y = 5 + t, z = -1 + 2t$
 $L_2: x = 6 + 2s, y = 11 + 4s, z = -3 + s$

34. $L_1: x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$
 $L_2: x = 2 - s, y = 1 + s, z = 6s$

35. $L_1: x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 + t$
 $L_2: x = 4 + s, y = 1 + s, z = 1 - s$

36. $L_1: x = 3 - t, y = 2 + t, z = 8 + 2t$
 $L_2: x = 2 + 2s, y = -2 + 3s, z = -2 + 8s$

En los problemas 37 y 38, determine si los puntos dados yacen sobre la misma recta.

37. $(4, 3, -5), (10, 15, -11), (-1, -7, 0)$

38. $(1, 6, 6), (-11, 10, -2), (-2, 7, 5)$

39. Encuentre ecuaciones paramétricas del segmento de recta que une los puntos $(2, 5, 9)$ y $(6, -1, 3)$.

40. Encuentre ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une los puntos medios de los segmentos de recta dados.

$$x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 4 - 3t, 1 \leq t \leq 2$$

$$x = -2 + 4t, y = 6 + t, z = 5 + 6t, -1 \leq t \leq 1$$

En los problemas 41 y 42, encuentre el ángulo entre las rectas dadas L_1 y L_2 . El ángulo entre las dos rectas es el ángulo entre sus vectores direccionales \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 .

41. $L_1: x = 4 - t, y = 3 + 2t, z = -2t$
 $L_2: x = 5 + 2s, y = 1 + 3s, z = 5 - 6s$

42. $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{7} = \frac{z-1}{-1}$

$L_2: \frac{x+3}{-2} = y - 9 = \frac{z}{4}$

En los problemas 43 y 44, las rectas L_1 y L_2 yacen en el mismo plano. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto indicado y que es perpendicular a este plano.

43. $L_1: x = 3 + t, y = -2 + t, z = 9 + t$
 $L_2: x = 1 - 2s, y = 5 + s, z = -2 - 5s; (4, 1, 6)$

44. $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{4}$
 $L_2: \frac{x+4}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-10}{8}; (1, -1, 0)$

En los problemas 45 y 46, demuestre que L_1 y L_2 son rectas oblicuas.

45. $L_1: x = -3 + t, y = 7 + 3t, z = 5 + 2t$
 $L_2: x = 4 + s, y = 8 - 2s, z = 10 - 4s$

46. $L_1: x = 6 + 2t, y = 6t, z = -8 + 10t$
 $L_2: x = 7 + 8s, y = 4 - 4s, z = 3 - 24s$

■ Piense en ello

47. Suponga que L_1 y L_2 son rectas torcidas. Considere que L_1 y L_2 son puntos sobre la línea L_1 y sean P_3 y P_4 puntos sobre la línea L_2 . Emplee el vector $\vec{P_1P_3} \times \vec{P_3P_4}$, ilustrado en la FIGURA 1.5.5, para demostrar que la distancia más corta d entre L_1 y L_2 (y en consecuencia la distancia más corta entre los planos) es

$$d = \frac{|\vec{P_1P_3} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_3P_4})|}{|\vec{P_1P_2} \times \vec{P_3P_4}|}.$$

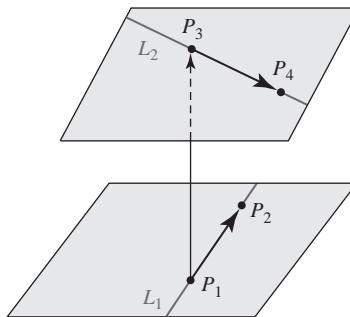


FIGURA 1.5.5 Distancia entre las dos rectas oblicuas del problema 47

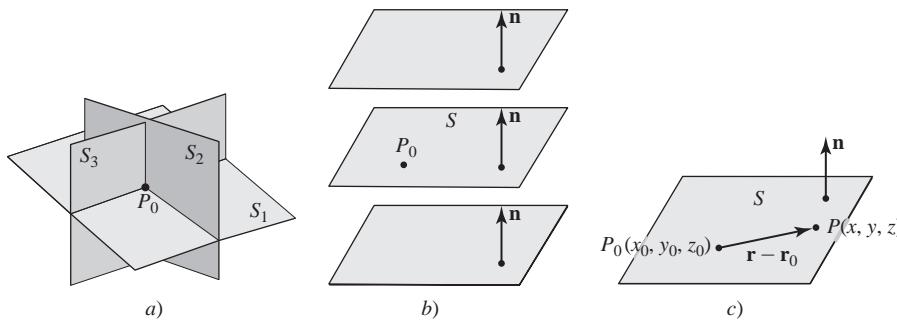
48. Utilizando el resultado del problema 47, encuentre la distancia entre las rectas oblicuas del problema 45.

1.6 Planos

■ Introducción En esta sección aplicamos métodos vectoriales para obtener ecuaciones de planos.

■ Ecuación vectorial La FIGURA 1.6.1a) ilustra el hecho de que hay un número infinito de planos S_1, S_2, S_3, \dots que pasan por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Sin embargo, como se muestra en la figura 1.6.1b), si se especifican un punto P_0 y un vector distinto de cero \mathbf{n} , sólo hay *un* plano S que contiene a P_0 con la **normal** \mathbf{n} , o perpendicular, al plano. Además, si $P(x, y, z)$ representa cualquier punto sobre el plano, y $\mathbf{r} = \vec{OP}, \mathbf{r}_0 = \vec{OP}_0$, entonces como se ilustra en la figura 1.6.1c), $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ yace en el plano S . Se concluye que una **ecuación vectorial** del plano es

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \quad (1)$$

FIGURA 1.6.1 Un punto P_0 y un vector \mathbf{n} determinan un plano

Ecuación rectangular En concreto, si el vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces (1) produce una **ecuación rectangular o cartesiana** del plano que contiene a $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (2)$$

La ecuación (2) se denomina la forma **punto-normal** de la ecuación de un plano.

EJEMPLO 1 Ecuación de un plano

Determine una ecuación del plano que contiene al punto $(4, -1, 3)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Solución Se concluye de inmediato de (2) con $x_0 = 4, y_0 = -1, z_0 = 3, a = 2, b = 8, c = -5$ que

$$2(x - 4) + 8(y + 1) - 5(z - 3) = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 8y - 5z + 15 = 0. \quad \blacksquare$$

La ecuación en (2) siempre puede escribirse como $ax + by + cz + d = 0$ identificando $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. De manera inversa, se probará que una **ecuación lineal**

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (3)$$

a, b, c no todas cero, es un plano.

Teorema 1.6.1 Plano y vector normal

La gráfica de una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0, a, b, c$ no todas cero, es un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que x_0, y_0 y z_0 son números que satisfacen la ecuación dada. Entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ implica que $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Al sustituir este valor de d en la ecuación original obtenemos, después de simplificar,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

o, en términos de vectores,

$$[a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}] \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Esta última ecuación implica que $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es normal al plano que contiene el punto (x_0, y_0, z_0) y el vector

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Vector normal a un plano

Al leer los coeficientes de x, y y z en la ecuación lineal $3x - 4y + 10z - 8 = 0$ obtenemos un vector normal

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

al plano. ■

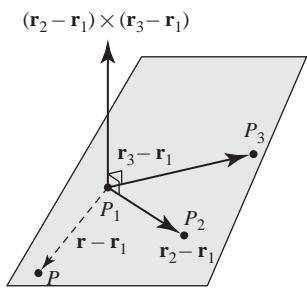


FIGURA 1.6.2 Plano determinado por tres puntos no colineales

Desde luego, un múltiplo escalar distinto de cero de un vector normal \mathbf{n} sigue siendo perpendicular al plano.

Tres puntos no colineales P_1, P_2 y P_3 determinan también un plano S . Para obtener una ecuación del plano, sólo necesitamos formar dos vectores entre dos pares de puntos. Como se ilustra en la **FIGURA 1.6.2**, su producto cruz es un vector normal al plano que contiene estos vectores. Si $P(x, y, z)$ representa cualquier punto sobre el plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP_3}$ entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ (o, de esa manera, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ o $\mathbf{r} - \mathbf{r}_3$) está en el plano. Por consiguiente,

$$[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \quad (4)$$

es una ecuación vectorial del plano S . Se pide al lector no memorizar la última fórmula. El procedimiento es el mismo que en (1) con la excepción de que el vector normal al plano se obtiene por medio del producto cruz.

EJEMPLO 3 Ecuación de un plano

Encuentre una ecuación del plano que contiene a $(1, 0, -1), (3, 1, 4)$ y $(2, -2, 0)$.

Solución Se necesitan tres vectores. Al juntar los puntos a la izquierda, como se muestra, se producen los vectores a la derecha. El orden en el cual se realiza la resta es irrelevante.

$$\begin{matrix} (1, 0, -1) \\ (3, 1, 4) \end{matrix} \left\{ \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\begin{matrix} (3, 1, 4) \\ (2, -2, 0) \end{matrix} \left\{ \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\begin{matrix} (2, -2, 0) \\ (x, y, z) \end{matrix} \left\{ \mathbf{w} = (x - 2)\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Ahora,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

es un vector normal al plano que contiene los puntos dados. En consecuencia, de (1), una ecuación vectorial del plano es $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$. La última ecuación produce

$$-11(x - 2) - 3(y + 2) + 5z = 0 \quad \text{o} \quad -11x - 3y + 5z + 16 = 0. \quad \blacksquare$$

■ Planos perpendicular y paralelo La **FIGURA 1.6.3** ilustra la validez de la siguiente definición respecto a los planos perpendicular y paralelo.

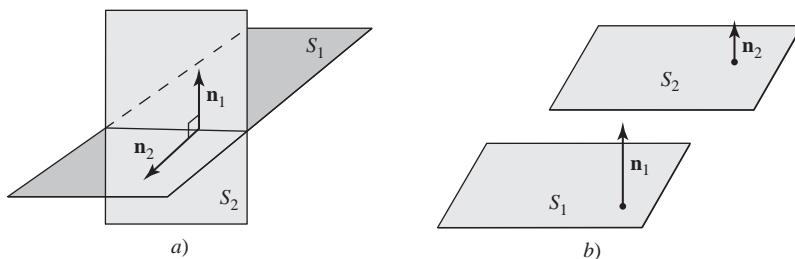


FIGURA 1.6.3 Planos perpendiculares a); planos paralelos b)

Definición 1.6.1 Planos perpendiculares y paralelos

Dos planos S_1 y S_2 con vectores normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 , respectivamente, son

- i) **perpendiculares** si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ y
- ii) **paralelos** si $\mathbf{n}_2 = k\mathbf{n}_1$, para algún escalar k distinto de cero.

EJEMPLO 4 Planos paralelos

Los tres planos dados por

$$S_1: 2x - 4y + 8z = 7$$

$$S_2: x - 2y + 4z = 0$$

$$S_3: -3x + 6y - 12z = 1$$

son paralelos, ya que sus respectivos vectores normales

$$\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{n}_3 = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k} = -\frac{3}{2}\mathbf{n}_1$$

son paralelos.

■ Gráficas Las siguientes listas son algunas guías para trazar la gráfica de un plano.

Guías para graficar un plano

- Las gráficas de cada una de las ecuaciones $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, donde x_0, y_0 y z_0 son constantes, son planos perpendiculares, respectivamente, a los ejes x, y y z .
- Para graficar una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$, encuentre las intersecciones x, y y z o, si es necesario, encuentre la traza del plano en cada plano de coordenadas.

Una **traza** de un plano en un plano de coordenadas es la línea de intersección del plano con el plano de coordenadas.

EJEMPLO 5 Gráfica

Grafique la ecuación $2x + 3y + 6z = 18$.

Solución Al dejar:

$$y = 0, z = 0 \text{ produce } x = 9$$

$$x = 0, z = 0 \text{ produce } y = 6$$

$$x = 0, y = 0 \text{ produce } z = 3.$$

Como se ilustra en la FIGURA 1.6.4, empleamos las intersecciones x, y y z $(9, 0, 0), (0, 6, 0)$ y $(0, 0, 3)$ para dibujar la gráfica del plano en el primer octante.

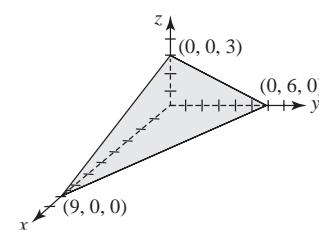


FIGURA 1.6.4 Plano del ejemplo 5

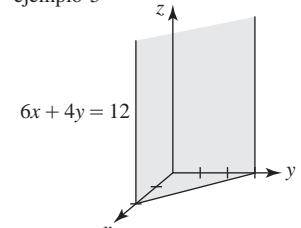


FIGURA 1.6.5 Plano del ejemplo 6

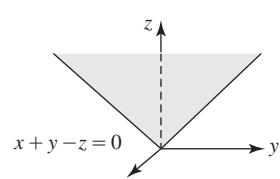


FIGURA 1.6.6 Plano del ejemplo 7

EJEMPLO 6 Gráfica

Grafique la ecuación $6x + 4y = 12$.

Solución En dos dimensiones la gráfica de la ecuación es una línea con intersección $(2, 0)$ con el eje x e intersección $(0, 3)$ con el eje y . Sin embargo, en tres dimensiones esta recta es la traza de un plano en el plano de coordenadas xy . Puesto que z no está especificada, puede ser cualquier número real. En otras palabras, (x, y, z) es un punto sobre el plano siempre que x y y estén relacionados por la ecuación dada. Como se muestra en la FIGURA 1.6.5, la gráfica es un plano paralelo al eje z .

EJEMPLO 7 Gráfica

Grafique la ecuación $x + y - z = 0$.

Solución Observe primero que el plano pasa por el origen $(0, 0, 0)$. En este caso, la traza del plano en el plano xz ($y = 0$) es $z = x$, en tanto que su traza en el plano yz ($x = 0$) es $z = y$. El dibujo de estas dos rectas conduce a la gráfica dada en la FIGURA 1.6.6.

Dos planos S_1 y S_2 que no son paralelos deben intersecarse en una línea L . Vea la FIGURA 1.6.7. El ejemplo 8 ilustra una manera de encontrar ecuaciones paramétricas para la recta de intersección. En el ejemplo 9 vemos cómo encontrar un punto de intersección (x_0, y_0, z_0) de un plano S y una recta L . Vea la FIGURA 1.6.8.

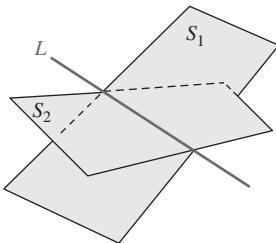


FIGURA 1.6.7 Dos planos que se intersecan

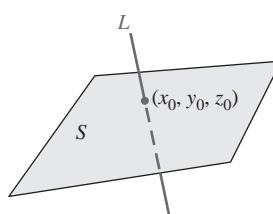


FIGURA 1.6.8 Intersección de una recta y un plano

EJEMPLO 8 Línea de intersección

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea de intersección $x - y + 2z = 1$ y $x + y + z = 3$.

Solución En un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, elegimos arbitrariamente una variable, digamos $z = t$, y se resuelve para x y y de

$$\begin{aligned} x - y &= 1 - 2t \\ x + y &= 3 - t. \end{aligned}$$

Al resolver el sistema obtenemos

$$x = 2 - \frac{3}{2}t, \quad y = 1 + \frac{1}{2}t, \quad z = t.$$

Éstas son ecuaciones paramétricas de la recta de intersección L de los planos dados. La recta, el plano $x - y + 2z = 1$ y el plano $x + y + z = 3$ se muestran en la FIGURA 1.6.9.

La recta en el ejemplo 8 puede obtenerse de otra manera. Vea el problema 52 en los ejercicios 1.6.

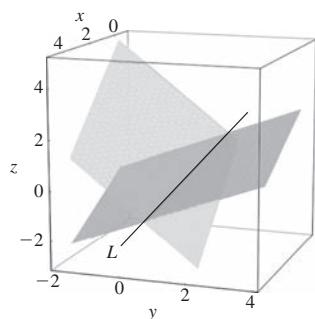


FIGURA 1.6.9 Recta L de intersección de dos planos en el ejemplo 8

EJEMPLO 9 Punto de intersección

Encuentre el punto de intersección del plano $3x - 2y + z = -5$ y la recta $x = 1 + t$, $y = -2 + 2t$, $z = 4t$.

Solución Si (x_0, y_0, z_0) denota el punto de intersección, entonces debe tenerse

$$3x_0 - 2y_0 + z_0 = -5 \quad y \quad x_0 = 1 + t_0, y_0 = -2 + 2t_0, z_0 = 4t_0$$

para algún número t_0 . Al sustituir las últimas ecuaciones en la ecuación del plano encontramos que

$$3(1 + t_0) - 2(-2 + 2t_0) + 4t_0 = -5 \quad o \quad t_0 = -4.$$

De las ecuaciones paramétricas de la recta obtenemos entonces $x_0 = -3$, $y_0 = -10$ y $z_0 = -16$. El punto de intersección es $(-3, -10, -16)$.

1.6

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-4.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación del plano que contenga el punto dado y sea perpendicular al vector que se indica.

- | | |
|--|--|
| 1. $(5, 1, 3); \quad 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ | 2. $(1, 2, 5); \quad 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ |
| 3. $(6, 10, -7); \quad -5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ | 4. $(0, 0, 0); \quad 6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ |
| 5. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}); \quad 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ | 6. $(-1, 1, 0); \quad -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ |

En los problemas 7-12, determine, si es posible, una ecuación de un plano que contenga a los puntos dados.

7. $(3, 5, 2), (2, 3, 1), (-1, -1, 4)$
8. $(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, -1)$
9. $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (3, 2, -1)$
10. $(0, 0, 3), (0, -1, 0), (0, 0, 6)$
11. $(1, 2, -1), (4, 3, 1), (7, 4, 3)$
12. $(2, 1, 2), (4, 1, 0), (5, 0, -5)$

En los problemas 13-22, determine una ecuación del plano que satisfaga las condiciones indicadas.

13. Contiene a $(2, 3, -5)$ y es paralelo a $x + y - 4z = 1$
14. Contiene al origen y es paralelo a $5x - y + z = 6$
15. Contiene a $(3, 6, 12)$ y es paralelo al plano xy
16. Contiene a $(-7, -5, 18)$ y es perpendicular al eje y
17. Contiene las rectas $x = 1 + 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$; $x = 4 + 4s$, $y = 2s$, $z = 3 + s$
18. Contiene las rectas $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{6}$; $\mathbf{r} = \langle 1, -1, 5 \rangle + t\langle 1, 1, -3 \rangle$
19. Contiene las rectas paralelas $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$; $x = 3 + s$, $y = 2s$, $z = -2 + s$
20. Contiene al punto $(4, 0, -6)$ y la recta $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -2t$
21. Contiene a $(2, 4, 8)$ y es perpendicular a la recta $x = 10 - 3t$, $y = 5 + t$, $z = 6 - \frac{1}{2}t$
22. Contiene a $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 6, -3)$ y $(1, 0, -2)$
23. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares y cuáles son paralelos.
 - a) $2x - y + 3z = 1$
 - b) $x + 2y + 2z = 9$
 - c) $x + y - \frac{3}{2}z = 2$
 - d) $-5x + 2y + 4z = 0$
 - e) $-8x - 8y + 12z = 1$
 - f) $-2x + y - 3z = 5$
24. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a $(-4, 1, 7)$ y es perpendicular al plano $-7x + 2y + 3z = 1$.
25. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares a la recta $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 9t$, $z = 2 + 3t$.
 - a) $4x + y + 2z = 1$
 - b) $2x - 3y + z = 4$
 - c) $10x - 15y - 5z = 2$
 - d) $-4x + 6y + 2z = 9$
26. Determine cuáles de los siguientes planos es paralelo a la recta $(1-x)/2 = (y+2)/4 = z-5$.
 - a) $x - y + 3z = 1$
 - b) $6x - 3y = 1$
 - c) $x - 2y + 5z = 0$
 - d) $-2x + y - 2z = 7$

En los problemas 27-30, encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos dados.

27. $5x - 4y - 9z = 8$
28. $x + 2y - z = 2$
- $x + 4y + 3z = 4$
- $3x - y + 2z = 1$
29. $4x - 2y - z = 1$
30. $2x - 5y + z = 0$
- $x + y + 2z = 1$
- $y = 0$

En los problemas 31-34, encuentre el punto de intersección del plano y la recta dados.

31. $2x - 3y + 2z = -7$; $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -3t$
32. $x + y + 4z = 12$; $x = 3 - 2t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$
33. $x + y - z = 8$; $x = 1$, $y = 2$, $z = 1 + t$
34. $x - 3y + 2z = 0$; $x = 4 + t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + 5t$

En los problemas 35 y 36, encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto indicado y que es paralela a los planos dados.

35. $x + y - 4z = 2$, $2x - y + z = 10$; $(5, 6, -12)$

36. $2x + z = 0$, $-x + 3y + z = 1$; $(-3, 5, -1)$

En los problemas 37 y 38, encuentre una ecuación del plano que contiene a la recta dada y que es perpendicular al plano indicado.

37. $x = 4 + 3t$, $y = -t$, $z = 1 + 5t$; $x + y + z = 7$

38. $\frac{2-x}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-8}{2}$; $2x - 4y - z + 16 = 0$

En los problemas 39-44, grafique la ecuación dada.

39. $5x + 2y + z = 10$
40. $3x + 2z = 9$
41. $-y - 3z + 6 = 0$
42. $3x + 4y - 2z - 12 = 0$
43. $-x + 2y + z = 4$
44. $3x - y - 6 = 0$

45. Demuestre que la recta $x = -2t$, $y = t$, $z = -t$ es

- a) paralela pero por arriba del plano $x + y - z = 1$,
- b) paralela pero por debajo del plano $-3x - 4y + 2z = 8$.

46. Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre el plano $ax + by + cz + d = 0$ y considere que \mathbf{n} es un vector normal al plano. Vea la FIGURA 1.6.10. Demuestre que si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es cualquier punto fuera del plano, entonces la **distancia D desde un punto a un plano** está dada por

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

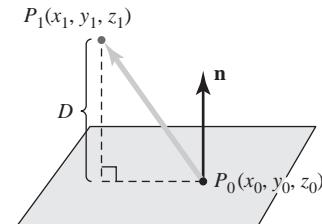


FIGURA 1.6.10 Distancia entre un punto y un plano en el problema 46

47. Emplee el resultado del problema 46 para encontrar la distancia del punto $(2, 1, 4)$ al plano $x - 3y + z - 6 = 0$.
48. a) Demuestre que los planos $x - 2y + 3z = 3$ y $-4x + 8y - 12z = 7$ son paralelos.

- b) Encuentre la distancia entre los planos en el inciso a).

Como se muestra en la FIGURA 1.6.11, el **ángulo entre dos planos** se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales. En los problemas 49 y 50, encuentre los ángulos entre los planos indicados.

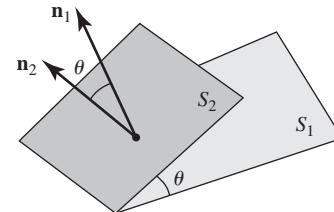


FIGURA 1.6.11 Ángulo entre dos planos en los problemas 49 y 50

49. $x - 3y + 2z = 14$, $-x + y + z = 10$

50. $2x + 6y + 3z = 13$, $4x - 2y + 4z = -7$

Piense en ello

51. Si siempre se ha sentado en una mesa de cuatro patas que se mece, tal vez haya considerado sustituirla con una mesa de tres patas. ¿Por qué?
52. Vuelva a leer el ejemplo 8. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta L de intersección entre los dos planos utilizando el hecho de que L yace en ambos planos y por ello debe ser perpendicular al vector normal de

cada plano. Si obtiene una respuesta que difiere de las ecuaciones en el ejemplo 8, demuestre que las respuestas son equivalentes.

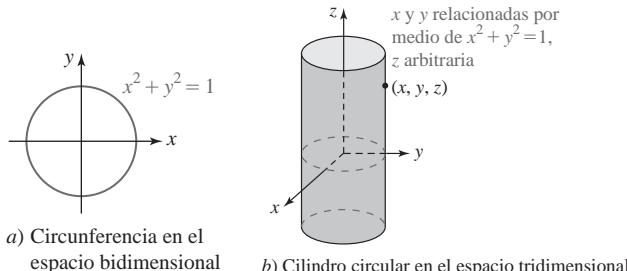
53. a) Encuentre una ecuación del plano cuyos puntos son equidistantes de $(1, -2, 3)$ y $(2, 5, -1)$.
 b) Encuentre la distancia entre el plano y los puntos dados en el inciso a).

1.7 Cilindros y esferas

Introducción En el espacio bidimensional la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia centrada en el origen del plano xy . Sin embargo, en el espacio tridimensional es posible interpretar la gráfica del conjunto

$$\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, z \text{ arbitraria}\}$$

como una **superficie** que es el cilindro circular recto que se muestra en la FIGURA 1.7.1b).



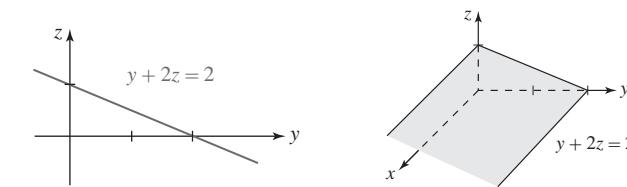
a) Circunferencia en el espacio bidimensional b) Cilindro circular en el espacio tridimensional

FIGURA 1.7.1 Interpretación de la ecuación de una circunferencia en los espacios bidimensional y tridimensional

De modo similar, ya hemos visto en la sección 1.6 que la gráfica de una ecuación tal como $y + 2z = 2$ es una recta en el espacio bidimensional (el plano yz), pero en el espacio tridimensional la gráfica del conjunto

$$\{(x, y, z) | y + 2z = 2, x \text{ arbitraria}\}$$

es el plano perpendicular al plano yz mostrado en la FIGURA 1.7.2b). Las superficies de este tipo reciben un nombre especial.



a) Recta en el espacio bidimensional b) Plano en el espacio tridimensional

FIGURA 1.7.2 Interpretación de una ecuación de una recta en los espacios bidimensional y tridimensional

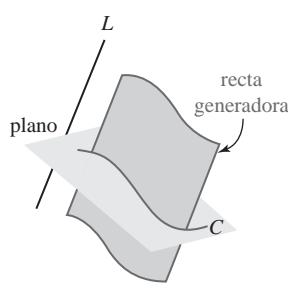


FIGURA 1.7.3 La recta en movimiento sobre C paralela a L genera un cilindro

Cilindro Las superficies ilustradas en las figuras 1.7.1 y 1.7.2 se llaman **cilindros**. Usamos el término *cilindro* en un sentido más general que el de un cilindro circular recto. Específicamente, si C es una curva en un plano y L es una recta no paralela al plano, entonces el conjunto de todos los puntos (x, y, z) generados al mover una línea que recorra a C paralela a L se denomina **cilindro**. La curva C recibe el nombre de **directriz** del cilindro. Vea la FIGURA 1.7.3.

Así, una ecuación de una curva en un plano de coordenadas, cuando se consideran tres dimensiones, es una ecuación de un cilindro perpendicular a ese plano de coordenadas.

- Si las gráficas de $f(x, y) = c_1$, $g(y, z) = c_2$ y $h(x, z) = c_3$ son curvas en el espacio bidimensional de sus respectivos planos de coordenadas, entonces sus gráficas en el espacio tridimensional son superficies denominadas cilindros. Un cilindro se genera al mover una línea que recorre la curva paralela al eje de coordenadas que es representada por la variable que falta en su ecuación.

La FIGURA 1.7.4 muestra una curva C definida por $f(x, y) = c_1$ en el plano xy y una colección de líneas llamadas **generatrices** que representan diversas posiciones de una línea generadora que recorre a C mientras se mueve paralela al eje z .

En el siguiente ejemplo comparamos la gráfica de una ecuación en un plano de coordenadas con su interpretación como un cilindro en el espacio tridimensional (FIGURAS 1.7.5-1.7.8). Como en la figura 1.7.2b), sólo se muestra una parte del cilindro.

EJEMPLO 1 Cilindros

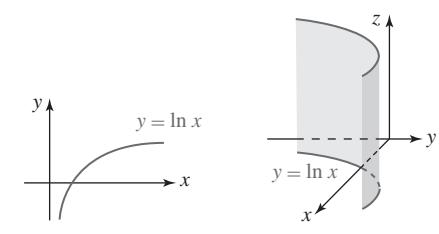


FIGURA 1.7.5 Cilindro con generatrices paralelas al eje z

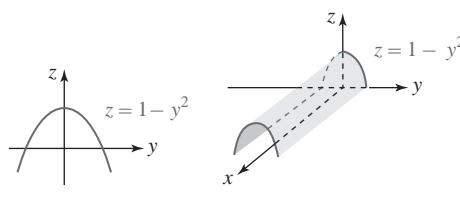


FIGURA 1.7.6 Cilindro con generatrices paralelas al eje x

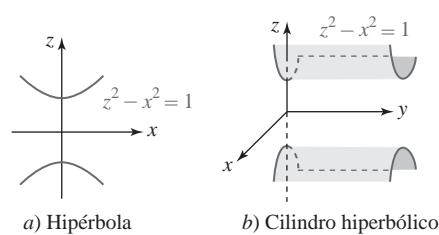


FIGURA 1.7.7 Cilindro con generatrices paralelas al eje y

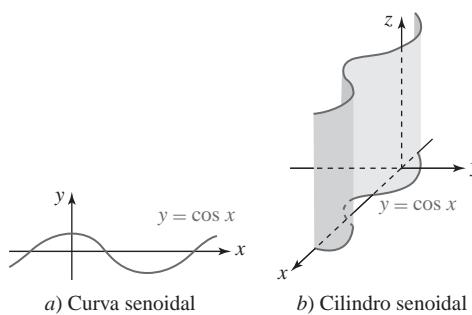


FIGURA 1.7.8 Cilindro con generatrices paralelas al eje z

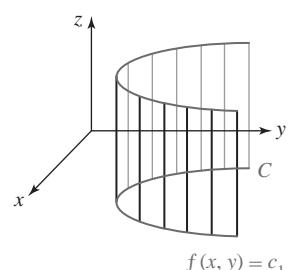


FIGURA 1.7.4 Generatrices del cilindro $f(x, y) = c_1$

■ Esferas Como la circunferencia, una esfera puede definirse por medio de la fórmula de la distancia.

Definición 1.7.1 Esfera

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ en el espacio tridimensional que son equidistantes de un punto fijo llamado **centro**.

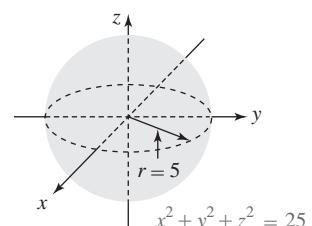


FIGURA 1.7.9 Esfera del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Esfera

Grafique $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución Identificamos $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ y $r^2 = 25 = 5^2$ en (1), y por ello la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera de radio 5 cuyo centro está en el origen. La gráfica de la ecuación se ilustra en la FIGURA 1.7.9. ■

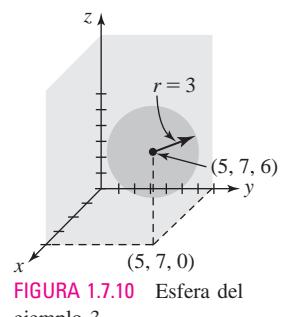


FIGURA 1.7.10 Esfera del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Esfera

Grafique $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 9$.

Solución En este caso identificamos $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$ y $r^2 = 9$. De (1) advertimos que la gráfica $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 3^2$ es una esfera con centro $(5, 7, 6)$ y radio 3. Su gráfica yace por completo en el primer octante y se muestra en la FIGURA 1.7.10. ■

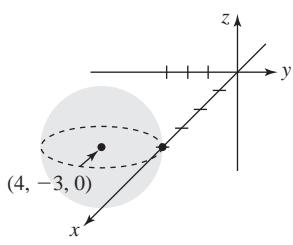


FIGURA 1.7.11 Esfera tangente al plano $y = 0$ en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Ecuación de una esfera

Encuentre una ecuación de la esfera cuyo centro es $(4, -3, 0)$ que es tangente al plano xz .

Solución La distancia perpendicular desde el punto dado hasta el plano xz ($y = 0$), y en consecuencia el radio de la esfera, es el valor absoluto de la coordenada y , $|-3| = 3$. Así, una ecuación de la esfera es

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 3^2.$$

Vea la FIGURA 1.7.11.

EJEMPLO 5 Centro y radio

Encuentre el centro y radio de una esfera cuya ecuación es

$$16x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 16x + 8y - 32z + 16 = 0.$$

Solución Al dividir entre 16 y completar cuadrados en x , y y z obtenemos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{5}{16}.$$

El centro y radio de la esfera son $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right)$ y $\frac{1}{4}\sqrt{5}$, respectivamente.

I Traza de una superficie En la sección 1.6 vimos que la traza de un plano en un plano de coordenadas es la recta de intersección del plano con el plano de coordenadas. En general, la **traza de una superficie** en *cualquier* plano es la curva formada por la intersección de la superficie en el plano. Por ejemplo, en la figura 1.7.9 la traza de la esfera en el plano xy ($z = 0$) es la circunferencia punteada $x^2 + y^2 = 25$. En los planos xz y yz , las trazas de las esferas son los círculos $x^2 + z^2 = 25$ y $y^2 + z^2 = 25$, respectivamente.

1.7

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-4.

Fundamentos

En los problemas 1-16, dibuje la gráfica del cilindro indicado.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------|
| 1. $y = x$ | 2. $z = -y$ |
| 3. $y = x^2$ | 4. $x^2 + z^2 = 25$ |
| 5. $y^2 + z^2 = 9$ | 6. $z = y^2$ |
| 7. $z = e^{-x}$ | 8. $z = 1 - e^y$ |
| 9. $y^2 - x^2 = 4$ | 10. $z = \cosh y$ |
| 11. $4x^2 + y^2 = 36$ | 12. $x = 1 - y^2$ |
| 13. $z = \operatorname{sen} x$ | 14. $y = \frac{1}{x^2}$ |
| 15. $yz = 1$ | 16. $z = x^3 - 3x$ |

En los problemas 17-20, dibuje la gráfica de la ecuación indicada.

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
18. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$
19. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$
20. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 4$

En los problemas 21-24, encuentre el centro y el radio de la esfera con la ecuación dada.

21. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$
22. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$

23. $x^2 + y^2 + z^2 - 16z = 0$

24. $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$

En los problemas 25-32, encuentre una ecuación de una esfera que satisface las condiciones dadas.

25. Centro $(-1, 4, 6)$; radio $\sqrt{3}$
26. Centro $(0, -3, 0)$; diámetro $\frac{5}{2}$
27. Centro $(1, 1, 4)$; tangente al plano xy
28. Centro $(5, 2, -2)$; tangente al plano yz
29. Centro sobre el eje y positivo; radio 2; tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
30. Centro sobre la recta $x = 2t, y = 3t, z = 6t, t > 0$, a una distancia de 21 unidades del origen; radio 5
31. El diámetro tiene puntos frontera $(0, -4, 7)$ y $(2, 12, -3)$
32. Centro $(-3, 1, 2)$; pasando por el origen

En los problemas 33-38, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen la(s) condición(es) indicada(s).

33. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, 1 \leq z \leq 3$
34. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, z = 2$
35. $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
36. $0 < (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 < 1$
37. $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$
38. $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \leq 0$

1.8 Superficies cuadráticas

■ Introducción La ecuación de la esfera dada en (1) de la sección 1.7 es sólo un caso particular de la ecuación general de segundo grado en tres variables

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (1)$$

donde A, B, C, \dots, J son constantes. La gráfica de una ecuación de segundo grado de la forma (1) que describe un conjunto real de puntos se dice que es una **superficie cuadrática**. Por ejemplo, tanto el cilindro elíptico $x^2/4 + y^2/9 = 1$ como el cilindro parabólico $z = y^2$ son superficies cuadráticas. Concluimos esta unidad considerando las seis superficies cuadráticas adicionales: el **elipsoide**, el **cono elíptico**, el **paraboloide elíptico**, el **paraboloide hiperbólico**, el **hiperboloido de una hoja** y el **hiperboloido de dos hojas**.

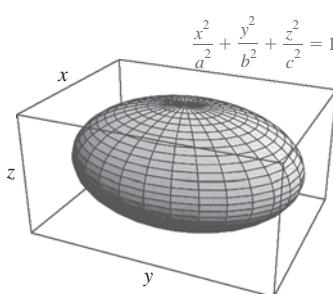
■ Elipsoide La gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \quad (2)$$

se llama **elipsoide**. Cuando $a = b = c$, (2) es la ecuación de una esfera centrada en el origen. Para $|y_0| < b$, la ecuación

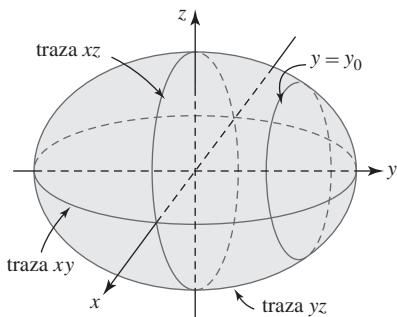
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

representa una familia de elipses (o circunferencias si $a = c$) paralelos al plano xz que se forman rebanando la superficie en planos $y = y_0$. Al elegir, a su vez, $x = x_0$ y $z = z_0$, encontramos que las rebanadas de la superficie son elipses (o círculos) paralelos, respectivamente, a los planos yz y xy . La FIGURA 1.8.1 resume una gráfica típica de un elipsoide junto con las trazas de la superficie en tres planos de coordenadas.



a) Gráfica generada con *Mathematica*
FIGURA 1.8.1 Elipsoide

Plano de coordenadas	Traza
xy ($z = 0$)	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
xz ($y = 0$)	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
yz ($x = 0$)	elipse: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

■ Cono elíptico La gráfica de una ecuación de la forma

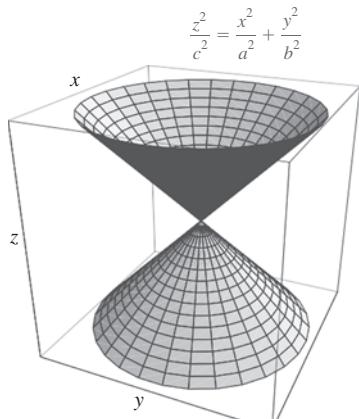
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \quad (3)$$

recibe el nombre de **cono elíptico** (o circular si el cono $a = b$). Para z_0 arbitraria, planos paralelos al plano xy rebanan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

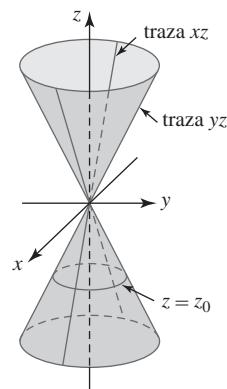
La FIGURA 1.8.2 resume una gráfica típica de un cono elíptico junto con las trazas en los planos de coordenadas.

Como veremos en seguida, hay dos tipos de paraboloides: elíptica e hiperbólica.



a) Gráfica generada con *Mathematica*
FIGURA 1.8.2 Cono elíptico

Plano de coordenadas	Traza
xy ($z=0$)	punto: $(0, 0)$
xz ($y=0$)	rectas: $z = \pm \frac{c}{a} x$
yz ($x=0$)	rectas: $z = \pm \frac{c}{b} y$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

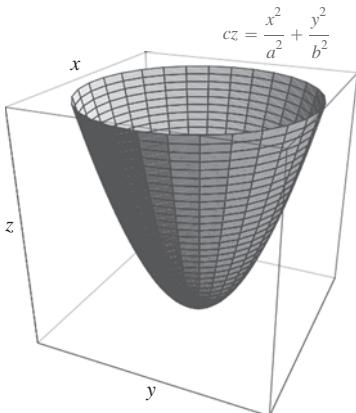
■ Parabolóide elíptico

La gráfica de una ecuación de la forma

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a > 0, b > 0, \quad (4)$$

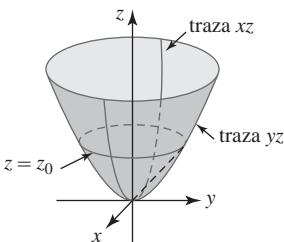
se denomina **parabolóide elíptico**. En la FIGURA 1.8.3b) advertimos que para $c > 0$, los planos $z = z_0 > 0$, paralelos al plano xy , cortan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz_0.$$



a) Gráfica generada con *Mathematica*
FIGURA 1.8.3 Parabolóide elíptico

Plano de coordenadas	Traza
xy ($z=0$)	punto: $(0, 0)$
xz ($y=0$)	parábola: $cz = \frac{x^2}{a^2}$
yz ($x=0$)	parábola: $cz = \frac{y^2}{b^2}$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

■ Parabolóide hiperbólico

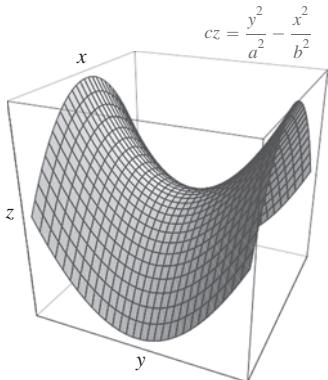
La gráfica de una ecuación de la forma

$$cz = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}, \quad a > 0, b > 0, \quad (5)$$

se conoce como **parabolóide hiperbólico**. Advierta que para $c > 0$, los planos $z = z_0$, paralelos al plano xy , cortan la superficie en hipérbolas cuyas ecuaciones son

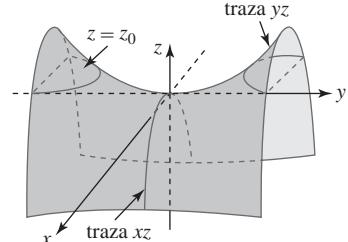
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = cz_0.$$

La forma de silla característica de un parabolóide hiperbólico se muestra en la FIGURA 1.8.4.



a) Gráfica generada con Mathematica
FIGURA 1.8.4 Parabolóide hiperbólico

Plano de coordenadas	Traza
$xy (z=0)$	rectas: $y = \pm \frac{a}{b}x$
$xz (y=0)$	parábola: $cz = -\frac{x^2}{b^2}$
$yz (x=0)$	parábola: $cz = \frac{y^2}{a^2}$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

Hay dos tipos de hiperboloides: de una hoja y de dos hojas.

I Hiperbolóide de una hoja

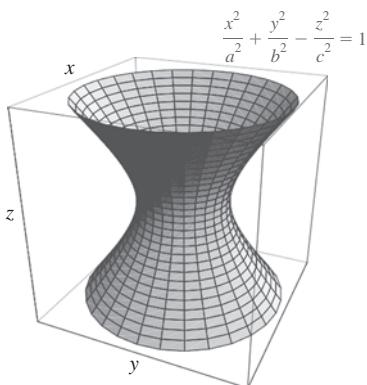
La gráfica de una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \quad (6)$$

se llama **hiperbolóide de una hoja**. En este caso, un plano $z = z_0$, paralelo al plano xy , corta la superficie en secciones transversales elípticas (o circulares si $a = b$). Las ecuaciones de estas elipses son

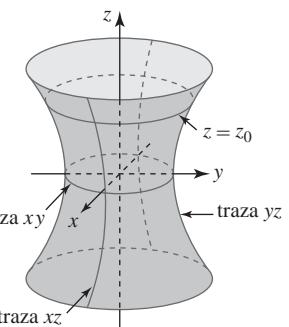
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

La elipse más pequeña, $z_0 = 0$, corresponde a la traza en el plano xy . Un resumen de las trazas y de la gráfica típica de (6) se proporciona en la FIGURA 1.8.5.



a) Gráfica generada con Mathematica
FIGURA 1.8.5 Hiperbolóide de una hoja

Plano de coordenadas	Traza
$xy (z=0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$xz (y=0)$	hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$yz (x=0)$	hipérbola: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



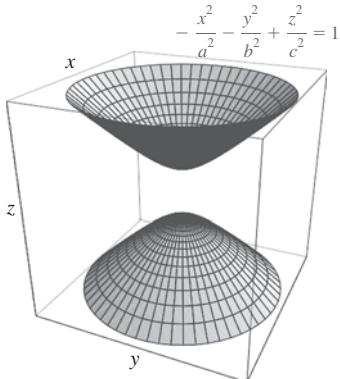
b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

I Hiperbolóide de dos hojas

Como se observa en la FIGURA 1.8.6, una gráfica de

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \quad (7)$$

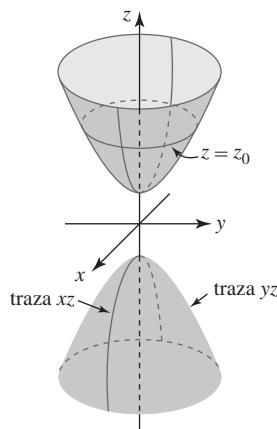
se llama apropiadamente **hiperbolóide de dos hojas**. Para $|z_0| > c$, la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z_0^2/c^2 - 1$ describe la curva de intersección elíptica de la superficie con el plano $z = z_0$.



a) Gráfica generada con Mathematica

FIGURA 1.8.6 Hiperoloide de dos hojas

Plano de coordenadas	Traza
xy ($z=0$)	sin lugar
xz ($y=0$)	hipérbola: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
yz ($x=0$)	hipérbola: $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

Variación de las ecuaciones Al intercambiar la posición de las variables en las ecuaciones (2)-(7) no se cambia la naturaleza básica de una superficie, *aunque* cambia la orientación de la superficie en el espacio. Por ejemplo, gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (8)$$

siguen siendo hiperboloides de una hoja. De manera similar, los dos signos menos en (7) que caracterizan a los hiperboloides de dos hojas pueden ocurrir en cualquier parte en la ecuación. Similarmente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx \quad (9)$$

son paraboloides. Las gráficas de ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx \quad (10)$$

son paraboloides hiperbólicos.

EJEMPLO 1 Superficies cuadráticas

Identifique

a) $y = x^2 + z^2$ y b) $y = x^2 - z^2$.

Compare las gráficas.

Solución De las primeras ecuaciones en (9) y (10) con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$, identificamos la gráfica de a) como un paraboloide y la gráfica de b) como un paraboloide hiperbólico. En el caso de la ecuación a), un plano $y = y_0$, $y_0 > 0$, corta la superficie en círculos cuyas ecuaciones son $y_0 = x^2 + z^2$. Por otro lado, un plano $y = y_0$ corta la gráfica de la ecuación b) en hipérbolas $y_0 = x^2 - z^2$. Las gráficas se comparan en la FIGURA 1.8.7.

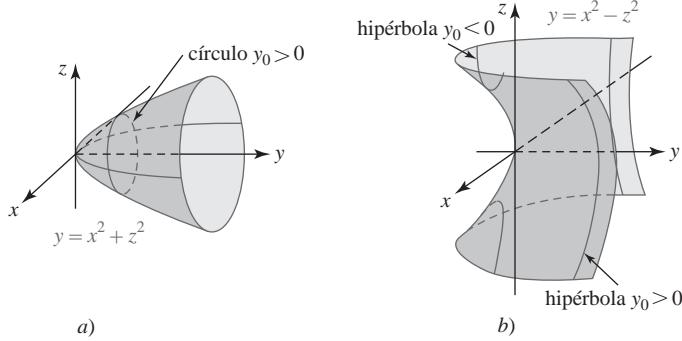


FIGURA 1.8.7 Superficie del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Superficies cuadráticas

Identifique

a) $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$ y b) $-2x^2 + 4y^2 + z^2 = -36$.

Solución

- a) De $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}z^2 = y^2$, se identifica la gráfica de un cono elíptico.
b) De $\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{36}z^2 = 1$, se identifica la gráfica como un hiperboloide de dos hojas.

■ Origen en (h, k, l) Cuando el origen $(0, 0, 0)$ se traslada a (h, k, l) , las ecuaciones de las superficies cuadráticas se convierten en

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} &= 1 \quad \leftarrow \text{elipsoide} \\ c(z-l) &= \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \quad \leftarrow \text{paraboloide} \\ \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} &= 1 \quad \leftarrow \text{hiperboloide de una hoja}\end{aligned}$$

etcétera. Es posible que usted tenga que completar el cuadrado para poner una ecuación de segundo grado en una de estas formas.

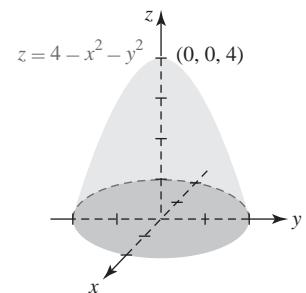


FIGURA 1.8.8 Paraboloide del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Paraboloide

Grafique $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solución Al escribir la ecuación como

$$-(z - 4) = x^2 + y^2$$

reconocemos la ecuación de un paraboloide. El signo menos enfrente del término en el lado izquierdo de la igualdad indica que la gráfica del paraboloide abre hacia abajo a partir de $(0, 0, 4)$. Vea la FIGURA 1.8.8.

■ Superficies de revolución Una superficie S puede generarse rotando una curva plana C alrededor de un eje. En la discusión que sigue se encontrarán ecuaciones de **superficies de revolución** cuando C es una curva en un plano de coordenadas y el eje de revolución es un eje de coordenadas.

En aras de la discusión, se va a suponer que $f(y, z) = 0$ es una ecuación de una curva C en el plano yz y que C se rota en torno al eje z de modo que se genera una superficie S . También se supondrá por el momento que las coordenadas y y z de los puntos sobre C son no negativas. Si (x, y, z) denota un punto general sobre S que resulta de rotar el punto $(0, y_0, z)$ en C , entonces se advierte de la FIGURA 1.8.9 que la distancia de (x, y, z) a $(0, 0, z)$ es la misma que la distancia de $(0, y_0, z)$ a $(0, 0, z)$; esto es, $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Del hecho de que $f(y_0, z) = 0$ llegamos a una ecuación para S :

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (11)$$

Es posible, desde luego, que una curva en un plano de coordenadas se rote en torno a cada eje de coordenadas. Si la curva C en el plano yz definida por $f(y, z) = 0$ se rota ahora alrededor del eje y , puede demostrarse que una ecuación de la superficie de revolución resultante es

$$f(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (12)$$

Por último, notamos que si hay puntos $(0, y, z)$ sobre C para los cuales las coordenadas y o z son negativas, entonces se sustituye $\sqrt{x^2 + y^2}$ en (11) por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\sqrt{x^2 + z^2}$ en (12) por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$.

Las ecuaciones de superficies de revolución generadas cuando una curva en el plano xy o xz se rota en torno a un eje de coordenadas son análogas a (11) y (12). Como muestra la siguiente

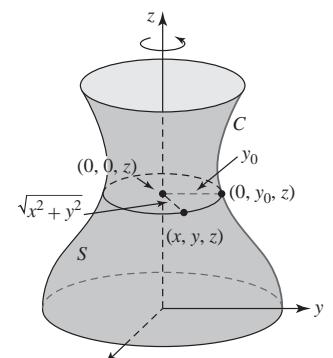


FIGURA 1.8.9 Superficie S de revolución

tabla, una ecuación de una superficie generada al rotar una curva en un plano de coordenadas alrededor de

$$\left. \begin{array}{l} x = \text{eje} \\ y = \text{eje} \\ z = \text{eje} \end{array} \right\} \quad \text{implica el término} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{y^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + z^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2}. \end{array} \right.$$

Ecuación de la curva C	Eje de revolución	Ecuación de la superficie S
$f(x, y) = 0$	eje x	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	eje y	$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$
$f(x, z) = 0$	eje x	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$
	eje z	$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$f(y, z) = 0$	eje y	$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
	eje z	$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

EJEMPLO 4 Parabolóide de revolución

- a) En el ejemplo 1, la ecuación $y = x^2 + z^2$ puede escribirse como

$$y = (\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2.$$

En consecuencia, de acuerdo con la tabla anterior se advierte que la superficie se genera al rotar ya sea la parábola $y = x^2$ o la parábola $y = z^2$ en torno al eje y . La superficie que se muestra en la figura 1.8.7a) se denomina **parabolóide de revolución**.

- b) En el ejemplo 3, la ecuación $-(z - 4) = x^2 + y^2$ puede escribirse como

$$-(z - 4) = (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2.$$

La superficie es también un parabolóide de revolución. En este caso la superficie se genera al rotar ya sea la parábola $-(z - 4) = x^2$ o la parábola $-(z - 4) = y^2$ alrededor del eje z . ■

EJEMPLO 5 Elipsoide de revolución

La gráfica de $4x^2 + y^2 = 16$ se rota en torno al eje x . Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

Solución La ecuación dada tiene la forma $f(x, y) = 0$. Puesto que el eje de revolución es el eje x , vemos de la tabla que una ecuación de la superficie de revolución puede encontrarse al sustituir y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Se concluye que

$$4x^2 + (\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 16 \quad \text{o} \quad 4x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

La superficie se denomina **elipsoide de revolución**. ■

EJEMPLO 6 Cono

La gráfica de $z = y$, $y \geq 0$, se rota en torno al eje z . Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

Solución Puesto que no hay punto sobre la gráfica de $z = y$, $y \geq 0$, con coordenada y negativa, obtenemos una ecuación de la superficie de revolución al sustituir $\sqrt{x^2 + y^2}$ por y :

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (13)$$

Observe que (13) no es lo mismo que $z^2 = x^2 + y^2$. Técnicamente la gráfica de (3) es un cono **con dos mantos** o un cono completo; las porciones del cono sobre y debajo del vértice se denominan **mantos**. Si se resuelve (3) para z en términos de x y y , obtenemos ecuaciones de conos de **un manto**. Por ejemplo, al resolver $z^2 = x^2 + y^2$ encontramos que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y

$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ que son, a su vez, ecuaciones del manto superior y del manto inferior del cono. Así, la gráfica de (13) es el cono de un manto de la FIGURA 1.8.10a).



NOTAS DESDE EL AULA

- La gráfica de $z = xy$ también es un paraboloide hiperbólico. En realidad, es posible demostrar que la superficie $z = xy$ es congruente con el paraboloide hiperbólico $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ por medio de una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj de los ejes x y y a través de un ángulo de $\pi/4$ radianes en torno al eje z .
- El hiperboloides y el paraboloide hiperbólico se encuentran a menudo en la ingeniería arquitectónica. La forma de la torre del puerto de Kobe, Japón, es un hiperboloides de una hoja. Durante años la superficie que se presenta en la FIGURA 1.8.11 se usó en diseños de techos de casas e incluso de gasolineras. El más famoso fue la casa Catalano construida en Raleigh, Carolina del Norte, en 1954. Visite www.trianglemodernisthouses.com/catalano.htm para encontrar fotos detalladas. Por último, si observa con cuidado las papas fritas, especialmente las papas fritas Pringles de tamaño uniforme, advertirá la forma de un paraboloide hiperbólico.
- La superficie del espejo de un telescopio reflector se pule para darle forma de un paraboloide de revolución.

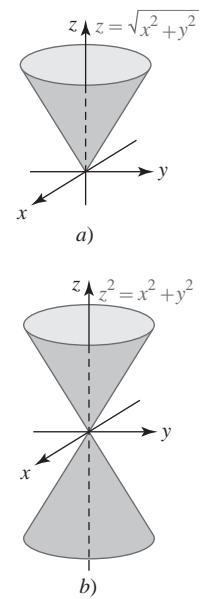


FIGURA 1.8.10 Cono de un solo manto *a*); cono de doble manto en *b*)



Torre del puerto de Kobe, Japón



Casa Catalano, 1954



Papas fritas Pringles



FIGURA 1.8.11 Superficie $z = xy$

1.8

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-4.

Fundamentos

En los problemas 1-14, identifique y grafique la superficie cuadrática.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 = z$ | 2. $-x^2 + y^2 = z^2$ |
| 3. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$ | 4. $x^2 + y^2 - z^2 = -4$ |
| 5. $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$ | 6. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$ |
| 7. $y^2 + 5z^2 = x^2$ | 8. $-9x^2 + 16y^2 = 144z$ |
| 9. $y = 4x^2 - z^2$ | 10. $9z + x^2 + y^2 = 0$ |
| 11. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$ | 12. $-x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$ |
| 13. $y^2 + 4z^2 = x$ | 14. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ |

En los problemas 15-18, grafique la superficie cuadrática.

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------|
| 15. $z = 3 + x^2 + y^2$ | 16. $y + x^2 + 4z^2 = 4$ |
| 17. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 - z^2 = 1$ | |
| 18. $5x^2 + (y - 5)^2 + 5z^2 = 25$ | |

En los problemas 19-22, la ecuación indicada es una ecuación de una superficie de revolución obtenida al rotar una curva C en un plano de coordenadas alrededor de un eje de coordena-

das. Encuentre una ecuación para C e identifique el eje de revolución.

- | | |
|---------------------------|--|
| 19. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ | 20. $-9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$ |
| 21. $y = e^{x^2+z^2}$ | 22. $x^2 - y^2 = \operatorname{sen}^2 z$ |

En los problemas 23-30, la gráfica de la ecuación dada se rota en torno al eje que se indica. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

- | | |
|--|----------------------------------|
| 23. $y = 2x$; eje y | 24. $y = \sqrt{z}$; eje y |
| 25. $z = 9 - x^2$, $x \geq 0$; eje x | |
| 26. $z = 1 + y^2$, $y \geq 0$; eje z | |
| 27. $x^2 - z^2 = 4$; eje x | 28. $3x^2 + 4z^2 = 12$; eje z |
| 29. $z = \ln y$; eje z | 30. $xy = 1$; eje x |
| 31. ¿Cuál de las superficies en los problemas 1-14 son superficies de revolución? Identifique los ejes de revolución de cada superficie. | |
| 32. Dibuje una gráfica de la ecuación en el problema 22 para $0 \leq z \leq 2\pi$. | |

En los problemas 33 y 34, compare las gráficas de las ecuaciones dadas.

33. $z + 2 = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $(z + 2)^2 = x^2 + y^2$

34. $y - 1 = \sqrt{x^2 + z^2}$, $(y - 1)^2 = x^2 + z^2$

35. Considere el paraboloido

$$z - c = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \quad c > 0.$$

a) El área de una elipse $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ es πAB .

Emplee este hecho para expresar el área de una sección transversal perpendicular al eje z como una función de z , $z \leq c$.

b) Utilice el método de rebanadas para encontrar el volumen del sólido acotado por el paraboloido y el plano xy .

36. a) Utilice el método del rebanadas como en el inciso b) del problema 35 para encontrar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

b) ¿Cuál sería su respuesta en el inciso a) si $a = b = c$?

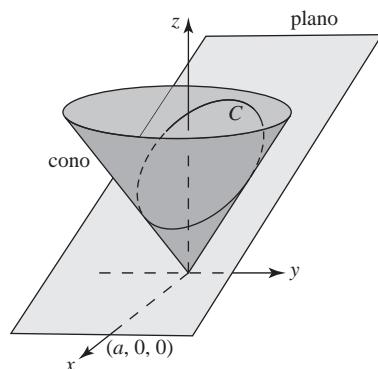
37. Determine los puntos donde la recta

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z - 6}{3/2}$$

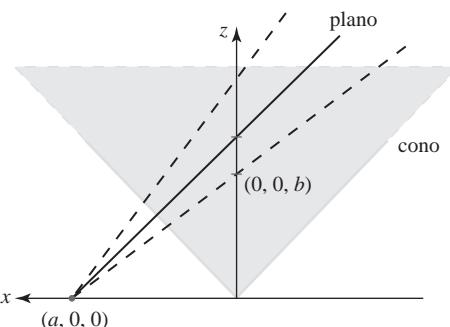
interseca al elipsoide $x^2/9 + y^2/36 + z^2/81 = 1$.

Proyectos

38. **Repaso de secciones cónicas** En el apéndice A se define informalmente una sección cónica (círculo, elipse, parábola e hipérbola) como la curva de intersección de un plano y un cono de doble manto. Con el conocimiento recién adquirido de ecuaciones de planos y conos usted puede demostrar realmente el enunciado anterior. Por simplicidad se considerará un cono de un solo manto con la ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es bastante sencillo ver que un plano $z = a$, $a > 0$ paralelo al plano xy corta al cono en un círculo. Al sustituir $z = a$ en la ecuación del cono obtenemos, después de simplificar, $x^2 + y^2 = a^2$. Esta última ecuación es un círculo de radio a y es la ecuación de la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección del plano con el cono. Suponga ahora un plano definido por $z = b - (b/a)x$ que pasa por el cono como se indica en la FIGURA 1.8.12a). Investigue cómo demostrar



a) C yace en el plano de intersección con el cono



b) Vista de la sección transversal

FIGURA 1.8.12 Intersección de planos con un cono de un manto

que la curva C de intersección es ya sea una parábola, una elipse o una hipérbola. Considere casos como los que sugieren las distintas posiciones del plano que se muestra en la figura 1.8.12b). Es probable que usted tenga que profundizar un poco respecto a sus ideas iniciales.

39. Esferoides

a) Escriba un breve artículo en el que se analice en qué condiciones la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

describe un **esferoide achatado** y un **esferoide prolato**.

b) Relacione estas dos superficies con el concepto de una superficie de revolución.

c) El planeta Tierra es un ejemplo de un esferoide achatado. Compare el radio polar de la Tierra con su radio ecuatorial.

d) Proporcione un ejemplo de un esferoide prolato.

Competencia final de la unidad 1

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-5.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-20, indique si el enunciado que se indica es verdadero (V) o falso (F).

1. Los vectores $\langle -4, -6, 10 \rangle$ y $\langle -10, -15, 25 \rangle$ son paralelos. _____

2. En el espacio tridimensional cualesquiera tres puntos distintos determinan un plano. _____

3. La recta $x = 1 + 5t, y = 1 - 2t, z = 4 + t$ y el plano $2x + 3y - 4z = 1$ son perpendiculares. _____
4. Los vectores distintos de cero \mathbf{a} y \mathbf{b} son paralelos si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. _____
5. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, el ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} es obtuso. _____
6. Si \mathbf{a} es un vector unitario, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$. _____
7. Una recta en el espacio tridimensional puede tener muchas ecuaciones vectoriales diferentes. _____
8. El punto terminal del vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ está en el punto terminal de \mathbf{a} . _____
9. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ _____
10. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y \mathbf{d} son vectores coplanares distintos de cero, entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.
-
11. Los planos $x + 2y - z = 5$ y $-2x - 4y + 2z = 1$ son paralelos. _____
12. Dos rectas perpendiculares L_1 y L_2 se intersecan. _____
13. La superficie $z = x^2$ es un cilindro. _____
14. La traza de un elipsoide $x^2/9 + y^2/2 + z^2/2 = 1$ en el plano yz es un círculo. _____
15. Los cuatro puntos $(0, 1, 2), (1, -1, 1), (3, 2, 6), (2, 1, 2)$ yacen en el mismo plano. _____
16. En general, para vectores distintos de cero \mathbf{a} y \mathbf{b} en el espacio tridimensional, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$. _____
17. La traza de la superficie $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$ en el plano yz es un círculo. _____
18. $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$ es una superficie de revolución. _____
19. Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores ortogonales distintos de cero, entonces $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. _____
20. Si \mathbf{a} es un vector distinto de cero y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-24, llene los espacios en blanco.

1. La suma de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es _____.
2. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, los vectores distintos de cero \mathbf{a} y \mathbf{b} son _____.
3. $(-\mathbf{k}) \times (5\mathbf{j}) =$ _____ 4. $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) =$ _____
5. $| -12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k} | =$ _____ 6. $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) =$ _____
7. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$ _____ 8. $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$ _____
9. Un vector que es normal al plano $-6x + y - 7z + 10 = 0$ es _____.
10. La esfera más grande con centro $(4, 3, 7)$ cuyo interior yace enteramente en el primer octante tiene radio $\mathbf{r} =$ _____.
11. El punto de intersección de la recta $x - 1 = (y + 2)/3 = (z + 1)/2$ y el plano $x + 2y - z = 13$ es _____.
12. Un vector unitario que tiene la dirección opuesta de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ es _____.
13. Si $\overrightarrow{P_1 P_2} = \langle 3, 5, -4 \rangle$ y P_1 tienen coordenadas $(2, 1, 7)$, entonces las coordenadas de P_2 son _____.
14. El punto medio del segmento de recta entre $P_1(4, 3, 10)$ y $P_2(6, -2, -5)$ tiene coordenadas _____.
15. Si $|\mathbf{a}| = 7.2, |\mathbf{b}| = 10$ y el ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} es de 135° , entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.
16. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 0 \rangle, \mathbf{b} = \langle -1, 2, 1 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -2, 2 \rangle$, entonces $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}) =$ _____.
17. Las intersecciones con los ejes x, y y z del plano $2x - 3y + 4z = 24$ son, respectivamente, _____.
18. El ángulo θ entre los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ es _____.
19. El área de un triángulo con dos lados dados por $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 2 \rangle$ es _____.
20. Una ecuación de una esfera con centro $(-5, 7, -9)$ y radio $\sqrt{6}$ es _____.
21. La distancia del plano $y = -5$ al punto $(4, -3, 1)$ es _____.
22. Los vectores $\langle 1, 3, c \rangle$ y $\langle -2, -6, 5 \rangle$ son paralelos para $c =$ _____ y ortogonales para $c =$ _____.

23. La superficie $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y - 12z = 0$ es un(a) _____.

24. La traza de la superficie $y = x^2 - z^2$ en el plano $z = 1$ es un(a) _____.

C. Ejercicios

1. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular a $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
2. Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{4}\mathbf{k}$.

En los problemas 3-6 considere $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 3, 0 \rangle$. Determine el número o vector indicado.

3. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$
4. $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
5. $\text{proy}_{\mathbf{b}}2\mathbf{a}$
6. proyección de $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ orthogonal a \mathbf{b}

En los problemas 7-12, identifique la superficie cuya ecuación se indica.

7. $x^2 + 4y^2 = 16$

8. $y + 2x^2 + 4z^2 = 0$

9. $x^2 + 4y^2 - z^2 = -9$

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$

11. $9z - x^2 + y^2 = 0$

12. $2x - 3y = 6$

13. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$ alrededor del eje y . Alrededor del eje x . Identifique la superficie en cada caso.

14. Una superficie de revolución tiene una ecuación $y = 1 + \sqrt{x^2 + z^2}$. Encuentre una ecuación de una curva C en un plano de coordenadas que, cuando se rote alrededor de un eje de coordenadas, genere la superficie.

15. Sea \mathbf{r} el vector posición de un punto variable $P(x, y, z)$ en el espacio y sea \mathbf{a} un vector constante. Determine la superficie descrita por las siguientes ecuaciones vectoriales:

a) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$

b) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

16. Use el producto punto para determinar si los puntos $(4, 2, -2)$, $(2, 4, -3)$ y $(6, 7, -5)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

17. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto $(7, 3, -5)$ que es paralela a $(x - 3)/4 = (y + 4)/(-2) = (z - 9)/6$.

18. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $(5, -9, 3)$ que es perpendicular al plano $8x + 3y - 4z = 13$.

19. Demuestre que las rectas $x = 1 - 2t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$ y $x = 1 + 2s$, $y = -4 + s$, $z = -1 + s$ se intersecan y son perpendiculares.

20. Encuentre una ecuación del plano que contiene a los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 3, 1)$, $(1, 0, 2)$.

21. Encuentre una ecuación del plano que contiene a las rectas $x = t$, $y = 4t$, $z = -2t$ y $x = 1 + t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 - 2t$.

22. Determine una ecuación del plano que contiene a $(1, 7, -1)$ y que es perpendicular a la recta de intersección de $-x + y - 8z = 4$ y $3x - y + 2z = 0$.

23. Encuentre una ecuación del plano que contiene a $(1, -1, 2)$ y que es paralela a los vectores $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.

24. Encuentre una ecuación de una esfera para la cual el segmento de recta $x = 4 + 2t$, $y = 7 + 3t$, $z = 8 + 6t$, $-1 \leq t \leq 0$, es un diámetro.

25. Demuestre que los tres vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ son coplanares.

26. Considere el triángulo recto cuyos lados son los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , y \mathbf{c} mostrados en la FIGURA 1.R.1. Demuestre que el punto medio M de la hipotenusa es equidistante de los tres vértices del triángulo.

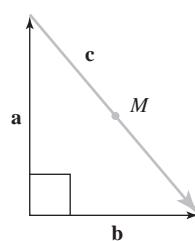


FIGURA 1.R.1 Triángulo del problema 26

- 27.** *a)* La fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} por un campo magnético \mathbf{B} está dada por $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Encuentre \mathbf{F} si \mathbf{v} actúa a lo largo del eje y positivo y \mathbf{B} actúa a lo largo del eje x positivo. Suponga que $|\mathbf{v}| = v$ y $|\mathbf{B}| = B$.
- b)* El momento angular \mathbf{L} de una partícula de masa m que se mueve con velocidad lineal \mathbf{v} en un círculo de radio \mathbf{r} está dado por $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$, donde \mathbf{r} es perpendicular a \mathbf{v} . Emplee métodos vectoriales para resolver respecto a \mathbf{v} en términos de \mathbf{L} , \mathbf{r} y m .
- 28.** Una fuerza constante de 10 N en la dirección de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ mueve un bloque sobre una superficie sin fricción desde $P_1(4, 1, 0)$ hasta $P_2(7, 4, 0)$. Suponga que la distancia se mide en metros. Determine el trabajo realizado.
- 29.** En el problema 28 calcule el trabajo realizado al mover el bloque entre los mismos puntos si otra fuerza constante de 50 N en la dirección de $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ actúa simultáneamente con la fuerza original.
- 30.** Una bola uniforme de 50 lb de peso se soporta por medio de dos planos sin fricción como se indica en la FIGURA 1.R.2. Considere que la fuerza ejercida por el plano de soporte S_1 sobre la bola es \mathbf{F}_1 y que la fuerza ejercida por el plano S_2 es \mathbf{F}_2 . Puesto que la bola se mantiene en equilibrio, se debe tener que $\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{w} = -50\mathbf{j}$. Determine las magnitudes de las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . [Sugerencia: Suponga que las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 son normales a los planos S_1 y S_2 , respectivamente, y que actúan a lo largo de las líneas que pasan por el centro C de la bola. Sitúe el origen de un sistema de coordenadas bidimensional en C .]

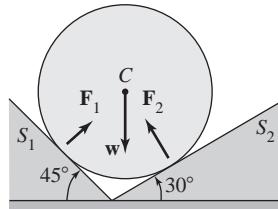
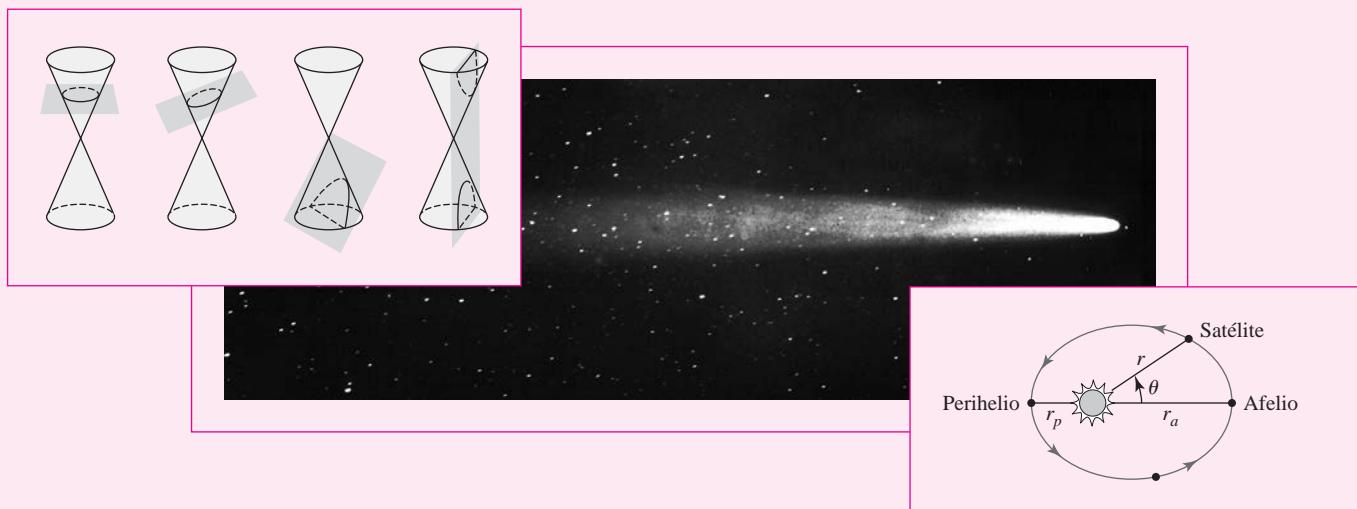


FIGURA 1.R.2 Bola del problema 30

Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares



En esta unidad Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo tampoco la más conveniente, de describir una curva en el plano. En esta unidad consideraremos dos medios adicionales mediante los cuales puede representarse una curva. Uno de los dos enfoques utiliza un tipo de sistema de coordenadas completamente nuevo.

Competencia específica

- Construir la gráfica de una curva plana en forma paramétrica eligiendo la técnica más apropiada.

2.1 Ecuaciones paramétricas

■ Introducción Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo la más conveniente, de describir una curva en el plano de coordenadas. En esta sección consideraremos una manera diferente de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones del cálculo.

■ Movimiento curvilíneo Empecemos con un ejemplo. El movimiento de una partícula a lo largo de una curva, en contraste con una línea recta, se denomina **movimiento curvilíneo**. Si supone que una pelota de golf golpea sobre el suelo en forma perfectamente recta (sin efecto de gancho o de rebanada) y que su trayectoria permanece en un plano de coordenadas, entonces su movimiento está gobernado por el hecho de que su aceleración en las direcciones x y y satisface

$$a_x = 0, \quad a_y = -g, \quad (1)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$. En $t = 0$ tomamos $x = 0$, $y = 0$, y las componentes x y y de la velocidad inicial v_0 son

$$v_0 \cos \theta_0 \quad \text{y} \quad v_0 \sin \theta_0, \quad (2)$$

respectivamente. Vea la FIGURA 2.1.1. Al tomar dos antiderivadas de cada ecuación en (1), vemos de las condiciones iniciales de (2) que las coordenadas x y y de la pelota de golf en el tiempo t están dadas por

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta_0)t, \quad (3)$$

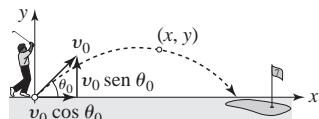


FIGURA 2.1.1 ¡Tiro!

donde θ_0 es el ángulo de lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y $g = 32$ pies/s². Estas ecuaciones, las cuales dan la posición de la pelota de golf en el plano de coordenadas en el tiempo t , se llaman **ecuaciones paramétricas**. La tercera variable t en (3) se denomina **parámetro** y está restringido a cierto intervalo I ; en este caso, I se define mediante $0 \leq t \leq T$, donde $t = 0$ produce el origen $(0, 0)$ y $t = T$ es el tiempo en el que la pelota golpea el suelo.

La idea en (3), esto es, representar a x y y en un par ordenado (x, y) mediante funciones de una tercera variable t , se usa para *definir* una curva.

Definición 2.1.1 Curva plana

Si f y g son funciones continuas definidas sobre un intervalo común I , entonces $x = f(t)$, $y = g(t)$ se llaman **ecuaciones paramétricas** y t recibe el nombre de **parámetro**. El conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$ cuando t varía sobre I se denomina **curva plana**.

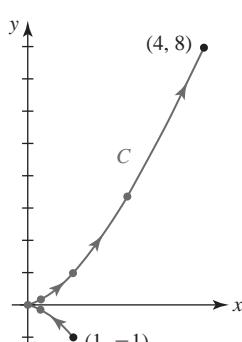


FIGURA 2.1.2 Curva del ejemplo 1

Es una práctica común referirse al conjunto de ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, para t en I , como una **parametrización** de C . De aquí en adelante, haremos referencia a una curva plana C como una **curva paramétrica** o como una **curva parametrizada**. La **gráfica** de una curva paramétrica C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano de coordenadas correspondientes al par ordenado $(f(t), g(t))$. Por simplicidad, no se establecerá la distinción entre una *curva paramétrica* y una *gráfica de una curva*.

EJEMPLO 1 Curva paramétrica

Grafique la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad -1 \leq t \leq 2.$$

Solución Como se indica en la tabla siguiente, para cualquier elección de t en el intervalo $[-1, 2]$, se obtiene un solo par ordenado (x, y) . Al conectar los puntos con una curva, obtenemos la gráfica de la FIGURA 2.1.2.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	2

En el ejemplo 1, si piensa en términos de movimiento y en t como el tiempo, entonces cuando t aumenta de -1 a 2, un punto P definido como (t^2, t^3) empieza desde $(1, -1)$, avanza hacia arriba en la rama inferior de la curva hacia el origen $(0, 0)$, pasa a la rama superior y finalmente se detiene en $(4, 8)$. En general, un parámetro t no necesita tener relación con el tiempo. Cuando se grafican puntos correspondientes a valores crecientes del parámetro, se traza una curva C mediante $(f(t), g(t))$ en una cierta dirección indicada por las flechas sobre la curva en la figura 2.1.2. La dirección se denomina la **orientación** de la curva C .

Cuando el intervalo I sobre el cual f y g se definen es un intervalo cerrado $[a, b]$, afirmamos que $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva C y que $(f(b), g(b))$ es su **punto final**. En el ejemplo 1, $(1, -1)$ y $(4, 8)$ son los puntos inicial y final de C , respectivamente. Si el punto final es el mismo que el punto inicial, esto es,

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b)),$$

entonces C es una **curva cerrada**. Si C es cerrada pero no se cruza a sí misma, entonces se denomiña **curva cerrada simple**. En la FIGURA 2.1.3, A y B representan los puntos inicial y final, respectivamente.

El siguiente ejemplo ilustra una curva cerrada simple.

EJEMPLO 2 Una parametrización de un círculo

Encuentre una parametrización del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución El círculo tiene centro en el origen y radio $a > 0$. Si t representa el ángulo central, esto es, un ángulo con vértice en el origen y lado inicial que coincide con el eje x positivo, entonces como se muestra en la FIGURA 2.1.4 las ecuaciones

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (4)$$

proporcionan cada punto P sobre el círculo. Por ejemplo, en $t = \pi/2$ obtenemos $x = 0$ y $y = a$, en otras palabras, el punto es $(0, a)$. El punto inicial corresponde a $t = 0$ y es $(a, 0)$; el punto final corresponde a $t = 2\pi$ y es también $(a, 0)$. Puesto que los puntos inicial y final son los mismos, esto demuestra lo que es evidente: la curva C definida por las ecuaciones paramétricas (4) es una curva cerrada. Advierta la orientación de C en la figura 2.1.4; cuando t aumenta de 0 a 2π , el punto $P(x, y)$ traza C en una dirección contraria a la de las manecillas del reloj. ■

En el ejemplo 2, el *semicírculo* superior $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq y \leq a$, se define paramétricamente restringiendo el parámetro t al intervalo $[0, \pi]$,

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Observe que cuando $t = \pi$, el punto final es ahora $(-a, 0)$. Por otro lado, si desea describir dos revoluciones completas en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo, de nuevo modifica el intervalo del parámetro al escribir

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

■ Eliminación del parámetro Dado un conjunto de ecuaciones paramétricas, algunas veces se desea *eliminar* o *despejar* el parámetro para obtener una ecuación rectangular de la curva. Para eliminar el parámetro en (4), simplemente se elevan al cuadrado x y y y se suman las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t \quad \text{implica que} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

puesto que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. No hay una manera única de eliminar el parámetro.

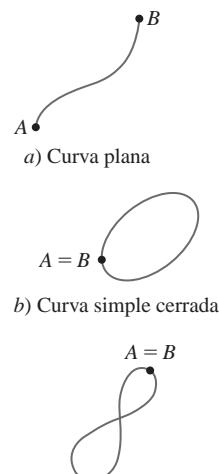


FIGURA 2.1.3 Algunas curvas planas

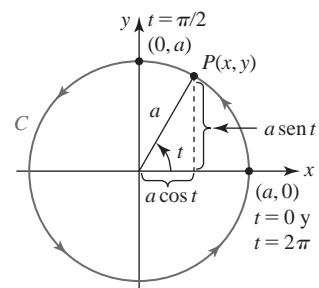


FIGURA 2.1.4 Círculo del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Eliminación del parámetro

- a) De la primera ecuación en (3) tenemos $t = x/(v_0 \cos \theta_0)$. Al sustituir esto en la segunda ecuación da

$$y = -\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 + (\tan \theta_0)x.$$

Puesto que v_0 , θ_0 y g son constantes, la última ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$ y por ello la trayectoria de cualquier proyectil lanzado a un ángulo $0 < \theta_0 < \pi/2$ es un arco parabólico.

- b) En el ejemplo 1 es posible eliminar el parámetro de $x = t^2$, $y = t^3$ resuelve la segunda ecuación para t en términos de y y después al sustituir la primera ecuación encontramos que

$$t = y^{1/3} \text{ y por tanto } x = (y^{1/3})^2 = y^{2/3}.$$

La curva que se muestra en la figura 2.1.2 es sólo una porción de la gráfica $x = y^{2/3}$. Para $-1 \leq t \leq 2$ se tiene de manera correspondiente $-1 \leq y \leq 8$. De tal modo, una ecuación rectangular para la curva en el ejemplo 1 está dada por $x = y^{2/3}$, $-1 \leq y \leq 8$.

Una curva C puede tener más de una parametrización. Por ejemplo, una parametrización alterna del círculo en el ejemplo 2 es

$$x = a \cos 2t, \quad y = a \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Advierta que el intervalo del parámetro ahora es $[0, \pi]$. Vemos que conforme t aumenta de 0 a π , el nuevo ángulo $2t$ aumenta de 0 a 2π .

EJEMPLO 4 Parametrizaciones alternas

Considere la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 2t^2$, $-\infty < t < \infty$. Es posible eliminar el parámetro si utilizamos $t = x$ y sustituimos en $y = 2t^2$. Esto produce la ecuación rectangular $y = 2x^2$, la cual reconocemos como una parábola. Además, puesto que $-\infty < t < \infty$ es equivalente a $-\infty < x < \infty$, el punto $(t, 2t^2)$ traza la parábola completa $y = 2x^2$, $-\infty < x < \infty$.

Una parametrización alterna de C está dada por $x = t^3/4$, $y = t^6/8$, $-\infty < t < \infty$. Empleamos $t^3 = 4x$ y sustituimos en $y = t^6/8$ o $y = (t^3 \cdot t^3)/8$ produce $y = (4x)^2/8 = 2x^2$. Además, $-\infty < t < \infty$ implica $-\infty < t^3 < \infty$ y por ello $-\infty < x < \infty$.

Advierta en el ejemplo 4 que un punto sobre C no necesita corresponder con el mismo valor del parámetro en cada conjunto de ecuaciones paramétricas de C . Por ejemplo, $(1, 2)$ se obtuvo para $t = 1$ en $x = t$, $y = 2t^2$, pero $t = \sqrt[3]{4}$ produce $(1, 2)$ en $x = t^3/4$, $y = t^6/8$.

EJEMPLO 5 Repaso del ejemplo 4

Debe proceder con cuidado para eliminar el parámetro.

Es necesario tener cuidado cuando se trabaja con ecuaciones paramétricas. Al eliminar el parámetro en $x = t^2$, $y = 2t^4$, $-\infty < t < \infty$, parecería que se produce la misma parábola $y = 2x^2$ como en el ejemplo 4. Sin embargo, éste *no* es el caso porque para cualquier valor de t , $t^2 \geq 0$ y por ello $x \geq 0$. En otras palabras, el último conjunto de ecuaciones sólo es una representación paramétrica de la rama del lado derecho de la parábola, esto es, $y = 2x^2$, $0 \leq x < \infty$.

EJEMPLO 6 Eliminación del parámetro

Considere la curva C definida paramétricamente por

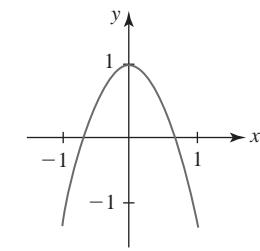
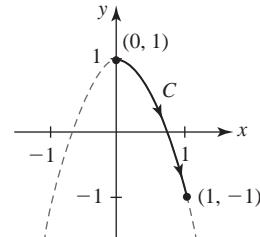
$$x = \sin t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

Elimine el parámetro y obtenga una ecuación rectangular para C .

Solución Al utilizar la fórmula del ángulo doble $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$, es posible escribir

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= (1 - \sin^2 t) - \sin^2 t \\ &= 1 - 2 \sin^2 t \quad \leftarrow \text{sustituir } \sin t = x \\ &= 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

En este caso la curva C descrita por las ecuaciones paramétricas no consiste en la parábola completa, esto es, $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$. Vea la FIGURA 2.1.5a). Para $0 \leq t \leq \pi/2$ tenemos $0 \leq \sin t \leq 1$ y $-1 \leq \cos 2t \leq 1$. Esto significa que C es sólo aquella porción de la parábola para la cual las coordenadas de un punto $P(x, y)$ satisfacen $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. La curva C , junto con su orientación, aparecen en la figura 2.1.5b). Una ecuación rectangular para C es $y = 1 - 2x^2$ con el dominio restringido $0 \leq x \leq 1$.

a) $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$ b) $x = \sin t$, $y = \cos 2t$,
 $0 \leq t \leq \pi/2$ FIGURA 2.1.5 Curva C del ejemplo 6

■ Intersecciones con los ejes Podemos obtener las intersecciones con los ejes de una curva C sin determinar su ecuación rectangular. Por ejemplo, en el ejemplo 6 encontramos que la intersección con el eje x determina el valor de t en el intervalo paramétrico para el cual $y = 0$. La ecuación $\cos 2t = 0$ produce $2t = \pi/2$, por lo que $t = \pi/4$. El punto correspondiente en el cual C cruza al eje x es $(\sqrt{2}, 0)$. De manera similar, la intersección de C con el eje y la encontramos al resolver $x = 0$ para t . De $\sin t = 0$ concluimos de inmediato que $t = 0$ y por eso la intersección con el eje y es $(0, 1)$.

■ Aplicaciones de ecuaciones paramétricas Las curvas cicloïdales fueron un tema popular de estudio para los matemáticos en el siglo XVII. Suponga que un punto $P(x, y)$, marcado sobre un círculo de radio a , está en el origen cuando su diámetro yace a lo largo del eje y . Conforme el círculo rueda a lo largo del eje x , el punto P traza una curva C que recibe el nombre de **cicloide**. Vea la FIGURA 2.1.6.

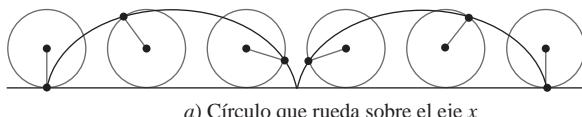
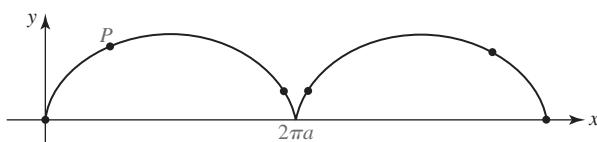
a) Círculo que rueda sobre el eje x b) El punto P en el círculo traza esta curva

FIGURA 2.1.6 Cicloide

Dos problemas fueron estudiados ampliamente en el siglo XVII. Considere un alambre flexible (sin fricción) fijo a los puntos A y B y a una cuenta libre de deslizarse por el alambre empeñando en P . Vea la FIGURA 2.1.7. ¿Existe una forma particular del alambre de manera que, independientemente de dónde empieza la cuenta, el tiempo para deslizarse por el alambre hasta B será el mismo? Además, ¿cuál sería la forma del alambre de manera que la cuenta se deslice de P a B en el tiempo más corto? El así llamado **tautócrono** (mismo tiempo) y **braquistócrono** (tiempo mínimo) se presentaron como el medio arco invertido de una cicloide.

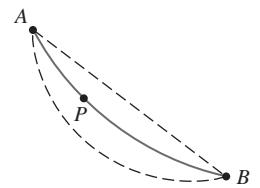


FIGURA 2.1.7 Cuenta deslizante

EJEMPLO 7 Parametrización de una cicloide

Encuentre una parametrización de la cicloide que se muestra en la figura 2.1.6b).

Solución Un círculo de radio a cuyo diámetro inicialmente yace a lo largo del eje y rueda a lo largo del eje x sin deslizamiento. Tomamos como parámetro el ángulo θ (en radianes), a través del cual ha rotado el círculo. El punto $P(x, y)$ empieza en el origen, lo cual corresponde a $\theta = 0$. Conforme rueda el círculo a lo largo de un ángulo θ , su distancia desde el origen es el arco $PE = OE = a\theta$. De la FIGURA 2.1.8 vemos entonces que la coordenada x de P es

$$x = \overline{OE} - \overline{QE} = a\theta - a \sin \theta.$$

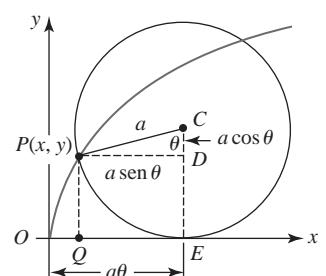
Ahora se advierte que la coordenada y de P es

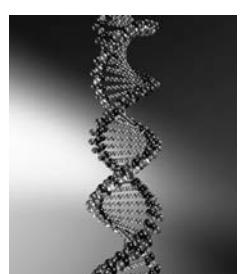
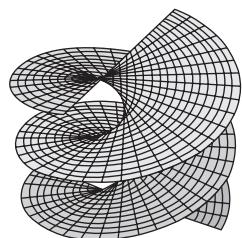
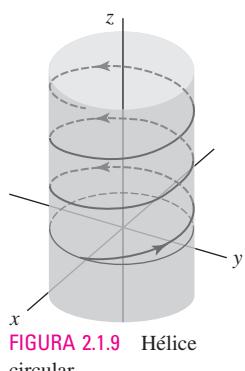
$$y = \overline{CE} - \overline{CD} = a - a \cos \theta.$$

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas para la cicloide son

$$x = a\theta - a \sin \theta, \quad y = a - a \cos \theta.$$

Como se ilustra en la figura 2.1.6a), un arco de una cicloide es generado por una rotación del círculo y corresponde a un intervalo paramétrico $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

FIGURA 2.1.8 En el ejemplo 7, el ángulo θ es el parámetro del cicloide



I Parametrización de curvas rectangulares Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ también se parametriza dejando $x = t$. Las ecuaciones paramétricas para C son entonces

$$x = t, \quad y = f(t). \quad (5)$$

Por ejemplo, un ciclo de la gráfica de la función seno $y = \operatorname{sen} x$ se parametriza mediante $x = t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

I Curvas suaves Una curva C , dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t < b,$$

se dice que es **suave** si f' y g' son continuas sobre $[a, b]$ y no simultáneamente cero sobre (a, b) . Se dice que una curva C es **suave por secciones** si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en subintervalos tales que C es suave sobre cada subintervalo. Las curvas en los ejemplos 2, 3 y 6 son suaves; las curvas en los ejemplos 1 y 7 son suaves por secciones.

$$\frac{d}{d\theta}$$

NOTAS DESDE EL AULA

Esta sección se enfoca en **curvas planas**, curvas C definidas paramétricamente en dos dimensiones. En el estudio del cálculo de múltiples variables verá curvas y superficies en tres dimensiones que se definen mediante ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, una **curva espacial** C consiste en un conjunto de tripletes ordenados $(f(t), g(t), h(t))$, donde f , g y h se definen sobre un intervalo común. Las ecuaciones paramétricas para C son $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. Por ejemplo, la **hélice circular** de la FIGURA 2.1.9 es una curva espacial cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a \cos t, \quad y = a \cos t, \quad z = bt, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Las superficies en tres dimensiones se representan mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas que involucran a *dos* parámetros, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$. Por ejemplo, el **helicoide circular** que se muestra en la FIGURA 2.1.10 surge del estudio de superficies mínimas y está definido por el conjunto de ecuaciones paramétricas similar al correspondiente a (6):

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = bv,$$

donde b es una constante. El helicoide circular tiene una hélice circular como su frontera. El lector podría reconocer al helicoide como el modelo para el álabre curvado rotatorio en maquinarias tales como excavadoras para hoyos de postes, taladros de hielo y máquinas quitanieve.

2.1

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-5.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, complete la tabla para un conjunto dado de ecuaciones paramétricas.

1. $x = 2t + 1$, $y = t^2 + t$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

2. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$,

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$
x							
y							

En los problemas 3-10, grafique la curva que tiene el conjunto indicado de ecuaciones paramétricas.

3. $x = t - 1$, $y = 2t - 1$; $-1 \leq t \leq 5$

4. $x = 3t$, $y = t^2 - 1$; $-2 \leq t \leq 3$

5. $x = \sqrt{t}$, $y = 5 - t$; $t \geq 0$

6. $x = 3 + 2 \operatorname{sen} t$, $y = 4 + \operatorname{sen} t$; $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

7. $x = 4 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$; $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$

8. $x = t^3 + 1$, $y = t^2 - 1$; $-2 \leq t \leq 2$

9. $x = e^t$, $y = e^{3t}$; $0 \leq t \leq \ln 2$

10. $x = -e^t$, $y = e^{-t}$; $t \geq 0$

En los problemas 11-16, elimine los parámetros del conjunto dado de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica.

11. $x = t^2, y = t^4 + 3t^2 - 1$
12. $x = t^3 + t + 4, y = -2t^3 - 2t$
13. $x = -\cos 2t, y = \sin t; -\pi/4 \leq t \leq \pi/4$
14. $x = e^t, y = \ln t; t > 0$
15. $x = t^3, y = 3 \ln t; t > 0$
16. $x = \tan t, y = \sec t; -\pi/2 < t < \pi/2$

En los problemas 17-22, muestre de manera gráfica la diferencia entre las curvas indicadas.

17. $y = x$ y $x = \sin t, y = \sin t$
18. $y = x^2$ y $x = -\sqrt{t}, y = t, t \geq 0$
19. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ y $x = 2t, y = t^2 - 1, -1 \leq t \leq 2$
20. $y = -x^2$ y $x = e^t, y = -e^{2t}, t \geq 0$
21. $x^2 - y^2 = 1$ y $x = \cosh t, y = \sinh t$
22. $y = 2x - 2$ y $x = t^2 - 1, y = 2t^2 - 4$

En los problemas 23-26, muestre de manera gráfica las diferencias entre las curvas indicadas. Suponga $a > 0, b > 0$.

23. $x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \pi$
 $x = a \sin t, y = a \cos t, 0 \leq t \leq \pi$
24. $x = a \cos t, y = b \sin t, a > b, \pi \leq t \leq 2\pi$
 $x = a \sin t, y = b \cos t, a > b, \pi \leq t \leq 2\pi$
25. $x = a \cos t, y = a \sin t, -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
 $x = a \cos 2t, y = a \sin 2t, -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
26. $x = a \cos \frac{t}{2}, y = a \sin \frac{t}{2}, 0 \leq t \leq \pi$
 $x = a \cos\left(-\frac{t}{2}\right), y = a \sin\left(-\frac{t}{2}\right), -\pi \leq t \leq 0$

En los problemas 27 y 28, grafique la curva que tiene las ecuaciones paramétricas indicadas.

27. $x = 1 + 2 \cosh t, y = 2 + 3 \sinh t$
28. $x = -3 + 3 \cos t, y = 5 + 5 \sin t$

En los problemas 29-34, determine si el conjunto dado de ecuaciones paramétricas tiene la misma gráfica que la ecuación rectangular $xy = 1$.

29. $x = \frac{1}{2t+1}, y = 2t+1$
30. $x = t^{1/2}, y = t^{-1/2}$
31. $x = \cos t, y = \sec t$
32. $x = t^2 + 1, y = (t^2 + 1)^{-1}$
33. $x = e^{-2t}, y = e^{2t}$
34. $x = t^3, y = t^{-3}$

Aplicaciones

35. Como se muestra en la FIGURA 2.1.11, un émbolo está unido por medio de una varilla de longitud L a un mecanismo

de manivela circular de radio r . Parametrize las coordenadas del punto P en términos del ángulo ϕ .

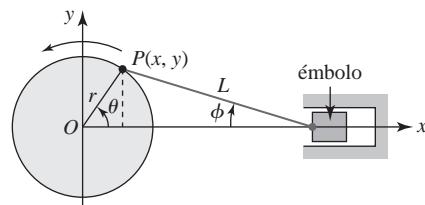


FIGURA 2.1.11 Mecanismo de manivela del problema 35

36. Un punto Q traza una trayectoria circular de radio r y un punto P se mueve de la manera que se indica en la FIGURA 2.1.12. Si R es constante, encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por P . Esta curva recibe el nombre de **epitrocoide**. (Aquellos que sepan sobre automóviles podrían reconocer la curva trazada por P como la forma del rotor albergado en el motor rotatorio o de Wankel.)

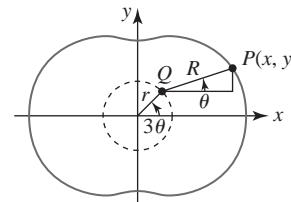


FIGURA 2.1.12 Epitrocoide del problema 36

37. Un carrete circular de hilo enrollado tiene su centro en el origen. El radio del carrete es a . El extremo del hilo P , empezando en $(a, 0)$, se desenrolla mientras el hilo se mantiene tirante. Vea la FIGURA 2.1.13. Encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria seguida por el punto P si el hilo PR es tangente al carrete circular en R . La curva se denomina **involuta** de un círculo.

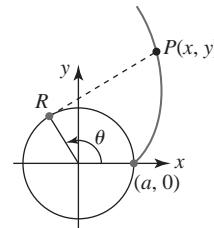


FIGURA 2.1.13 Involuta de un círculo en el problema 37

38. Imagine un pequeño círculo de radio a que rueda sobre el interior de un círculo más grande de radio $b > a$. Un punto P del círculo más pequeño genera una curva llamada **hipocicloide**. Recurra a la FIGURA 2.1.14 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide son

$$x = (b - a) \cos \theta + a \cos \frac{b-a}{a} \theta$$

$$y = (b - a) \sin \theta - a \sin \frac{b-a}{a} \theta.$$

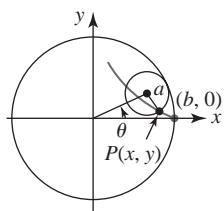


FIGURA 2.1.14 Hipocicloide del problema 38

39. a) Emplee las ecuaciones del problema 38 para demostrar que las ecuaciones paramétricas de una **hipocicloide de cuatro cúspides** son

$$x = b \cos^3 \theta, \quad y = b \sin^3 \theta.$$

- b) Mediante la herramienta de graficación obtenga la gráfica de la curva en el inciso a)
c) Elimine el parámetro y obtenga una ecuación rectangular para la hipocicloide de cuatro cúspides.
40. Emplee la FIGURA 2.1.15 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una **epicicloide** están dadas por

$$x = (a + b) \cos \theta - a \cos \frac{a + b}{a} \theta$$

$$y = (a + b) \sin \theta - a \sin \frac{a + b}{a} \theta.$$

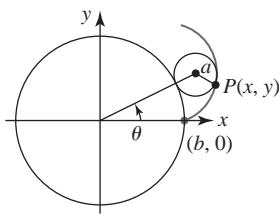


FIGURA 2.1.15 Epicicloide del problema 40

41. a) Emplee las ecuaciones del problema 40 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una **epicicloide de tres cúspides** son

$$x = 4a \cos \theta - a \cos 4\theta, \quad y = 4a \sin \theta - a \sin 4\theta.$$

- b) Mediante un aparato para graficación obtenga la gráfica de la curva del inciso a).

42. Un clásico matemático

- a) Consideré un círculo de radio a, que es tangente al eje x en el origen O. Sea B un punto sobre una línea horizontal que pasa por (0, 2a) y considere que el segmento de recta OB corta al círculo en el punto A. Como se muestra en la FIGURA 2.1.16, la proyección de AB sobre la vertical produce el segmento de recta BP. Encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por el punto P cuando A varía alrededor del círculo. La curva recibe el nombre de **Bruja de Agnesi**. No, la curva no tiene nada que ver con brujas ni duendes. Esta curva, llamada *versoria*, que es el término en latín para un tipo de cuerda, se incluyó en un texto de geometría analítica escrito en 1748 por la matemática italiana **Maria Gaetana Agnesi** (1718-1799). Este

texto tuvo tanta popularidad que rápidamente se tradujo al inglés. El traductor confundió *versoria* con la palabra italiana *versiera*, que significa *duende femenino*. En inglés, *duende femenino* se convirtió en *bruja*.

- b) En el inciso a) elimine el parámetro y demuestre que la curva tiene la ecuación rectangular

$$y = 8a^3/(x^2 + 4a^2).$$

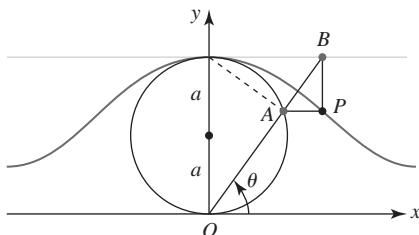


FIGURA 2.1.16 Bruja de Agnesi del problema 42

■ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 43-48, emplee una calculadora o un SAC para obtener la gráfica del conjunto dado de ecuaciones paramétricas.

43. $x = 4 \sen 2t, y = 2 \sen t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
44. $x = 6 \cos 3t, y = 4 \sen 2t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
45. $x = 6 \cos 4t, y = 4 \sen t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
46. $x = \cos t + t \sen t, y = \sen t - t \cos t; \quad 0 \leq t \leq 3\pi$
47. $x = t^3 - 4t + 1, y = t^4 - 4t^2; \quad -5 \leq t \leq 5$
48. $x = t^5 - t + 1, y = t^3 + 2t - 1; \quad -3 \leq t \leq 6$

■ Piense en ello

49. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para una línea que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad -\infty < t < \infty.$$

¿Qué representan estas ecuaciones cuando $0 \leq t \leq 1$?

50. a) Use el resultado del problema 49 para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2, 5)$ y $(4, 8)$.
b) Elimine el parámetro del inciso a) para obtener una ecuación rectangular de la recta.
c) Encuentre las ecuaciones paramétricas del segmento de recta con $(-2, 5)$ como el punto inicial y $(4, 8)$ como el punto final.

51. Una esquiadora salta por una rampa sobre una pendiente y sale despedida horizontalmente por el aire con una velocidad inicial de 75 pies/s. Como se muestra en la FIGURA 2.1.17, la pendiente cae a partir de la horizontal a un ángulo de 33° . Emplee las ecuaciones en (3) para determinar cuán abajo en la pendiente aterrizará la esquiadora. [Sugerencia: Observe que los ejes x y y en la figura 2.1.1 están en la posición estándar (a la derecha y hacia arriba, respectivamente). En la figura 2.1.17 suponga que el origen es el punto donde la esquiadora sale despedida en el aire.]

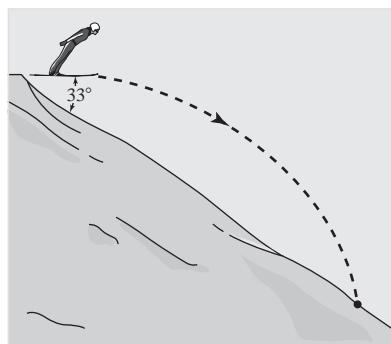


FIGURA 2.1.17 Esquiadora en el problema 51

■ Proyectos

- 52. Curva de la mariposa** La gráfica del conjunto de ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{sen} t \left(e^{\cos t} - 2 \cos 4t + \operatorname{sen}^5 \frac{1}{12} t \right), \\y &= \cos t \left(e^{\cos t} - 2 \cos 4t + \operatorname{sen}^5 \frac{1}{12} t \right)\end{aligned}$$

se dice que es una **curva de mariposa**. La FIGURA 2.1.18 consta de siete porciones de la curva correspondiente a diferentes intervalos del parámetro. Experimente con un SAC para determinar estos intervalos del parámetro. Emplee el SAC para generar más porciones y después combine todas las curvas en un conjunto de ejes de coordenadas.

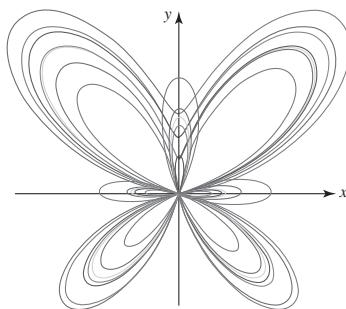


FIGURA 2.1.18 Curva de mariposa del problema 52

- 53.** La curva en la figura 2.1.18 es una de las dos curvas conocidas como una curva de mariposa. Escriba un breve informe que analice ambos tipos de curvas.
- 54. Curvas de Bézier** La mayoría de las aplicaciones de graficación por computadora trazan ecuaciones paramétricas además de gráficas de funciones. Todas las calculadoras gráficas pueden trazar ecuaciones paramétricas calculando de manera repetida un punto sobre la curva y después graficándolo. En este proyecto se introducen algunas curvas paramétricas especiales llamadas **curvas de Bézier**, las cuales son comunes en el diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés), en programas de dibujo por computadora y en representaciones ma-

temáticas de diferentes fuentes para muchas impresoras láser. Una curva de Bézier *cúbica* se especifica mediante cuatro puntos de control en el plano, por ejemplo,

$$P_0(p_0, q_0), \quad P_1(p_1, q_1), \quad P_2(p_2, q_2) \quad \text{y} \quad P_3(p_3, q_3).$$

La curva empieza en el primer punto para el valor $t = 0$, termina en el último punto para $t = 1$, y de manera aproximada “apunta hacia” los puntos medios de los valores del parámetro entre 0 y 1. Los artistas e ingenieros de diseño pueden mover los puntos de control para ajustar las ubicaciones finales y la forma de la curva paramétrica. La curva de Bézier cúbica para estos cuatro puntos de control tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned}x &= p_0(1-t)^3 + 3p_1(1-t)^2t + 3p_2(1-t)t^2 + p_3t^3 \\y &= q_0(1-t)^3 + 3q_1(1-t)^2t + 3q_2(1-t)t^2 + q_3t^3,\end{aligned}$$

donde $0 \leq t \leq 1$. Varias curvas de Bézier pueden conectarse por pedazos de manera continua haciendo que el último punto de control sobre una curva sea el primer punto de control sobre la curva siguiente. De manera equivalente, es posible construir las ecuaciones paramétricas por secciones. Por ejemplo, la pieza siguiente puede de representarse por medio de

$$\begin{aligned}x &= p_3(2-t)^3 + 3p_4(2-t)^2(t-1) \\&\quad + 3p_5(2-t)(t-1)^2 + p_6(t-1)^3 \\y &= q_3(2-t)^3 + 3q_4(2-t)^2(t-1) \\&\quad + 3q_5(2-t)(t-1)^2 + q_6(t-1)^3,\end{aligned}$$

donde $1 \leq t \leq 2$.

En *a)-f*), use un aparato para graficación para obtener la gráfica de la curva de Bézier continua por secciones asociada con los puntos de control dados.

- a)* $P_0(5, 1), P_1(1, 30), P_2(50, 28), P_3(55, 5)$
- b)* $P_0(32, 1), P_1(85, 25), P_2(1, 30), P_3(40, 3)$
- c)* $P_0(10, 5), P_1(16, 4), P_2(25, 28), P_3(30, 30), P_4(18, 1), P_5(40, 18), P_6(16, 20)$
- d)* $P_0(55, 50), P_1(45, 40), P_2(38, 20), P_3(50, 20), P_4(60, 20), P_5(63, 35), P_6(45, 32)$
- e)* $P_0(30, 30), P_1(40, 5), P_2(12, 12), P_3(45, 10), P_4(58, 10), P_5(66, 31), P_6(25, 30)$
- f)* $P_0(48, 20), P_1(20, 15), P_2(20, 50), P_3(48, 45), P_4(28, 47), P_5(28, 18), P_6(48, 20), P_7(48, 36), P_8(52, 32), P_9(40, 32)$

En *g)-i*) experimente con las ubicaciones de los puntos de control para obtener curvas de Bézier continuas por secciones approximando la forma u objeto indicados. Proporcione los puntos de control finales que eligió y dibuje la curva paramétrica resultante.

- g)* Históricamente la letra “S” ha sido una de las más difíciles de representar matemáticamente. Use dos o tres pedazos de curva de Bézier para dibujar una letra “S” en algún estilo de fuente simple.
- h)* La sección transversal larga de un huevo no se asemeja mucho a una elipse debido a que un extremo es más

puntiagudo que el otro. Utilice varios pedazos de curva de Bézier para representar una aproximación de la forma de un huevo.

- i) Proporcione una curva aproximando la forma de la letra ε , utilizando tan pocas piezas como sea posible.

Termine este proyecto con la redacción de un breve informe que analice las curvas de Bézier lineal, cuadrática y de grado n -ésimo. Incluya un análisis acerca de la historia antigua de las curvas de Bézier; por ejemplo, ¿cuál fue la aportación de Pierre Bézier?

2.2 Cálculo y ecuaciones paramétricas

■ Introducción Al igual que con las gráficas de funciones $y = f(x)$, podemos obtener información útil acerca de una curva C definida paramétricamente al examinar la derivada dy/dx .

■ Pendiente Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$ las ecuaciones paramétricas de una curva suave C . La **pendiente** de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ sobre C está dada por dy/dx . Para calcular esta derivada, se usa la definición de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Para un incremento Δt , los incrementos en x y y son, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Delta x &= f(t + \Delta t) - f(t) & y &= g(t + \Delta t) - g(t) \\ \text{y por ello} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} & &= \frac{\Delta t}{f(t + \Delta t) - f(t)}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{dy/dt}{dx/dt},$$

cuando el límite del denominador no es cero. La forma paramétrica de la derivada se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 Pendiente de una recta tangente

Si $x = f(t)$, $y = g(t)$ define una curva suave C , entonces la **pendiente de una recta tangente** en un punto $P(x, y)$ sobre C es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \quad (1)$$

siempre que $f'(t) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la curva $x = t^2 - 4t - 2$, $y = t^5 - 4t^3 - 1$ en el punto correspondiente a $t = 1$.

Solución Primero determinamos la pendiente dy/dx de la recta tangente. Puesto que

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 4 \quad y \quad \frac{dy}{dt} = 5t^4 - 12t^2$$

se deduce de (1) que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{5t^4 - 12t^2}{2t - 4}.$$

De tal modo, en $t = 1$ tenemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}.$$

Al sustituir $t = 1$ de nuevo en las ecuaciones paramétricas originales, encontramos que el punto de tangencia es $(-5, -4)$. En consecuencia, una ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - (-4) = \frac{7}{2}(x - (-5)) \quad \text{o} \quad y = \frac{7}{2}x + \frac{27}{2}.$$

Con la ayuda de un SAC se obtiene la curva dada en la FIGURA 2.2.1.

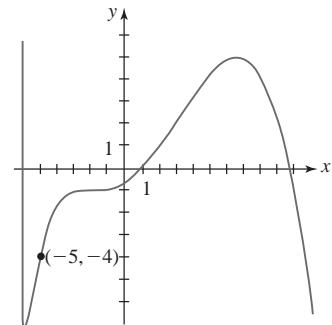


FIGURA 2.2.1 Curva del ejemplo 1

Tangentes horizontal y vertical En un punto (x, y) sobre una curva C en el cual $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$, la recta tangente es necesariamente **horizontal** debido a que $dy/dx = 0$ en ese punto. Por otro lado, en un punto en el cual $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$, la recta tangente es **vertical**. Cuando tanto dy/dt como dx/dt son cero en un punto, no se puede extraer una conclusión inmediata acerca de la recta tangente.

EJEMPLO 2 Gráfica de una curva paramétrica

Grafique la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$.

Solución Intersecciones con el eje x : $y = 0$ implica $t(t^2 - 3) = 0$ en $t = 0$, $t = -\sqrt{3}$ y $t = \sqrt{3}$.

Intersecciones con el eje y : $x = 0$ implica que $t^2 - 4 = 0$ en $t = -2$ y $t = 2$.

Tangentes horizontales: $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$; $\frac{dy}{dt} = 0$ implica que $3(t^2 - 1) = 0$ en $t = -1$ y $t = 1$.

Advierta que $dx/dt \neq 0$ en $t = -1$ y $t = 1$.

Tangentes verticales: $\frac{dx}{dt} = 2t$; $\frac{dx}{dt} = 0$ implica $2t = 0$ y $t = 0$. Advierta que $dy/dt \neq 0$ en $t = 0$.

Los puntos (x, y) sobre la curva correspondientes a estos valores del parámetro se resumen en la tabla siguiente:

t	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
x	0	-1	-3	-4	-3	-1	0
y	-2	0	2	0	-2	0	2

En la tabla observamos que: las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(-4, 0)$, las intersecciones con el eje y son $(0, -2)$ y $(0, 2)$, los puntos de tangencia horizontal son $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$, el punto de tangencia vertical es $(-4, 0)$. Una curva graficada a través de estos puntos, consistente con la orientación y la información de la tangente, se ilustra en la FIGURA 2.2.2.

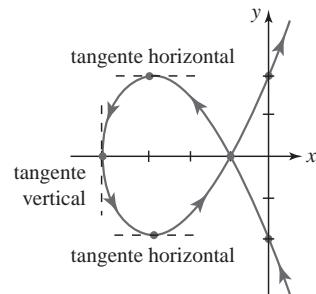


FIGURA 2.2.2 Curva del ejemplo 2

La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ puede tener sólo una recta tangente en un punto sobre su gráfica. En contraste, puesto que una curva C definida paramétricamente quizás no sea la gráfica de una función, es posible que una curva de este tipo pueda tener más de una recta tangente en un punto.

EJEMPLO 3 Dos rectas tangentes en un punto

En la tabla del ejemplo 2 se observó que para $t = -\sqrt{3}$ y $t = \sqrt{3}$ obtenemos un solo punto $(-1, 0)$. Como puede ver en la figura 2.2.2, esto quiere decir que la curva se interseca a sí misma en $(-1, 0)$. En este caso, de $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}$$

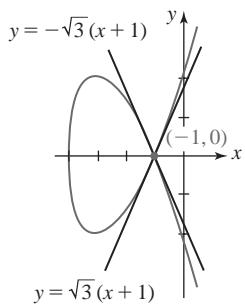


FIGURA 2.2.3 Rectas tangentes del ejemplo 3

$$y \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{t=-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \quad y \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Por consiguiente, concluimos que hay dos rectas tangentes en $(-1, 0)$:

$$y = -\sqrt{3}(x + 1) \quad y \quad y = \sqrt{3}(x + 1).$$

Vea la FIGURA 2.2.3. ■

■ **Derivadas de orden superior** Es posible encontrar derivadas de orden superior exactamente de la misma manera que dy/dx . Suponga que (1) se escribe como

$$\frac{d}{dx}() = \frac{d()/dt}{dx/dt}. \quad (2)$$

Si $y' = dy/dx$ es una función diferenciable de t , se deduce de (2) al sustituir $()$ por y' que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}y' = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \quad (3)$$

De manera similar, si $y'' = d^2y/dx^2$ es una función diferenciable de t , entonces la tercera derivada es

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}y'' = \frac{dy''/dt}{dx/dt}, \quad (4)$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 4 Tercera derivada

Determine d^3y/dx^3 para la curva dada por $x = 4t + 6$, $y = t^2 + t - 2$.

Solución Para calcular la tercera derivada, primero debemos determinar la primera y segunda derivadas. De (2) la primera derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t + 1}{4} = y'.$$

Después utilizando (3) y (4) obtenemos la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} = y''$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''/dt}{dx/dt} = \frac{0}{4} = 0. \quad ■$$

La inspección del ejemplo 4 muestra que la curva tiene una tangente horizontal en $t = -\frac{1}{2}$ o $(4, -\frac{9}{4})$. Además, puesto que $d^2y/dx^2 > 0$ para todo t , la gráfica de la curva es cóncava hacia arriba en cualquier punto. Verifique lo anterior graficando la curva.

■ **Longitud de una curva** Es posible determinar la longitud L de la gráfica de una función suave $y = f(x)$ mediante una integral definida. Ahora podemos generalizar el resultado dado en (3) de esa sección a curvas definidas paramétricamente.

■ **Construcción de una integral** Suponga que $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, son las ecuaciones paramétricas de una curva suave C que no se interseca a sí misma en $a < t < b$. Si P es una partición de $[a, b]$ dada por los números

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

entonces, como se muestra en la FIGURA 2.2.4, parece ser razonable que C pueda aproximarse mediante una trayectoria poligonal a través de los puntos $Q_k(f(t_k), g(t_k))$, $k = 0, 1, \dots, n$. Al denotar la longitud del segmento de recta a través de Q_{k-1} y Q_k mediante L_k escribimos la longitud aproximada de C como

$$\sum_{k=1}^n L_k, \quad (5)$$

donde

$$L_k = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}.$$

Ahora bien, puesto que f y g tienen derivadas continuas, el teorema del valor medio afirma que existen números u_k^* y v_k^* en el intervalo (t_{k-1}, t_k) tales que

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(u_k^*)(t_k - t_{k-1}) = f'(u_k^*)\Delta t_k \quad (6)$$

y

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(v_k^*)(t_k - t_{k-1}) = g'(v_k^*)\Delta t_k. \quad (7)$$

Al emplear (6) y (7) en (5) y simplificar obtenemos

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{[f'(u_k^*)]^2 + [g'(v_k^*)]^2} \Delta t_k. \quad (8)$$

Al tomar $\|P\| \rightarrow 0$ en (8), obtenemos una fórmula para la longitud de una curva suave. Advierta que el límite de la suma en (8) no es la definición usual de una integral definida, puesto que trabajamos con dos números (u_k^* y v_k^*) más que con uno en el intervalo (t_{k-1}, t_k) . No obstante, podemos hacer una demostración rigurosa de que la fórmula dada en el teorema siguiente resulta de (8) si tomamos $\|P\| \rightarrow 0$.

Teorema 2.2.2 Longitud de arco

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, define a una curva suave C que no se interseca a sí misma en $a < t < b$, entonces la longitud L de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (9)$$

Además, (9) también puede obtenerse utilizando (1). Si la curva definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, también puede representarse mediante una función explícita $y = F(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, entonces mediante el cambio de variables de integración y utilizando $f(a) = x_0$, $g(b) = x_1$, de (3) se obtiene

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)^2} g'(t) dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

EJEMPLO 5 Longitud de una curva

Determine la longitud de la curva dada por $x = 4t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 2$.

Solución: Puesto que $f'(t) = 4$ y $g'(t) = 2t$, (9) produce

$$L = \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2} dt = 2 \int_0^2 \sqrt{4 + t^2} dt.$$

Con la sustitución trigonométrica $t = 2 \tan \theta$, la última integral se vuelve

$$L = 8 \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta.$$

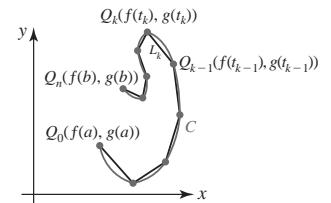


FIGURA 2.2.4 Aproximación de la longitud de C mediante la longitud de una trayectoria poligonal

La integración por partes conduce a

$$L = \left[4 \sec \theta \tan \theta + 4 \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right]_0^{\pi/4} = 4\sqrt{2} + 4 \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 9.1823.$$

■

2.2

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-6.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

1. $x = t^3 - t^2$, $y = t^2 + 5t$; $t = -1$
2. $x = 4/t$, $y = 2t^3 - t + 1$; $t = 2$
3. $x = \sqrt{t^2 + 1}$, $y = t^4$; $t = \sqrt{3}$
4. $x = e^{2t}$, $y = e^{-4t}$; $t = \ln 2$
5. $x = \cos^2 \theta$, $y = \sin \theta$; $\theta = \pi/6$
6. $x = 2\theta - 2 \sin \theta$, $y = 2 - 2 \cos \theta$; $\theta = \pi/4$

En los problemas 7 y 8, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

7. $x = t^3 + 3t$, $y = 6t^2 + 1$; $t = -1$
8. $x = 2t + 4$, $y = t^2 + \ln t$; $t = 1$

En los problemas 9 y 10, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

9. $x = t^2 + t$, $y = t^2$; (2, 4)
10. $x = t^4 - 9$, $y = t^4 - t^2$; (0, 6)

11. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva dada por $x = 4 \sen 2t$, $y = 2 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en el punto $(2\sqrt{3}, 1)$?

12. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 + 1$. ¿En qué punto sobre C está la recta tangente dada por $y + 3x - 5 = 0$?
13. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = 2t - 5$, $y = t^2 - 4t + 3$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C que es paralela a la recta $y = 3x + 1$.
14. Verifique que la curva dada por, $x = -2/\pi + \cos \theta$, $y = -2\theta/\pi + \sen \theta$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, se interseca a sí misma. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en el punto de intersección.

En los problemas 15-18, determine los puntos sobre la curva dada en los cuales la recta tangente es horizontal o vertical. Grafique la curva.

15. $x = t^3 - t$, $y = t^2$
16. $x = \frac{1}{8}t^3 + 1$, $y = t^2 - 2t$
17. $x = t - 1$, $y = t^3 - 3t^2$

18. $x = \sen t$, $y = \cos 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

En los problemas 19-22, encuentre dy/dx , d^2y/dx^2 y d^3y/dx^3 .

19. $x = 3t^2$, $y = 6t^3$
20. $x = \cos t$, $y = \sen t$
21. $x = e^{-t}$, $y = e^{2t} + e^{3t}$
22. $x = \frac{1}{2}t^2 + t$, $y = \frac{1}{2}t^2 - t$

23. Emplee d^2y/dx^2 para determinar los intervalos del parámetro para el cual la curva del problema 16 es cóncava hacia arriba y los intervalos para los cuales resulta cóncava hacia abajo.
24. Emplee d^2y/dx^2 para determinar si la curva dada por $x = 2t + 5$, $y = 2t^3 + 6t^2 + 4t$ tiene algún punto de inflexión.

En los problemas 25-30, encuentre la longitud de la curva dada.

25. $x = \frac{5}{3}t^3 + 2$, $y = 4t^3 + 6$; $0 \leq t \leq 2$
26. $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$; $0 \leq t \leq \sqrt{3}$
27. $x = e^t \sen t$, $y = e^t \cos t$; $0 \leq t \leq \pi$
28. Un arco de la cicloide:
 $x = a(\theta - \sen \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$
29. Un arco de la hipocicloide de cuatro cúspides:
 $x = b \cos^3 \theta$, $y = b \sen^3 \theta$; $0 \leq \theta \leq \pi/2$

30. Un arco de la epicicloide de tres cúspides:
 $x = 4a \cos \theta - a \cos 4\theta$, $y = 4a \sen \theta - a \sen 4\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/3$

☰ Problemas con calculadora/SAC

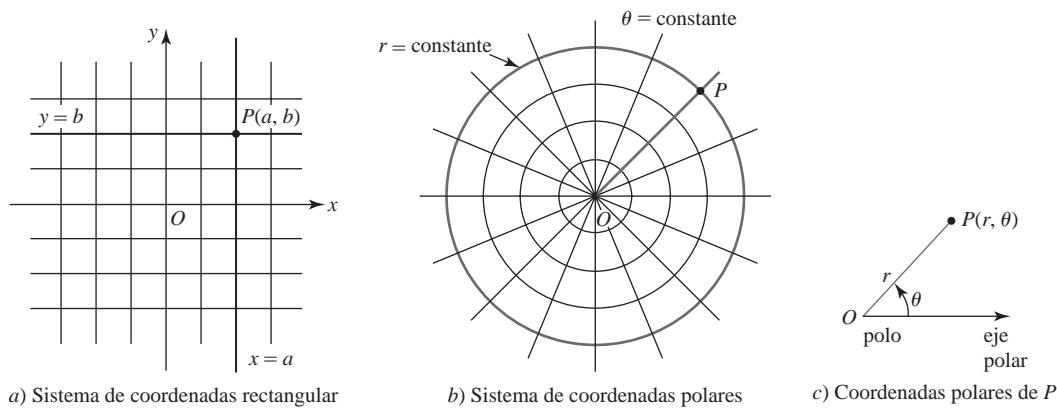
31. Considere la curva $x = t^2 - 4t - 2$, $y = t^5 - 4t^3 - 1$ en el ejemplo 1.
 - a) Emplee una calculadora para determinar una aproximación de la coordenada y de la intersección con el eje y que se muestra en la figura 2.2.1.
 - b) Emplee el método de Newton para aproximar las coordenadas x de las tres intersecciones con el eje x que se ilustran en la figura 2.2.1.

☰ Piense en ello

32. Sea C una curva descrita por $y = f(x)$, donde F es una función no negativa continua sobre $x_1 \leq x \leq x_2$. Demuestre que si C está dada paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, f' y g continuas, entonces el área bajo la gráfica de C es $\int_a^b g(t)f'(t)dt$.
33. Recurra al problema 32 para demostrar que el área bajo un arco de la cicloide en la figura 2.1.6b) es tres veces el área del círculo.

2.3 Sistema de coordenadas polares

Introducción Hasta ahora hemos utilizado el **sistema de coordenadas rectangular o cartesiano** para especificar un punto P o describir una curva C en el plano. Podemos considerar este sistema como una retícula de líneas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P están determinadas por la intersección de dos rectas: una recta $x = a$ es perpendicular a la recta de referencia horizontal llamada el eje x , y la otra $y = b$ es perpendicular a la recta de referencia vertical llamada el eje y . Vea la FIGURA 2.3.1a). Otro sistema para localizar puntos en el plano es el **sistema de coordenadas polares**.



a) Sistema de coordenadas rectangulares b) Sistema de coordenadas polares c) Coordenadas polares de P

FIGURA 2.3.1 Comparación de coordenadas rectangulares y polares de un punto P

Coordenadas polares Para establecer un **sistema de coordenadas polares** empleamos un sistema de círculos centrados en un punto O , denominado **polo**, y líneas rectas o rayos que emanan de O . Tomamos como eje de referencia una media línea horizontal dirigida hacia la derecha del polo, a la cual se le nombra **eje polar**. Para especificar una distancia r dirigida (con signo) desde O y un ángulo θ cuyo lado inicial es el eje polar y cuyo lado final es el rayo OP , se identifica el punto P mediante (r, θ) . Se dice que el par ordenado (r, θ) son las **coordenadas polares** de P . Vea las figuras 2.3.1b) y 2.3.1c).

Si bien la medida del ángulo θ puede ser en grados o radianes, en cálculo se usa casi exclusivamente la medida de radianes. En consecuencia, aquí se usará sólo esta última.

En el sistema de coordenadas polares se adoptan las siguientes convenciones.

Definición 2.3.1 Convenciones en coordenadas polares

- Los ángulos $\theta > 0$ se miden en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje polar, en tanto que los ángulos $\theta < 0$ se miden en el sentido de las manecillas del reloj.
- Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.
- Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

EJEMPLO 1 Graficación de puntos polares

Grafique los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

a) $(4, \pi/6)$ b) $(2, -\pi/4)$ c) $(-3, 3\pi/4)$

Solución

- Mida 4 unidades a lo largo del rayo $\pi/6$ como se muestra en la FIGURA 2.3.2a).
- Mida 2 unidades a lo largo del rayo $-\pi/4$. Vea la figura 2.3.2b).
- Mida 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. De manera equivalente, pueden medirse tres unidades a lo largo del rayo $3\pi/4$ extendidas *hacia atrás* a través del polo. Advierta con cuidado en la figura 2.3.2c) que el punto $(-3, 3\pi/4)$ no está en el mismo cuadrante que el lado final del ángulo dado.

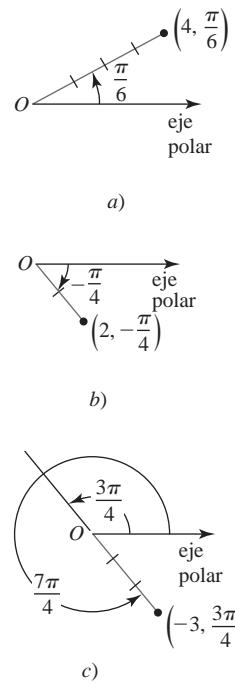


FIGURA 2.3.2 Punto en coordenadas polares del ejemplo 1

En contraste con un sistema de coordenadas rectangulares, la descripción de un punto en coordenadas polares no es única. Lo anterior es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$(r, \theta) \quad \text{y} \quad (r, \theta + 2n\pi), \quad n \text{ un entero},$$

son equivalentes. Para complicar más el problema pueden utilizarse valores negativos de r .

EJEMPLO 2 Puntos polares equivalentes

Las siguientes coordenadas son algunas representaciones alternas del punto $(2, \pi/6)$:

$$(2, 13\pi/6), \quad (2, -11\pi/6), \quad (-2, 7\pi/6), \quad (-2, -5\pi/6).$$

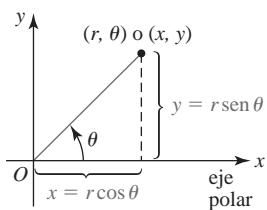


FIGURA 2.3.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Conversión de coordenadas polares en rectangulares Al sobreponer un sistema de coordenadas rectangulares sobre un sistema de coordenadas polares, como se muestra en la FIGURA 2.3.3, podemos convertir la descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares utilizando

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1)$$

Estas fórmulas de conversión son válidas para cualesquiera valores de r y θ en una representación polar equivalente de (r, θ) .

EJEMPLO 3 Polar a rectangular

Convierta las coordenadas polares $(2, \pi/6)$ en coordenadas rectangulares.

Solución Con $r = 2$, $\theta = \pi/6$, tenemos de (1)

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3} \\ y &= 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

De tal modo, $(2, \pi/6)$ es equivalente a $(\sqrt{3}, 1)$ en coordenadas rectangulares.

Conversión de coordenadas rectangulares en polares Debe ser evidente de la figura 2.3.3 que x , y , r y θ también están relacionadas por medio de

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

Las ecuaciones en (2) se usan para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) en coordenadas polares (r, θ) .

EJEMPLO 4 Rectangular a polar

Convierta las coordenadas rectangulares $(-1, 1)$ en coordenadas polares.

Solución Con $x = -1$, $y = 1$, tenemos de (2)

$$r^2 = 2 \quad \text{y} \quad \tan \theta = -1.$$

Ahora, $r^2 = 2$ o $r = \pm\sqrt{2}$, y dos de los muchos ángulos que satisfacen $\tan \theta = -1$ son $3\pi/4$ y $7\pi/4$. En la FIGURA 2.3.4 advertimos que dos representaciones polares de $(-1, 1)$ son

$$(\sqrt{2}, 3\pi/4) \quad \text{y} \quad (-\sqrt{2}, 7\pi/4).$$

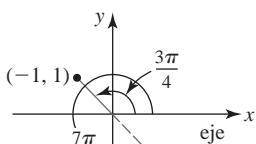


FIGURA 2.3.4 Punto en el ejemplo 4

En el ejemplo 4, advierta que no es posible sólo aparear *cualquier* ángulo θ y *cualquier* valor r que satisfaga (2); estas soluciones también deben ser consistentes con (1). Como los puntos $(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$ y $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$ yacen en el cuarto cuadrante, no son representaciones polares del punto $(-1, 1)$ del segundo cuadrante.

Hay casos en el cálculo en que una ecuación rectangular debe expresarse como una ecuación polar $r = f(\theta)$. El siguiente ejemplo ilustra cómo hacerlo utilizando las fórmulas de conversión en (1).

EJEMPLO 5 Ecuación rectangular en ecuación polar

Encuentre la ecuación polar que tiene la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$.

Solución Al sustituir $x = r \cos \theta$, $y = r \sen \theta$ en la ecuación dada encontramos que

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sen^2 \theta &= 8r \cos \theta \\ r^2(\cos^2 \theta + \sen^2 \theta) &= 8r \cos \theta \quad \leftarrow \cos^2 \theta + \sen^2 \theta = 1 \\ r(r - 8 \cos \theta) &= 0. \end{aligned}$$

La última ecuación implica que $r = 0$ o $r = 8 \cos \theta$. Puesto que $r = 0$ determina sólo el polo O , concluimos que la ecuación polar del círculo es $r = 8 \cos \theta$. Advierta que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ pasa por el origen puesto que $x = 0$ y $y = 0$ satisfacen la ecuación. En cuanto a la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$ del círculo, el origen o polo corresponde a las coordenadas polares $(0, \pi/2)$. ■

EJEMPLO 6 Ecuación rectangular en ecuación polar

Encuentre la ecuación polar que tiene la misma gráfica que la parábola $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución Se sustituyen x y y en la ecuación indicada por $x = r \cos \theta$, $y = r \sen \theta$ y se resuelve para r en términos de θ :

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \theta &= 8(2 - r \sen \theta) \\ r^2(1 - \sen^2 \theta) &= 16 - 8r \sen \theta \\ r^2 = r^2 \sen^2 \theta - 8r \sen \theta + 16 &\quad \leftarrow \text{el lado derecho es un cuadrado perfecto} \\ r^2 = (r \sen \theta - 4)^2 & \\ r = \pm(r \sen \theta - 4). & \end{aligned}$$

Al resolver para r se producen dos ecuaciones,

$$r = \frac{4}{1 + \sen \theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{-4}{1 - \sen \theta}.$$

Se recuerda al lector que, por la convención *ii*) de la definición 2.3.1, (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan este mismo punto. El lector debe verificar que si (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta + \pi)$ en la segunda de estas dos ecuaciones obtendrá la primera ecuación. En otras palabras, las ecuaciones son equivalentes y por ello simplemente es posible considerar la ecuación polar de la parábola como $r = 4/(1 + \sen \theta)$. ■

En el último ejemplo expresamos una ecuación polar $r = f(\theta)$ como una ecuación rectangular utilizando (1) y (2).

EJEMPLO 7 Ecuación polar en ecuación rectangular

Encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r^2 = 9 \cos 2\theta$.

Solución Primero, empleamos la identidad trigonométrica para el coseno de un ángulo doble:

$$r^2 = 9(\cos^2 \theta - \sen^2 \theta). \quad \leftarrow \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sen^2 \theta \quad (3)$$

Ahora de (1) escribimos $\cos \theta = x/r$ y $\sen \theta = y/r$, y de (2) tenemos $r^2 = x^2 + y^2$. Por tanto,

$$\cos^2 \theta = \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \sen^2 \theta = \frac{y^2}{r^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Al sustituir r^2 , $\cos^2 \theta$ y $\sen^2 \theta$ en (3) se produce

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{o} \quad (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$

La siguiente sección se dedicará a graficar ecuaciones polares.

2.3**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-6.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique el punto con las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$ 2. $(2, -\pi/2)$ 3. $(-\frac{1}{2}, \pi/2)$
 4. $(-1, \pi/6)$ 5. $(-4, -\pi/6)$ 6. $(\frac{2}{3}, 7\pi/4)$

En los problemas 7 a 12, encuentre coordenadas polares alternativas que satisfagan

- a) $r > 0, \theta < 0$ b) $r > 0, \theta > 2\pi$
 c) $r < 0, \theta > 0$ d) $r < 0, \theta < 0$

para cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$ 8. $(5, \pi/2)$ 9. $(4, \pi/3)$
 10. $(3, \pi/4)$ 11. $(1, \pi/6)$ 12. $(3, 7\pi/6)$

En los problemas 13-18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto con las coordenadas polares indicadas.

13. $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$ 14. $(-1, 7\pi/4)$ 15. $(-6, -\pi/3)$
 16. $(\sqrt{2}, 11\pi/6)$ 17. $(4, 5\pi/4)$ 18. $(-5, \pi/2)$

En los problemas 19-24, determine las coordenadas polares que satisfagan

- a) $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ b) $r < 0, -\pi < \theta \leq \pi$

para cada punto con las coordenadas rectangulares indicadas.

19. $(-2, -2)$ 20. $(0, -4)$ 21. $(1, -\sqrt{3})$
 22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ 23. $(7, 0)$ 24. $(1, 2)$

En los problemas 25-30, dibuje la región sobre el plano que consiste en los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones indicadas.

25. $2 \leq r < 4, 0 \leq \theta \leq \pi$
 26. $2 < r \leq 4$
 27. $0 \leq r \leq 2, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$
 28. $r \geq 0, \pi/4 < \theta < 3\pi/4$

29. $-1 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$

30. $-2 \leq r < 4, \pi/3 \leq \theta \leq \pi$

En los problemas 31-40, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

31. $y = 5$ 32. $x + 1 = 0$
 33. $y = 7x$ 34. $3x + 8y + 6 = 0$
 35. $y^2 = -4x + 4$ 36. $x^2 - 12y - 36 = 0$
 37. $x^2 + y^2 = 36$ 38. $x^2 - y^2 = 1$
 39. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ 40. $x^3 + y^3 - xy = 0$

En los problemas 41-52, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

41. $r = 2 \sec \theta$ 42. $r \cos \theta = -4$
 43. $r = 6 \sen 2\theta$ 44. $2r = \tan \theta$
 45. $r^2 = 4 \sen 2\theta$ 46. $r^2 \cos 2\theta = 16$
 47. $r + 5 \sen \theta = 0$ 48. $r = 2 + \cos \theta$
 49. $r = \frac{2}{1 + 3 \cos \theta}$ 50. $r(4 - \sen \theta) = 10$
 51. $r = \frac{5}{3 \cos \theta + 8 \sen \theta}$ 52. $r = 3 + 3 \sec \theta$

☰ Piense en ello

53. ¿Cómo expresaría la distancia d entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en términos de sus coordenadas polares?
 54. Usted sabe cómo encontrar la ecuación rectangular de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas rectangulares. ¿Cómo encontraría una ecuación polar de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) ? Aplique sus ideas encontrando una ecuación polar de la recta que pasa por $(3, 3\pi/4)$ y $(1, \pi/4)$. Determine las coordenadas polares de las intersecciones de la recta con los ejes x y y .
 55. En coordenadas rectangulares las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función $y = f(x)$ se determinan a partir de las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. En la siguiente sección se graficarán las ecuaciones polares $r = f(\theta)$. ¿Cuál es la importancia de las soluciones de la ecuación $f(\theta) = 0$?

2.4 Gráficas de ecuaciones polares

I Introducción La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con *al menos* un conjunto de coordenadas polares que satisfacen la ecuación. Puesto que lo más probable es que su salón de clases no tenga una rejilla de coordenadas polares, para facilitar la graficación y discusión de gráficas de una ecuación polar $r = f(\theta)$, se sobrepondrá, como en la sección anterior, un sistema de coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares.

Se iniciará con algunas gráficas polares simples.

EJEMPLO 1 Un círculo centrado en el origen

Grafique $r = 3$.

Solución Puesto que θ no se especifica, el punto $(3, \theta)$ yace sobre la gráfica de $r = 3$ para cualquier valor de θ y se encuentra a 3 unidades del origen. Observamos en la FIGURA 2.4.1 que la gráfica es el círculo de radio 3 centrado en el origen.

Además, sabemos de (2) de la sección 2.3 que $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que $r = 3$ produce la familiar ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 3^2$ de un círculo de radio 3 centrado en el origen. ■

Círculos centrados en el origen En general, si a es cualquier constante distinta de cero, la gráfica polar de

$$r = a \quad (1)$$

es un círculo de radio $|a|$ con radio en el origen.

EJEMPLO 2 Una recta que pasa por el origen

Grafique $\theta = \pi/4$.

Solución Puesto que r no se especifica, el punto $(r, \pi/4)$ yace sobre la gráfica para cualquier valor de r . Si $r > 0$, entonces este punto se encuentra sobre la media recta en el primer cuadrante; si $r < 0$, entonces el punto está sobre la media recta en el tercer cuadrante. Para $r = 0$, el punto $(0, \pi/4)$ es el polo u origen. Por tanto, la gráfica polar de $\theta = \pi/4$ es la recta completa que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje polar o eje x positivo. Vea la FIGURA 2.4.2. ■

Rectas que pasan por el origen En general, si α es cualquier constante real distinta de cero, la gráfica polar de

$$\theta = \alpha \quad (2)$$

es una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar.

EJEMPLO 3 Una espiral

Grafique $r = \theta$.

Solución Cuando $\theta \geq 0$, r aumenta y los puntos (r, θ) se enrollan alrededor del polo de una manera opuesta al giro de las manecillas del reloj. Esto se ilustra en la FIGURA 2.4.3 al graficar para $\theta < 0$.

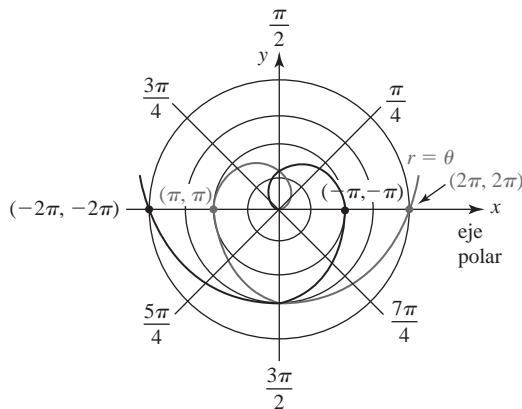


FIGURA 2.4.3 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3 ■

Espirales Muchas gráficas en coordenadas polares reciben nombres especiales. La gráfica en el ejemplo 3 es un caso especial de

$$r = a\theta, \quad (3)$$

donde a es una constante. Una gráfica de esta ecuación se denomina **espiral de Arquímedes**. Una ecuación polar de la forma

$$r = ae^{b\theta} \quad (4)$$

recibe el nombre de **espiral logarítmica**. La curva que describe el caparazón de cámaras múltiples de un nautilo es un ejemplo de una espiral logarítmica. Vea los problemas 31 y 32 en los ejercicios 2.4.

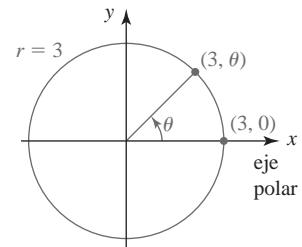


FIGURA 2.4.1 Círculo del ejemplo 1

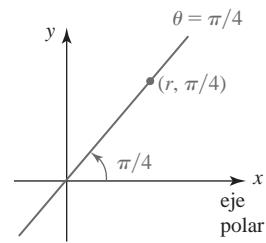


FIGURA 2.4.2 Recta en el ejemplo 2



Mitad del caparazón de cámaras múltiples de un nautilo



Simetrías de un copo de nieve

Además del trazado de puntos básico, muchas veces puede recurrirse a la simetría para graficar una ecuación polar.

■ Simetría Como se ilustra en la FIGURA 2.4.4, una gráfica polar puede tener tres tipos de simetría. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje y** si siempre que (r, θ) es un punto sobre

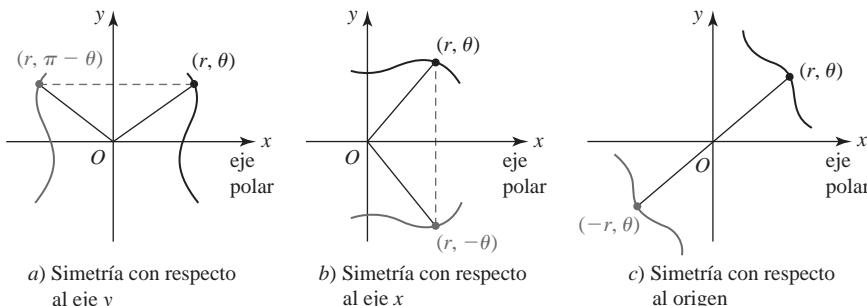


FIGURA 2.4.4 Simetrías de una gráfica polar

la gráfica, $(r, \pi - \theta)$ es también un punto sobre la gráfica. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje x** si siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, -\theta)$ también es un punto sobre la gráfica. Por último, una gráfica polar es **simétrica con respecto al origen** si siempre que (r, θ) está sobre la gráfica, $(-r, \theta)$ también es un punto sobre la gráfica.

Se tienen las siguientes pruebas de simetría de una gráfica polar.

Pruebas de simetría de la gráfica de una ecuación polar

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto:

- al **eje y** si al sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ resulta la misma ecuación; (5)

- al **eje x** si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ resulta la misma ecuación; (6)

- al **origen** si al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ resulta la misma ecuación. (7)

En coordenadas rectangulares la descripción de un punto es única. Por consiguiente, en coordenadas rectangulares si falla un tipo particular de simetría, entonces es posible decir de manera definitiva que la gráfica no posee esa simetría.

Como la descripción polar de un punto no es única, la gráfica de una ecuación polar aún debe tener un tipo particular de simetría, incluso cuando es posible que falle la prueba para la misma. Por ejemplo, si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ no se produce la ecuación polar original, la gráfica de esa ecuación debe seguir teniendo simetría con respecto al eje x. Por tanto, si una de las pruebas de reemplazo en (5)-(7) no produce la misma ecuación polar, lo mejor que podemos afirmar es “no hay conclusión”.

EJEMPLO 4 Graficación de una ecuación polar

Grafique $r = 1 - \cos \theta$.

Solución Una manera de graficar esta ecuación es incorporar unos cuantos puntos bien escogidos correspondientes a $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como lo indica la siguiente tabla,

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	0.29	1	1.71	2	1.71	1	0.29	0

cuando θ avanza de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$, r aumenta desde $r = 0$ (el origen) hasta $r = 1$. Vea la FIGURA 2.4.5a). Cuando θ avanza de $\theta = \pi/2$ a $\theta = \pi$, r continúa aumentando desde $r = 1$ hasta su

valor máximo de $r = 2$. Vea la figura 2.4.5b). Luego, para $\theta = \pi$ a $\theta = 3\pi/2$, r empieza a disminuir de $r = 2$ hasta $r = 1$. Para $\theta = 3\pi/2$ a $\theta = 2\pi$, r continúa disminuyendo y se termina de nuevo en el origen $r = 0$. Vea la figura 2.4.5c) y d).

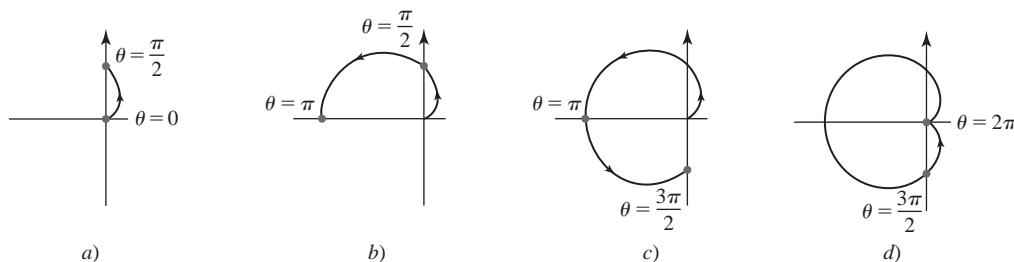


FIGURA 2.4.5 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Aprovechando la simetría podríamos haber graficado simplemente puntos para $0 \leq \theta \leq \pi$. A partir de la identidad trigonométrica para la función coseno $\cos(-\theta) = \cos \theta$ concluimos de (6) que la gráfica de $r = 1 - \cos \theta$ es simétrica con respecto al eje x . Podemos obtener la gráfica completa de $r = 1 - \cos \theta$ reflejando en el eje x la parte de la gráfica dada en la figura 2.4.5b).

■ Cardioides La ecuación polar en el ejemplo 4 es un miembro de la familia de ecuaciones que en su totalidad tienen una gráfica “en forma de corazón” que pasa por el origen. Una gráfica de cualquier ecuación polar en la forma

$$r = a \pm a \operatorname{sen} \theta \quad \text{o} \quad r = a \pm a \cos \theta \quad (8)$$

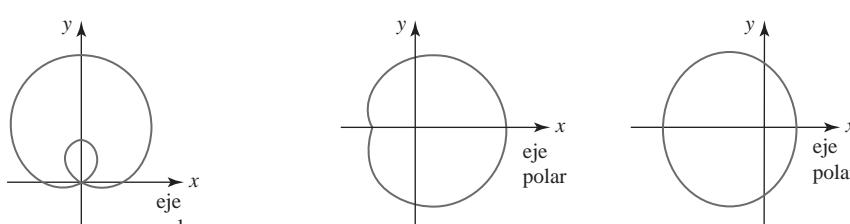
recibe el nombre de **cardioide**. La única diferencia en la gráfica de estas cuatro ecuaciones es su simetría con respecto al eje y ($r = a \pm a \operatorname{sen} \theta$) o con respecto al eje x ($r = a \pm a \cos \theta$). En la **FIGURA 2.4.6** supusimos que $a > 0$.

Si conocemos la forma y orientación básica de una cardioide, obtenemos una gráfica rápida y precisa al graficar los cuatro puntos correspondientes a $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$. Las gráficas de $r = a \pm a \operatorname{sen} \theta$ son simétricas con respecto al eje y y las gráficas de $r = a \pm a \cos \theta$ son simétricas con respecto al eje x .

■ Limacones Las cardioides son casos especiales de curvas polares conocidas como **limacones**:

$$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta \quad \text{o} \quad r = a \pm b \cos \theta. \quad (9)$$

La forma de una limaçon depende de las magnitudes de a y b . Supondremos que $a > 0$ y $b > 0$. Para $0 < a/b < 1$, obtenemos una **limaçon con un lazo interior** como se ilustra en la **FIGURA 2.4.7a**. Cuando $a = b$ o equivalentemente $a/b = 1$ obtenemos una **cardioide**. Para $1 < a/b < 2$, encontramos una **limaçon con un orificio** como se muestra en la figura 2.4.7b). Para $a/b \geq 2$, la curva se llama **limaçon convexa**. Vea la figura 2.4.7c).

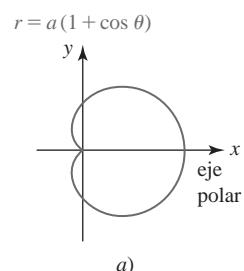


a) limaçon con un lazo interior

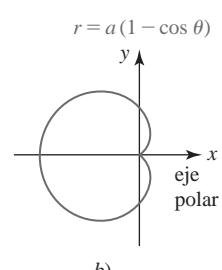
b) limaçon con un orificio

c) limaçon convexa

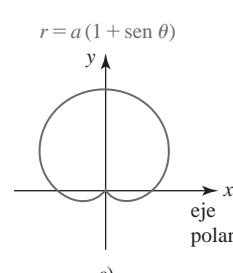
FIGURA 2.4.7 Tres tipos de limaçones: para $0 < a/b < 1$ obtenemos a); para $1 < a/b < 2$ obtenemos b); para $a/b \geq 2$ obtenemos c)



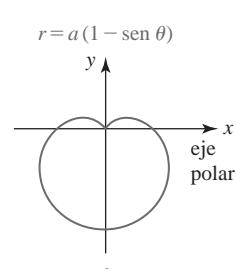
a)



b)



c)



d)

FIGURA 2.4.6 Cardioides

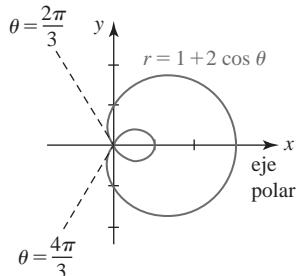


FIGURA 2.4.8 Gráfica de la ecuación del ejemplo 6

EJEMPLO 5 Una limacón

La gráfica de $r = 3 - \sin \theta$ es una limacón convexa, puesto que $a = 3$, $b = 1$ y $a/b = 3 > 2$. La gráfica de esta ecuación es similar a la de la figura 2.4.7c) excepto en que la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

EJEMPLO 6 Una limacón

La gráfica de $r = 1 + 2 \cos \theta$ es una limacón con un lazo interior, ya que $a = 1$, $b = 2$ y $a/b = \frac{1}{2} < 1$. Para $\theta \geq 0$, note en la FIGURA 2.4.8 que la limacón empieza en $\theta = 0$ o $(3, 0)$. La gráfica pasa por el eje y en $(1, \pi/2)$ y luego entra al origen ($r = 0$) en el primer ángulo para el cual $r = 0$ o $1 + 2 \cos \theta = 0$ o $\cos \theta = -\frac{1}{2}$. Esto implica que $\theta = 2\pi/3$. En $\theta = \pi$, la curva pasa por $(-1, \pi)$. El resto de la gráfica puede completarse entonces utilizando el hecho de que es simétrica con respecto al eje x.

Tangentes a la gráfica en el origen En el ejemplo 6, las rectas $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = 4\pi/3$ que se muestran en la figura 2.4.8, donde la gráfica de $r = 1 + 2 \cos \theta$ entra y sale, respectivamente, del origen, son en realidad tangentes a la gráfica en el origen. En general, si $r = 0$ para $\theta = \theta_0$ y $dr/d\theta \neq 0$ cuando $\theta = \theta_0$, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es tangente a la recta $\theta = \theta_0$ en el origen. Se demostrará lo anterior en la siguiente sección.

EJEMPLO 7 La curva de la rosa

Grafique $r = 2 \cos 2\theta$.

Solución Como

$$\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta \quad \text{y} \quad \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

concluimos por (5) y (6) de las pruebas de simetría que la gráfica es simétrica con respecto tanto al eje x como al eje y. Un momento de reflexión convencerá al lector de que sólo se necesita considerar $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Al emplear los datos de la siguiente tabla, vemos que la porción punteada de la gráfica indicada en la FIGURA 2.4.9 es la que se completó por simetría. La gráfica recibe el nombre de **curva de la rosa de cuatro pétalos**.

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	$\sqrt{3}$	1	0	-1	$-\sqrt{3}$	-2

Advierta de la tabla que $r = 0$ y $dr/d\theta = -4 \sin 2\theta \neq 0$ para $\theta = \pi/4$. Por consiguiente, la gráfica es tangente a la recta $\theta = \pi/4$ en el origen.

Curvas de las rosas En general, si n es un entero positivo, entonces las gráficas de

$$r = a \sen n\theta \quad \text{o} \quad r = a \cos n\theta, \quad n \geq 2 \quad (10)$$

se denominan **curvas de las rosas**, aunque, como puede verse en la FIGURA 2.4.10, la curva se asemeja más a una margarita. Se advierte que el número de **pétalos** o **lazos** de la curva es:

- n cuando n es impar, y
- $2n$ cuando n es par.

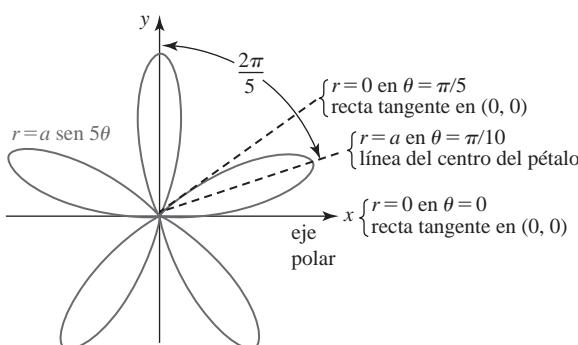


FIGURA 2.4.10 Curva de la rosa con cinco pétalos

Para graficar una curva de la rosa es posible iniciar graficando un pétalo. En un principio, encontramos un ángulo θ para el cual r es un máximo. Esto proporciona la *recta del centro* del pétalo. Después determinamos los valores correspondientes de θ para los cuales la curva de la rosa entra al origen ($r = 0$). Para completar la gráfica aprovechamos el hecho de que las rectas del centro de los pétalos están espaciadas $2\pi/n$ radianes ($360/n$ grados) si n es impar, y $2\pi/2n = \pi/n$ radianes ($180/n$ grados) si n es par. En la figura 2.4.10 dibujamos la gráfica de $r = a \sen 5\theta$, $a > 0$. La recta del centro del pétalo en el primer cuadrante se determina a partir de la solución de

$$a = a \sen 5\theta \quad \text{o} \quad 1 = \sen 5\theta.$$

La última ecuación implica que $5\theta = \pi/2$ o $\theta = \pi/10$. El espaciamiento entre las rectas del centro y los cinco pétalos es $2\pi/5$ radianes (72°). Además, $r = 0$, o $\sen 5\theta = 0$, para $5\theta = 0$ y $5\theta = \pi$. Puesto que $dr/d\theta = 5a \cos 5\theta \neq 0$ para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/5$, la gráfica del pétalo en el primer cuadrante es tangente a aquellas rectas en el origen.

En el ejemplo 5 de la sección 2.3 observamos que la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$ es equivalente a la ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 8x$. Completando el cuadrado en x en la ecuación rectangular, reconocemos que

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

como un círculo de radio 4 centrado en $(4, 0)$ sobre el eje x . Ecuaciones polares tales como $r = 8 \cos \theta$ o $r = 8 \sen \theta$ son círculos y constituyen también casos especiales de curvas de las rosas. Vea la FIGURA 2.4.11.

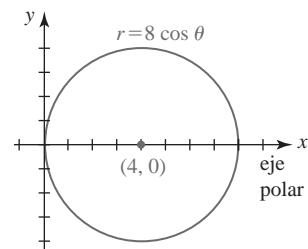


FIGURA 2.4.11 Gráfica de la ecuación $r = 8 \cos \theta$

Círculos con centros sobre un eje Cuando $n = 1$ en (10) obtenemos

$$r = a \sen \theta \quad \text{o} \quad r = a \cos \theta, \quad (11)$$

las cuales son ecuaciones polares de círculos que pasan por el origen con diámetro $|a|$ y con centros $(a/2, 0)$ sobre el eje x ($r = a \cos \theta$), o con centro $(0, a/2)$, sobre el eje y ($r = a \sen \theta$). La FIGURA 2.4.12 ilustra las gráficas de las ecuaciones en (11) en los casos en los que $a > 0$ y $a < 0$.

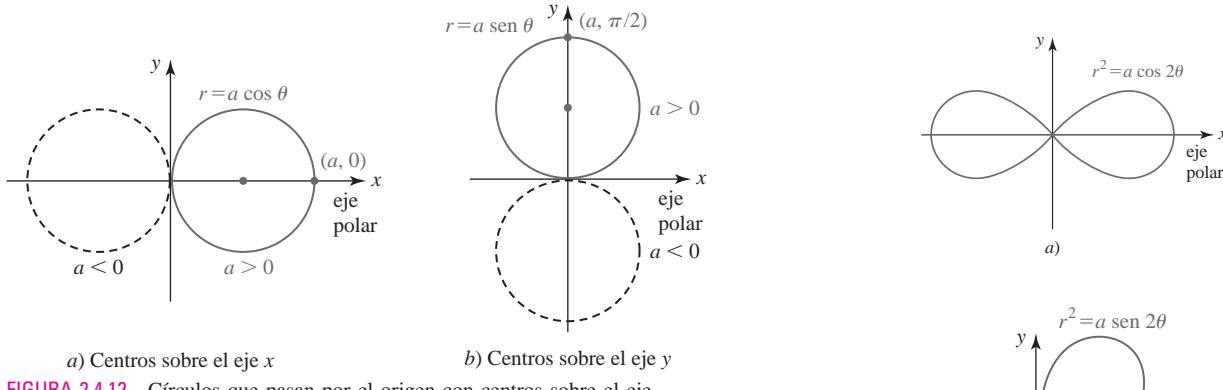


FIGURA 2.4.12 Círculos que pasan por el origen con centros sobre el eje

Lemniscatas Si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r^2 = a \cos 2\theta \quad \text{o} \quad r^2 = a \sen 2\theta, \quad (12)$$

donde $a > 0$, se llaman **lemniscatas**. Por (7) de las pruebas de simetría puede advertir que las gráficas de ambas ecuaciones en (12) son simétricas respecto al origen. Además, por (6) de las pruebas de simetría, la gráfica $r^2 = a \cos 2\theta$ es simétrica respecto al eje x . La FIGURA 2.4.13 muestra gráficas típicas de las ecuaciones $r^2 = a \cos 2\theta$ y $r^2 = a \sen 2\theta$, respectivamente.

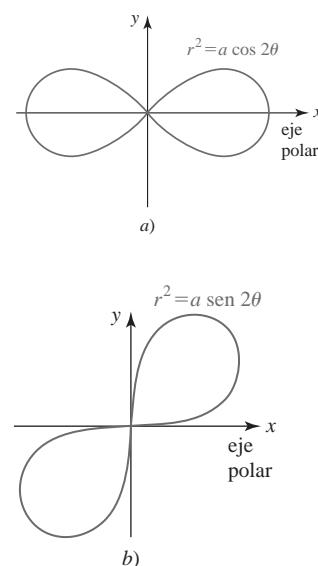


FIGURA 2.4.13 Lemniscatas

Puntos de intersección En coordenadas rectangulares es posible encontrar los puntos (x, y) donde las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se intersecan al igualar los valores y . Las soluciones reales de la ecuación $f(x) = g(x)$ corresponden a *todas* las coordenadas x de los puntos donde las gráficas se intersecan. En contraste, pueden surgir problemas en coordenadas polares cuando se intenta el mismo método para determinar dónde se intersecan las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$.

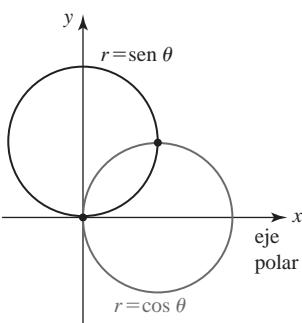


FIGURA 2.4.14 Círculos que se intersecan del ejemplo 8

Vea las identidades en (18) de la sección 1.4.

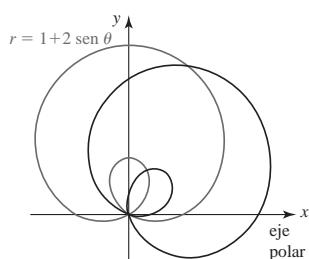


FIGURA 2.4.15 Gráficas de las ecuaciones polares del ejemplo 9

EJEMPLO 8 Círculos que se intersecan

En la **FIGURA 2.4.14** vemos que los círculos $r = \operatorname{sen} \theta$ y $r = \cos \theta$ tienen dos puntos de intersección. Al igualar los valores r , la ecuación $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$ lleva a $\theta = \pi/4$. Al sustituir este valor en cualquier ecuación obtenemos $r = \sqrt{2}/2$. De tal modo, se ha encontrado sólo un punto polar individual $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ donde se intersecan las gráficas. En la figura es manifiesto que las gráficas también se intersecan en el origen. Pero el problema aquí es que el origen o polo es $(0, \pi/2)$ sobre la gráfica de $r = \cos \theta$, aunque es $(0, 0)$ sobre la gráfica de $r = \operatorname{sen} \theta$. Esta situación es análoga a las curvas que alcanzan el mismo punto en diferentes tiempos. ■

■ **Rotación de gráficas polares** Se sabe que si $y = f(x)$ es la ecuación rectangular de una función, entonces las gráficas de $y = f(x - c)$ y $y = f(x + c)$, $c > 0$, se obtienen *desplazando* la gráfica f horizontalmente c unidades a la derecha y luego a la izquierda, respectivamente. En contraste, si $r = f(\theta)$ es una ecuación polar, entonces las gráficas de $f(\theta - \gamma)$ y $f(\theta + \gamma)$, donde $\gamma > 0$, pueden obtenerse *rotando* la gráfica de f en una cantidad γ . Específicamente:

- La gráfica de $r = f(\theta - \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor del origen en una cantidad γ .
- La gráfica de $r = f(\theta + \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en *dirección de las manecillas del reloj* alrededor del origen en una cantidad γ .

Por ejemplo, la gráfica de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ se muestra en la figura 2.4.6a). La gráfica de $r = a(1 + \cos(\theta - \pi/2))$ es la gráfica de $r = a(1 + \cos \theta)$ rotada en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $\pi/2$. Su gráfica debe ser entonces la que se indica en la figura 2.4.6c). Esto tiene sentido, porque la fórmula de la suma de los cosenos produce

$$\blacktriangleright \quad r = a[1 + \cos(\theta - \pi/2)] = a[1 + \cos \theta \cos(\pi/2) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(\pi/2)] = a(1 + \operatorname{sen} \theta).$$

De manera similar, al rotar $r = a(1 + \cos \theta)$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad π se produce

$$r = a[1 + \cos(\theta - \pi)] = a[1 + \cos \theta \cos \pi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \pi] = a(1 - \cos \theta).$$

Ahora observe de nuevo la figura 2.4.13. De

$$r^2 = a \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a \operatorname{sen} 2\theta$$

se ve que la gráfica de la lemniscata en la figura 2.4.13b) es la gráfica de la figura 2.4.13a) rotada en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad igual a $\pi/4$.

EJEMPLO 9 Gráfica polar rotada

Grafique $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$.

Solución La gráfica de la ecuación dada es la gráfica de la limacón $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ rotada en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad igual a $\pi/4$. En la **FIGURA 2.4.15** se muestra la gráfica de $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ y la gráfica rotada. ■



NOTAS DESDE EL AULA

- i) La curva de la rosa de cuatro pétalos del ejemplo 7 se obtiene graficando r para valores de θ que satisfacen $0 \leq \theta < 2\pi$. Vea la **FIGURA 2.4.16**. No suponga que esto es cierto para toda curva de la rosa. De hecho, la curva de la rosa de cinco pétalos analizada en la figura 2.4.10 se obtiene mediante valores de θ que satisfacen $0 \leq \theta < \pi$. En general, una curva de la rosa $r = a \operatorname{sen} n\theta$ o $r = a \cos n\theta$ se traza exactamente una vez para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ si n es par y una vez para $0 \leq \theta < \pi$ si n es impar. Observaciones como la anterior serán importantes en la siguiente sección.
- ii) El ejemplo 8 ilustra una de varias dificultades frustrantes al trabajar con coordenadas polares:

Un punto puede estar sobre la gráfica de una ecuación polar aun cuando sus coordenadas no satisfagan la ecuación.

Esto es algo que no puede ocurrir en coordenadas rectangulares. Por ejemplo, el lector debe verificar que $(2, \pi/2)$ es una descripción polar alterna del punto $(-2, 3\pi/2)$. Además, verifique que $(-2, 3\pi/2)$ es un punto sobre la gráfica de $r = 1 + 3 \operatorname{sen} \theta$ mostrando que las coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, advierta que las coordenadas alternas $(2, \pi/2)$ no satisfacen la ecuación.

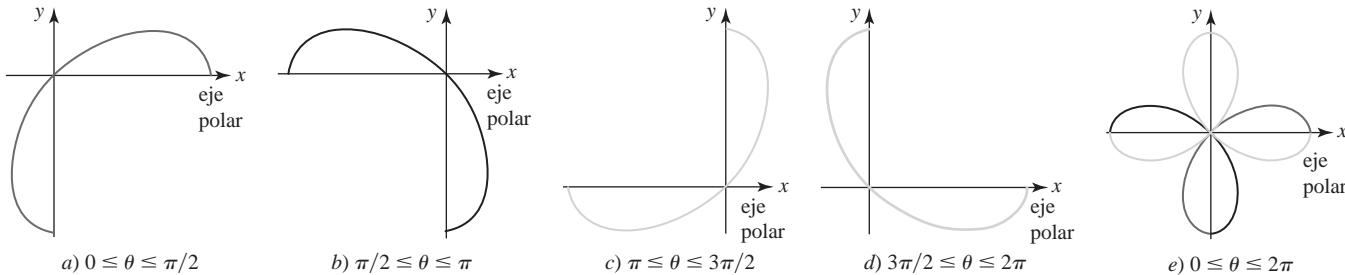


FIGURA 2.4.16 Graficación de $r = 2 \cos 2\theta$

2.4

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-7.

Fundamentos

En los problemas 1-30, identifique por nombre la gráfica de la ecuación polar dada. Después trace la gráfica de la ecuación.

- | | |
|---|---|
| 1. $r = 6$ | 2. $r = -1$ |
| 3. $\theta = \pi/3$ | 4. $\theta = 5\pi/6$ |
| 5. $r = 2\theta, \theta \leq 0$ | 6. $r = 3\theta, \theta \geq 0$ |
| 7. $r = 1 + \cos \theta$ | 8. $r = 5 - 5 \operatorname{sen} \theta$ |
| 9. $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$ | 10. $2r = 1 - \cos \theta$ |
| 11. $r = 1 - 2 \cos \theta$ | 12. $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$ |
| 13. $r = 4 - 3 \operatorname{sen} \theta$ | 14. $r = 3 + 2 \cos \theta$ |
| 15. $r = 4 + \cos \theta$ | 16. $r = 4 - 2 \operatorname{sen} \theta$ |
| 17. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ | 18. $r = 3 \operatorname{sen} 4\theta$ |
| 19. $r = 3 \cos 3\theta$ | 20. $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$ |
| 21. $r = \cos 5\theta$ | 22. $r = 2 \operatorname{sen} 9\theta$ |
| 23. $r = 6 \cos \theta$ | 24. $r = -2 \cos \theta$ |
| 25. $r = -3 \operatorname{sen} \theta$ | 26. $r = 5 \operatorname{sen} \theta$ |
| 27. $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ | 28. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ |
| 29. $r^2 = -25 \cos 2\theta$ | 30. $r^2 = -9 \operatorname{sen} 2\theta$ |

En los problemas 31 y 32, la gráfica de la ecuación dada es una espiral. Dibuje su gráfica.

31. $r = 2^\theta, \theta \geq 0$ (logarítmica) 32. $r\theta = \pi, \theta > 0$
(hiperbólica)

En los problemas 33-38, encuentre una ecuación de la gráfica polar dada.

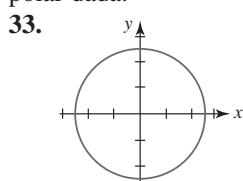


FIGURA 2.4.17 Gráfica del problema 33

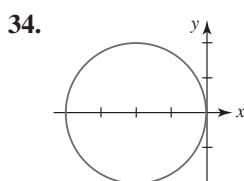


FIGURA 2.4.18 Gráfica del problema 34

35.

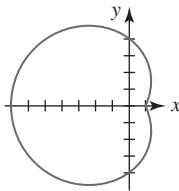


FIGURA 2.4.19 Gráfica del problema 35

36.

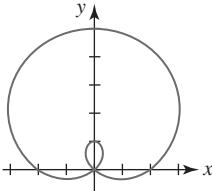


FIGURA 2.4.20 Gráfica del problema 36

37.

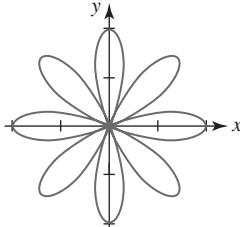


FIGURA 2.4.21 Gráfica del problema 37

38.

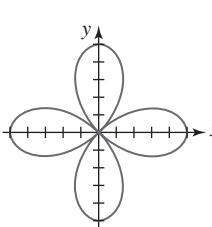


FIGURA 2.4.22 Gráfica del problema 38

En los problemas 39-42, encuentre los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones polares indicadas.

- | | |
|--|---|
| 39. $r = 2$
$r = 4 \operatorname{sen} \theta$ | 40. $r = \operatorname{sen} \theta$
$r = \operatorname{sen} 2\theta$ |
| 41. $r = 1 - \cos \theta$
$r = 1 + \cos \theta$ | 42. $r = 3 - 3 \cos \theta$
$r = 3 \cos \theta$ |

En los problemas 43 y 44, use el hecho de que $r = f(\theta)$ y $-r = f(\theta + \pi)$ describen la misma curva como una ayuda para determinar los puntos de intersección del par dado de ecuaciones polares.

- | | |
|---|---|
| 43. $r = 3$
$r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$ | 44. $r = \cos 2\theta$
$r = 1 + \cos \theta$ |
|---|---|

Problemas con calculadora/SAC

45. Emplee un aparato de graficación para obtener la gráfica de la **bifolio** $r = 4 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$ y el círculo $r = \operatorname{sen} \theta$ sobre los mismos ejes. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas.

46. Emplee un sistema de graficación para verificar que la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y la lemniscata $r^2 = 4 \cos \theta$ se intersecan en cuatro puntos. Encuentre estos puntos de intersección de las gráficas.

En los problemas 47 y 48, las gráficas de las ecuaciones *a)-d)* representan una rotación de la gráfica de la ecuación dada. Intente dibujar estas gráficas a mano. Si tiene dificultades, entonces recurra a una calculadora o a un SAC.

47. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

- a)* $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$
- b)* $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)$
- c)* $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$
- d)* $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$

48. $r = 2 + 4 \cos \theta$

- a)* $r = 2 + 4 \cos(\theta + \pi/6)$
- b)* $r = 2 + 4 \cos(\theta - 3\pi/2)$
- c)* $r = 2 + 4 \cos(\theta + \pi)$
- d)* $r = 2 + 4 \cos(\theta - \pi/8)$

En los problemas 49-52, utilice una calculadora o un SAC, si es necesario, para vincular la gráfica dada con la ecuación polar apropiada en *a)-d)*.

- a)* $r = 2 \cos \frac{3\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi$
- b)* $r = 2 \cos \frac{\theta}{5}, \quad 0 \leq \theta \leq 5\pi$
- c)* $r = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 8\pi$
- d)* $r = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi$

49.

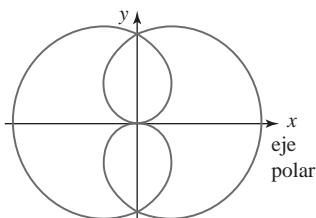


FIGURA 2.4.23 Gráfica del problema 49

50.

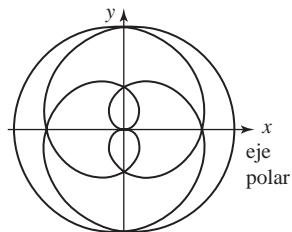


FIGURA 2.4.24 Gráfica del problema 50

51.

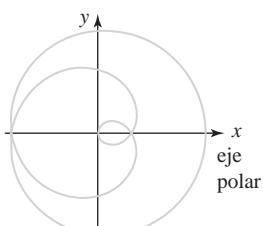


FIGURA 2.4.25 Gráfica del problema 51

52.

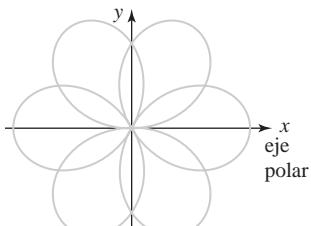


FIGURA 2.4.26 Gráfica del problema 52

53. Utilice un SAC para obtener gráficas de la ecuación polar $r = a + \cos \theta$ para $a = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \dots, 3$.

54. Identifique todas las curvas en el problema 53. ¿Qué ocurre con las gráficas cuando $a \rightarrow \infty$?

■ Piense en ello

En los problemas 55-58, identifique las simetrías si el par de puntos dados está sobre la gráfica de $r = f(\theta)$.

55. $(r, \theta), (-r, \pi - \theta)$

56. $(r, \theta), (r, \theta + \pi)$

57. $(r, \theta), (-r, \theta + 2\pi)$

58. $(r, \theta), (-r, -\theta)$

En los problemas 59 y 60, considere que $r = f(\theta)$ es una ecuación polar. Interprete geométricamente el resultado dado.

59. $f(-\theta) = f(\theta)$ (función par)

60. $f(-\theta) = -f(\theta)$ (función impar)

61. *a)* ¿Cuál es la diferencia entre los círculos $r = -4$ y $r = 4$?

- b)* ¿Cuál es la diferencia entre las rectas que pasan por el origen $\theta = \pi/6$ y $\theta = 7\pi/6$?

62. **Un poco de historia** El italiano **Galileo Galilei** (1564-1642) es recordado por su gran número de descubrimientos e innovaciones en los campos de la astronomía y la física. Con un telescopio reflector de su propio diseño fue el primero en descubrir las lunas de Júpiter. Mediante sus observaciones del planeta Venus y de las manchas solares, Galileo a la larga apoyó la controvertida opinión de Nicolás Copérnico en el sentido de que los planetas giran alrededor del Sol. El trabajo empírico de Galileo sobre la gravedad antecedió las aportaciones de Isaac Newton. Fue el primero en efectuar estudios científicos para determinar la aceleración de la gravedad. Al medir el tiempo que tardan bolas metálicas al rodar hacia abajo en un plano inclinado, Galileo pudo calcular la velocidad de cada bola y a partir de esas observaciones concluyó que la distancia s que se mueve una bola se relaciona con el tiempo t mediante $s = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración debida a la gravedad.

Suponga que varias bolas metálicas se sueltan simultáneamente desde un punto común y que se dejan deslizar hacia abajo por planos inclinados sin fricción a diversos ángulos, con cada bola acelerándose por la gravedad. Vea la FIGURA 2.4.27. Demuestre que en cualquier instante, todas las bolas yacen en un círculo común cuyo punto superior más alto es el punto de liberación. Galileo pudo demostrar esto sin el beneficio de las coordenadas rectangulares o polares.

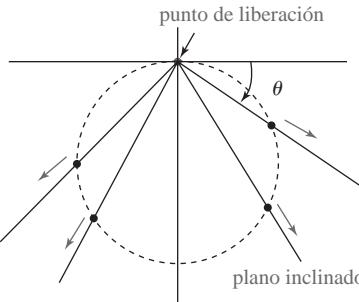


FIGURA 2.4.27 Planos inclinados del problema 62

2.5 Cálculo en coordenadas polares

■ Introducción En esta sección se responde a tres problemas de cálculo estándar en el sistema de coordenadas polares.

- ¿Cuál es la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar?
- ¿Cuál es el área acotada por una gráfica polar?
- ¿Cuál es la longitud de una gráfica polar?

Iniciamos con el problema de la recta tangente.

■ Pendiente de una tangente a una gráfica polar Sorprende que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ no sea la derivada $dr/d\theta = f'(\theta)$. La pendiente de una recta tangente sigue siendo dy/dx . Para determinar esta última derivada, se emplea $r = f(\theta)$ junto con $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ para escribir las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta. \quad (1)$$

Entonces de (1) en la sección 2.2 y la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta}.$$

Este resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1 Pendiente de una recta tangente

Si f es una función diferenciable de θ , entonces la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de $r = f(\theta)$ en un punto (r, θ) sobre la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta}, \quad (2)$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$.

La fórmula (2) en el teorema 2.5.1 se presenta “para registro”; no la memorice. Para encontrar dy/dx en coordenadas polares basta con formar las ecuaciones paramétricas $x = f(\theta) \cos \theta$, $y = f(\theta) \sin \theta$ y después se usa la forma paramétrica de la derivada.

EJEMPLO 1 Pendiente

Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = 4 \sen 3\theta$ en $\theta = \pi/6$.

Solución De las ecuaciones paramétricas $x = 4 \sen 3\theta \cos \theta$, $y = 4 \sen 3\theta \sen \theta$ encontramos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{4 \sen 3\theta \cos \theta + 12 \cos 3\theta \sen \theta}{-4 \sen 3\theta \sen \theta + 12 \cos 3\theta \cos \theta}$$

y por ello

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\pi/6} = -\sqrt{3}.$$

La gráfica de la ecuación, la cual se reconoce como la curva de la rosa con tres pétalos, y la recta tangente se ilustran en la FIGURA 2.5.1.

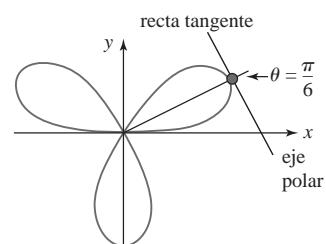


FIGURA 2.5.1 Recta tangente del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación rectangular de la recta tangente en el ejemplo 1.

Solución En $\theta = \pi/6$ las ecuaciones paramétricas $x = 4 \sen 3\theta \cos \theta$, $y = 4 \sen 3\theta \sen \theta$ producen, respectivamente, $x = 2\sqrt{3}$ y $y = 2$. Las coordenadas rectangulares del punto de tangencia son $(2\sqrt{3}, 2)$. Al emplear la pendiente que se encontró en el ejemplo 1, la forma punto-pendiente produce una ecuación de la recta tangente que se ilustra en la figura 2.5.1:

$$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3}) \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{3}x + 8.$$

Podemos obtener una ecuación polar de la recta en el ejemplo 2 al sustituir x y y en la ecuación rectangular por $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y resolver para r :

$$r = \frac{8}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}.$$

EJEMPLO 3 Tangentes horizontal y vertical

Determine los puntos sobre la gráfica de $r = 3 - 3 \sin \theta$ en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los cuales la recta tangente es vertical.

Solución Recuerde de la sección 2.2 que una tangente horizontal ocurre en un punto para el cual $dy/d\theta = 0$ y $dx/d\theta \neq 0$, en tanto que una tangente vertical ocurre en un punto para el cual $dx/d\theta = 0$ y $dy/d\theta \neq 0$. Ahora bien, de las ecuaciones paramétricas

$$x = (3 - 3 \sin \theta) \cos \theta, \quad y = (3 - 3 \sin \theta) \sin \theta$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= (3 - 3 \sin \theta)(-\cos \theta) + \sin \theta(-3 \cos \theta) \\ &= -3 \sin \theta + 3 \sin^2 \theta - 3 \cos^2 \theta \\ &= -3 - 3 \sin \theta + 6 \sin^2 \theta \\ &= 3(2 \sin \theta + 1)(\sin \theta - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= (3 - 3 \sin \theta) \cos \theta + \cos \theta(-3 \sin \theta) \\ &= 3 \cos \theta(1 - 2 \sin \theta). \end{aligned}$$

De estas derivadas observamos que

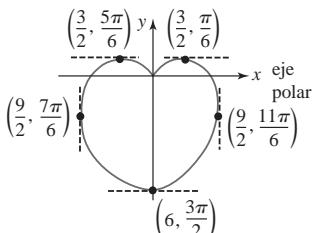


FIGURA 2.5.2 Rectas tangentes horizontal y vertical del ejemplo 3

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= 0 \left(\frac{dx}{d\theta} \neq 0 \right) \text{ en } \theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{3\pi}{2}, \\ \frac{dx}{d\theta} &= 0 \left(\frac{dy}{d\theta} \neq 0 \right) \text{ en } \theta = \frac{7\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

De tal modo, hay

$$\begin{aligned} \text{tangentes horizontales en: } &(\frac{3}{2}, \pi/6), (\frac{3}{2}, 5\pi/6), (6, 3\pi/2), \\ \text{tangentes verticales en: } &(\frac{9}{2}, 7\pi/6), (\frac{9}{2}, 11\pi/6). \end{aligned}$$

Estos puntos, junto con las rectas tangentes, se muestran en la FIGURA 2.5.2. ■

Tangentes a la gráfica en el origen En la sección anterior establecimos que, en general, si $r = 0$ y $dr/d\theta = f'(\theta) \neq 0$ cuando $\theta = \theta_0$, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es tangente a la recta $\theta = \theta_0$ en el origen. Este hecho se deduce de (2). Si $r = f(\theta)$ es una función diferenciable de θ para la cual $f(\theta_0) = 0$ y $f'(\theta_0) \neq 0$, entonces en $\theta = \theta_0$, (2) produce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta_0) \cos \theta_0 + f'(\theta_0) \sin \theta_0}{-f(\theta_0) \sin \theta_0 + f'(\theta_0) \cos \theta_0} = \frac{f'(\theta_0) \sin \theta_0}{f'(\theta_0) \cos \theta_0} = \tan \theta_0.$$

En la última expresión se reconoce que $\tan \theta_0$ es la pendiente de la recta tangente $\theta = \theta_0$.

Advierta en el ejemplo 3 que $r = 3 - 3 \sin \theta = 0$ en $\theta = \pi/2$. Pero puesto que tanto el numerador $dy/d\theta$ como el denominador $dx/d\theta$ en (2) son 0 en $\theta = \pi/2$ no podemos concluir algo acerca de la recta tangente en el origen $(0, \pi/2)$.

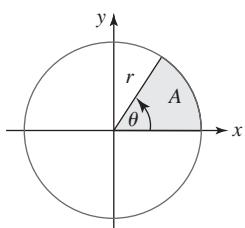


FIGURA 2.5.3 Área A de la sección circular

Área de una región El problema de determinar el área de una región acotada por gráficas polares no es tan directo como resolverlo por integración ordinaria. Como veremos en la discusión subsecuente, en lugar de un rectángulo usamos un sector de un círculo, tal como se muestra en la FIGURA 2.5.3. Puesto que el área A de un sector circular es proporcional al ángulo central θ , medido en radianes, y ya que el área del círculo completo es πr^2 , tenemos

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2} r^2 \theta. \quad (3)$$

Construcción de una integral Suponga que $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$. Para encontrar el área A de la región que se muestra en la FIGURA 2.5.4a) que está acotada por la gráfica de f y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, se empieza formando una partición P de $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta.$$

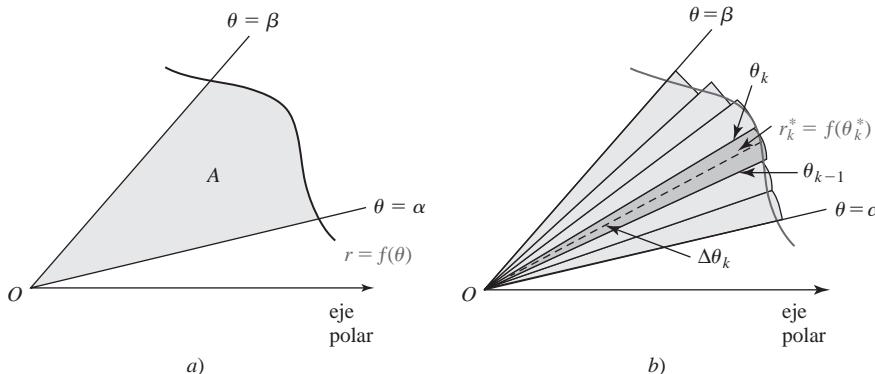


FIGURA 2.5.4 Área A de una región acotada por una gráfica polar y dos rayos

Si θ_k^* denota un punto muestral en el subintervalo k -ésimo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, entonces por (3) el área del sector circular de radio $r_k = f(\theta_k^*)$ indicado en la figura 2.5.4b) es

$$A_k = \frac{1}{2} [f(\theta_k^*)]^2 \Delta \theta_k,$$

donde $\Delta \theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ es su ángulo central. A su vez, la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_k^*)]^2 \Delta \theta_k$$

proporciona una aproximación a A . El área A está dada entonces por el límite cuando $\|P\| \rightarrow 0$:

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [f(\theta_k^*)]^2 \Delta \theta_k.$$

Teorema 2.5.2 Área en coordenadas polares

Si $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre $[\alpha, \beta]$, entonces el área acotada por su gráfica y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ están dados por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta. \quad (4)$$

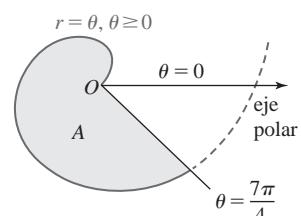


FIGURA 2.5.5 Área del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área acotada por una espiral

Encuentre el área de la región que está acotada por la espiral $r = \theta$, $\theta \geq 0$, entre los rayos $\theta = 0$ y $\theta = 7\pi/4$.

Solución De (4), el área de la región sombreada que se muestra en la FIGURA 2.5.5 es

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{7\pi/4} \theta^2 d\theta = \frac{1}{6} \theta^3 \Big|_0^{7\pi/4} = \frac{343}{384} \pi^3 \approx 27.70.$$

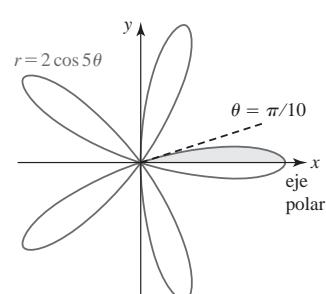


FIGURA 2.5.6 La mitad del área del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Área acotada por una curva de la rosa

Encuentre el área de un pétalo de la curva de la rosa $r = 2 \cos 5\theta$.

Solución Como se muestra en la FIGURA 2.5.6, la curva de la rosa tiene cinco pétalos. Debido a la simetría encontraremos el área de la mitad de un pétalo y el resultado lo multiplicamos por 2. Al dejar $r = 0$ y resolver $2 \cos 5\theta = 0$ obtenemos $5\theta = \pi/2$ o $\theta = \pi/10$. En otras palabras, la curva

entra al origen tangente a la recta $\theta = \pi/10$. De (4), el área A de la mitad del pétalo en la figura 2.5.6 es entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/10} (2 \cos 5\theta)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/10} \cos^2 5\theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/10} \frac{1}{2}(1 + \cos 10\theta) d\theta \\ &= \left. \theta + \frac{1}{10} \sin 10\theta \right|_0^{\pi/10} \\ &= \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Las fórmulas del ángulo mitad: ►

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

serán de utilidad en esta sección.

El área de un pétalo es entonces $2(\pi/10) = \pi/5$. ■

Desde luego, el área de cada pétalo en el ejemplo 5 es la misma y por ello el área encerrada por la curva completa de la rosa de cinco pétalos es $5(\pi/5) = \pi$.

Una advertencia: cuando trabaje con problemas del tipo que se presentó en el ejemplo 5, debe tener cuidado con los límites de integración. No suponga que el área encerrada por la curva completa de la rosa de cinco pétalos puede obtenerla de (4) integrando sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. En otras palabras, el área no es $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 \cos 5\theta)^2 d\theta$. Esto se debe a que la curva completa se obtiene de $0 \leq \theta \leq \pi$. Vea *i*) en *Notas desde el aula* en la sección 2.4.

EJEMPLO 6 Área acotada entre dos gráficas

Encuentre el área de la región que es común a los interiores de la cardioide $r = 2 - 2 \cos \theta$ y la limacón $r = 2 + \cos \theta$.

Solución La inspección de la FIGURA 2.5.7 muestra que necesitamos dos integrales. Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones:

$$2 - 2 \cos \theta = 2 + \cos \theta \quad \text{o} \quad \cos \theta = 0$$

obtenemos $\theta = \pi/2$, por lo que un punto de intersección es $(2, \pi/2)$. Por simetría, concluimos que

$$\begin{aligned} A &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 - 2 \cos \theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (2 + \cos \theta)^2 d\theta \right\} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[1 - 2 \cos \theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \right] d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[4 + 4 \cos \theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= 4 \left[\frac{3}{2}\theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{9}{2}\theta + 4 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{21}{4}\pi - 12 \approx 4.49. \end{aligned}$$

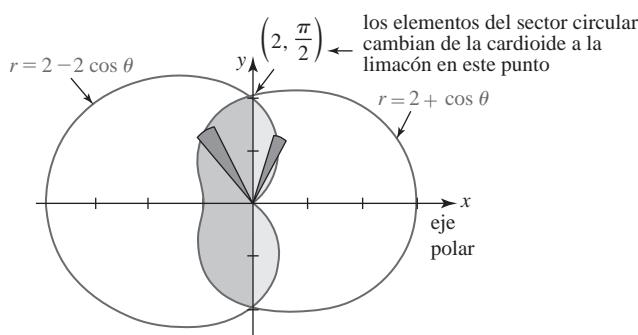


FIGURA 2.5.7 Área del ejemplo 6 ■

Área acotada por dos gráficas El área A de la región que se muestra en la FIGURA 2.5.8 se encuentra sustrayendo áreas. Si f y g son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y $f(\theta) \geq g(\theta)$ sobre el intervalo, entonces el área acotada por las gráficas de $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta.$$

Escrita como una sola integral, el área está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) d\theta. \quad (5)$$

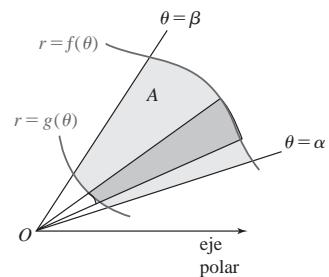


FIGURA 2.5.8 Área de la región acotada entre las dos gráficas

EJEMPLO 7 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región en el primer cuadrante que está fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$.

Solución Al resolver en forma simultánea las dos ecuaciones:

$$1 = 2 \operatorname{sen} 2\theta \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}$$

implica que $2\theta = \pi/6$ y $2\theta = 5\pi/6$. De este modo, los dos puntos de intersección en el primer cuadrante son $(1, \pi/12)$ y $(1, 5\pi/12)$. El área en cuestión se muestra en la FIGURA 2.5.9. De (5),

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} [(2 \operatorname{sen} 2\theta)^2 - 1^2] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} [4 \operatorname{sen}^2 2\theta - 1] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left[4 \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) - 1 \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4\theta \right]_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.96. \end{aligned}$$

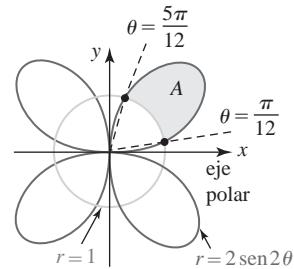


FIGURA 2.5.9 Área del ejemplo 7

Longitud de arco para gráficas polares Hemos visto que si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva C en coordenadas polares, entonces las ecuaciones paramétricas de C son

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Si f tiene una derivada continua, entonces es directo derivar una fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares. Puesto que

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta,$$

el álgebra básica indica que

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2.$$

El siguiente resultado se concluye de (9) de la sección 5.2.

Teorema 2.5.3 Longitud de una gráfica polar

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[\alpha, \beta]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica $r = f(\theta)$ sobre el intervalo es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta. \quad (6)$$

EJEMPLO 8 Longitud de una cardioide

Determine la longitud de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solución La gráfica de $r = 1 + \cos \theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$ se ilustra en la FIGURA 2.5.10. En este caso, $dr/d\theta = -\sin \theta$, de modo que

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta = 2 + 2 \cos \theta$$

$$y \quad \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta}.$$

Por consiguiente, de (6) la longitud de la porción superior de la gráfica en la figura 2.5.10 es:

$$L = \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta.$$

Para evaluar esta integral empleamos la fórmula del ángulo medio para el coseno en la forma $\cos^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ o $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$. La longitud de la gráfica para $0 \leq \theta \leq \pi$ está dada por

$$L = 2 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4.$$

■

Se pide al lector que lea las *Notas desde el aula* siguientes.

**NOTAS DESDE EL AULA**

Es fácil cometer un error en los límites de integración en las integrales de área y de longitud de arco (4) y (6). En el ejemplo 8 recurrimos a la simetría para ver que la longitud de una cardioide completa, esto es $r = 1 + \cos \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ es $2(4) = 8$ unidades, pero esto *no* es lo que produce (6) integrando sobre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$L = 2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta/2) d\theta. \quad (7)$$

Reflexione por qué se obtiene una respuesta incorrecta de (7) y después trabaje los problemas 45 y 46 de los ejercicios 2.5.

2.5**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor indicado de θ .

1. $r = \theta$; $\theta = \pi/2$
2. $r = 1/\theta$; $\theta = 3$
3. $r = 4 - 2 \sin \theta$; $\theta = \pi/3$
4. $r = 1 - \cos \theta$; $\theta = 3\pi/4$
5. $r = \sin \theta$; $\theta = \pi/6$
6. $r = 10 \cos \theta$; $\theta = \pi/4$

En los problemas 7 y 8, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los que la recta tangente es vertical.

7. $r = 2 + 2 \cos \theta$

8. $r = 1 - \sin \theta$

En los problemas 9 y 10, determine la ecuación rectangular de la recta tangente en el punto indicado.

9. $r = 4 \cos 3\theta$

10. $r = 1 + 2 \cos \theta$

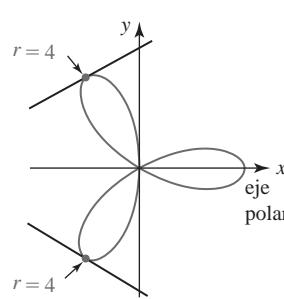


FIGURA 2.5.11 Gráfica del problema 9

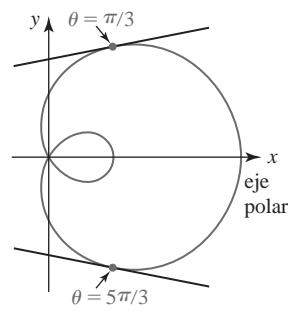


FIGURA 2.5.12 Gráfica del problema 10

En los problemas 11-16, encuentre la ecuación polar de cada recta tangente a la gráfica polar en el origen.

11. $r = -2 \operatorname{sen} \theta$
 13. $r = 1 + \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta$
 15. $r = 2 \cos 5\theta$

12. $r = 3 \cos \theta$
 14. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$
 16. $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$

En los problemas 17-24, encuentre el área de la región que está acotada por la gráfica de la ecuación polar que se indica.

17. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
 19. $r = 4 + 4 \cos \theta$
 21. $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$
 23. $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$

18. $r = 10 \cos \theta$
 20. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$
 22. $r = 2 + \cos \theta$
 24. $r = \cos 3\theta$

En los problemas 25-30, determine el área de la región que está acotada por la gráfica de una ecuación polar dada y los rayos indicados.

25. $r = 2\theta, \theta \geq 0, \theta = 0, \theta = 3\pi/2$
 26. $r\theta = \pi, \theta > 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi$
 27. $r = e^\theta, \theta = 0, \theta = \pi$

28. $r = 10e^{-\theta}, \theta = 1, \theta = 2$
 29. $r = \tan \theta, \theta = 0, \theta = \pi/4$
 30. $r \operatorname{sen} \theta = 5, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3$

En los problemas 31 y 32, la gráfica es de la ecuación polar $r = 1 + 2 \cos \theta$. Determine el área de la región sombreada.

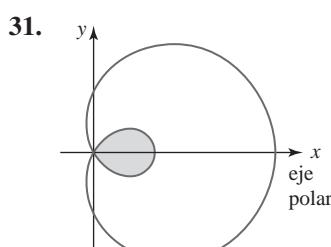


FIGURA 2.5.13 Región del problema 31

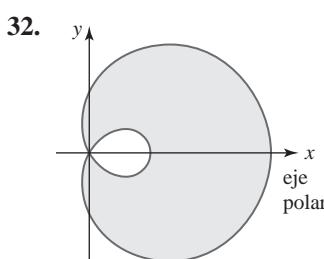


FIGURA 2.5.14 Región del problema 32

En los problemas 33-38, determine el área de la región descrita.

33. Fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2 \cos 3\theta$.
34. Común a los interiores de los círculos $r = \cos \theta$ y $r = \operatorname{sen} \theta$.
35. Dentro del círculo $r = 5 \operatorname{sen} \theta$ y fuera de la limacón $r = 3 - \operatorname{sen} \theta$.
36. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones del problema 35.
37. Dentro de la cardioide $r = 4 - 4 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 6$.
38. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones en el problema 37.

En los problemas 39-44, encuentre la longitud de la curva para los valores indicados de θ .

39. $r = 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

40. $r = 6 \cos \theta$, gráfica completa

41. $r = e^{\theta/2}, 0 \leq \theta \leq 4$

42. $r = \theta, 0 \leq \theta \leq 1$

43. $r = 3 - 3 \cos \theta$, gráfica completa

44. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), 0 \leq \theta \leq \pi$

■ Piense en ello

45. Considere la lemniscata $r^2 = 9 \cos 2\theta$.

a) Explique por qué el área de la región acotada por la gráfica no está dada por la integral $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 9 \cos 2\theta d\theta$.

b) Al utilizar una integral apropiada, determine el área de la región acotada por la gráfica.

46. En el ejemplo 8 explique por qué la longitud de la cardiode completa $r = 1 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, no está dada por la integral $2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 \theta} d\theta$. Luego reexamine el problema 43 y explique por qué no hay dificultades al integrar sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

47. Dibuje la región común a los interiores de las gráficas de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \cos 2\theta$. Encuentre el área de esta región.

48. El área de la región que está acotada por la gráfica de la región de $r = 1 + \cos \theta$ es $3\pi/2$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de las áreas acotadas por las gráficas de $r = 1 - \cos \theta$, $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$? Justifique sus respuestas sin calcular las áreas utilizando (4).

49. ¿El área de la región acotada por la gráfica de $r = 2(1 + \cos \theta)$ es igual al doble del área de la región acotada por la gráfica de $r = 1 + \cos \theta$?

50. Encuentre el área de la región sombreada en la FIGURA 2.5.15. Cada círculo tiene radio 1.

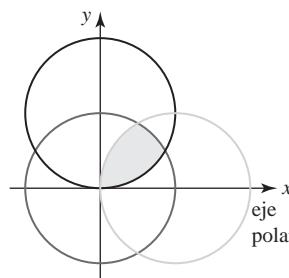


FIGURA 2.5.15 Círculos que se intersecan en el problema 50

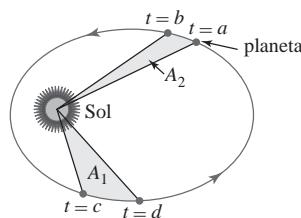
■ Proyectos

51. **Segunda ley de Kepler** En coordenadas polares, el **momento angular** de una partícula en movimiento de masa m se define como $L = mr^2 d\theta/dt$. Suponga que las coordenadas polares de un planeta de masa m son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en los tiempos $t = a$ y $t = b$, $a < b$, respectivamente. Puesto que la fuerza gravitacional que actúa sobre el planeta es una fuerza central, el momento angular L del planeta es una constante. Use este hecho para demostrar que el área A barrida por r es $A = L(b - a)/2m$. Cuando se considera que el Sol está en el origen, esta ecuación

demuestra la segunda ley de Kepler del movimiento planetario:

- Una recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

Vea la FIGURA 2.5.16.



$$A_1 = A_2 \text{ cuando } b - a = d - c$$

FIGURA 2.5.16 Órbita del planeta del problema 51

52. Un poco de historia: Los discos de larga duración (LP)

Antes de los iPod, los reproductores MP3 y los CD, la música se obtenía reproduciendo un *disco*. Entre los años 1960-1990 el formato popular fue el disco LP (siglas de larga duración en inglés: *long-playing*) que giraba sobre una tornamesa a razón de 33 revoluciones por minuto.* Aunque ahora es posible encontrarlos en almacenes que se especializan en objetos coleccionables, muchos de nosotros aún tenemos colecciones de estos grandes discos de vinilo negro de 33 rpm almacenados en cajas. El sonido se codificaba en estos discos por medios mecánicos a lo largo con un surco continuo. Cuando se reproducía un disco, una aguja empezaba en un punto cercano al borde más externo del disco y recorría el surco hasta un punto cercano a su centro. ¿Cuán largo es el surco de un disco? Suponga que un disco se reproduce durante 20 minutos a 33 revoluciones por minuto. Cuando el disco se reproduce, la aguja va del radio más exterior R_o a un radio más interior

* Los discos de 33 en realidad giraban a $33\frac{1}{3}$ revoluciones por minuto.

R_i . Vea la FIGURA 2.5.17. Suponga que el surco del disco es una espiral que puede describirse mediante una ecuación polar de la forma $r = R_o - k\theta$, donde k es una constante y θ se mide en radianes.

- Exprese k en términos de R_o , R_i y N , donde N es el número de revoluciones completadas por el disco.
- Demuestre que la longitud L del surco del disco está dada por

$$L = \frac{1}{k} \int_{R_i}^{R_o} \sqrt{k^2 + u^2} du.$$

- Utilice la serie del binomio para establecer la aproximación

$$\sqrt{k^2 + u^2} \approx u \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{u} \right)^2 \right].$$

- En el inciso b), utilice el resultado que se obtuvo en el inciso c) para demostrar que la longitud L del surco del disco está dada por la aproximación

$$L \approx \pi N(R_i + R_o) + \frac{R_o - R_i}{4\pi N} \ln \frac{R_o}{R_i}.$$

- Emplee el resultado en el inciso d) para aproximar la longitud L si $R_o = 6$ pulg y $R_i = 2.5$ pulg.
- Use una sustitución apropiada para evaluar la integral en el inciso b) empleando los valores específicos de R_o y R_i dados en el inciso e). Compare esta respuesta con la que obtuvo en el inciso e).

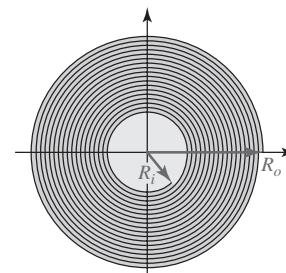


FIGURA 2.5.17 Disco LP del problema 52

2.6 Secciones cónicas en coordenadas polares

Introducción En el apéndice se deducen las ecuaciones de la parábola, elipse e hipérbola mediante la fórmula de la distancia en coordenadas rectangulares. Al emplear coordenadas polares y el concepto de excentricidad, ahora daremos una definición general de una sección cónica que comprende a las tres curvas.

Definición 2.6.1 Sección cónica

Considere que L es una recta fija en el plano y que F es un punto que no se encuentre sobre la recta. Una **sección cónica** es el conjunto de puntos P en el plano para los cuales la distancia de P a F dividida entre la distancia de P a L es una constante.

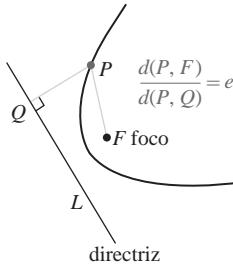


FIGURA 2.6.1 Interpretación geométrica de (1)

La recta fija L recibe el nombre de **directriz** y el punto F es un **foco**. La constante fija es la **excentricidad** e de la cónica. Como indica la FIGURA 2.6.1 el punto P yace sobre la cónica si y sólo si

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e, \quad (1)$$

donde Q denota el pie de la perpendicular de P a L . En (1), si

- $e = 1$, la cónica es una **parábola**,
- $0 < e < 1$, la cónica es una **elipse**, y
- $e > 1$, la cónica es una **hipérbola**.

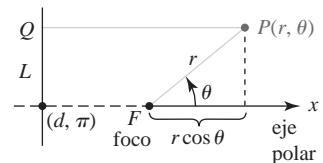


FIGURA 2.6.2 Interpretación de la coordenada polar de (2)

Ecuaciones polares de cónicas La ecuación (1) se interpreta fácilmente utilizando coordenadas polares. Suponga que el foco F se coloca en el polo y la directriz L está d unidades ($d > 0$) a la *izquierda* de F perpendicular al eje polar extendido. Se advierte de la FIGURA 2.6.2 que (1) escrita como $d(P, F) = ed(P, Q)$ es la misma que

$$r = e(d + r \cos \theta) \quad \text{o} \quad r - er \cos \theta = ed. \quad (2)$$

Al resolver para r obtenemos

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}. \quad (3)$$

Para ver que (3) produce las familiares ecuaciones de las cónicas, superpondremos un sistema de coordenadas rectangular sobre el sistema de coordenadas polares con origen en el polo y el eje x positivo coincidiendo con los ejes polares. Despues expresamos la primera ecuación en (2) en coordenadas rectangulares y simplificamos:

$$\begin{aligned} \pm \sqrt{x^2 + y^2} &= ex + ed \\ x^2 + y^2 &= e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2 \\ (1 - e^2)x^2 - 2e^2dx + y^2 &= e^2d^2. \end{aligned} \quad (4)$$

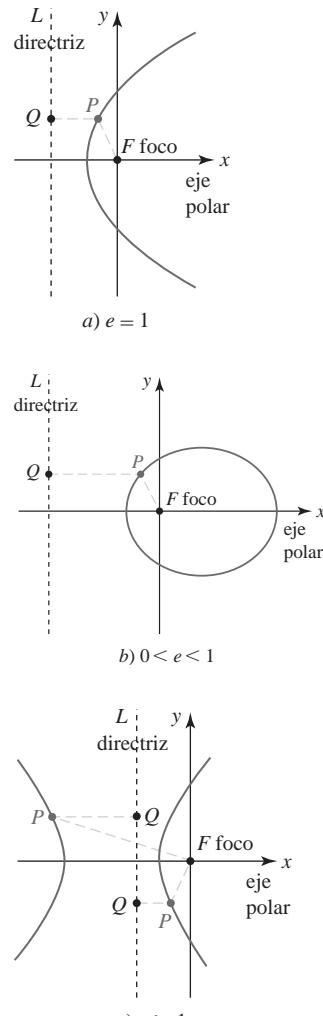
Eligiendo $e = 1$, (4) se convierte en

$$-2dx + y^2 = d^2 \quad \text{o} \quad y^2 = 2d\left(x + \frac{d}{2}\right),$$

que es una ecuación en forma estándar de una parábola cuyo eje es el eje x , el vértice está en $(-d/2, 0)$ y, consistente con la ubicación de F , cuyo foco está en el origen.

Es un buen ejercicio de álgebra mostrar que (2) produce ecuaciones en forma estándar de una elipse en el caso $0 < e < 1$ y una hipérbola en el caso $e > 1$. Vea el problema 43 en los ejercicios 2.6. De modo que, dependiendo del valor de e , la ecuación polar (3) tiene tres posibles gráficas como se muestra en la FIGURA 2.6.3.

Si ubicamos la directriz L a la *derecha* del foco F en el origen en la deducción de la ecuación polar (3), entonces la ecuación resultante sería $r = ed/(1 + e \cos \theta)$. Cuando elige la directriz L paralela al eje polar, esto es, horizontal, entonces encontrará que la ecuación de la cónica es $r = ed/(1 + e \sin \theta)$ (directriz debajo del origen) o $r = ed/(1 + e \sin \theta)$ (directriz sobre el origen). En el siguiente teorema se da un resumen de la discusión precedente.



Teorema 2.6.1 Ecuaciones polares de cónicas

Cualquier ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \cos \theta} \quad (5)$$

$$\text{o} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta} \quad (6)$$

es una **sección cónica** con foco en el origen y directriz a d unidades del origen y perpendicular (en el caso de (5)) o paralela (en el caso (6)) al eje x . La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

FIGURA 2.6.3 Gráficas de la ecuación (3); directriz L a la izquierda de F

EJEMPLO 1 Identificación de cónicas

Identifique cada una de las siguientes cónicas:

$$a) r = \frac{2}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta} \quad b) r = \frac{3}{4 + \cos \theta}.$$

Solución

- a) Una comparación término por término de la ecuación dada con la forma polar $r = ed/(1 - e \operatorname{sen} \theta)$ permite hacer la identificación $e = 2$. En consecuencia, la cónica es una hipérbola.
- b) Para identificar la sección cónica, dividimos el numerador y el denominador de la ecuación dada entre 4. Esto deja a la ecuación en la forma

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4} \cos \theta}.$$

Luego, al comparar con $r = ed/(1 + e \cos \theta)$, observamos que $e = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la cónica es una elipse. ■

■ Gráficas Es posible que obtenga una gráfica aproximada de una cónica definida por (5) o (6) si conoce la orientación de sus ejes, determina las intersecciones con los ejes x y y y encuentra los vértices. En los casos de las ecuaciones (5) y (6) tenemos, respectivamente:

- los dos vértices de la **elipse** o **hipérbola** ocurren en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; el vértice de una **parábola** puede ocurrir sólo en uno de los valores: $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.
- los dos vértices de una elipse o una **hipérbola** ocurren en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$; el vértice de una **parábola** puede ocurrir únicamente en uno de los valores $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$.

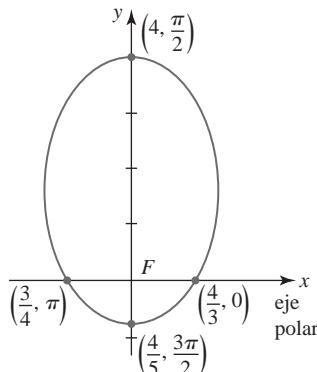


FIGURA 2.6.4 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Graficación de una cónica

Grafique $r = \frac{4}{3 - 2 \operatorname{sen} \theta}$.

Solución Al escribir la ecuación como $r = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3} \operatorname{sen} \theta}$ vemos que la excentricidad es $e = \frac{2}{3}$ y por ello la cónica es una elipse. Además, debido a que la ecuación es de la forma dada en (6), sabemos que la directriz es paralela al eje x . Ahora bien, en vista de la discusión precedente a este ejemplo, tenemos

vértices: $(4, \pi/2), (\frac{4}{5}, 3\pi/2)$

intersecciones x : $(\frac{4}{3}, 0), (\frac{4}{3}, \pi)$.

Según vemos en la FIGURA 2.6.4, el eje mayor de la elipse yace a lo largo del eje y . ■

EJEMPLO 3 Graficación de una cónica

Grafique $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$.

Solución Al revisar la ecuación vemos que es de la forma dada en (5) con $e = 1$. Por consiguiente, la sección cónica es una parábola cuya directriz es perpendicular al eje x . Puesto que r no está definido en $\theta = 0$, el vértice de la parábola ocurre en $\theta = \pi$:

vértices: $(\frac{1}{2}, \pi)$

intersecciones y : $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2)$.

Como observamos en la FIGURA 2.6.5, el eje de simetría de la parábola yace a lo largo del eje x . ■

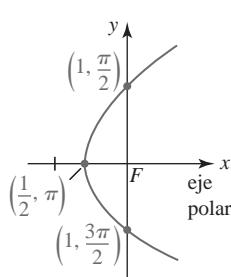


FIGURA 2.6.5 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Graficación de una cónica

$$\text{Grafique } r = \frac{2}{1 + 2 \cos \theta}.$$

Solución De (5) vemos que $e = 2$, y por ello la sección cónica es una hipérbola cuya directriz es perpendicular al eje x . Los vértices ocurren en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$:

$$\begin{aligned} \text{vértices: } & \left(\frac{2}{3}, 0\right), (-2, \pi) \\ \text{intersecciones y: } & (2, \pi/2), (2, 3\pi/2). \end{aligned}$$

Como aparece en la FIGURA 2.6.6, el eje transversal de la hipérbola yace a lo largo del eje x .

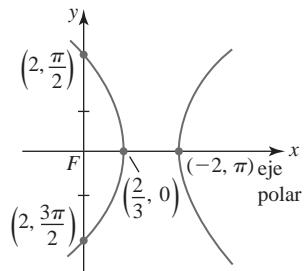


FIGURA 2.6.6 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 4

Cónicas rotadas En la sección 2.4 vimos que las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, $\gamma > 0$, son rotaciones de la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ alrededor del origen en una cantidad γ . De tal modo,

$$\left. \begin{array}{l} r = \frac{ed}{1 \pm e \cos(\theta - \gamma)} \\ r = \frac{ed}{1 \pm e \sin(\theta - \gamma)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cónicas rotadas en} \\ \text{sentido contrario al de} \\ \text{las manecillas del reloj} \\ \text{en torno al origen} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} r = \frac{ed}{1 \pm e \cos(\theta + \gamma)} \\ r = \frac{ed}{1 \pm e \sin(\theta + \gamma)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cónicas rotadas en} \\ \text{el sentido de las} \\ \text{manecillas del reloj} \\ \text{alrededor del origen} \end{array}$$

EJEMPLO 5 Cónica rotada

En el ejemplo 2 se vio que la gráfica de $r = \frac{4}{3 - 2 \sin \theta}$ es una elipse con eje mayor a lo largo del eje y . La gráfica de $r = \frac{4}{3 - 2 \sin(\theta - 2\pi/3)}$ se muestra en la FIGURA 2.6.7 y corresponde a una rotación contraria a las manecillas del reloj de la gráfica en la cantidad $2\pi/3$ (o 120°) alrededor del origen. El eje mayor de esta elipse yace a lo largo de la recta $\theta = 7\pi/6$.

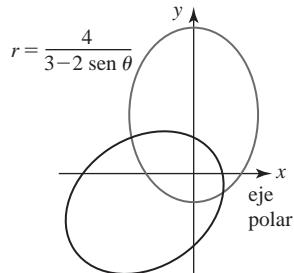


FIGURA 2.6.7 Gráficas de las ecuaciones polares del ejemplo 5

Aplicaciones Las ecuaciones del tipo en (5) y en (6) son bastante apropiadas para describir una órbita cerrada de un satélite alrededor del Sol (Tierra o Luna) puesto que una órbita de este tipo es una elipse con el Sol (Tierra o Luna) en un foco. Suponga que una ecuación de la órbita está dada por $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $0 < e < 1$, y r_p es el valor de r en el perihelio (perigeo o periluna) y r_a es el valor de r en el afelio (apogeo o apoluna). Éstos son los puntos en la órbita que ocurren sobre el eje x , en los cuales el satélite está más cerca o más lejos, respectivamente, del Sol (Tierra o Luna). Vea la FIGURA 2.6.8. Se le deja como ejercicio demostrar que la excentricidad e de la órbita se relaciona con r_p y r_a mediante

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \quad (7)$$

Vea el problema 44 en los ejercicios 2.6.

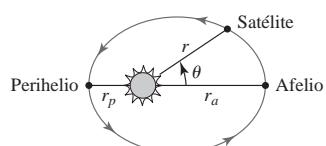


FIGURA 2.6.8 Órbita de un satélite alrededor del Sol

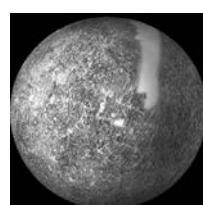
EJEMPLO 6 Determinación de la ecuación polar de una órbita

Encuentre una ecuación polar de la órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol si $r_p = 2.85 \times 10^7$ mi y $r_a = 4.36 \times 10^7$ mi.

Solución De (7), la excentricidad de la órbita de Mercurio es

$$e = \frac{4.36 \times 10^7 - 2.85 \times 10^7}{4.36 \times 10^7 + 2.85 \times 10^7} = 0.21.$$

Por consiguiente, $r = \frac{0.21d}{1 - 0.21 \cos \theta}$.



Mercurio es el planeta más cercano al Sol

Todo lo que necesita hacer ahora es resolver para la cantidad $0.21d$. Para ello recurra al hecho de que el afelio ocurre en $\theta = 0$:

$$4.36 \times 10^7 = \frac{0.21d}{1 - 0.21}.$$

Al resolver la última ecuación para la cantidad $0.21d$ obtiene $0.21d = 3.44 \times 10^7$. Por consiguiente, una ecuación polar de la órbita de Mercurio es

$$r = \frac{3.44 \times 10^7}{1 - 0.21 \cos \theta}.$$

■

2.6

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine la excentricidad, identifique la sección cónica y dibuje su gráfica.

1. $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$

2. $r = \frac{2}{2 - \sin \theta}$

3. $r = \frac{15}{4 - \cos \theta}$

4. $r = \frac{5}{2 - 2 \sin \theta}$

5. $r = \frac{4}{1 + 2 \sin \theta}$

6. $r = \frac{12}{6 + 2 \sin \theta}$

7. $r = \frac{18}{3 + 6 \cos \theta}$

8. $r = \frac{6 \sec \theta}{\sec \theta - 1}$

9. $r = \frac{10}{5 + 4 \sin \theta}$

10. $r = \frac{2}{2 + 5 \cos \theta}$

En los problemas 11-14, determine la excentricidad e de la cónica dada. Después convierta la ecuación polar en una ecuación rectangular y verifique que $e = c/a$.

11. $r = \frac{6}{1 + 2 \sin \theta}$

12. $r = \frac{10}{2 - 3 \cos \theta}$

13. $r = \frac{12}{3 - 2 \cos \theta}$

14. $r = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sin \theta}$

En los problemas 15-20, encuentre una ecuación polar de la cónica con foco en el origen que satisfaga las condiciones dadas.

15. $e = 1$, directriz $x = 3$

16. $e = \frac{3}{2}$, directriz $y = 2$

17. $e = \frac{2}{3}$, directriz $y = -2$

18. $e = \frac{1}{2}$, directriz $x = 4$

19. $e = 2$, directriz $x = 6$

20. $e = 1$, directriz $y = -2$

21. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 15 si la gráfica se rota en dirección de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $2\pi/3$.

22. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 16 si la gráfica se rota en dirección contraria a la de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $\pi/6$.

En los problemas 23-28, encuentre una ecuación polar de la parábola con foco en el origen y el vértice dado.

23. $(\frac{3}{2}, 3\pi/2)$

24. $(2, \pi)$

25. $(\frac{1}{2}, \pi)$

26. $(2, 0)$

27. $(\frac{1}{4}, 3\pi/2)$

28. $(\frac{3}{2}, \pi/2)$

En los problemas 29-32, encuentre las coordenadas polares de los vértices o vértice de la cónica rotada que se indica.

29. $r = \frac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/4)}$

30. $r = \frac{5}{3 + 2 \cos(\theta - \pi/3)}$

31. $r = \frac{10}{2 - \sin(\theta + \pi/6)}$

32. $r = \frac{6}{1 + 2 \sin(\theta + \pi/3)}$

Aplicaciones

33. Un satélite de comunicaciones se encuentra a 12 000 km sobre la Tierra en su apogeo. La excentricidad de su órbita es 0.2. Emplee (7) para determinar la distancia del perigeo.

34. Encuentre una ecuación polar $r = ed/(1 - e \cos \theta)$ de la órbita del satélite en el problema 33.

35. Encuentre una ecuación polar de la órbita de la Tierra alrededor del Sol si $r_p = 1.47 \times 10^8$ km y $r_a = 1.52 \times 10^8$ km.

36. a) La excentricidad de la órbita elíptica del cometa Halley es 0.97 y la longitud del eje mayor de su órbita corresponde a 3.34×10^9 mi. Determine una ecuación polar de su órbita de la forma $r = ed/(1 - e \cos \theta)$.

b) Utilice la ecuación en el inciso a) para obtener r_p y r_a para la órbita del cometa Halley.

Problemas con calculadora/SAC

Las características orbitales (excentricidad, perigeo y eje mayor) de un satélite cercano a la Tierra se degradan de manera gradual a lo largo del tiempo debido a muchas fuerzas pequeñas que actúan sobre el satélite aparte de la fuerza gravitacional de la Tierra. Estas fuerzas incluyen el arrastre atmosférico, atracciones gravitacionales del Sol y la Luna y fuerzas magnéticas. Aproximadamente una vez al mes se activan diminutos cohetes durante unos segundos para “aumentar” las características orbitales de nuevo en el rango deseado. Los cohetes se activan en mayor grado para un cambio mayor en la órbita del satélite. La forma más eficiente en cuanto a combustible para mover de una órbita interna a una externa, lo que se denomina una **transferencia de Hohmann**, consiste en añadir velocidad en la dirección del vuelo en el momento en que el satélite alcanza el perigeo sobre su órbita interior, seguir la elipse de transferencia de Hohmann de medio camino alrededor de su apogeo, y agregar velocidad de nuevo para alcanzar la órbita exterior. Un proceso similar (restar velocidad

en el apogeo en la órbita exterior y restar velocidad en el perigeo en la órbita de transferencia de Hohmann) mueve al satélite de la órbita exterior a la órbita interior.

En los problemas 37-40, emplee una calculadora o un SAC para superponer las gráficas de las tres ecuaciones polares dadas sobre los mismos ejes coordinados. Imprima su resultado y utilice un lápiz de colores para trazar la transferencia de Hohmann.

37. Órbita interior $r = \frac{24}{1 + 0.2 \cos \theta}$,

transferencia Hohmann $r = \frac{32}{1 + 0.6 \cos \theta}$,

órbita exterior $r = \frac{56}{1 + 0.3 \cos \theta}$

38. Órbita interior $r = \frac{5.5}{1 + 0.1 \cos \theta}$,

transferencia Hohmann $r = \frac{7.5}{1 + 0.5 \cos \theta}$,

órbita exterior $r = \frac{13.5}{1 + 0.1 \cos \theta}$

39. Órbita interior $r = 9$,

transferencia Hohmann $r = \frac{15.3}{1 + 0.7 \cos \theta}$,

órbita exterior $r = 51$

40. Órbita interior $r = \frac{73.5}{1 + 0.05 \cos \theta}$,
 transferencia Hohmann $r = \frac{77}{1 + 0.1 \cos \theta}$,
 órbita exterior $r = \frac{84.7}{1 + 0.01 \cos \theta}$

En los problemas 41 y 42, utilice una calculadora o SAC para superponer las gráficas de las dos ecuaciones polares dadas sobre los mismos ejes de coordenadas.

41. $r = \frac{4}{4 + 3 \cos \theta}$; $r = \frac{4}{4 + 3 \cos(\theta - \pi/3)}$

42. $r = \frac{2}{1 - \sin \theta}$; $r = \frac{2}{1 - \sin(\theta + 3\pi/4)}$

☰ Piense en ello

43. Muestre que (2) produce ecuaciones de forma estándar de una elipse en el caso $0 < e < 1$ y de una hipérbola en el caso $e > 1$.

44. Emplee la ecuación $r = ed/(1 - e \cos \theta)$ para deducir el resultado en (7).

Competencia final de la unidad 2

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-8.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-26, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. En una parábola, la distancia del vértice al foco es la misma que la distancia del vértice a la directriz. _____
2. El eje menor de una elipse biseca al eje mayor. _____
3. Las asíntotas de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ son perpendiculares. _____
4. Las intersecciones con el eje y de la gráfica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ son $(0, b)$ y $(0, -b)$. _____
5. El punto $(-2, 5)$ está en la elipse $x^2/8 + y^2/50 = 1$. _____
6. La gráfica de $y = x^2$ y $y^2 - x^2 = 1$ tiene a lo más dos puntos en común. _____
7. Si para todos los valores de θ los puntos $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ están en la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$, entonces la gráfica es simétrica con respecto al origen. _____
8. La gráfica de la curva $x = t^2$, $y = t^4 + 1$ es la misma que la gráfica de $y = x^2 + 1$. _____
9. La gráfica de la curva $x = t^2 + t - 12$, $y = t^3 - 7t$ cruza al eje y en $(0, 6)$. _____
10. $(3, \pi/6)$ y $(-3, -5\pi/6)$ son coordenadas polares del mismo punto. _____
11. Las coordenadas rectangulares de un punto en el plano son únicas. _____
12. La gráfica de la curva de la rosa $r = 5 \sin 6\theta$ tiene seis “pétales”. _____
13. El punto $(4, 3\pi/2)$ no está en la gráfica de $r = 4 \cos 2\theta$, pues sus coordenadas no satisfacen la ecuación. _____
14. La excentricidad de una parábola es $e = 1$. _____
15. El eje transversal de la hipérbola $r = 5/(2 + 3 \cos \theta)$ yace a lo largo del eje x . _____
16. La gráfica de la elipse $r = 90/(15 - \sin \theta)$ es casi circular. _____
17. Las coordenadas rectangulares del punto $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ en coordenadas polares son $(1, 1)$. _____
18. La gráfica de la ecuación polar $r = -5 \sec \theta$ es una recta. _____

19. El lado final del ángulo θ está siempre en el mismo cuadrante que el punto (r, θ) . _____
20. La pendiente de la tangente de la gráfica de $r = e^\theta$ en $\theta = \pi/2$ es -1 . _____
21. Las gráficas de las cardioides $r = 3 + 3 \cos \theta$ y $r = -3 + 3 \cos \theta$ son las mismas. _____
22. El área acotada por $r = \cos 2\theta$ es $2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta$. _____
23. El área acotada por $r = 2 \sen 3\theta$ es $6 \int_0^{\pi/3} \sen^2 3\theta d\theta$. _____
24. El área acotada por $r = 1 - 2 \cos \theta$ es $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \theta)^2 d\theta$. _____
25. El área acotada por $r^2 = 36 \cos 2\theta$ es $18 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta$. _____
26. La coordenada θ de un punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ debe satisfacer la ecuación $f(\theta) = g(\theta)$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-22, llene los espacios en blanco.

1. $y = 2x^2$, foco _____
2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, focos _____
3. $4x^2 + 5(y + 3)^2 = 20$, centro _____
4. $25y^2 - 4x^2 = 100$, asíntotas _____
5. $8(y + 3) = (x - 1)^2$, directriz _____
6. $\frac{(x + 1)^2}{36} + \frac{(y + 7)^2}{16} = 1$, vértices _____
7. $x = y^2 + 4y - 6$, vértice _____
8. $x^2 - 2y^2 = 18$, longitud del eje conjugado _____
9. $(x - 4)^2 - (y + 1)^2 = 4$, puntos frontera del eje transversal _____
10. $\frac{(x - 3)^2}{7} + \frac{(y + 3/2)^2}{8} = 1$, ecuación de la recta que contiene al eje mayor _____
11. $25x^2 + y^2 - 200x + 6y + 384 = 0$, centro _____
12. $(x + 1)^2 + (y + 8)^2 = 100$, intersecciones con el eje x _____
13. $y^2 - (x - 2)^2 = 1$, intersecciones con el eje y _____
14. $y^2 - y + 3x = 3$, pendiente de la recta tangente en $(1, 1)$ _____
15. $x = t^3$, $y = 4t^3$, nombre de la gráfica rectangular _____
16. $x = t^2 - 1$, $y = t^3 + t + 1$, intersecciones con el eje y _____
17. $r = -2 \cos \theta$, nombre de la gráfica polar _____
18. $r = 2 + \sen \theta$, nombre de la gráfica polar _____
19. $r = \sen 3\theta$, tangentes a la gráfica en el origen _____
20. $r = \frac{1}{2 + 5 \sen \theta}$, excentricidad _____
21. $r = \frac{10}{1 - \sen \theta}$, foco _____ y vértice _____
22. $r = \frac{12}{2 + \cos \theta}$, centro _____, foco _____, vértices _____

C. Ejercicios

1. Encuentre una ecuación de la recta que es normal a la gráfica de la curva $x = t - \sen t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en $t = \pi/3$.
2. Determine la longitud de la curva dada en el problema 1.
3. Encuentre los puntos sobre la gráfica de la curva $x = t^2 + 4$, $y = t^3 - 9t^2 + 2$ en los cuales la recta tangente es paralela a $6x + y = 8$.
4. Determine los puntos sobre la gráfica de la curva $x = t^2 + 1$, $y = 2t$ en los cuales la recta tangente pasa por $(1, 5)$.

5. Considere la ecuación rectangular $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$.
- Explique por qué es necesario que $|x| \leq 1$.
 - Si $x = \sin t$, entonces $|x| \leq 1$. Encuentre las ecuaciones paramétricas que tengan la misma gráfica que la dada en la ecuación rectangular.
 - Con ecuaciones paramétricas, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación rectangular en la cual la tangente es horizontal.
 - Dibuje la gráfica de la ecuación rectangular.
6. Determine el área de la región que es externa al círculo $r = 4 \cos \theta$ e interna a la limacón $r = 3 + \cos \theta$.
7. Encuentre el área de la región que es común al interior del círculo $r = 3 \sin \theta$ y la cardioide $r = 1 + \sin \theta$.
8. En coordenadas polares, dibuje la región cuya área A se describe por medio de $A = \int_0^{\pi/2} (25 - 25 \sin^2 \theta) d\theta$.
9. Encuentre **a**) una ecuación rectangular y **b**) una ecuación polar de la recta tangente a la gráfica de $r = 2 \sin 2\theta$ en $\theta = \pi/4$.
10. Determine las coordenadas rectangulares de los vértices de la elipse cuya ecuación polar es $r = 2/(2 - \sin \theta)$.

En los problemas 11 y 12, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

11. $r = \cos \theta + \sin \theta$

12. $r = \sec \theta - 5 \cos \theta$

En los problemas 13 y 14, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

13. $2xy = 5$

14. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$

15. Determine una ecuación polar para el conjunto de puntos que son equidistantes del origen (polo) y la recta $r = -\sec \theta$.

16. Encuentre una ecuación polar de la hipérbola con foco en el origen, vértices (en coordenadas rectangulares) $(0, -\frac{4}{3})$ y $(0, -4)$ y excentricidad 2.

En los problemas 17 y 18, escriba una ecuación de la gráfica polar dada.

17.

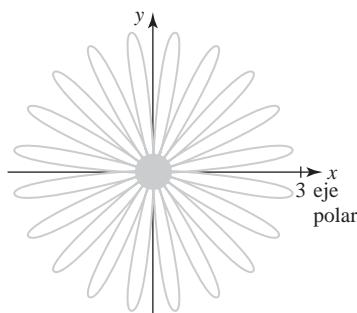


FIGURA 2.R.1 Gráfica del problema 17

18.

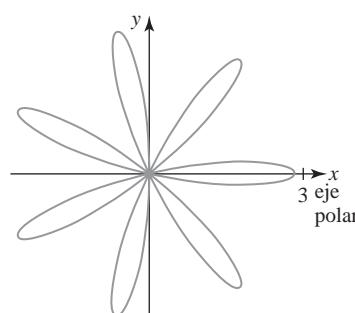


FIGURA 2.R.2 Gráfica del problema 18

19. Determine una ecuación de la hipérbola que tiene asíntotas $3y = 5x$ y $3y = -5x$ y vértices $(0, 10)$ y $(0, -10)$.
20. Encuentre una ecuación rectangular de la recta tangente a la gráfica de $r = 1/(1 + \cos \theta)$ en $\theta = \pi/2$.
21. El folium de Descartes tiene la ecuación rectangular $x^3 + y^3 = 3axy$, donde $a > 0$ es una constante. Emplee la sustitución $y = tx$ para encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva. Vea la FIGURA 2.R.3.
22. Emplee las ecuaciones paramétricas que se encontraron en el problema 21 para determinar los puntos sobre el folium de Descartes donde la recta tangente es horizontal. Vea la figura 2.R.3.
23. **a)** Encuentre una ecuación polar para el folium de Descartes en el problema 21.
- b)** Emplee una ecuación polar para encontrar el área del lazo sombreado en el primer cuadrante en la figura 2.R.3. [Sugerencia: Deje que $u = \tan \theta$.]

24. Utilice las ecuaciones paramétricas encontradas en el problema 21 para mostrar que el folium de Descartes tiene la asíntota inclinada $x + y + a = 0$. Es la línea punteada de la figura 2.R.3. [Sugerencia: Considere lo que pasa a x , y y $x + y$ cuando $r \rightarrow -1$.]

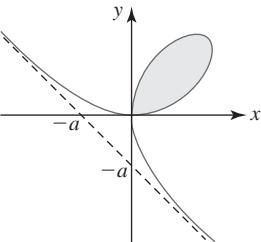


FIGURA 2.R.3 Gráfica de los problemas 21-24

25. La gráfica de $r = 2 \operatorname{sen}(\theta/3)$ dada en la FIGURA 2.R.4 se asemeja a una limacón con un lazo interior. Determine el área del lazo interior.

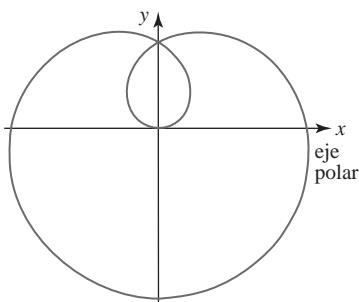


FIGURA 2.R.4 Gráfica del problema 25

26. Encuentre el área de la región sombreada en la FIGURA 2.R.5. Cada círculo tiene un radio igual a 1.

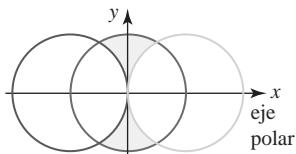


FIGURA 2.R.5 Gráfica del problema 26

En los problemas 27 y 28, la gráfica de la ecuación polar dada se rota en torno al origen en la cantidad indicada.

- a) Encuentre una ecuación polar de la nueva gráfica.
b) Encuentre una ecuación rectangular para la nueva gráfica.

27. $r = 2 \cos \theta$; en sentido contrario al de las manecillas del reloj, $\pi/4$

28. $r = 1/(1 + \cos \theta)$; en el sentido de las manecillas del reloj, $\pi/6$

29. Un satélite gira alrededor del planeta Júpiter en una órbita elíptica con el centro del planeta en un foco. La longitud del eje mayor de la órbita es 10^9 m y la longitud del eje menor corresponde a 6×10^8 m. Determine la distancia mínima entre el satélite y el centro de Júpiter. ¿Cuál es la distancia máxima?

30. Encuentre el ancho w de cada pétalo de la curva de la rosa $r = \cos 2\theta$. Se muestra un pétalo en la FIGURA 2.R.6.

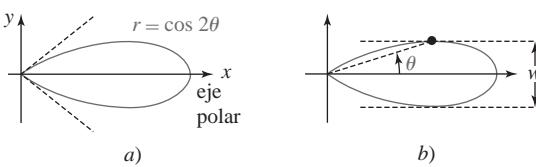
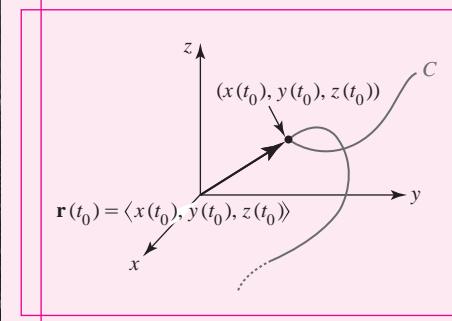
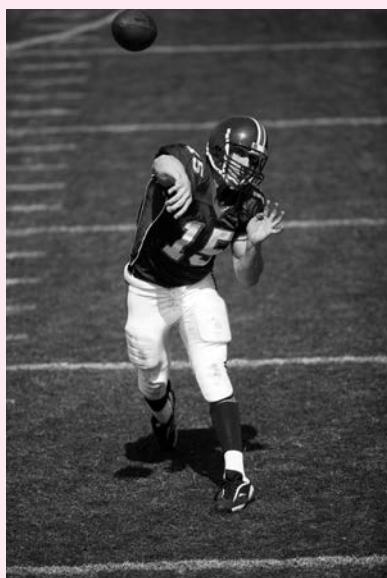
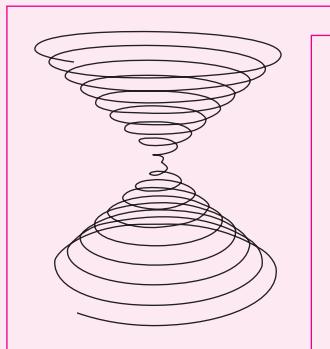


FIGURA 2.R.6 Gráfica del problema 30

Funciones vectoriales de una variable real



En esta unidad Una curva en el plano así como una curva C en el espacio tridimensional pueden definirse mediante ecuaciones paramétricas. Al emplear las funciones como componentes en un conjunto de ecuaciones paramétricas, podemos construir una función de valores vectoriales cuyos valores son los vectores de posición de los puntos sobre la curva C . En esta unidad consideraremos el cálculo y las aplicaciones de estas funciones vectoriales.

Competencias específicas

- Reconocer una función vectorial en distintos contextos y manejarla como un vector.
- Manejar con soltura ecuaciones paramétricas y el software para graficar curvas.
- Analizar gráficas de curvas de funciones vectoriales en el espacio.
- Determinar los parámetros que definen una curva en el espacio.

3.1 Funciones vectoriales

■ Introducción Vimos en la sección 2.1 que una curva C en el plano xy puede parametrizarse mediante dos ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (1)$$

En ciencias e ingeniería muchas veces es conveniente introducir un vector \mathbf{r} con las funciones f y g como componentes:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad (2)$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. En esta sección se estudian los análogos de (1) y (2) en tres dimensiones.

■ Funciones de valores vectoriales Una curva C en el espacio tridimensional, o una **curva espacial**, se parametriza mediante tres ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (3)$$

Como en la sección 2.2, la **orientación** de C corresponde a *valores crecientes* del parámetro t . Al emplear las funciones en (3) como componentes, la contraparte en el espacio tridimensional de (2) es

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad (4)$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$. Afirmamos que \mathbf{r} en (2) y (4) es una **función de valores vectoriales**, o simplemente una **función vectorial**. Como se ilustra en la FIGURA 3.1.1, para un número dado t_0 , el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el *vector de posición* de un punto P sobre la curva C . En otras palabras, cuando varía t , podemos prever la curva C como si fuera trazada por la punta de flecha móvil de $\mathbf{r}(t)$.

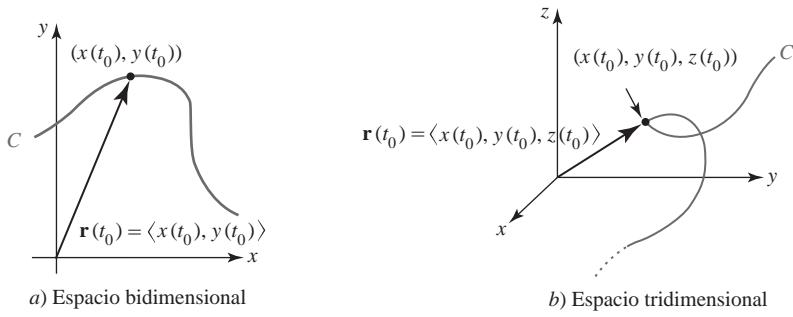


FIGURA 3.1.1 Funciones vectoriales en los espacios bidimensional y tridimensional

■ Rectas Ya se dio un ejemplo de ecuaciones paramétricas así como la función vectorial de una curva espacial en la sección 1.5 donde analizamos la recta en el espacio tridimensional. Recuerde, las ecuaciones paramétricas de una recta L que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el espacio y es paralela a un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, son

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad -\infty < t < \infty.$$

Estas ecuaciones resultan del hecho de que los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ y \mathbf{v} son paralelos de modo que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es un múltiplo escalar de \mathbf{v} , esto es, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. En consecuencia, una función vectorial de la recta L está dada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. La última ecuación se expresa en las formas alternas

$$\mathbf{r}(t) = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle$$

$$\text{y} \quad \mathbf{r}(t) = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ son los vectores de posición de dos puntos distintos P_0 y P_1 , entonces podemos considerar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$. Una función vectorial de la recta que pasa por los dos puntos es $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1. \quad (5)$$

Si el intervalo del parámetro es cerrado $[a, b]$, entonces la función vectorial (5) traza el **segmento de recta** entre los puntos definidos por $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(b)$. En particular, si $0 \leq t \leq 1$ y $\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, entonces la orientación es tal que $\mathbf{r}(t)$ traza el segmento de recta del punto P_0 al punto P_1 .

EJEMPLO 1 Gráfica de una función vectorial

Encuentre una función vectorial del segmento de recta del punto $P_0(3, 2, -1)$ al punto $P_1(1, 4, 5)$.

Solución Los vectores de posición correspondientes a los puntos dados son $\mathbf{r}_0 = \langle 3, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 4, 5 \rangle$. Entonces, de (5) una función vectorial para el segmento de recta es

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 2, -1 \rangle + t\langle 1, 4, 5 \rangle$$

$$\text{o} \quad \mathbf{r}(t) = \langle 3 - 2t, 2 + 2t, -1 + 6t \rangle,$$

donde $0 \leq t \leq 1$. La gráfica de la ecuación vectorial está dada en la FIGURA 3.1.2.

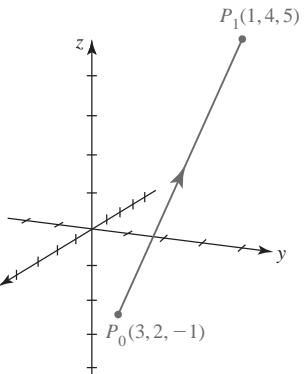


FIGURA 3.1.2 Segmento de recta del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Gráfica de una función vectorial

Grafique la curva C trazada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva C son $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = t$. Al eliminar el parámetro t de las primeras dos ecuaciones,

$$x^2 + y^2 = (2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2 = 2^2,$$

observamos que un punto sobre la curva yace en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. Como advertimos en la FIGURA 3.1.3 y la tabla adjunta a la misma, cuando aumenta el valor de t , la curva se enrolla hacia arriba en una espiral cilíndrica o una hélice circular.

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$
x	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0
y	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2
z	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$

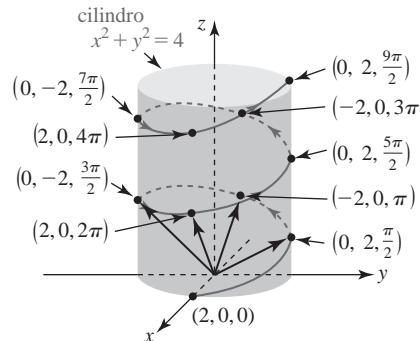


FIGURA 3.1.3 Gráfica de la función vectorial del ejemplo 2

Curvas helicoidales La curva en el ejemplo 2 es una de varios tipos de curvas espaciales conocidas como **curvas helicoidales**. En general, una función vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(t) = a \cos kt \mathbf{i} + a \sin kt \mathbf{j} + ct \mathbf{k} \quad (6)$$

describe una **hélice circular**. El número $2\pi c/k$ recibe el nombre de **horquilla** de una hélice. Una hélice circular es sólo un caso especial de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = a \cos kt \mathbf{i} + b \sin kt \mathbf{j} + ct \mathbf{k}, \quad (7)$$

que describe una **hélice elíptica** cuando $a \neq b$. La curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = at \cos kt \mathbf{i} + bt \sin kt \mathbf{j} + ct \mathbf{k} \quad (8)$$

se denomina **hélice cónica**. Por último, una curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = a \sin kt \cos t \mathbf{i} + a \sin kt \sin t \mathbf{j} + a \cos kt \mathbf{k} \quad (9)$$

se llama **hélice esférica**. En (6)-(9) se supone que a, b, c y k son constantes positivas.

La hélice definida por (6) se enrolla hacia arriba a lo largo del eje z . La horquilla es la separación vertical de los lazos de la hélice.

EJEMPLO 3 Curvas helicoidales

- a) Si se intercambian, por ejemplo, las componentes y y z de la función vectorial (7), obtenemos una hélice elíptica que se enrolla lateralmente a lo largo del eje y . Por ejemplo, con la ayuda de un SAC, la gráfica de la hélice elíptica

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + 2 \sin t \mathbf{k}$$

se muestra en la FIGURA 3.1.4a).

- b) La figura 3.1.4b) muestra la gráfica de

$$\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

e ilustra por qué una función vectorial de la forma dada en (8) define a una hélice cónica. Para mayor claridad, se ha decidido suprimir la caja que por omisión rodea a la salida 3D de *Mathematica*.

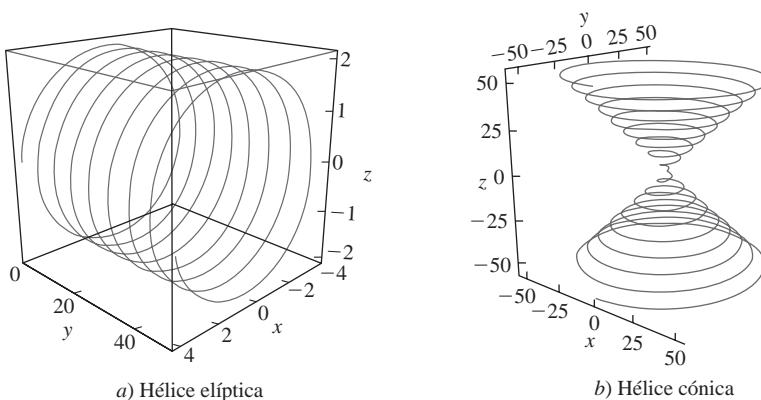


FIGURA 3.1.4 Curvas helicoidales del ejemplo 3

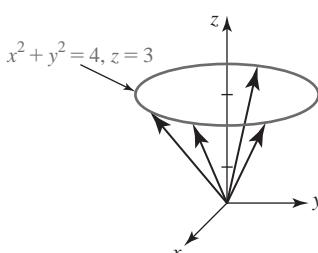


FIGURA 3.1.5 Círculo en un plano en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Gráfica de una función vectorial

Grafique la curva trazada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$.

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son las componentes de la función vectorial $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 3$. Como en el ejemplo 1, advertimos que un punto sobre la curva debe yacer sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Sin embargo, puesto que la coordenada z de cualquier punto tiene el valor constante $z = 3$, la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ traza un círculo en el plano 3 unidades arriba y paralelo al plano xy . Vea la FIGURA 3.1.5.

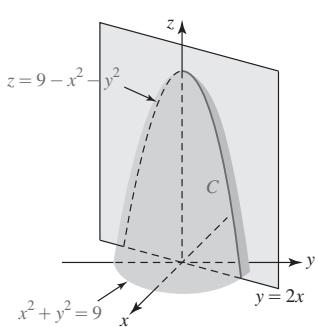


FIGURA 3.1.6 Curva C de intersección del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Curva de intersección de dos superficies

Determine la función vectorial que describe la curva C de intersección del plano $y = 2x$ y el parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solución Primero se parametriza la curva C de intersección dejando $x = t$. Se deduce que $y = 2t$ y $z = 9 - t^2 - (2t)^2 = 9 - 5t^2$. De acuerdo con las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = 9 - 5t^2, \quad -\infty < t < \infty,$$

vemos que una función vectorial que describe el trazo del parabolóide en el plano $y = 2x$ está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + (9 - 5t^2) \mathbf{k}.$$

Vea la FIGURA 3.1.6.

EJEMPLO 6 Curva de intersección de dos cilindros

Encuentre la función vectorial que describe la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$.

Solución En el espacio bidimensional la gráfica de $y = x^2$ es una parábola en el plano xy y por ello en el espacio tridimensional es un cilindro parabólico cuyo bastidor es perpendicular al

plano xy , esto es, paralelo al eje z . Vea la FIGURA 3.1.7a). Por otro lado, $z = x^3$ puede interpretarse como un cilindro cúbico cuyo bastidor es perpendicular al plano xz , esto es, paralelo al eje y . Vea la figura 3.1.7b). Como en el ejemplo 5, si se deja $x = t$, entonces $y = t^2$ y $z = t^3$. Una función vectorial que describe a la curva C de intersección de los dos cilindros es entonces

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad (10)$$

donde $-\infty < t < \infty$.

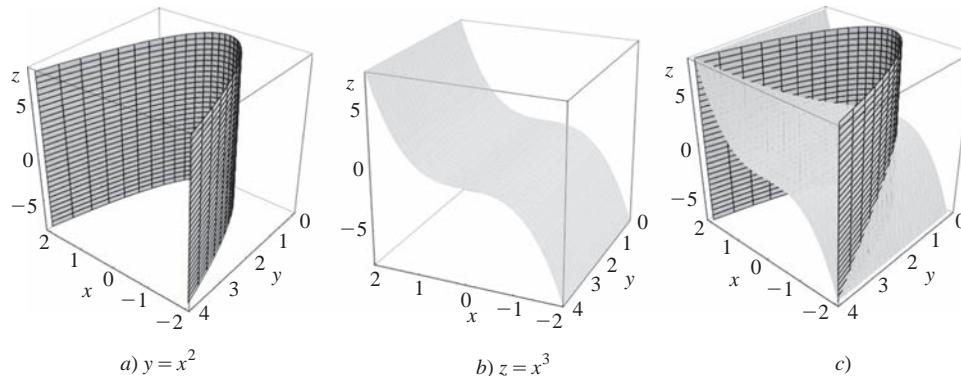
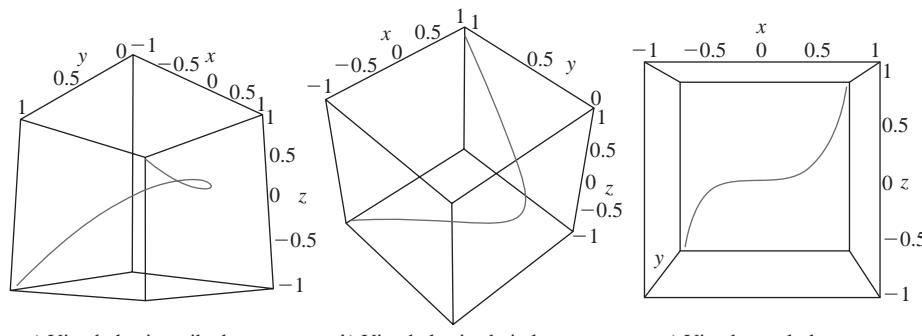


FIGURA 3.1.7 a) y b) dos cilindros; c) curva C de intersección en el ejemplo 6 ■

La curva C definida por la función vectorial (10) recibe el nombre de **cúbica trenzada**. Con la ayuda de un SAC se ha graficado $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en la FIGURA 3.1.8. Las partes a) y b) de la figura muestran dos perspectivas, o puntos de vista, distintas de la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. En la figura 3.1.8c) advertimos la naturaleza cúbica de C utilizando un punto de vista que es hacia el plano xz . La cúbica trenzada tiene varias propiedades de interés para los matemáticos y por ello se estudia frecuentemente en cursos avanzados de geometría algebraica.



a) Viendo hacia arriba la curva b) Viendo hacia abajo la curva

FIGURA 3.1.8 Cúbico trenzado del ejemplo 6

3.1

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-9.

■ Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre el dominio de la función vectorial dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
2. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + \ln(1 - t^2)\mathbf{j}$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} - \operatorname{sen}^{-1} t\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$

En los problemas 5-8, escriba las ecuaciones paramétricas dadas como una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

5. $x = \operatorname{sen} \pi t, y = \cos \pi t, z = -\cos^2 \pi t$
6. $x = \cos^2 t, y = 2 \operatorname{sen}^2 t, z = t^2$
7. $x = e^{-t}, y = e^{2t}, z = e^{3t}$
8. $x = -16t^2, y = 50t, z = 10$

En los problemas 9-12, escriba la función vectorial dada $\mathbf{r}(t)$ como ecuaciones paramétricas.

9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = t \sin t(\mathbf{i} + \mathbf{k})$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = 5 \sin t \sin 3t\mathbf{i} + 5 \cos 3t\mathbf{j} + 5 \cos t \sin 3t\mathbf{k}$

En los problemas 13-22, grafique la curva trazada por la función vectorial que se indica.

13. $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

14. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

16. $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + 3 \sin t\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t} \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + 3 \sinh t\mathbf{j}$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t, 2 \cos t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

20. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

21. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle t \cos t, t \sin t, t^2 \rangle$

En los problemas 23 y 24, grafique la recta cuya función vectorial se indica.

23. $\mathbf{r}(t) = (4 - 4t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

24. $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t)\mathbf{i} + (3 + 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

25. Encuentre una función vectorial para el segmento de recta en el espacio bidimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto $(4, 0)$ hasta el $(0, 3)$. Dibuje el segmento de recta.

26. Determine una función vectorial para el segmento de recta en el espacio tridimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta $(0, 0, 0)$. Dibuje el segmento de recta.

En los problemas 27-32, encuentre la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que describe la curva C de intersección entre las superficies dadas. Dibuje la curva C . Emplee el parámetro indicado.

27. $z = x^2 + y^2, y = x; \quad x = t$

28. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, y = 2x; \quad x = t$

29. $x^2 + y^2 = 9, z = 9 - x^2; \quad x = 3 \cos t$

30. $z = x^2 + y^2, z = 1; \quad x = \sin t$

31. $x + y + z = 1, y = x; \quad x = t$

32. $3x - 2y + z = 6, x = 1; \quad y = t$

En los problemas 33-36, asocie la gráfica indicada con una de las funciones vectoriales en a)-d).

a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + \sin 3t\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}(t) = \sin 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

c) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + (1 - \sin t)\mathbf{k}$

d) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

33.

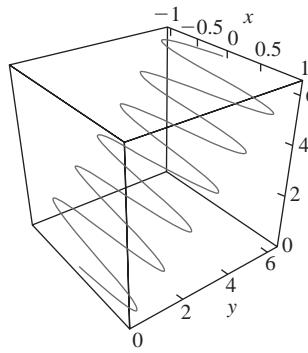


FIGURA 3.1.9 Gráfica del problema 33

34.

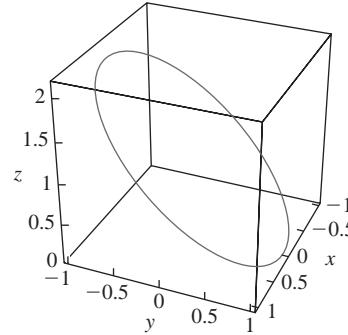


FIGURA 3.1.10 Gráfica del problema 34

35.

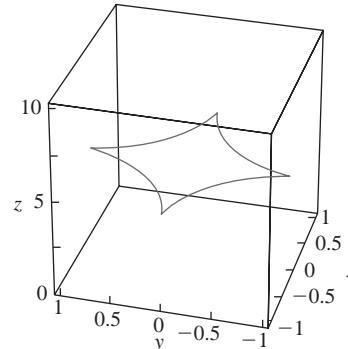


FIGURA 3.1.11 Gráfica del problema 35

36.

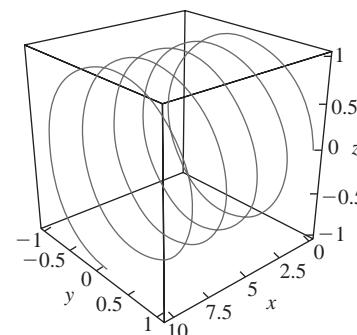


FIGURA 3.1.12 Gráfica del problema 36

37. Demuestre que los puntos sobre una hélice cónica

$$\mathbf{r}(t) = at \cos t\mathbf{i} + bt \sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0$, yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación es

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

38. Una variación de la hélice cónica del problema 37 está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t \cos t\mathbf{j} + t \sin t\mathbf{k}.$$

- a) antes de graficar $\mathbf{r}(t)$ analice la orientación de la curva.
 b) Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$. Experimente con el intervalo del parámetro y el punto de vista de la curva.

39. La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = ae^{kt} \cos t\mathbf{i} + be^{kt} \sin t\mathbf{j} + ce^{kt}\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0, k > 0$ describe también a una hélice cónica. Demuestre que los puntos sobre esta hélice cónica yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación está dada en el problema 37.

40. Un caso especial de la curva en el problema 39 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}e^{0.05t} \cos t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{0.05t} \sin t\mathbf{j} + e^{0.05t}\mathbf{k}.$$

- a) Emplee un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ en relación con $-30 \leq t \leq 30$.
 b) Reexamine la figura 3.1.4b). Luego discuta la diferencia geométrica básica entre la hélice cónica en el problema 37 y la que se da en el problema 39.

41. Demuestre que los puntos sobre una hélice esférica

$$\mathbf{r}(t) = a \sin kt \cos t\mathbf{i} + a \sin kt \sin t\mathbf{j} + a \cos kt\mathbf{k}$$

yacen sobre una esfera de radio $a > 0$.

42. Un caso especial de la curva en el problema 41 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \sin kt \cos t\mathbf{i} + \sin kt \sin t\mathbf{j} + \cos kt\mathbf{k}.$$

Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ respecto a $k = 1, 2, 3, 4, 10, 20$ y $0 \leq t \leq 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de las gráficas.

43. a) Use un SAC para superponer las gráficas de los cilindros $z = 4 - x^2$ y $z = 4 - y^2$ sobre los mismos ejes de coordenadas.

- b) Encuentre funciones vectoriales que describan las dos curvas de intersección de los cilindros.
 c) Emplee un SAC para dibujar ambas curvas en el inciso b). Superponga las curvas sobre los mismos ejes de coordenadas. Experimente con la perspectiva hasta que la visualización de las gráficas tenga sentido.

44. Suponga que $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial no constante que define a una curva C con la propiedad $|\mathbf{r}(t)| = a$, donde $a > 0$ es una constante. Describa geométricamente a la curva C .

Problemas con calculadora/SAC

45. Use un SAC para graficar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (10 + \sin 20t)\cos t\mathbf{i} + (10 + \sin 20t)\sin t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. Discuta por qué la curva se denomina una **espiral toroidal**.

46. Utilice un SAC para graficar la función vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & \cos(\arctan kt)\cos t\mathbf{i} + \cos(\arctan kt)\sin t\mathbf{j} \\ & - \sin(\arctan kt)\mathbf{k} \end{aligned}$$

para $-10\pi \leq t \leq 10\pi$ y $k = 0.1, 0.2, 0.3$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. La curva se conoce como **espiral esférica**.

En los problemas 47 y 48, emplee un SAC para graficar la función vectorial dada relativa a los valores indicados de k . Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica.

47. $\mathbf{r}(t) = \sin kt \cos t\mathbf{i} + \sin kt \sin t\mathbf{j} + \cos kt\mathbf{k}; \quad k = 2, 4$

48. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \ln(kt)\sin t\mathbf{k}; \quad k = \frac{1}{10}, 1$

3.2 Cálculo de funciones vectoriales

Introducción En esta sección consideraremos el cálculo de funciones de valores vectoriales, en otras palabras, límites, derivadas e integrales de función vectorial. Como los conceptos son similares a los que se discutieron en la sección 2.2, se recomienda un repaso de esa sección.

Límites y continuidad La noción fundamental de **límite** de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ se define en términos de los límites de las funciones componentes.

Definición 3.2.1 Límite de una función vectorial

Si $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow a} g(t)$ y $\lim_{t \rightarrow a} h(t)$ existe, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right\rangle. \quad (1)$$

El símbolo $t \rightarrow a$ en la definición 3.2.1 puede, desde luego, sustituirse por $t \rightarrow a^+$, $t \rightarrow a^-$, $t \rightarrow \infty$, o $t \rightarrow -\infty$.

Como una consecuencia inmediata de la definición 3.2.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1 Propiedades de los límites

Suponga que a es un número real y $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_1(t)$ y $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_2(t)$ existe. Si $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{L}_1$ y $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_2$, entonces

- i) $\lim_{t \rightarrow a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, c un escalar
- ii) $\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$
- iii) $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2$.

Definición 3.2.2 Continuidad

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua** en el número a si

- i) $\mathbf{r}(a)$ es definido,
- ii) $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t)$ existe y
- iii) $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.

Equivalentemente la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ es continua en un número a si y sólo si las funciones componentes f , g y h son continuas en a . Por brevedad, a menudo afirmamos que una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en un número a si

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a). \quad (2)$$

Escribiendo (2) se supone que las condiciones i) y ii) de la definición 3.2.2 se cumplen en un número a .

■ Derivada de una función vectorial La definición de derivada $\mathbf{r}'(t)$ de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es el equivalente vectorial de la definición de derivada de una función real de variable real. En la siguiente definición se asume que h representa a un número real distinto de cero.

Definición 3.2.3 Derivada de una función vectorial

La **derivada** de una función vectorial \mathbf{r} es

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h} \quad (3)$$

para toda t para la cual existe el límite.

La derivada de \mathbf{r} también se escribe $d\mathbf{r}/dt$. El siguiente teorema muestra que en un nivel práctico, se obtiene la derivada de una función vectorial diferenciando simplemente sus funciones componentes.

Teorema 3.2.2 Diferenciación

Si las funciones componentes f , g y h son diferenciables, entonces la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ está dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle. \quad (4)$$

DEMOSTRACIÓN De (3) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\langle f(t+h), g(t+h), h(t+h) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \frac{g(t+h) - g(t)}{h}, \frac{h(t+h) - h(t)}{h} \right\rangle \\ &= \left\langle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h} \right\rangle \\ &= \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle.\end{aligned}$$

■

Curvas suaves Cuando las funciones componentes de una función vectorial \mathbf{r} tienen primeras derivadas continuas y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para toda t en un intervalo abierto (a, b) , entonces \mathbf{r} se dice que es una **función suave** y la curva C trazada por \mathbf{r} se denomina **curva suave**.

Interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$ Si el vector $\mathbf{r}'(t)$ existe y no es $\mathbf{0}$ en el punto P sobre la curva C definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, entonces la derivada $\mathbf{r}'(t)$ se define como el **vector tangente** a la curva en P . Como puede verse en las FIGURAS 3.2.1a) y b), para $h > 0$ el vector $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ y el múltiplo escalar

$$\frac{1}{h}[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)] = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

son paralelos. Suponiendo que el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

existe, entonces los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t+h)$ se vuelven cada vez más cercanos cuando $h \rightarrow 0$. Como sugieren las figuras 3.2.1b) y c), la posición límite del vector $[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)]/h$ es un vector sobre la recta tangente en P . También definimos la **recta tangente** como la recta que pasa por P que es paralela al vector $\mathbf{r}'(t)$.

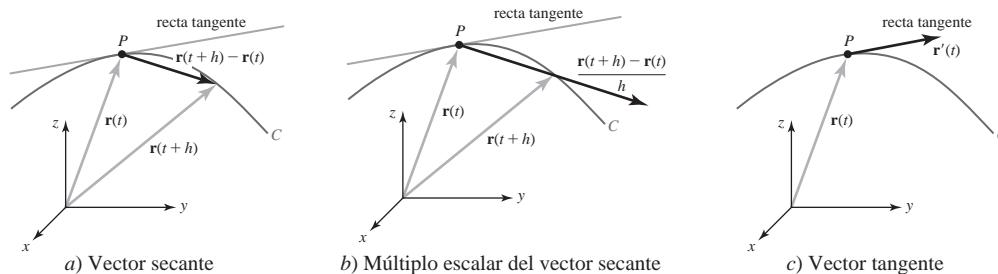


FIGURA 3.2.1 Vector tangente en P sobre una curva C

EJEMPLO 1 El vector $\mathbf{r}'(t)$

Considere la curva C en el espacio bidimensional que es trazada por un punto P cuya posición está dada por $\mathbf{r}(t) = \cos 2t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j}$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Encuentre la derivada $\mathbf{r}'(t)$ y grafique los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$.

Solución La curva C es suave debido a que las funciones componentes de $\mathbf{r}(t) = \cos 2t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j}$ tienen derivadas continuas y $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ sobre el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. De (4),

$$\mathbf{r}'(t) = -2 \operatorname{sen} 2t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j}.$$

En consecuencia, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j}$ y $\mathbf{r}'(\pi/6) = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$.

Para graficar C primero eliminamos el parámetro de las ecuaciones paramétricas $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$:

$$x = \cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2y^2.$$

Puesto que $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, advertimos que la curva C es la porción de la parábola $x = 1 - 2y^2$ sobre el intervalo definido por $-1 \leq x \leq 1$. Los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$ se dibujan tangentes a la curva C en $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, respectivamente. Vea la FIGURA 3.2.2.

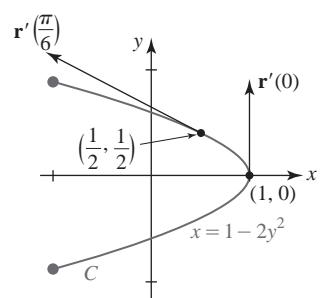


FIGURA 3.2.2 Curva C y vectores del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = t^2 - t$, $z = -7t$ en el punto correspondiente a $t = 3$.

Solución La función vectorial que produce la posición de un punto P sobre la curva está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}$. Ahora,

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \quad y \quad \mathbf{r}'(3) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

El vector $\mathbf{r}'(3)$ es tangente a C en el punto P cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k},$$

esto es, en el punto $P(9, 6, -21)$. Al emplear las componentes de $\mathbf{r}'(3)$, advertimos que las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son

$$x = 9 + 6t, y = 6 + 5t, z = -21 - 7t. \quad \blacksquare$$

I Derivadas de orden superior Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen también diferenciando sus componentes. En el caso de la **segunda derivada**, tenemos

$$\mathbf{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t) \rangle = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}. \quad (5)$$

EJEMPLO 3 Vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$

Si $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}''(t) = (6t - 4)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

En el siguiente teorema se enlistan algunas reglas de diferenciación para funciones vectoriales.

Teorema 3.2.3 Reglas de diferenciación

Considere que \mathbf{r} , \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son funciones vectoriales diferenciables y $f(t)$ es una función escalar diferenciable.

- i) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}'_1(t) + \mathbf{r}'_2(t)$
- ii) $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$
- iii) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(f(t))] = \mathbf{r}'(f(t))f'(t)$ (regla de la cadena)
- iv) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) + \mathbf{r}'_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$
- v) $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}'_2(t) + \mathbf{r}'_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$

DEMOSTRACIÓN DE iv) Si $\mathbf{r}_1(t) = \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t) \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle f_2(t), g_2(t), h_2(t) \rangle$, entonces por (2) de la sección 1.3 el producto punto es la función escalar

$$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t) + h_1(t)h_2(t).$$

Después de usar la regla del producto agrupamos los términos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) &= \frac{d}{dt}f_1(t)f_2(t) + \frac{d}{dt}g_1(t)g_2(t) + \frac{d}{dt}h_1(t)h_2(t) \\ &= f_1(t)f'_2(t) + f'_1(t)f_2(t) + g_1(t)g'_2(t) + g'_1(t)g_2(t) + h_1(t)h'_2(t) + h'_1(t)h_2(t) \\ &= \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t) \rangle \cdot \langle f'_2(t), g'_2(t), h'_2(t) \rangle + \langle f'_1(t), g'_1(t), h'_1(t) \rangle \cdot \langle f_2(t), g_2(t), h_2(t) \rangle \\ &= \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}'_2(t) + \mathbf{r}'_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nota: Puesto que el producto cruz de dos vectores no es commutativo, el orden en el cual \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 aparecen en la parte v) del teorema 3.2.3 debe observarse estrictamente. Desde luego, en iv) y v) podemos efectuar el producto punto y el producto cruz primero y después diferenciar el escalar o la función vectorial resultantes.

■ Integrales de funciones vectoriales Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es una función vectorial continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces la integral indefinida de \mathbf{r} está definida por

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \left[\int f(t)dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t)dt \right] \mathbf{j} + \left[\int h(t)dt \right] \mathbf{k}.$$

La integral indefinida de \mathbf{r} es otro vector $\mathbf{R} + \mathbf{C}$, donde \mathbf{C} es un *vector constante*, tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Debido a la continuidad de las funciones componentes f , g y h , la integral definida de $\mathbf{r}(t)$ sobre $[a, b]$ puede definirse como

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{r}(t)dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}(t_k^*) \Delta t \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k^*) \Delta t \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(t_k^*) \Delta t \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n h(t_k^*) \Delta t \right] \mathbf{k}. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left[\int_a^b f(t)dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)dt \right] \mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)dt \right] \mathbf{k}.$$

El teorema fundamental del cálculo, extendido a funciones vectoriales, es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t) \Big|_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a),$$

donde \mathbf{R} es una función vectorial tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 4 Integrales

a) Si $\mathbf{r}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j} + 8 \cos 4t\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r}(t)dt &= \left[\int 6t^2 dt \right] \mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t} dt \right] \mathbf{j} + \left[\int 8 \cos 4t dt \right] \mathbf{k} \\ &= [2t^3 + c_1] \mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2] \mathbf{j} + [2 \sin 4t + c_3] \mathbf{k} \\ &= 2t^3 \mathbf{i} - 2e^{-2t} \mathbf{j} + 2 \sin 4t \mathbf{k} + \mathbf{C}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Las componentes c_1 , c_2 y c_3 del último vector son constantes reales arbitrarias.

b) Si $\mathbf{r}(t) = (4t - 3)\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + \frac{2}{1+t^2}\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathbf{r}(t)dt &= (2t^2 - 3t)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 2 \tan^{-1} t \mathbf{k} \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2 \cdot \frac{\pi}{4} \mathbf{k} \right) - \left(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \mathbf{k} \right) \\ &= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}. \end{aligned}$$

■

■ Longitud de una curva espacial En la sección 2.2 vimos que la fórmula de la longitud de arco para una curva suave C en el espacio bidimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

De manera similar, si C es una curva suave en el espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leq t \leq b,$$

entonces como hicimos en la sección 2.2 podemos construir una integral definida utilizando una trayectoria poligonal, como se ilustra en la FIGURA 3.2.3, para llegar a la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (6)$$

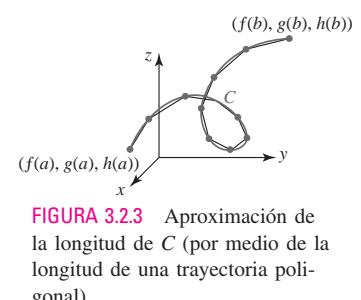


FIGURA 3.2.3 Aproximación de la longitud de C (por medio de la longitud de una trayectoria poligonal)

que define la **longitud** L de la curva entre los puntos $(f(a), g(a), h(a))$ y $(f(b), g(b), h(b))$. Si la curva C se traza por medio de una función suave de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ puede expresarse en términos de la magnitud de $\mathbf{r}'(t)$:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (7)$$

En (7), $|\mathbf{r}'(t)|$ es

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \quad \text{o} \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

dependiendo de si C está en el espacio bidimensional o tridimensional, respectivamente.

■ Función de la longitud de arco

La integral definida

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du \quad (8)$$

se llama la **función de longitud de arco** para la curva C . En (8) el símbolo u es una variable de integración sustituta. La función $s(t)$ representa la longitud de C entre los puntos sobre la curva definida por los vectores de posición $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$. Muchas veces es útil parametrizar una curva suave C en el plano o en el espacio en términos de la longitud de arco s . Al evaluar (8) se expresa s como una función del parámetro t . Si podemos resolver esa ecuación para t en términos de s , entonces es factible expresar $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ o $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ como

$$\mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s) \rangle \quad \text{o} \quad \mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s), z(s) \rangle.$$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para determinar una **parametrización de longitud de arco** $\mathbf{r}(s)$ para una curva C .

EJEMPLO 5 Una parametrización de longitud de arco

Encuentre una parametrización de longitud de arco de la hélice circular del ejemplo 2 de la sección 3.1:

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}.$$

Solución De $\mathbf{r}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ se encuentra $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5}$. Se deduce de (8) que la longitud de la curva empezando en $\mathbf{r}(0)$ hasta un punto arbitrario definido por $\mathbf{r}(t)$ es

$$s = \int_0^t \sqrt{5} du = \sqrt{5} u \Big|_0^t = \sqrt{5} t.$$

Al resolver $s = \sqrt{5}t$ para t se encuentra que $t = s/\sqrt{5}$. Al sustituir respecto a t en $\mathbf{r}(t)$ obtenemos una función vectorial de la hélice como una función de la longitud de arco:

$$\mathbf{r}(s) = 2 \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + 2 \sin \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{k}. \quad (9)$$

Las ecuaciones paramétricas de la hélice son entonces

$$x = 2 \cos \frac{s}{\sqrt{5}}, \quad y = 2 \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, \quad z = \frac{s}{\sqrt{5}}.$$

Advierta que la derivada de la función vectorial (9) respecto a la longitud de arco s es

$$\mathbf{r}'(s) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{k}$$

y su magnitud es

$$|\mathbf{r}'(s)| = \sqrt{\frac{4}{5} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1.$$

El hecho de que $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ indica que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. Esto no es coincidencia. Como hemos visto, la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con respecto al parámetro t es un vector

Es particularmente fácil encontrar una parametrización de longitud de arco de una recta

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Vea el problema 49 en los ejercicios 3.2.

tangente a la curva C trazada por \mathbf{r} . Sin embargo, si la curva C se parametriza en términos de la longitud de arco s , entonces:

- La derivada $\mathbf{r}'(s)$ es un vector tangente unitario. (10)

Para ver por qué esto es así, recuerde que la forma de la derivada del teorema fundamental del cálculo muestra que la derivada de (8) con respecto a t es

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|. \quad (11)$$

Sin embargo, si la curva C es descrita por una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$, entonces (8) muestra que la longitud s de la curva de $\mathbf{r}(0)$ a $\mathbf{r}(s)$ es

$$s = \int_0^s |\mathbf{r}'(u)| du. \quad (12)$$

Como $\frac{d}{ds}s = 1$, la derivada de (12) con respecto a s es

$$\frac{d}{ds}s = |\mathbf{r}'(s)| \quad \text{o} \quad |\mathbf{r}'(s)| = 1.$$

En la siguiente sección veremos por qué (10) es importante.

3.2

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-4, evalúe el límite dado o enuncie que éste no existe.

1. $\lim_{t \rightarrow 2} [t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^5\mathbf{k}]$

2. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin 2t}{t}\mathbf{i} + (t-2)^5\mathbf{j} + t \ln t\mathbf{k} \right]$

3. $\lim_{t \rightarrow 1} \left\langle \frac{t^2-1}{t-1}, \frac{5t-1}{t+1}, \frac{2e^{t-1}-2}{t-1} \right\rangle$

4. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{e^{2t}}{2e^{2t}+t}, \frac{e^{-t}}{2e^{-t}+5}, \tan^{-1} t \right\rangle$

En los problemas 5 y 6, suponga que

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Encuentre el límite dado.

5. $\lim_{t \rightarrow a} [-4\mathbf{r}_1(t) + 3\mathbf{r}_2(t)]$

6. $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

En los problemas 7 y 8, determine si la función vectorial indicada es continua en $t = 1$.

7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$

8. $\mathbf{r}(t) = \sin \pi t\mathbf{i} + \tan \pi t\mathbf{j} + \cos \pi t\mathbf{k}$

En los problemas 9 y 10, encuentre los dos vectores indicados para la función vectorial dada.

9. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + (5t^2-t)\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}'(1), \frac{\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)}{0.1}$

10. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+5t}\mathbf{i} + (3t^2+t)\mathbf{j} + (1-t)^3\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}'(0), \frac{\mathbf{r}(0.05) - \mathbf{r}(0)}{0.05}$

En los problemas 11-14, determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para la función vectorial dada.

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t > 0$

12. $\mathbf{r}(t) = \langle t \cos t - \sin t, t + \cos t \rangle$

13. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, t^3, 4t^2 - t \rangle$

14. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \tan^{-1} t\mathbf{k}$

En los problemas 15-18, grafique la curva C que es descrita por $\mathbf{r}(t)$ y grafique $\mathbf{r}'(t)$ en el punto correspondiente al valor indicado de t .

15. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 6 \sin t\mathbf{j}; \quad t = \pi/6$

16. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; \quad t = -1$

17. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{4}{1+t^2}\mathbf{k}; \quad t = 1$

18. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; \quad t = \pi/4$

En los problemas 19 y 20, encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t .

19. $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3; \quad t = 2$

20. $x = t^3 - t, y = \frac{6t}{t+1}, z = (2t+1)^2; \quad t = 1$

En los problemas 21 y 22, determine un vector tangente unitario para la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t . Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente en este punto.

21. $\mathbf{r}(t) = te^t\mathbf{i} + (t^2 + 2t)\mathbf{j} + (t^3 - t)\mathbf{k}; \quad t = 0$

22. $\mathbf{r}(t) = (1 + \sin 3t)\mathbf{i} + \tan 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = \pi$

En los problemas 23 y 24, encuentre una función vectorial de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t .

23. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle; \quad t = \pi/3$

24. $\mathbf{r}(t) = \langle 6e^{-t/2}, e^{2t}, e^{3t} \rangle; \quad t = 0$

En los problemas 25-30, determine la derivada indicada. Suponga que todas las funciones vectoriales son diferenciables.

25. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)]$

26. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}(t))]$

27. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))]$

28. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1(t) \times (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$

29. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1(2t) + \mathbf{r}_2(1/t)]$

30. $\frac{d}{dt} [t^3 \mathbf{r}(t^2)]$

En los problemas 31-34, evalúe la integral dada.

31. $\int_{-1}^2 (t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}) dt$

32. $\int_0^4 (\sqrt{2t+1}\mathbf{i} - \sqrt{t}\mathbf{j} + \sin \pi t \mathbf{k}) dt$

33. $\int (te^t\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j} + te^{t^2}\mathbf{k}) dt$ 34. $\int \frac{1}{1+t^2}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}) dt$

En los problemas 35-38, encuentre una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que satisfaga las condiciones indicadas.

35. $\mathbf{r}'(t) = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}'(t) = t \sin t^2 \mathbf{i} - \cos 2t \mathbf{j}; \quad \mathbf{r}(0) = \frac{3}{2}\mathbf{i}$

37. $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 3t^{-1/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{j}, \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}''(t) = \sec^2 t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} - \sin t \mathbf{k};$
 $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}(0) = -\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 39-42, encuentre la longitud de la curva trazada por la función vectorial dada en el intervalo que se indica.

39. $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} + t \sin t \mathbf{k}; \quad 0 \leq t \leq \pi$

41. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos 2t \mathbf{i} + e^t \sin 2t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}; \quad 0 \leq t \leq 3\pi$

42. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + \sqrt{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}; \quad 0 \leq t \leq 1$

En los problemas 43-46, emplee (8) y la integración de $u = 0$ a $u = t$ para determinar una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$ para la curva dada. Verifique que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.

43. $\mathbf{r}(t) = 9 \sin t \mathbf{i} + 9 \cos t \mathbf{j}$

44. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t \mathbf{i} + 12t\mathbf{j} + 5 \sin t \mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (5 - 3t)\mathbf{j} + (2 + 4t)\mathbf{k}$

46. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}$

☰ Piense en ello

47. Suponga que \mathbf{r} es una función vectorial diferenciable para la cual $|\mathbf{r}(t)| = c$ para toda t . Demuestre que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para toda t .

48. Si \mathbf{v} es un vector constante y $\mathbf{r}(t)$ es integrable sobre $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t) dt$.

49. Suponga que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ es una ecuación vectorial de una recta, donde \mathbf{r}_0 y \mathbf{v} son vectores constantes. Utilice la función de longitud de arco $s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du$ para demostrar que una parametrización de longitud de arco de la recta está dada por $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Demuestre que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. En otras palabras, para obtener una parametrización de longitud de arco de una recta sólo se necesita normalizar al vector \mathbf{v} .

50. Emplee los resultados del problema 49 para encontrar una parametrización de longitud de arco de cada una de las siguientes rectas.

a) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 3t, 2 - 4t \rangle = \langle 1, 2 \rangle + t\langle 3, -4 \rangle$

b) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1 + 2t, 10 - t \rangle$

3.3 Movimiento sobre una curva

■ **Introducción** Suponga que una partícula o cuerpo se mueve a lo largo de la curva C de manera que su posición en el tiempo t está dada por la función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Podemos describir la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de derivadas de $\mathbf{r}(t)$.

■ **Velocidad y aceleración** Si f, g y h tienen segundas derivadas, entonces los vectores

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

se denominan la **velocidad** y la **aceleración** de la partícula, respectivamente. La función escalar

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \quad (3)$$

es la **rapidez** de la partícula. La rapidez se relaciona con la longitud de arco. De (7) de la sección 3.2 se observa que si una curva C es trazada por una función de valores vectoriales suave

$\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ está dada por $L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$. En vista de (1) y (3), esto es lo mismo que

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (4)$$

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ es la posición de la partícula sobre la curva C en el tiempo t_1 , entonces en vista de la discusión en la sección 3.2 acerca de la interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$ concluimos que

- $\mathbf{v}(t_1)$ es tangente a la curva C en P .

Se hacen comentarios similares para curvas trazadas por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$.

EJEMPLO 1 Gráfica de la velocidad y la aceleración

La posición de una partícula en movimiento está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{5}{2}t\mathbf{k}$. Grafique la curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ y los vectores $\mathbf{v}(2)$ y $\mathbf{a}(2)$.

Solución Puesto que $x = t^2$, $y = t$, la trayectoria de la partícula está por arriba de la parábola $x = y^2$ que yace en el plano xy . Cuando $t = 2$, el vector de posición $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ indica que la partícula está en el punto $P(4, 2, 5)$ sobre C . Ahora,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}$$

de modo que $\mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}$.

Estos vectores se ilustran en la FIGURA 3.3.1.

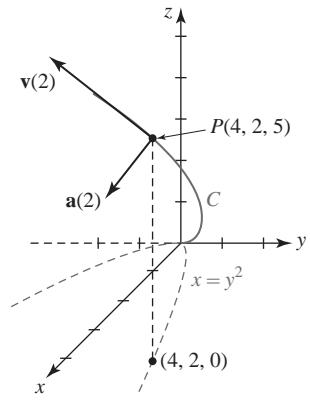


FIGURA 3.3.1 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 1

Si una partícula se mueve con una rapidez constante c , entonces su vector de aceleración es perpendicular al vector de velocidad \mathbf{v} . Para ver lo anterior, advierta que

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2 \quad \text{o} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c^2.$$

Diferenciamos ambos lados con respecto a t , y con la ayuda del teorema 3.2.3iv) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Entonces, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 0$ o $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ para toda t . (5)

EJEMPLO 2 Gráfica de la velocidad y la aceleración

Suponga que la función vectorial del ejemplo 4 de la sección 3.1 representa la posición de una partícula que se mueve en una órbita circular. Grafique los vectores de velocidad y aceleración en $t = \pi/4$.

Solución La función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

es el vector de posición de una partícula que se mueve en una órbita circular de radio 2 en el plano $z = 3$. Cuando $t = \pi/4$, la partícula está en el punto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$. En este caso,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2 \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j}$$

$$\text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2 \cos t\mathbf{i} - 2 \sin t\mathbf{j}.$$

Puesto que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = 2$ es constante para todo tiempo t , se sigue de (5) que $\mathbf{a}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{v}(t)$. (Verifique lo anterior.) Como se muestra en la FIGURA 3.3.2, los vectores

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2 \cos \frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\text{y} \quad \mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{4}\mathbf{i} - 2 \sin \frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

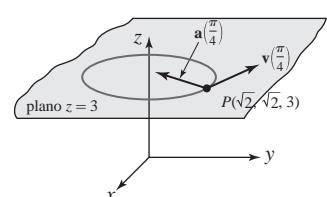


FIGURA 3.3.2 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 2

se dibujan en el punto P . El vector $\mathbf{v}(\pi/4)$ es tangente a la trayectoria circular en tanto que $\mathbf{a}(\pi/4)$ apunta a lo largo de un radio hacia el centro del círculo. ■

Aceleración centrípeta Para el movimiento circular en el plano, descrito mediante $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t \mathbf{i} + r_0 \sin \omega t \mathbf{j}$, r_0 y ω constantes, es evidente que $\mathbf{r}'' = -\omega^2 \mathbf{r}$. Esto significa que el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ apunta en la dirección opuesta a la del vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Afirmando entonces que $\mathbf{a}(t)$ es la **aceleración centrípeta**. Vea la FIGURA 3.3.3. Si $v = |\mathbf{v}(t)|$ y $a = |\mathbf{a}(t)|$, se deja como ejercicio demostrar que $a = v^2/r_0$. Vea el problema 17 en los ejercicios 3.3.

Movimiento curvilíneo en el plano Muchas aplicaciones importantes de las funciones vectoriales ocurren en la descripción del movimiento curvilíneo en un plano. Por ejemplo, los movimientos planetarios y de proyectiles se efectúan en un plano. Al analizar el movimiento de proyectiles balísticos de corto alcance, se empieza con la aceleración de la gravedad escrita en forma vectorial

$$\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}.$$

Si, como se ilustra en la FIGURA 3.3.4, se lanza un proyectil con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}$, desde una altura inicial $\mathbf{s}_0 = s_0 \mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \int (-g\mathbf{j}) dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1,$$

donde $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ implica que $\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0$. Por tanto,

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \theta) \mathbf{i} + (-gt + v_0 \sin \theta) \mathbf{j}.$$

Al integrar de nuevo y utilizar $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t \mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + s_0 \right] \mathbf{j}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil son

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + s_0. \quad (6)$$

Vea (3) de la sección 2.1.

Existe un interés natural en determinar la altura máxima H y la distancia horizontal R máxima, o alcance, a la que llega el proyectil. Como se muestra en la FIGURA 3.3.5, estas cantidades son los valores máximos de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente. Para calcular estos valores se determinan los tiempos t_1 y $t_2 > 0$ para los cuales $y'(t_1) = 0$ y $y(t_2) = 0$, respectivamente. Luego

$$H = y_{\max} = y(t_1) \quad y \quad R = x_{\max} = x(t_2). \quad (7)$$

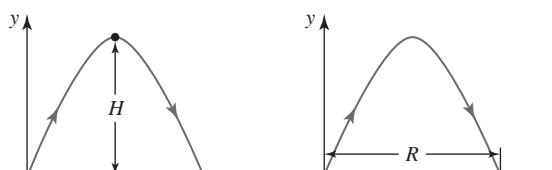


FIGURA 3.3.4 Proyectil balístico
a) Altura máxima H
b) Alcance R

FIGURA 3.3.5 Altura y alcance máximos de un proyectil

EJEMPLO 3 Movimiento de proyectiles

Un obús es lanzado desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 768 pies/s a un ángulo de elevación de 30° . Encuentre

- a) la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,
- b) la altura máxima alcanzada,
- c) el alcance del obús y
- d) la rapidez en el impacto.

Solución

- a) En términos de vectores, la posición inicial del proyectil es $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ y su velocidad inicial corresponde a

$$\mathbf{v}_0 = (768 \cos 30^\circ) \mathbf{i} + (768 \sin 30^\circ) \mathbf{j} = 384\sqrt{3} \mathbf{i} + 384 \mathbf{j}. \quad (8)$$

Al integrar $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ y utilizar (8), se obtiene

$$\mathbf{v}(t) = (384\sqrt{3})\mathbf{i} + (-32t + 384)\mathbf{j}. \quad (9)$$

Al integrar (9) y emplear $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ se encuentra la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (384\sqrt{3}t)\mathbf{i} + (-16t^2 + 384t)\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús son

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \quad y(t) = -16t^2 + 384t. \quad (10)$$

- b) De (10) advertimos que $dy/dt = 0$ cuando

$$-32t + 384 = 0 \quad \text{o} \quad t = 12.$$

Entonces, de acuerdo con la primera parte de (7), la altura máxima H alcanzada por el obús es

$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2\,304 \text{ pies.}$$

- c) De (6) vemos que $y(t) = 0$ cuando

$$-16t(t - 24) = 0 \quad \text{o} \quad t = 0, t = 24.$$

De la segunda parte de (7), el alcance R del obús es

$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15\,963 \text{ pies.}$$

- d) De (9) obtenemos la rapidez de impacto del obús:

$$|\mathbf{v}(24)| = \sqrt{(384\sqrt{3})^2 + (-384)^2} = 768 \text{ pies/s.} \quad \blacksquare$$

r(t) NOTAS DESDE EL AULA

La tasa de cambio de la longitud de arco dL/dt es la misma que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, *no* se deduce que la *aceleración escalar* d^2L/dt^2 es la misma que $|\mathbf{a}(t)| = |\mathbf{r}''(t)|$. Vea el problema 18 en los ejercicios 3.3.

3.3

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1-8, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Grafique la curva y los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo indicado. Encuentre la rapidez en ese tiempo.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^4\mathbf{j}; \quad t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t^2}\mathbf{j}; \quad t = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = -\cosh 2t\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\mathbf{j}; \quad t = 0$

4. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/3$

5. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (t - 1)^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 2$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 1$

9. Suponga que $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 5t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento.

- a) ¿En qué puntos la partícula pasa por el plano xy ?

- b) ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en los puntos del inciso a)?

10. Suponga que una partícula se mueve en el espacio de manera que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ para todo tiempo t . Describa su trayectoria.

11. Un obús se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 480 pies/s a un ángulo de elevación de 30° . Encuentre:

a) una función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,

b) la altura máxima alcanzada,

c) el alcance del obús y

d) la rapidez en el impacto.

12. Vuelva a trabajar el problema 11 si el obús se lanza con la misma rapidez inicial y el mismo ángulo de elevación pero desde un acantilado a 1 600 pies de altura.

13. Un automóvil se empuja con una rapidez de 4 pies/s desde un escarpado acantilado frente al mar que tiene una altura de 81 pies. Encuentre la rapidez a la cual el automóvil golpea el agua.

14. Un pequeño proyectil se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 98 m/s. Encuentre los ángulos posibles de elevación de manera que su alcance sea de 490 m.

15. Un mariscal de campo de fútbol americano lanza una “bomba” de 100 yardas a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón en el punto de lanzamiento?

16. Un mariscal de campo lanza un balón de fútbol con la misma rapidez inicial a un ángulo de 60° desde la horizontal y después a un ángulo de 30° desde la horizontal. Muestre que el alcance del balón es el mismo en cada caso. Generalice este resultado para cualquier ángulo de lanzamiento $0 < \theta < \pi/2$.

17. Suponga que $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t \mathbf{i} + r_0 \sin \omega t \mathbf{j}$ es el vector de posición de un objeto que se está moviendo en un círculo de radio r_0 en el plano xy . Si $|\mathbf{v}(t)| = v$, muestre que la magnitud de la aceleración centrípeta es $a = |\mathbf{a}(t)| = v^2/r_0$.

18. El movimiento de una partícula en el espacio tridimensional se describe mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

a) Calcule $|\mathbf{v}(t)|$.

b) Calcule la función de longitud de arco $s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(u)| du$ y verifique que ds/dt es la misma que el resultado del inciso a).

c) Verifique que $d^2s/dt^2 \neq |\mathbf{a}(t)|$.

Aplicaciones

19. Se lanza un proyectil desde un cañón directamente a un blanco que se deja caer desde el reposo en forma simultánea cuando se dispara el cañón. Demuestre que el proyectil golpeará al blanco en el aire. Vea la FIGURA 3.3.6. [Sugerencia: Suponga que el origen está en la boca del cañón y que el ángulo de elevación es θ . Si \mathbf{r}_p y \mathbf{r}_t son los vectores de posición del proyectil y el blanco, respectivamente, ¿hay algún tiempo en el cual $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$?]

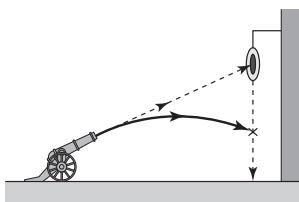


FIGURA 3.3.6 Cañón y blanco del problema 19

20. Para dar abasto a las víctimas de un desastre natural, se dejan caer simplemente equipo sólido y resistente así como paquetes de suministros de alimentos/medicinas desde aviones que vuelan horizontalmente a baja rapidez y altura. Un avión de suministros viaja horizontalmente sobre un blanco a una altura de 1 024 pies y una rapidez constante de 180 mi/h. Emplee (2) para determinar la distancia horizontal que recorre un paquete de suministros con relación al punto desde el cual se dejó caer. ¿A qué ángulo de la línea visual α debe soltarse el paquete de suministro para que dé en el blanco indicado en la FIGURA 3.3.7?

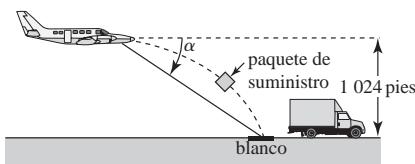


FIGURA 3.3.7 Avión de suministro del problema 20

21. El **peso efectivo** w_e de un cuerpo de masa m en el ecuador de la Tierra se define mediante $w_e = mg - ma$, donde a es la magnitud de la aceleración centrípeta dada en el problema 17. Determine el peso efectivo de una persona de 192 lb si el radio de la Tierra es de 4 000 mi, $g = 32 \text{ pies/s}^2$ y $v = 1\,530 \text{ pies/s}$.

22. Considere un ciclista que viaja sobre una pista circular plana de radio r_0 . Si m es la masa combinada del ciclista y la bicicleta, llene los blancos de la FIGURA 3.3.8. [Sugerencia: Refiérase al problema 17 y a *fuerza = masa × aceleración*. Suponga que las direcciones positivas son hacia arriba y a la izquierda.] El vector **resultante** \mathbf{U} da la dirección a la cual el ciclista debe inclinarse para evitar caer. Encuentre el ángulo ϕ respecto de la vertical al cual el ciclista debe inclinarse si su rapidez es de 44 pies/s y el radio de la pista es de 60 pies.

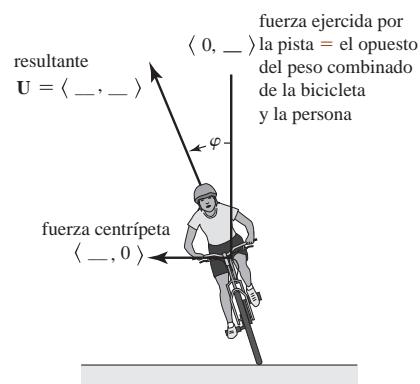


FIGURA 3.3.8 Ciclista del problema 22

23. Emplee el resultado que se obtuvo en (6) para demostrar que la trayectoria de un proyectil balístico es parabólica.
24. Se lanza un proyectil con una rapidez inicial v_0 desde el suelo a un ángulo de elevación θ . Emplee (6) para demostrar que la altura y el alcance máximos del proyectil son

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g} \quad \text{y} \quad R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g},$$

respectivamente.

25. La velocidad de una partícula que se mueve en un fluido se describe por medio de un **campo de velocidades** $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$, donde las componentes v_1 , v_2 y v_3 son funciones de x , y , z y el tiempo t . Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}(t) = 6t^2 x \mathbf{i} - 4ty^2 \mathbf{j} + 2t(z+1) \mathbf{k}$, determine $\mathbf{r}(t)$. [Sugerencia: Emplee separación de variables.]
26. Suponga que m es la masa de una partícula en movimiento. La segunda ley del movimiento de Newton puede escribirse en forma vectorial como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se denomina el **momento lineal**. El **momento angular** de la partícula respecto al origen se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde \mathbf{r} es el vector de posición. Si el movimiento de torsión de la partícula alrededor del origen es $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$, demuestre que $\boldsymbol{\tau}$ es la tasa de cambio en el tiempo del momento angular.

27. Suponga que el Sol se localiza en el origen. La fuerza gravitacional \mathbf{F} ejercida sobre un planeta de masa m por el Sol de masa M es

$$\mathbf{F} = -k \frac{Mm}{r^2} \mathbf{u}.$$

F es una **fuerza central**, esto es, una fuerza dirigida a lo largo del vector de posición \mathbf{r} del planeta. Aquí k es la constante gravitacional, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{r} , y el signo menos indica que \mathbf{F} es una fuerza atractiva, esto es, una fuerza dirigida hacia el Sol. Vea la FIGURA 3.3.9.

- Emplee el problema 26 para demostrar que el momento de torsión que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza central es **0**.
- Explique por qué el momento angular \mathbf{L} del planeta es constante.

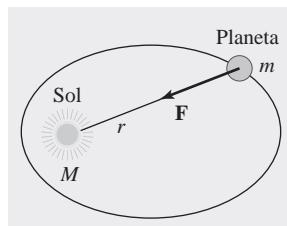


FIGURA 3.3.9 Vector de fuerza central \mathbf{F} del problema 27

Piense en ello

- Un cañón lanza una bala horizontalmente como se indica en la FIGURA 3.3.10.
- Cuanto mayor es la cantidad de pólvora que se utiliza, tanto mayor resulta la velocidad inicial v_0 de la bala de cañón y mayor la distancia a la que llega. Con argumentos matemáticos sólidos explique la razón.
- Si se ignora la resistencia del aire, explique por qué la bala de cañón siempre alcanza el suelo en el mismo tiempo, independientemente del valor de la velocidad inicial $v_0 > 0$.
- Si la bala de cañón se suelta simplemente desde la altura s_0 que se indica en la figura 3.3.10, muestre que el tiempo en el que golpea el suelo es el mismo que el tiempo en el inciso b).

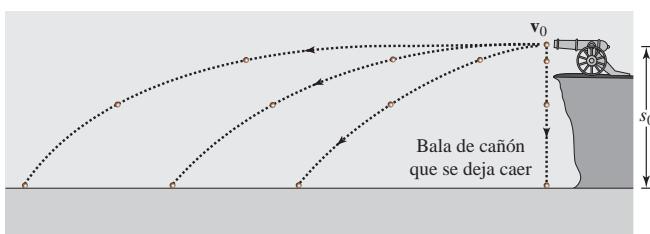


FIGURA 3.3.10 Cañón del problema 28

Proyectos

- En este proyecto usted empleará las propiedades de las secciones 1.4 y 3.1 para demostrar la **primera ley de Kepler del movimiento planetario**.

- La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco.

Se supone que el Sol es de masa M y está ubicado en el origen, \mathbf{r} es el vector de posición de un cuerpo de masa m que se mueve bajo la atracción gravitacional del Sol y $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de \mathbf{r} .

- Emplee el problema 27 y la segunda ley del movimiento de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para demostrar que

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{kM}{r^2}\mathbf{u}.$$

- Utilice el inciso a) para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$.
- Utilice el inciso b) para demostrar que $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
- Se deduce del inciso c) que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde \mathbf{c} es un vector constante. Demuestre que $\mathbf{c} = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$.
- Demuestre que $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ y consecuentemente $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$.

- Utilice los incisos a), d) y e) para demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = kM \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

- Después de integrar el resultado en el inciso f) respecto a t , se deduce que $\mathbf{v} \times \mathbf{c} = kM\mathbf{u} + \mathbf{d}$, donde \mathbf{d} es otro vector constante. Efectúe el producto punto en ambos lados de esta última expresión con el vector $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ y utilice el problema 61 de los ejercicios 1.4 para demostrar que

$$r = \frac{c^2/kM}{1 + (d/kM) \cos \theta},$$

donde $c = |\mathbf{c}|$, $d = |\mathbf{d}|$, y θ es el ángulo entre \mathbf{d} y \mathbf{r} .

- Explique por qué el resultado del inciso c) prueba la primera ley de Kepler.
- En el perihelio, los vectores \mathbf{r} y \mathbf{v} son perpendiculares y tienen magnitudes r_0 y v_0 , respectivamente. Emplee esta información y los incisos d) y g) para demostrar que $c = r_0v_0$ y $d = r_0v_0^2 - kM$.

3.4 Curvatura y aceleración

Introducción Sea C una curva suave en el espacio bidimensional o tridimensional que es trazada por la función de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$. En esta sección consideraremos con mayor detalle el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$, introducido en la sección anterior. Sin embargo, antes de hacer esto, es necesario examinar una cantidad escalar llamada **curvatura** de una curva.

■ Curvatura Si $\mathbf{r}(t)$ define a una curva C , entonces se sabe que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente en un punto P sobre C . En consecuencia,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad (1)$$

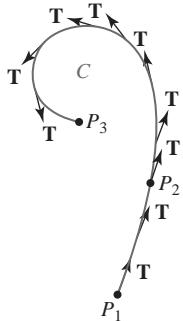


FIGURA 3.4.1 El vector tangente cambia con respecto a la longitud de arco

es una **tangente unitaria**. Sin embargo, es necesario recordar del final de la sección 3.2 que si C es parametrizada por una longitud de arco s , entonces la tangente unitaria a la curva también está dada por $d\mathbf{r}/ds$. Como vimos en (11) de la sección 3.3, la cantidad $|\mathbf{r}'(t)|$ en (1) se relaciona con la función de longitud de arco s por medio de $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$. Puesto que la curva C es suave, se sabe que $ds/dt > 0$. Por consiguiente, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

y por ello

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}(t). \quad (2)$$

Suponga ahora que C es como se ilustra en la FIGURA 3.4.1. Conforme s aumenta, \mathbf{T} se mueve a lo largo de C cambiando dirección pero no longitud (siempre es de longitud unitaria). A lo largo de la parte de la curva entre P_1 y P_2 el vector \mathbf{T} varía poco en dirección; a lo largo de la curva entre P_2 y P_3 , donde C se dobla obviamente en forma más pronunciada, el cambio en la dirección de la tangente \mathbf{T} es más pronunciado. Utilizaremos la *tasa* a la cual el vector unitario \mathbf{T} cambia de dirección respecto a la longitud de arco como un indicador de la *curvatura* de una curva suave C .

Definición 3.4.1 Curvatura

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial que define a una curva suave C . Si s es el parámetro de longitud de arco y $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es el vector tangente unitario, entonces la **curvatura** de C en un punto P se define como

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|. \quad (3)$$

El símbolo κ en (3) es la letra griega kappa. Ahora, puesto que las curvas a menudo no se parametrizan por medio de la longitud de arco, es conveniente expresar (3) en términos de un parámetro general t . Al emplear de nuevo la regla de la cadena, es posible escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad \text{y consecuentemente} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}.$$

En otras palabras, la curvatura definida en (3) produce

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \quad (4)$$

EJEMPLO 1 Curvatura de un círculo

Encuentre la curvatura de un círculo de radio a .

Solución Un círculo puede describirse por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$. En este caso, de $\mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = a$ obtenemos

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}'(t) = -\cos t \mathbf{i} - \operatorname{sen} t \mathbf{j}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con (4) la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}}{a} = \frac{1}{a}. \quad (5)$$

El resultado en (5) muestra que la curvatura en un punto sobre un círculo es el recíproco del radio del círculo e indica un hecho que concuerda con nuestra intuición: un círculo con un radio pequeño se curva más que uno con un radio más grande. Vea la FIGURA 3.4.2. ■

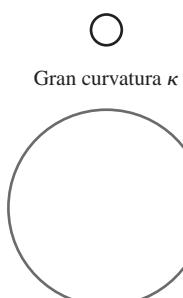


FIGURA 3.4.2 Curvatura de un círculo en el ejemplo 1

■ Componentes tangencial y normal de la aceleración Suponga que una partícula se mueve en el espacio bidimensional o tridimensional sobre una curva suave C descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Entonces la velocidad de la partícula sobre C es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, en tanto que su rapidez corresponde a $ds/dt = v = |\mathbf{v}(t)|$. Entonces, (1) implica $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}(t)$. Diferenciando esta última expresión con respecto a t obtenemos la aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = v \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}. \quad (6)$$

Además, con ayuda del teorema 3.2.1iii) se deduce de la diferenciación de $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ que $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{T}/dt = 0$. Por consiguiente, en un punto P sobre C los vectores \mathbf{T} y $d\mathbf{T}/dt$ son ortogonales. Si $|d\mathbf{T}/dt| \neq 0$, entonces el vector

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \quad (7)$$

es una normal unitaria a la curva C en P con dirección dada por $d\mathbf{T}/dt$. El vector \mathbf{N} se denomina **vector normal principal**, o simplemente **normal unitaria**. Sin embargo, puesto que la curvatura es $\kappa(t) = |\mathbf{T}'(t)|/v$, se sigue de (7) que $d\mathbf{T}/dt = \kappa v \mathbf{N}$. Entonces, (6) se convierte en

$$\mathbf{a}(t) = \kappa v^2 \mathbf{N} + \frac{dv}{dt} \mathbf{T}. \quad (8)$$

Escribiendo (8) como

$$\mathbf{a}(t) = a_N \mathbf{N} + a_T \mathbf{T} \quad (9)$$

advertimos que el vector aceleración \mathbf{a} de la partícula en movimiento es la suma de dos vectores ortogonales $a_N \mathbf{N}$ y $a_T \mathbf{T}$. Vea la FIGURA 3.4.3. Las funciones escalares

$$a_T = dv/dt \quad \text{y} \quad a_N = \kappa v^2$$

se llaman **componentes tangencial y normal de la aceleración**, respectivamente. Note que la componente tangencial de la aceleración resulta de un cambio en la *magnitud* de la velocidad \mathbf{v} , mientras que la componente normal de la aceleración proviene de un cambio en la *dirección* de \mathbf{v} .

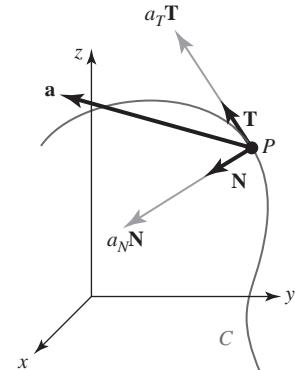


FIGURA 3.4.3 Componentes del vector aceleración

■ La binormal Un tercer vector definido por el producto cruz

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \quad (10)$$

recibe el nombre de **vector binormal**. Los tres vectores unitarios \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} forman un conjunto de mano derecha de vectores mutuamente ortogonales denominado **triedro móvil**. El plano de \mathbf{T} y \mathbf{N} se denomina **plano osculante**, el plano \mathbf{N} y \mathbf{B} se dice que es el **plano normal**, y el plano de \mathbf{T} y \mathbf{B} es el **plano de rectificación**. Vea la FIGURA 3.4.4.

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales \mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B} pueden considerarse como un sistema de coordenadas de mano derecha móvil, ya que

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t), \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t), \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t).$$

Este sistema de coordenadas móvil se conoce como **sistema TNB**.

Literalmente, las palabras “plano osculante” significan “plano del besador”.

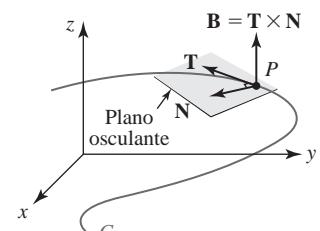


FIGURA 3.4.4 Triedro móvil y plano osculante

EJEMPLO 2 Determinación de \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B}

En el espacio tridimensional la posición de una partícula en movimiento está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$. Encuentre los vectores $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$. Determine la curvatura $\kappa(t)$.

Solución Puesto que $\mathbf{r}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, y por ello de (1) advertimos que una tangente unitaria es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{k}.$$

Después de esto, se tiene

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \cos t \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \mathbf{j} \quad \text{y} \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Por consiguiente, (7) produce la normal principal

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}.$$

De tal manera, de (10) la binormal es

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(t) &= \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin t & \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \quad (11) \\ &= \frac{3}{\sqrt{13}} \sin t \mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos t \mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por último, al emplear $|\mathbf{T}'(t)| = 2/\sqrt{13}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, encontramos de (4) que la curvatura en cualquier punto es la constante

$$\kappa(t) = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}.$$

El hecho de que la curvatura $\kappa(t)$ en el ejemplo 2 es constante no es una sorpresa, ya que la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ es una hélice circular.

EJEMPLO 3 Planos osculante, normal y de rectificación

En el punto correspondiente a $t = \pi/2$ sobre la hélice circular del ejemplo 2, encuentre una ecuación de

- a) el plano osculante,
- b) el plano normal y
- c) el plano de rectificación.

Solución De $\mathbf{r}(\pi/2) = \langle 0, 2, 3\pi/2 \rangle$ el punto en cuestión es $(0, 2, 3\pi/2)$.

- a) De (11) un vector normal al plano osculante en P es

$$\mathbf{B}(\pi/2) = \mathbf{T}(\pi/2) \times \mathbf{N}(\pi/2) = \frac{3}{\sqrt{13}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}} \mathbf{k}.$$

Para encontrar una ecuación de un plano no se requiere una normal *unitaria*, por lo que en lugar de $\mathbf{B}(\pi/2)$ es un poco más simple usar $\langle 3, 0, 2 \rangle$. De (2) de la sección 1.6, una ecuación del plano osculante es

$$3(x - 0) + 0(y - 2) + 2\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{o} \quad 3x + 2z = 3\pi.$$

- b) En el punto P , el vector $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{13}} \langle -2, 0, 3 \rangle$ o $\langle -2, 0, 3 \rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{N}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Consecuentemente, una ecuación del plano normal es

$$-2(x - 0) + 0(y - 2) + 3\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{o} \quad -4x + 6z = 9\pi.$$

- c) Por último, en el punto P , el vector $\mathbf{N}(\pi/2) = \langle 0, -1, 0 \rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{T}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Una ecuación del plano de rectificación es

$$0(x - 0) + (-1)(y - 2) + 0\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{o} \quad y = 2.$$

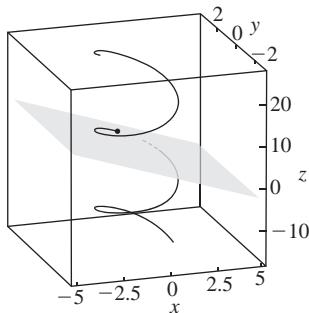


FIGURA 3.4.5 Hélice y plano osculante del ejemplo 3

En la FIGURA 3.4.5 se presentan porciones de la hélice y del plano osculante del ejemplo 3. El punto $(0, 2, 3\pi/2)$ se indica en la figura.

I Fórmulas para a_T , a_N y la curvatura Efectuando primero al producto punto y después el producto cruz, para el vector $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con el vector de aceleración (9), es posible obtener fórmulas explícitas que impliquen a \mathbf{r} , \mathbf{r}' y \mathbf{r}'' para las componentes tangencial y normal de la aceleración y la curvatura. Observe que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = a_N \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})}_0 + a_T \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T})}_1 = a_T v$$

produce la componente tangencial de la aceleración:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}. \quad (12)$$

Por otro lado,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = a_N(\underbrace{\mathbf{v}\mathbf{T} \times \mathbf{N}}_{\mathbf{B}}) + a_T(\underbrace{\mathbf{v}\mathbf{T} \times \mathbf{T}}_{\mathbf{0}}) = a_N\mathbf{v}\mathbf{B}.$$

Puesto que $|\mathbf{B}| = 1$, se concluye que la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \quad (13)$$

Resolviendo (13) para la curvatura κ , obtenemos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \quad (14)$$

EJEMPLO 4 Determinación de a_T , a_N y κ

La curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ es una variación del cúbico trenzado que se discutió en la sección 3.1. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula que se mueve sobre una curva C , encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier punto sobre C . Encuentre la curvatura.

Solución De

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

encontramos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = t + 2t^3$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$. Por consiguiente, de (12) obtenemos

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

En este caso, $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

y $|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$. Por tanto, (13) produce

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

Por último, de (14) encontramos que la curvatura del cúbico trenzado está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$

■ Radio de curvatura El recíproco de la curvatura, $\rho = 1/\kappa$, se denomina **radio de curvatura**. El radio de curvatura en un punto P sobre una curva C es el radio de un círculo que “encaja” en la curva mejor que cualquier otro círculo. El círculo en P se denomina **círculo de curvatura** y su centro es el **centro de curvatura**. El círculo de curvatura tiene la misma recta tangente en P que la curva C , y su centro yace sobre el lado cóncavo de C . Por ejemplo, un automóvil que se mueve sobre una pista curva, como se ilustra en la FIGURA 3.4.6, puede considerarse en cualquier instante como si se moviera sobre un círculo de radio ρ . En consecuencia, la componente normal de su aceleración $a_N = \kappa v^2$ debe ser la misma que la magnitud de su aceleración centrípeta $a = v^2/\rho$. Por tanto, $\kappa = 1/\rho$ y $\rho = 1/\kappa$. Conociendo el radio de curvatura, es posible determinar la rapidez v a la cual el automóvil puede superar la curva peraltada sin patinarse. (Ésta es esencialmente la idea en el problema 22 en los ejercicios 3.3.)

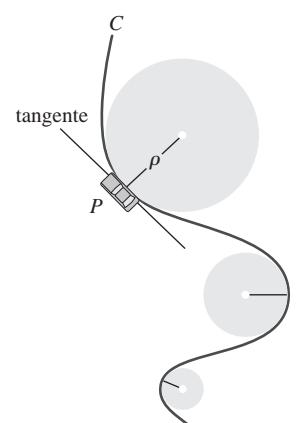


FIGURA 3.4.6 Círculo y radio de curvatura

r(t) NOTAS DESDE EL AULA

Al escribir (6) como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}$$

observamos que la llamada aceleración escalar d^2s/dt^2 , referida en las *Notas desde el aula* de la sección 3.3, es vista ahora como la componente tangencial a_T de la aceleración $\mathbf{a}(t)$.

3.4**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-10.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, para la función de posición dada, encuentre la tangente unitaria $\mathbf{T}(t)$.

1. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t - \sin t)\mathbf{i} + (t \sin t + \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, t > 0$
2. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}$
3. Use el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para determinar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\kappa(t)$ en relación con el movimiento sobre una hélice circular general que se describe mediante $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$.
4. Emplee el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para mostrar en el cúbico trenzado del ejemplo 4 que en $t = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(1) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), & \mathbf{N}(1) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}), \\ \mathbf{B}(1) &= -\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), & \kappa(1) &= \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

En los problemas 5 y 6, encuentre una ecuación de

- a) el plano osculante,
- b) el plano normal y
- c) el plano de rectificación para la curva espacial dada en el punto que corresponde al valor indicado de t .
5. La hélice circular en el ejemplo 2; $t = \pi/4$
6. El cúbico trenzado del ejemplo 4; $t = 1$

En los problemas 7-16, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t .

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
12. $\mathbf{r}(t) = \tan^{-1} t\mathbf{i} + \frac{1}{2} \ln(1 + t^2)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 5 \sin t\mathbf{j}$
14. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j}$

15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

16. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (4t + 2)\mathbf{k}$

17. Encuentre la curvatura de una hélice elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + b \sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, a > 0, b > 0, c > 0$.

18. a) Encuentre la curvatura de una órbita elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + b \sin t\mathbf{j} + ck, a > 0, b > 0, c > 0$.
b) Demuestre que cuando $a = b$, la curvatura de una órbita circular es la constante $\kappa = 1/a$.

19. Demuestre que la curvatura de una línea recta es la constante $\kappa = 0$. [Sugerencia: Utilice (1) de la sección 1.5.]

20. Encuentre la curvatura de la cicloide que se describe mediante

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}, a > 0 \text{ en } t = \pi.$$

21. Considere que C es una curva plana trazada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g tienen segundas derivadas. Demuestre que la curvatura en un punto está dada por

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}.$$

22. Demuestre que si $y = f(x)$, la fórmula para la curvatura κ en el problema 21 se reduce a

$$\kappa = \frac{|F''(x)|}{[1 + (F'(x))^2]^{3/2}}.$$

En los problemas 23 y 24, utilice el resultado del problema 22 para encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la curva en los puntos indicados. Decida en cuáles puntos la curva es “más angulosa”.

23. $y = x^2$; $(0, 0), (1, 1)$
24. $y = x^3$; $(-1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
25. Dibuje la gráfica de la curvatura $y = \kappa(x)$ para la parábola del problema 23. Determine el comportamiento de $y = \kappa(x)$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. En otras palabras, describa este comportamiento en términos geométricos.

☰ Problemas con calculadora/SAC

26. En el ejemplo 4 se demostró que la curvatura para $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$

- a) Utilice un SAC para obtener la gráfica de $y = \kappa(t)$ con $-3 \leq t \leq 3$.
 b) Utilice un SAC para obtener $\kappa'(t)$ y los números críticos de la función $y = \kappa(t)$.

- c) Encuentre el valor máximo de $y = \kappa(t)$ y aproxime los puntos correspondientes sobre la curva trazada por $\mathbf{r}(t)$.

☰ Piense en ello

27. Suponga que $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y = F(x)$ y que F'' existe para toda x en algún intervalo que contenga a C . Analice la curvatura cerca de $(c, F(c))$.
 28. Demuestre que $|\mathbf{a}(t)|^2 = a_N^2 + a_T^2$.

Competencia final de la unidad 3

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-10, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. Una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t\mathbf{k}$ se mueve con rapidez constante. _____
2. Un círculo tiene curvatura constante. _____
3. El vector binormal es perpendicular al plano osculante. _____
4. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, entonces el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ son ortogonales. _____
5. Si s es la longitud de arco de una curva C , entonces la magnitud de velocidad de una partícula en movimiento sobre C es ds/dt . _____
6. Si s es la longitud de arco de una curva C , entonces la magnitud de la aceleración de una partícula sobre C es d^2s/dt^2 . _____
7. Si la binormal está definida por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, entonces la normal principal es $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.

8. Si $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_1(t) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_2(t) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, entonces $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = 0$. _____
9. Si $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ son integrables, entonces $\int_a^b [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] dt = [\int_a^b \mathbf{r}_1(t) dt] \cdot [\int_a^b \mathbf{r}_2(t) dt]$. _____
10. Si $\mathbf{r}(t)$ es diferenciable, entonces $\frac{d}{dt} |\mathbf{r}(t)|^2 = 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. La trayectoria de una partícula en movimiento cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ yace en el plano _____.
2. La curvatura de una línea recta es $\kappa =$ _____.

Para la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$,

3. $\mathbf{r}'(1) =$ _____,
4. $\mathbf{r}''(1) =$ _____,
5. $\kappa(1) =$ _____,
6. $\mathbf{T}(1) =$ _____,
7. $\mathbf{N}(1) =$ _____,
8. $\mathbf{B}(1) =$ _____,

y en el punto correspondiente a $t = 1$ una ecuación del

9. plano normal es _____, y una ecuación del
10. plano osculante es _____.

C. Ejercicios

1. Encuentre la longitud de la curva que traza la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

2. El vector de posición de una partícula en movimiento está dado por $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j} + 7t\mathbf{k}$. Ya que la partícula empieza en un punto correspondiente a $t = 0$, encuentre la distancia que la partícula recorre hasta el punto correspondiente a $t = 3$. ¿En qué punto la partícula habrá recorrido $80\sqrt{3}$ unidades a lo largo de la curva?
3. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva trazada por

$$\mathbf{r}(t) = -3t^2\mathbf{i} + 4\sqrt{t+1}\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}$$

en el punto correspondiente a $t = 3$.

4. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.
5. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.
6. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = -t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k},$$

calcule la derivada $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

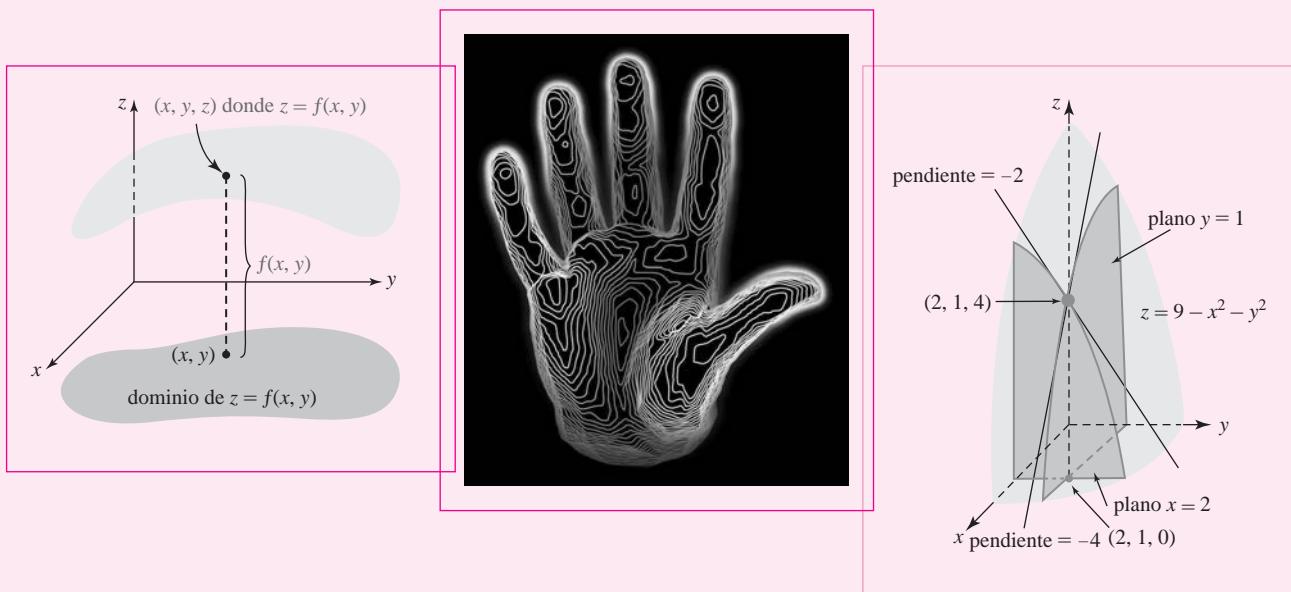
7. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k},$$

calcule $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

8. Dado que \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 y \mathbf{r}_3 son diferenciables, encuentre $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$.
9. Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza continua de magnitud 2, que tiene dirección paralela al eje y positivo. Si la partícula empieza con una velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ desde $(1, 1, 0)$, encuentre el vector de posición de la partícula y las ecuaciones paramétricas de su trayectoria. [Sugerencia: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.]
10. El vector de posición de una partícula en movimiento es $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$.
- a) Dibuje la trayectoria de la partícula.
- b) Dibuje los vectores de velocidad y aceleración en $t = 1$.
- c) Encuentre la rapidez en $t = 1$.
11. Encuentre la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ cuando ésta pasa por el plano $-x + y + z = -4$.
12. La velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v}(t) = -10t\mathbf{i} + (3t^2 - 4t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la partícula empieza en $t = 0$ en $(1, 2, 3)$, ¿cuál es su posición en $t = 2$?
13. La aceleración de una partícula en movimiento es $\mathbf{a}(t) = \sqrt{2} \sin t\mathbf{i} + \sqrt{2} \cos t\mathbf{j}$. Dado que la velocidad y la posición de la partícula en $t = \pi/4$ son $\mathbf{v}(\pi/4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/4) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (\pi/4)\mathbf{k}$, respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en $t = 3\pi/4$?
14. Dado que $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t . Determine la curvatura.
15. Suponga que la función vectorial del problema 5 es el vector de posición de una partícula en movimiento. Encuentre los vectores \mathbf{T} , \mathbf{N} y \mathbf{B} en $t = 1$. Determine la curvatura en este punto.

Funciones de varias variables



En esta unidad Hasta este punto de nuestro estudio del cálculo, sólo hemos considerado funciones de una sola variable. Previamente se consideraron conceptos de funciones de una sola variable, como límites, tangentes, máximo y mínimo, integrales, etc., extendidos también a funciones de dos o más variables. Esta unidad se dedica fundamentalmente al cálculo diferencial de funciones de múltiples variables.

Competencias específicas

- Analizar de manera formal campos escalares y vectoriales.
- Calcular derivadas parciales y direccionales, determinar gradientes, planos tangentes y valores extremos de una función.
- Resolver problemas que involucran varias variables.

4.1 Funciones de varias variables

■ Introducción Recuerde que una función de una variable $y = f(x)$ es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en el subconjunto X de los números reales, denominado el **dominio** de f , uno y sólo un número real y en otro conjunto de números reales Y . El conjunto $\{y|y = f(x), x \in X\}$ se llama **rango** de f . En esta unidad consideraremos el cálculo de funciones que son, en la mayoría de las veces, funciones de dos variables. Es probable que el lector ya tenga conocimiento de la existencia de funciones de dos o más variables.

EJEMPLO 1 Algunas funciones de dos variables

- a) $A = xy$, área de un rectángulo
- b) $V = \pi r^2 h$, volumen de un cilindro circular
- c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, volumen de un cono circular
- d) $P = 2x + 2y$, perímetro de un rectángulo

■ Funciones de dos variables La definición formal de una función de dos variables se presenta a continuación.

Definición 4.1.1 Función de dos variables

Una **función de dos variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) en el subconjunto del plano xy uno y sólo un número z en el conjunto R de números reales.

El conjunto de pares ordenados (x, y) se llama **dominio** de la función y el conjunto de valores correspondientes de z recibe el nombre de **rango**. Una función de dos variables suele escribirse $z = f(x, y)$ y se lee “ f de x, y ”. Las variables x y y se denominan **variables independientes** de la función y z es la **variable dependiente**.

■ Funciones polinomiales y racionales Una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se denomina **función racional**. Por ejemplo,

Funciones polinomiales:

$$f(x, y) = xy - 5x^2 + 9 \quad y \quad f(x, y) = 3xy^2 - 5x^2y + x^3$$

Funciones racionales:

$$f(x, y) = \frac{1}{xy - 3y} \quad y \quad f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^2 y + y^5 + 2x}.$$

El dominio de una función polinomial es el plano xy completo. El dominio de una función racional es el plano xy , excepto aquellos pares ordenados (x, y) para los cuales el denominador es cero. Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x, y) = 4/(6 - x^2 - y^2)$ consiste en el plano xy , excepto aquellos puntos (x, y) que yacen en la circunferencia $6 - x^2 - y^2 = 0$ o $x^2 + y^2 = 6$.

EJEMPLO 2 Dominio de una función de dos variables

- a) Dado que $f(x, y) = 4 + \sqrt{x^2 - y^2}$, encuentre $f(1, 0)$, $f(5, 3)$ y $f(4, -2)$.
- b) Dibuje el dominio de la función.

Solución

$$\begin{aligned} a) \quad & f(1, 0) = 4 + \sqrt{1 - 0} = 5 \\ & f(5, 3) = 4 + \sqrt{25 - 9} = 4 + \sqrt{16} = 8 \\ & f(4, -2) = 4 + \sqrt{16 - (-2)^2} = 4 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

- b) El dominio de f consiste en todos los pares ordenados (x, y) para los cuales $x^2 - y^2 \geq 0$ o $(x - y)(x + y) \geq 0$. Como se ilustra en la FIGURA 4.1.1, el dominio consiste en todos los puntos sobre las rectas $y = x$ y $y = -x$, y es la región sombreada entre ellas.

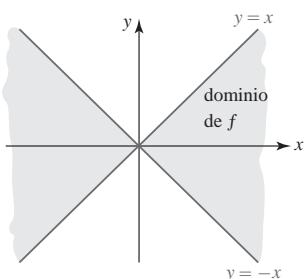


FIGURA 4.1.1 Dominio de f del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Funciones de dos variables

- a) Una ecuación de un plano $ax + by + cz = d$, $c \neq 0$, describe una función cuando se escribe como

$$z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \quad \text{o} \quad f(x, y) = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Puesto que z es un polinomio en x y y , el dominio de la función consiste en el plano xy completo.

- b) Un modelo matemático para el área S de la superficie de un cuerpo humano es una función de su peso w y altura h :

$$S(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}.$$

■ Gráficas La **gráfica** de una función $z = f(x, y)$ es una *superficie* en el espacio tridimensional. Vea la FIGURA 4.1.2. En la FIGURA 4.1.3 la superficie es la gráfica de la función polinomial $z = 2x^2 - 2y^2 + 2$.

Recuerde: la gráfica de esta función polinomial es un paraboloide hiperbólico.

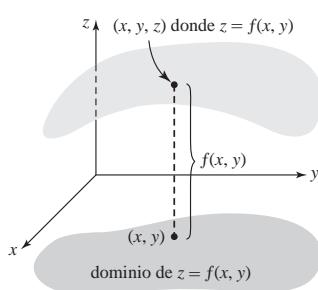


FIGURA 4.1.2 La gráfica de una función de x y y es una superficie

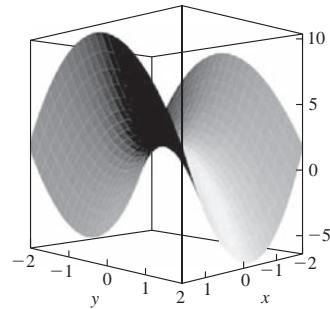


FIGURA 4.1.3 Gráfica de una función polinomial

EJEMPLO 4 Dominio de una función de dos variables

A partir de la discusión de superficies cuádricas de la sección 1.8 usted puede reconocer que la gráfica de una función polinomial $f(x, y) = x^2 + 9y^2$ es un paraboloide elíptico. Puesto que f se define para todo par ordenado de números reales, su dominio es el plano xy completo. Del hecho de que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, podemos afirmar que el rango de f está definido por la desigualdad $z \geq 0$.

EJEMPLO 5 Dominio de una función de dos variables

En la sección 1.7 vimos que $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ es una esfera de radio 3 centrada en el origen. Al resolver para z , y tomar la raíz cuadrada no negativa, obtenemos la función

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{o} \quad f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

La gráfica de f es el hemisferio superior que se ilustra en la FIGURA 4.1.4. El dominio de la función es un conjunto de pares ordenados (x, y) donde las coordenadas satisfacen

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Esto es, el dominio de f consiste en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y su interior. La inspección de la figura 4.1.4 muestra que el rango de la función es el intervalo $[0, 3]$ sobre el eje z .

En ciencia a menudo se encuentran las palabras **isotérmico**, **equipotencial** e **isobárico**. El prefijo *iso* proviene de la palabra griega *isos*, la cual significa *igual* o *lo mismo*. Entonces, dichos términos se aplican a líneas o curvas sobre las cuales es *constante* la temperatura, el potencial o la presión barométrica.

EJEMPLO 6 Función potencial

El potencial electrostático en un punto $P(x, y)$ en el plano debido a una carga puntual unitaria en el origen está dado por $U = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Si el potencial es una constante, digamos $U = c$, donde c es una constante positiva, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}.$$

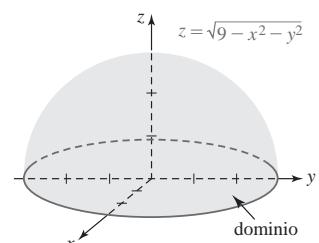


FIGURA 4.1.4 Hemisferio del ejemplo 5

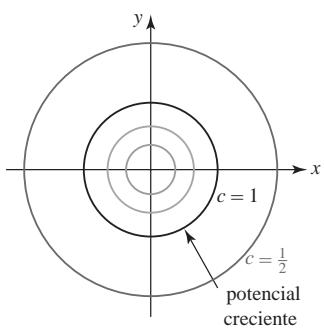


FIGURA 4.1.5 Curvas equipotenciales del ejemplo 6

Así, como se ilustra en la FIGURA 4.1.5, las curvas de equipotencial son círculos concéntricos que rodean a la carga. Note que en la figura 4.1.5 es posible tener una percepción del comportamiento de la función U , específicamente donde ésta crece (o decrece), al observar la dirección creciente de c .

Curvas de nivel En general, si una función de dos variables está dada por $z = f(x, y)$, entonces las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para una c apropiada, reciben el nombre de **curvas de nivel** de f . La palabra *nivel* proviene del hecho de que podemos interpretar $f(x, y) = c$ como la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección o **traza** de $z = f(x, y)$ y el plano (horizontal o de nivel) $z = c$. Vea la FIGURA 4.1.6.

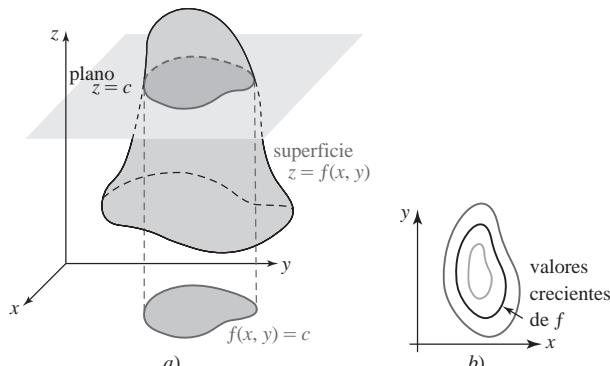


FIGURA 4.1.6 Superficie en a) y curvas de nivel en b)

EJEMPLO 7 Curvas de nivel

Las curvas de nivel de una función polinomial $f(x, y) = y^2 - x^2$ son la familia de curvas definidas por $y^2 - x^2 = c$. Como se muestra en la FIGURA 4.1.7, cuando $c > 0$ o $c < 0$, un miembro de esta familia de curvas es una hipérbola. Para $c = 0$, obtenemos las rectas $y = x$ y $y = -x$.

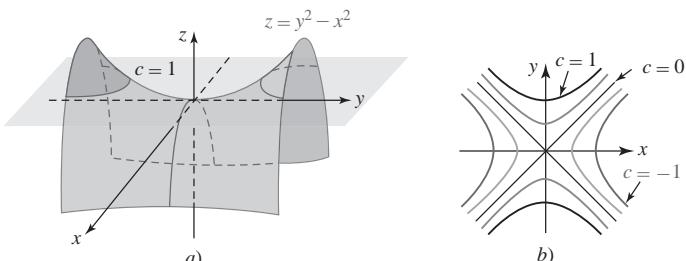


FIGURA 4.1.7 Superficie y curvas de nivel del ejemplo 7

En la mayoría de los casos la tarea de graficación de curvas de nivel de una función de dos variables $z = f(x, y)$ es considerable. Usamos un SAC para generar las superficies y curvas de nivel correspondientes de la FIGURA 4.1.8 y FIGURA 4.1.9.

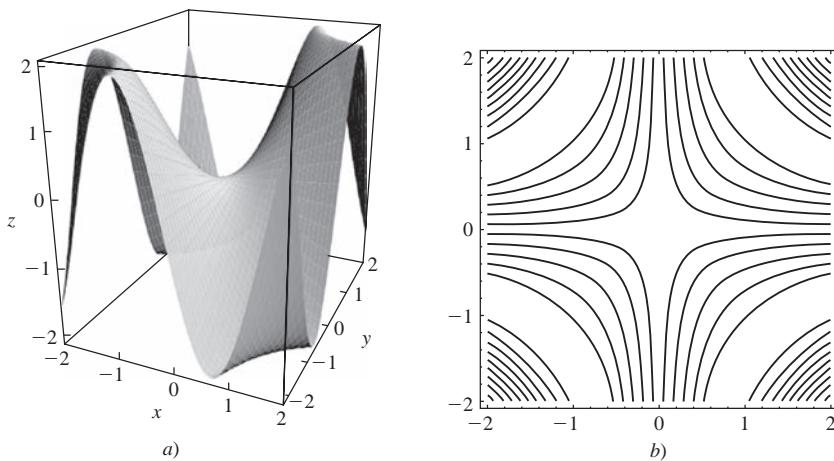


FIGURA 4.1.8 Gráfica de $f(x, y) = 2 \operatorname{sen} xy$ en a); curvas de nivel en b)

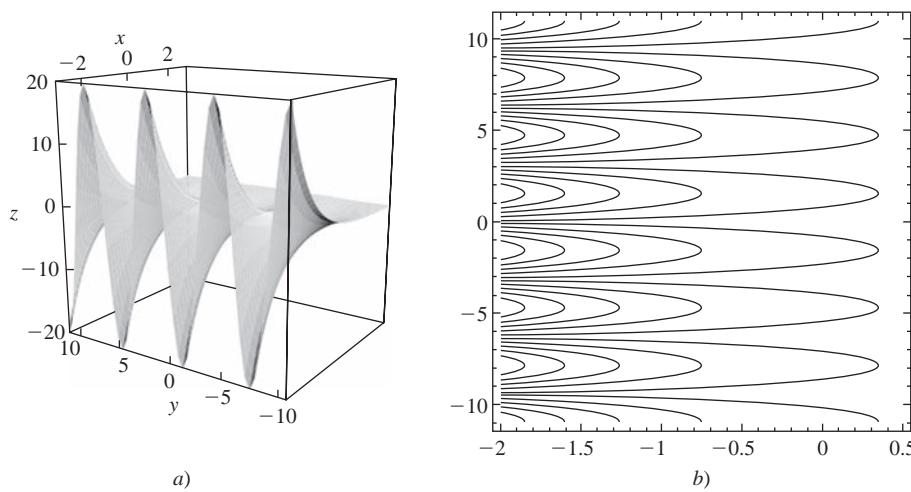


FIGURA 4.1.9 Gráfica de $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen} y$ en a); curvas de nivel en b)

Las curvas de nivel de una función f también reciben el nombre de **líneas de contorno**. A nivel práctico, los **mapas de contorno** son usados más a menudo para desplegar curvas de igual elevación. En la FIGURA 4.1.10 podemos observar que un mapa de contorno ilustra los diversos segmentos de una columna que tienen una altura dada. Ésta es la idea de los contornos de la FIGURA 4.1.11,* los cuales muestran el espesor de la ceniza volcánica alrededor del volcán El Chichón, en el estado de Chiapas, México. El Chichón hizo erupción el 28 de marzo y el 4 de abril de 1982.

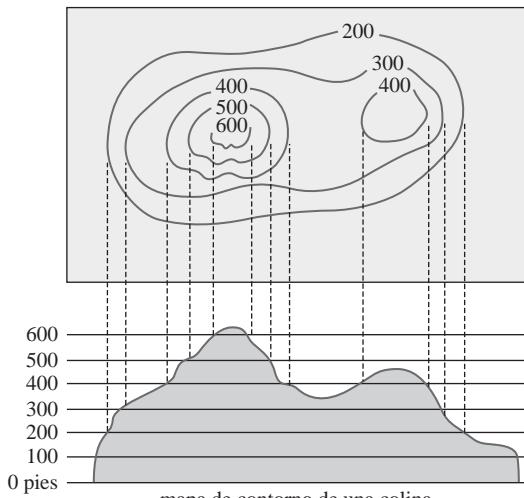


FIGURA 4.1.10 Mapa de contorno

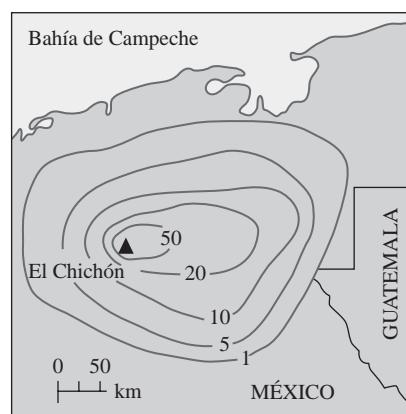


FIGURA 4.1.11 Mapa de contorno que muestra la profundidad de la ceniza alrededor del volcán El Chichón

■ Funciones de tres o más variables Las definiciones de funciones de tres o más variables son simplemente generalizaciones de la definición 4.1.1. Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada triada ordenada de números reales (x, y, z) en un subconjunto del espacio tridimensional, uno y sólo un número w en el conjunto R de los números reales. Una función de tres variables suele denotarse por medio de $w = f(x, y, z)$ o $w = F(x, y, z)$. Una **función polinomial** de tres variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n z^k$, donde m, n y k son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se llama **función racional**.

Por ejemplo, el volumen V y el área de la superficie S de una caja rectangular son funciones polinomiales de tres variables:

$$V = xyz \quad y \quad S = 2xy + 2xz + 2yz.$$

*Adaptado con permiso de la revista *National Geographic*.

La ley de Poiseuille establece que la tasa de descarga, o tasa de flujo, de un fluido viscoso (como la sangre) a través de un tubo (como una arteria) es

$$Q = k \frac{R^4}{L} (p_1 - p_2),$$

donde k es una constante, R es el radio del tubo, L es su longitud, y p_1 y p_2 son las presiones en los extremos del tubo. Éste es un ejemplo de una función *de cuatro variables*.

Nota: Puesto que se requieren cuatro dimensiones, no es posible graficar una función de tres variables.

EJEMPLO 8 Dominio de una función de cuatro variables

El dominio de la función racional de cuatro variables

$$f(x, y, z) = \frac{2x + 3y + z}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$. En otras palabras, el dominio de f es todo el espacio tridimensional *salvo* los puntos que yacen sobre la superficie de una esfera de radio 2 centrada en el origen. ■

Una elección de palabras desafortunada, pero común, puesto que las *superficies de nivel* suelen no estar a nivel.

► **■ Superficies de nivel** Para una función de tres variables, $w = f(x, y, z)$, las superficies definidas por $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante, se llaman **superficies de nivel** de la función f .

EJEMPLO 9 Algunas superficies de nivel

- a) Las superficies de nivel del polinomio $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$ son una familia de planos paralelos definidos por $x - 2y + 3z = c$. Vea la FIGURA 4.1.12.
- b) Las superficies de nivel del polinomio $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ son una familia de esferas concéntricas definidas por $x^2 + y^2 + z^2 = c$, $c > 0$. Vea la FIGURA 4.1.13.
- c) Las superficies de nivel de una función racional $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)/z$ están dadas por $(x^2 + y^2)/z = c$ o $x^2 + y^2 = cz$. Algunos miembros de esta familia de paraboloides se presentan en la FIGURA 4.1.14.

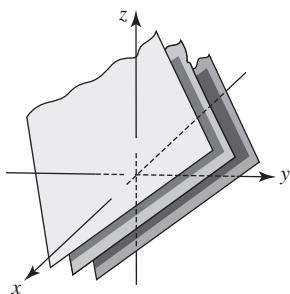


FIGURA 4.1.12 Superficies de nivel en a) del ejemplo 9

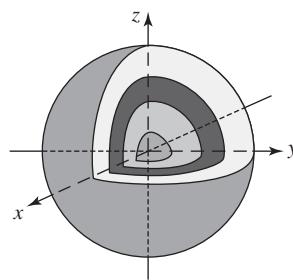


FIGURA 4.1.13 Superficies de nivel en b) del ejemplo 9

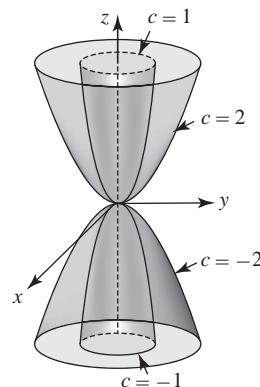


FIGURA 4.1.14 Superficies de nivel en c) del ejemplo 9 ■

4.1

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el dominio de la función dada.

1. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = (x^2 - 9y^2)^{-2}$

3. $f(x, y) = \frac{y^2}{y + x^2}$

4. $f(x, y) = x^2 - y^2\sqrt{4 + y}$

5. $f(s, t) = s^3 - 2t^2 + 8st$ 6. $f(u, v) = \frac{u}{\ln(u^2 + v^2)}$

7. $g(r, s) = e^{2r}\sqrt{s^2 - 1}$ 8. $g(\theta, \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi}$

9. $H(u, v, w) = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 16}$

10. $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{z - 5}$

En los problemas 11-18, relacione el conjunto de puntos dados en la figura con el dominio de una de las funciones en a)-h).

- a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ b) $f(x, y) = \ln(x - y^2)$
 c) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$ d) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y} - 1}$
 e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ f) $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$
 g) $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{xy}$ h) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y - x}$

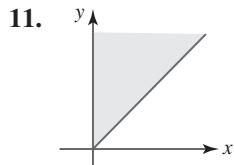


FIGURA 4.1.15 Gráfica del problema 11

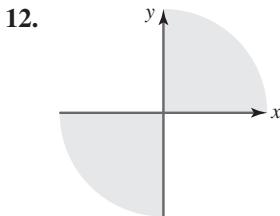


FIGURA 4.1.16 Gráfica del problema 12

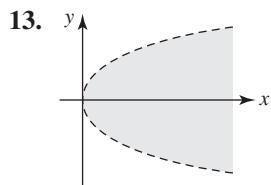


FIGURA 4.1.17 Gráfica del problema 13

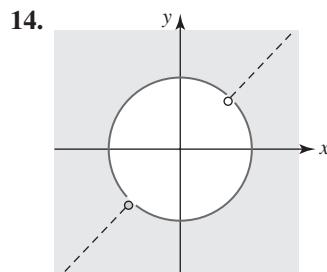


FIGURA 4.1.18 Gráfica del problema 14

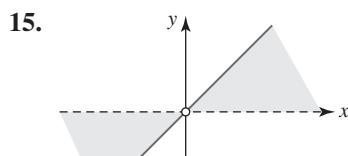


FIGURA 4.1.19 Gráfica del problema 15

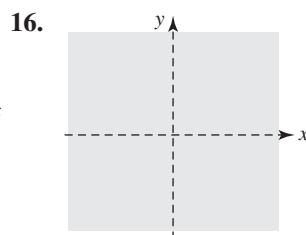


FIGURA 4.1.20 Gráfica del problema 16

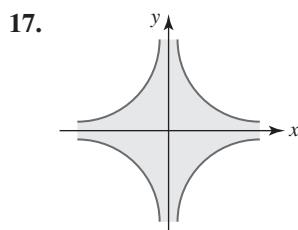


FIGURA 4.1.21 Gráfica del problema 17

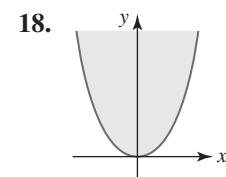


FIGURA 4.1.22 Gráfica del problema 18

En los problemas 19-22, dibuje el dominio de la función dada.

19. $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
 20. $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(y^2 - 4)}$
 21. $f(x, y) = \sqrt{\ln(y - x + 1)}$
 22. $f(x, y) = e^{\sqrt{xy+1}}$

En los problemas 23-26, determine el rango de la función dada.

23. $f(x, y) = 10 + x^2 + 2y^2$ 24. $f(x, y) = x + y$
 25. $f(x, y, z) = \sin(x + 2y + 3z)$ 26. $f(x, y, z) = 7 - e^{xyz}$

En los problemas 27-30, evalúe la función dada en los puntos indicados.

27. $f(x, y) = \int_x^y (2t - 1) dt; (2, 4), (-1, 1)$
 28. $f(x, y) = \ln \frac{x^2}{x^2 + y^2}; (3, 0), (5, -5)$
 29. $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2; (-1, 1, -1), (2, 3, -2)$
 30. $F(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}; (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3})$

En los problemas 31-36, describa la gráfica de la función dada.

31. $z = x$ 32. $z = y^2$
 33. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 34. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
 35. $z = \sqrt{36 - x^2 - 3y^2}$ 36. $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

En los problemas 37-42, dibuje alguna de las curvas de nivel asociadas con la función dada.

37. $f(x, y) = x + 2y$ 38. $f(x, y) = y^2 - x$
 39. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$ 40. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
 41. $f(x, y) = e^{y-x^2}$ 42. $f(x, y) = \tan^{-1}(y - x)$

En los problemas 43-46, describa las superficies de nivel pero no grafique.

43. $f(x, y, z) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}z^2$
 44. $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$
 45. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2$ 46. $G(x, y, z) = 4y - 2z + 1$
 47. Grafique alguna de las superficies de nivel asociadas con $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ para $c = 0, c > 0$ y $c < 0$.

48. Dado que

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9},$$

encuentre las intersecciones x, y y z de las superficies de nivel que pasan por $(-4, 2, -3)$.

Aplicaciones

49. La temperatura, presión y volumen de un gas ideal encerrado están relacionadas por medio de $T = 0.01PV$, donde T, P y V se miden en kelvins, atmósferas y litros, respectivamente. Dibuja las isotermas $T = 300$ K, 400 K y 600 K.
50. Exprese la altura de una caja rectangular con una base cuadrada como una función del volumen y de la longitud de un lado de la caja.
51. Una lata de refresco se construye con un costado lateral de estaño y una tapa y fondo de aluminio. Dado que el costo es de 1.8 centavos por unidad cuadrada de la tapa, 1 centavo por unidad cuadrada del fondo y 2.3 centavos por uni-

- dad cuadrada del costado, determine la función de costo $C(r, h)$, donde r es el radio de la lata y h es su altura.
52. Una caja rectangular cerrada va a construirse con 500 cm^2 de cartón. Exprese el volumen V como una función de la longitud x y el ancho y .
53. Como se muestra en la FIGURA 4.1.23, una tapa cónica descansa sobre la parte superior de un cilindro circular. Si la altura de la tapa es dos tercios de la altura del cilindro, exprese el volumen del sólido como una función de las variables indicadas.

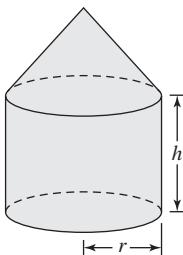


FIGURA 4.1.23 Cilindro con tapa cónica del problema 53

54. A menudo una muestra de tejido es un cilindro que se corta oblicuamente, como se muestra en la FIGURA 4.1.24. Exprese el espesor t del corte como una función de x , y y z .

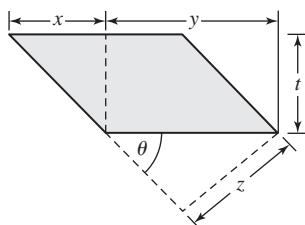


FIGURA 4.1.24 Muestra de tejido del problema 54

55. En medicina a menudo se emplean fórmulas para el área de la superficie (vea el ejemplo 3b) para calibrar dosis de fármacos, puesto que se supone que la dosis del fármaco D y el área de la superficie S son directamente proporcionales. La siguiente función simple puede utilizarse para obtener una estimación rápida del área superficial del cuerpo de un humano: $S = 2ht$, donde h es la altura (en cm) y t es la máxima circunferencia de músculo (en cm). Estime el área de la superficie de una persona de 156 cm de altura con una circunferencia de músculo máxima de 50 cm. Estime su propia área superficial.

Proyectos

56. **Factor de enfriamiento** Durante su investigación del invierno de 1941 en el Antártico, el doctor Paul A. Siple

ideó el siguiente modelo matemático para definir el factor de enfriamiento del viento:

$$H(v, T) = (10\sqrt{v} - v + 10.5)(33 - T),$$

donde H se mide en $\text{kcal/m}^2\text{h}$, v es la velocidad del viento en m/s y T es la temperatura en grados Celsius. Un ejemplo de este índice es: 1 000 = muy frío, 1 200 = implacablemente frío y 1 400 = congelamiento de la carne expuesta. Determine el factor de enfriamiento en -6.67°C (20°F) con una velocidad de viento de 20 m/s (45 mi/h). Escriba un breve informe que defina con precisión el factor de enfriamiento. Encuentre al menos otro modelo matemático para el factor de enfriamiento del viento.

57. **Flujo de agua** Cuando el agua fluye de un grifo, como se muestra en la FIGURA 4.1.25a), se contrae a medida que se acelera hacia abajo. Eso ocurre debido a que la tasa de flujo Q , la cual se define como la velocidad por el área de la sección transversal de la columna de agua, debe ser constante en cada nivel. En este problema suponga que las secciones transversales de la columna de fluido son circulares.

- a) Considere la columna de agua que se muestra en la figura 4.1.25b). Suponga que v es la velocidad del agua en el nivel superior, V es la velocidad del agua en el nivel inferior a una distancia h unidades por debajo del nivel superior, R es el radio de la sección transversal en el nivel superior y r es el radio de la sección transversal en el nivel inferior. Muestre que la tasa de flujo Q como una función de r y R es

$$Q = \frac{\pi r^2 R^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{R^4 - r^4}},$$

donde g es la aceleración de la gravedad. [Sugerencia: Empiece expresando el tiempo t que tarda la sección transversal del agua en caer una distancia h en términos de u y V . Por conveniencia considere la dirección positiva hacia abajo.]

- b) Determine la tasa de flujo Q (en cm^3/s) si $g = 980 \text{ cm/s}^2$, $h = 10 \text{ cm}$, $R = 1 \text{ cm}$ y $r = 0.2 \text{ cm}$.

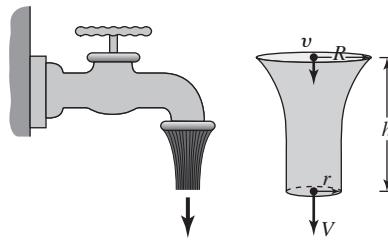


FIGURA 4.1.25 El agua fluye por el grifo del problema 57

4.2 Límites y continuidad

Introducción En el caso de funciones de una variable, en muchos casos es factible hacer un juicio acerca de la existencia de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. También se aprovecha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe y son iguales al mismo número L , en cuyo caso $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. En esta sección veremos que la situación es más difícil en la consideración de límites de funciones de dos variables.

Terminología Antes de proceder con la discusión sobre límites es necesario introducir cierta terminología relativa a conjuntos que se utilizará en este apartado, así como en las secciones y unidades que siguen. El conjunto en el espacio bidimensional

$$\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\} \quad (1)$$

consiste en todos los puntos *en el interior de*, pero *no en*, un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. El conjunto (1) se denomina **disco abierto**. Por otro lado, el conjunto

$$\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\} \quad (2)$$

es un **disco cerrado**. Un disco cerrado incluye todos los puntos *en el interior de* y *en* un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. Vea la FIGURA 4.2.1a). Si R es cierta región del plano xy , entonces un punto (a, b) se dice que será un **punto interior** de R si hay *algún* disco abierto centrado en (a, b) que contiene sólo puntos de R . En contraste, afirmamos que (a, b) es un **punto frontera** de R si el interior de *cualquier* disco abierto centrado en (a, b) contiene tanto puntos en R como puntos en *no* R . La región R se dice que será **abierta** si contiene puntos no frontera y **cerrada** si contiene todos sus puntos frontera. Vea la figura 4.2.1b). Se dice que una región R está **acotada** si puede estar contenida en un rectángulo suficientemente grande en el plano. La figura 4.2.1c) ilustra una región acotada; el primer cuadrante ilustrado en la figura 4.2.1d) es un ejemplo de una región **no acotada**. Estos conceptos se llevan de manera natural al espacio tridimensional. Por ejemplo, el análogo de un disco abierto es una **bola abierta**. Una bola abierta consiste en todos los puntos *en el interior*, pero *no en*, una esfera con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$:

$$\{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\}. \quad (3)$$

Una región en el espacio tridimensional está acotada si puede estar contenida en una caja rectangular suficientemente grande.

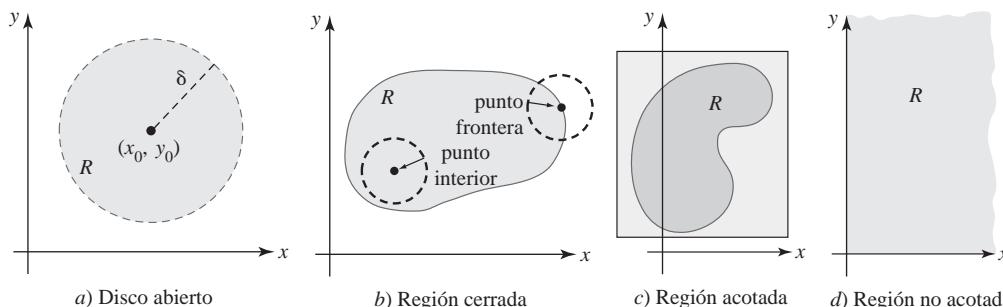


FIGURA 4.2.1 Varias regiones en el espacio bidimensional

Límites de funciones de dos variables Analizar un límite dibujando la gráfica de $z = f(x, y)$ no es conveniente ni es una rutina posible para la mayor parte de las funciones de dos variables. Por intuición sabemos que f tiene un límite en un punto (a, b) si los valores de la función $f(x, y)$ se acercan a un número L conforme (x, y) se acerca a (a, b) . Escribimos $f(x, y) \rightarrow L$ como $(x, y) \rightarrow (a, b)$, o

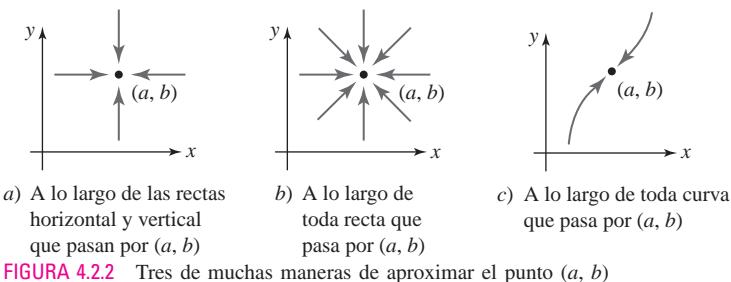
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L.$$

Para tener un poco más de precisión, f tiene un límite L en el punto (a, b) si los puntos en el espacio $(x, y, f(x, y))$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a (a, b, L) siempre que (x, y) sea suficientemente cercano a (a, b) .

La noción de (x, y) “aproximándose” a un punto (a, b) no es tan simple como para funciones de una variable donde $x \rightarrow a$ significa que x puede acercarse a a sólo desde la izquierda y desde la derecha. En el plano xy hay un número infinito de maneras de aproximarse al punto (a, b) . Como se muestra en la FIGURA 4.2.2, para que $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ exista, requerimos ahora que f se aproxime al mismo número L a lo largo de *cualquier trayectoria* o curva posible que pase por (a, b) . Si se pone lo anterior de manera negativa:

- Si $f(x, y)$ no se approxima al mismo número L por dos trayectorias diferentes a (a, b) , entonces $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ no existe. (4)

En la discusión de $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ que sigue se supondrá que la función f está definida en todo punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b) pero no necesariamente *en el* propio (a, b) .

FIGURA 4.2.2 Tres de muchas maneras de aproximar el punto (a, b) **EJEMPLO 1** Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2}$ no existe.

Solución La función $f(x, y) = (x^2 - 3y^2)/(x^2 + 2y^2)$ se define en todas partes excepto en $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 4.2.2a), dos maneras de aproximarse a $(0, 0)$ son a lo largo del eje x ($y = 0$) y a lo largo del eje y ($x = 0$). En $y = 0$ se tiene

$$\lim_{(x, 0) \rightarrow (0, 0)} f(x, 0) = \lim_{(x, 0) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

donde $x = 0$,

$$\lim_{(0, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, y) = \lim_{(0, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{0 - 3y^2}{0 + 2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

En vista de (4), concluimos que el límite no existe. ■

EJEMPLO 2 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución En este caso los límites a lo largo de los ejes x y y son los mismos:

$$\lim_{(x, 0) \rightarrow (0, 0)} f(x, 0) = \lim_{(x, 0) \rightarrow (0, 0)} \frac{0}{x^2} = 0 \quad y \quad \lim_{(0, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, y) = \lim_{(0, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ exista, ya que no se ha examinado *toda* trayectoria a $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 4.2.2b), ahora intentaremos cualquier recta que pase por el origen dada por $y = mx$:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Puesto que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ depende de la pendiente m de la recta sobre la cual se hace la aproximación al origen, concluimos que el límite no existe. Por ejemplo, en $y = x$ y en $y = 2x$, tenemos, respectivamente,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} \quad y \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, x) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

$$f(x, 2x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} \quad y \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, 2x) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

Una gráfica generada por computadora de la superficie se presenta en la FIGURA 4.2.3. Si tiene en mente que el origen está en el centro de la caja, debe tener claro por qué diferentes trayectorias a $(0, 0)$ producen diferentes valores del límite. ■

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Demuestre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}$ no existe.

Solución Sea $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$. Se le pide al lector demostrar que a lo largo del eje x , el eje y , cualquier recta $y = mx$, $m \neq 0$ que pasa por $(0, 0)$, y a lo largo de cualquier parábola

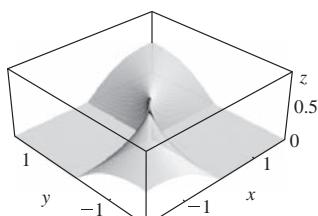


FIGURA 4.2.3 Gráfica de la función del ejemplo 2

$y = ax^2$, $a \neq 0$, que pasa por $(0, 0)$, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$. Si bien esto constituye verdaderamente un número infinito de trayectorias al origen, el límite *sigue* sin existir, ya que $y = x^3$:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, x^3) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

■ Propiedades de límites En los siguientes dos teoremas se mencionan las propiedades de límites para funciones de dos variables. Estos teoremas son las contrapartes en dos variables de los teoremas correspondientes a funciones reales de variable real.

Teorema 4.2.1 Tres límites fundamentales

- i) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} c = c$, c una constante
- ii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} x = a$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} y = b$
- iii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} cf(x, y) = c \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$

Teorema 4.2.2 Límite de una suma, producto, cociente

Suponga que (a, b) es un punto en el plano xy y que $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y)$ existe.

Si $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L_1$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = L_2$, entonces

- i) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = L_1 \pm L_2$,
- ii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)g(x, y) = L_1 L_2$, y
- iii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

EJEMPLO 4 Límite de una suma

Evalúe $\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} f(x + y^2)$.

Solución De ii) del teorema 4.2.1 advertimos primero que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} x = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} y = 3.$$

Entonces de las partes i) y ii) del teorema 4.2.2 sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites siempre que exista el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} (x + y^2) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} x + \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} y^2 \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} x + \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} y \right) \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} y \right) \\ &= 2 + 3 \cdot 3 = 11. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

■ Uso de coordenadas polares En algunos casos las coordenadas polares pueden ser de utilidad en la evaluación de un límite de la forma $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$. Si $x = r \cos \theta$, $y = r \sen \theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$, entonces $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ si y sólo si $r \rightarrow 0$.

EJEMPLO 5 Uso de coordenadas polares

Evalúe $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{10xy^2}{x^2 + y^2}$.

Solución Al sustituir $x = r \cos \theta$, $y = r \sen \theta$ en la función, obtenemos

$$\frac{10xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{10r^3 \cos \theta \sen^2 \theta}{r^2} = 10r \cos \theta \sen^2 \theta.$$

Puesto que $\lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta = 0$, concluimos que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{10xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

En el ejemplo 8 examinaremos de nuevo el límite del ejemplo 5.

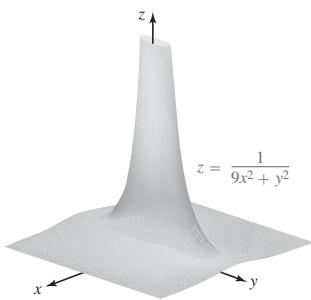


FIGURA 4.2.4 Función con una discontinuidad infinita en $(0, 0)$

■ **Continuidad** Una función $z = f(x, y)$ es **continua** en (a, b) si $f(a, b)$ está definida, $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ existe y el límite es el mismo que el valor de la función $f(a, b)$; esto es,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b). \quad (5)$$

Si f no es continua en (a, b) , se afirma que es **discontinua**. La gráfica de una función continua es una superficie sin quiebres. De la gráfica de la función $f(x, y) = 1/(9x^2 + y^2)$ en la **FIGURA 4.2.4** vemos que f tiene una discontinuidad infinita en $(0, 0)$, esto es, $f(x, y) \rightarrow \infty$ como $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Una función $z = f(x, y)$ es **continua sobre un región R** del plano xy si f es continua en cualquier punto en R . La **suma** y el **producto** de dos funciones continuas también son continuas. El **cociente** de dos funciones continuas es continuo, excepto en el punto donde el denominador es cero. Además, si g es una función de dos variables continuas en (a, b) y F es una función de una variable continua en $g(a, b)$, entonces la **composición** $f(x, y) = F(g(x, y))$ es continua en (a, b) .

EJEMPLO 6 Función discontinua en $(0, 0)$

La función $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ es discontinua en $(0, 0)$, ya que $f(0, 0)$ no está definida. Sin embargo, como puede observarse en el siguiente ejemplo, f tiene una discontinuidad removable en $(0, 0)$.

EJEMPLO 7 Función continua en $(0, 0)$

La función f definida por

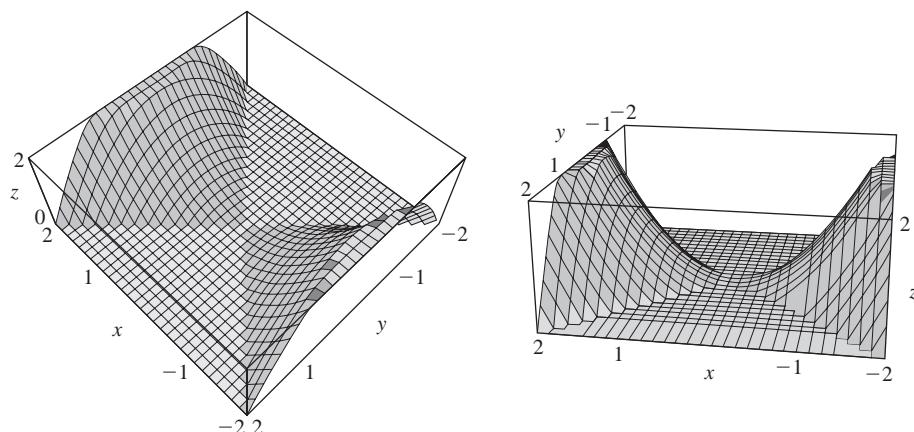
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$, ya que $f(0, 0) = 0$ y

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 - y^2) = 0^2 - 0^2 = 0.$$

Por consiguiente, advertimos que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

Con la ayuda de un SAC vemos en la **FIGURA 4.2.5** dos perspectivas diferentes (ViewPoint en *Mathematica*) de la superficie definida por $z = f(x, y)$. Note en los incisos a) y b) de la figura 4.2.5 la orientación del eje x y del eje y .



a) Viendo hacia abajo sobre la superficie

FIGURA 4.2.5 Gráfica de la función del ejemplo 7

b) Viendo ligeramente hacia abajo y hacia el eje x

■ Funciones polinomiales y racionales En la sección 4.1 vimos que una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos, y que el cociente de dos funciones polinomiales recibe el nombre de **función racional**. Las funciones polinomiales, como $f(x, y) = xy$, son continuas por todo el plano xy . Las funciones racionales son continuas salvo en puntos donde el denominador es cero. Por ejemplo, la función racional $f(x, y) = xy/(y - x)$ es continua salvo en puntos sobre la recta $y = x$. En la FIGURA 4.2.6 se han ilustrado las gráficas de tres funciones que son discontinuas en puntos sobre una curva. En los incisos *a*) y *c*) de la figura 4.2.6, la función racional es discontinua en todos los puntos sobre la curva obtenida igualando a 0 el denominador. En la figura 4.2.6*b*) la función logarítmica es discontinua donde $x^2 + y^2 - 4 = 0$, esto es, sobre el círculo $x^2 + y^2 = 4$.

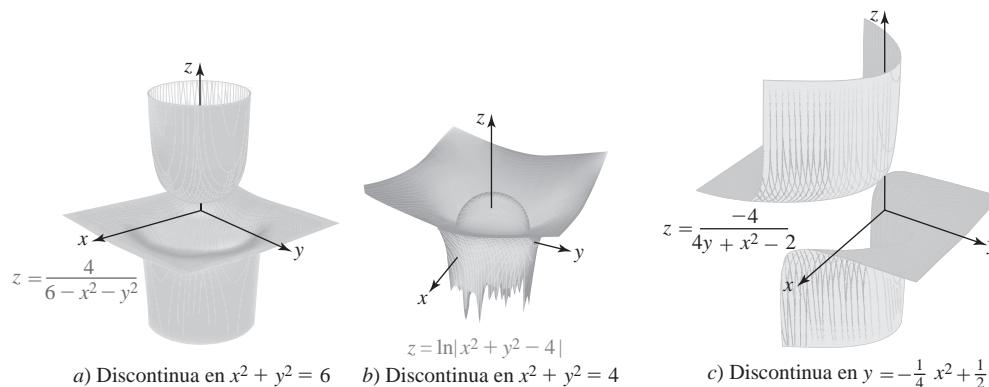


FIGURA 4.2.6 Tres funciones discontinuas

■ Funciones de tres o más variables Las nociones de límite y continuidad para funciones de tres o más variables son extensiones naturales de las que acaban de considerarse. Por ejemplo, una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ es continua en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

La función polinomial en tres variables $f(x, y, z) = xy^2z^3$ es continua a través del espacio tridimensional. La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}$$

es continua salvo en el punto $(0, 0, 1)$. La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{x + 3y}{2x + 5y + z}$$

es continua excepto en los puntos (x, y, z) sobre el plano $2x + 5y + z = 0$.

■ Definición formal de un límite La discusión anterior conduce a la definición formal del límite de una función $z = f(x, y)$ en un punto (a, b) . Esta **definición ϵ - δ** es análoga a la definición en una variable.

Definición 4.2.1 Definición de un límite

Suponga que una función f de dos variables se define en cualquier punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b) , salvo posiblemente en (a, b) . Entonces

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

significa que para toda $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta.$$

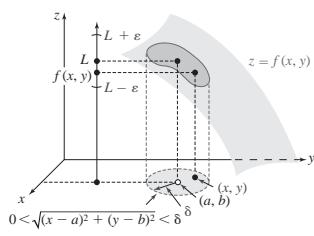


FIGURA 4.2.7 Cuando $(x, y) \neq (a, b)$ es un disco abierto, $f(x, y)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Como se ilustra en la **FIGURA 4.2.7**, cuando f tiene un límite en (a, b) , para un $\varepsilon > 0$, sin que importe cuán pequeño, es posible encontrar un disco abierto de radio δ centrado en (a, b) de modo que $L - \varepsilon < f(x, y) < L + \varepsilon$ para todo punto $(x, y) \neq (a, b)$ dentro del disco. El disco abierto con radio $\delta > 0$ y su centro (a, b) eliminado se definen mediante la desigualdad

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta.$$

Como se mencionó antes, los valores de f son cercanos a L siempre que (x, y) sea cercano a (a, b) . El concepto de “suficientemente cercano” se define mediante el número δ .

EJEMPLO 8 Repaso del ejemplo 5

Demuestre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{10xy^2}{x^2 + y^2} = 0$.

Solución De la definición 4.2.1, si $\varepsilon > 0$ está dado, se desea determinar un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{10xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

La última línea es lo mismo que

$$\frac{10|x|y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Como $x^2 \geq 0$, puede escribirse $y^2 \leq x^2 + y^2$ y

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

$$\text{Así, } \frac{10|x|y^2}{x^2 + y^2} = 10|x| \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 10|x| = 10\sqrt{x^2} \leq 10\sqrt{x^2 + y^2}.$$

De modo que si se elige $\delta = \varepsilon/10$, tenemos

$$\left| \frac{10xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 10\sqrt{x^2 + y^2} \leq 10 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

Por la definición 4.2.1, esto demuestra

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$



4.2

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe el límite dado, si existe.

$$1. \lim_{(x, y) \rightarrow (5, -1)} (x^2 + y^2)$$

$$2. \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} \frac{x^2 - y}{x - y}$$

$$3. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{5x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$4. \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{4x^2 + y^2}{16x^4 + y^4}$$

$$5. \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$6. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2 - y}{x^2 + 2y^2}$$

$$7. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$8. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{6xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$9. \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} x^3 y^2 (x + y)^3$$

$$10. \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 3)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$11. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{xy}}{x + y + 1}$$

$$13. \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 2)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$$

$$15. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - 3y + 1}{x + 5y - 3}$$

$$17. \lim_{(x, y) \rightarrow (4, 3)} xy^2 \left(\frac{x + 2y}{x - y} \right)$$

$$19. \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$$

$$20. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 3)} \frac{xy - 3y}{x^2 + y^2 - 6y + 9}$$

$$12. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$$

$$14. \lim_{(x, y) \rightarrow (\pi, \pi/4)} \cos(3x + y)$$

$$16. \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + 5y^4}$$

$$18. \lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$$

21. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3y + xy^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$

22. $\lim_{(x, y) \rightarrow (-2, 2)} \frac{y^3 + 2x^3}{x + 5xy^2}$

23. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \ln(2x^2 - y^2)$

25. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$

27. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{6xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

29. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

24. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{\sin^{-1}(x/y)}{\cos^{-1}(x - y)}$

26. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(3x^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2}$

28. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

30. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

En los problemas 31-34, determine dónde es continua la función indicada.

31. $f(x, y) = \sqrt{x} \cos \sqrt{x+y}$ 32. $f(x, y) = y^2 e^{1/xy}$

33. $f(x, y) = \tan \frac{x}{y}$

34. $f(x, y) = \ln(4x^2 + 9y^2 + 36)$

En los problemas 35 y 36, determine si la función indicada es continua en los conjuntos dados en el plano xy .

35. $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$
 a) $x^2 + y^2 < 1$ b) $x \geq 0$ c) $y > x$

36. $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$
 a) $y \geq 3$ b) $|x| + |y| < 1$ c) $(x-2)^2 + y^2 < 1$

37. Determine si la función f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$.

38. Muestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en cada variable por separado en $(0, 0)$, esto es, que $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ son continuas en $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente. Demuestre, sin embargo, que f es no continua en $(0, 0)$.

Piense en ello

En los problemas 39 y 40, emplee la definición 4.2.1 para demostrar el resultado indicado; esto es, encuentre δ para un $\varepsilon > 0$ arbitrario.

39. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y}{2x^2 + 2y^2} = 0$ 40. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$

41. Determine si existen puntos en los cuales la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x - y}, & y \neq x \\ 3x^2, & y = x \end{cases}$$

es discontinua.

42. Utilice la definición 4.2.1 para demostrar que $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} y = b$.

4.3 Derivadas parciales

Introducción La derivada de una función de **una variable** $y = f(x)$ está dada por el límite de un cociente de diferencia

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Exactamente de la misma manera, podemos definir la derivada de primer orden de una función de **dos variables** $z = f(x, y)$ con respecto a *cada* variable.

Definición 4.3.1 Derivadas parciales de primer orden

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces la **derivada parcial con respecto a x** en un punto (x, y) es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \quad (1)$$

y la **derivada parcial con respecto a y** es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \quad (2)$$

siempre que exista el límite.

Cálculo de una derivada parcial En (1) observe que la variable y no cambia en el proceso del límite, en otras palabras, y se mantiene fija. De manera similar, en la definición del límite (2) la variable x se mantiene fija. Las dos derivadas parciales de primer orden (1) y (2) representan entonces las *tasas de cambio* de f con respecto a x y y . En un nivel práctico tenemos las siguientes guías simples.

Guías para la diferenciación parcial

Por *reglas de la diferenciación ordinaria* se entienden las reglas formuladas en un curso básico de cálculo diferencial: reglas del múltiplo constante, suma, producto, cociente, potencia y de la cadena.

- Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a y como una constante.
- Para calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a x como una constante.

EJEMPLO 1 Derivadas parciales

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, encuentre

$$a) \frac{\partial z}{\partial x} \quad y \quad b) \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Solución

- a) Diferenciamos z con respecto a x mientras y se mantiene fija y se tratan a las constantes de la manera usual:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (12x^2)y^2 - 8x + 0 + 0 = 12x^2y^2 - 8x.$$

y es constante
↓ ↓

- b) Ahora tratando a x como constante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3(2y) - 0 + 6y^5 + 0 = 8x^3y + 6y^5.$$

x es constante
↓ ↓

Símbolos alternos Las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ a menudo se representan por medio de símbolos alternos. Si $z = f(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y.$$

Símbolos como $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ se denominan **operadores de diferenciación parcial** y denotan la operación de tomar una derivada parcial, en este caso con respecto a x y y . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) &= \frac{\partial}{\partial x}x^2 - \frac{\partial}{\partial x}y^2 = 2x - 0 = 2x \\ y \quad \frac{\partial}{\partial y}e^{x^4y^5} &= e^{x^4y^5} \cdot \frac{\partial}{\partial y}x^4y^5 = e^{x^4y^5}x^4 \cdot \frac{\partial}{\partial y}y^5 = e^{x^4y^5}x^4(5y^4) = 5x^4y^4e^{x^4y^5}. \end{aligned}$$

El **valor** de una derivada parcial en un punto (x_0, y_0) se escribe de diversas maneras. Por ejemplo, la derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a x para (x_0, y_0) se escribe como

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \quad o \quad f_x(x_0, y_0).$$

EJEMPLO 2 Empleo de la regla del producto

Si $f(x, y) = x^5y^{10} \cos(xy^2)$, encuentre f_y .

Solución Cuando x se mantiene fija, observe que

$$f(x, y) = x^5 \overbrace{y^{10}}^{\text{producto de dos funciones de } y} \overbrace{\cos(xy^2)}.$$

Por consiguiente, por las reglas del producto y de la cadena la derivada parcial de f con respecto a y es,

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= x^5[y^{10}(-\operatorname{sen}(xy^2)) \cdot 2xy + 10y^9 \cdot \cos(xy^2)] \\ &= -2x^6y^{11} \operatorname{sen}(xy^2) + 10x^5y^9 \cos(xy^2). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Una tasa de cambio

La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área superficial (en pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre $\partial S / \partial w$ cuando $w = 150$ y $h = 72$. Interprete.

Solución La derivada parcial de S respecto a w ,

$$\frac{\partial S}{\partial w} = (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725},$$

evaluada en $(150, 72)$ es

$$\left. \frac{\partial S}{\partial w} \right|_{(150, 72)} = (0.1091)(0.425)(150)^{-0.575}(72)^{0.725} \approx 0.058.$$

La derivada parcial $\partial S / \partial w$ es la tasa a la cual el área superficial de una persona de altura *fija* h , como un adulto, cambia con respecto al peso w . Puesto que las unidades para la derivada son pies²/libra y $\partial S / \partial w > 0$, advertimos que el aumento de 1 lb, mientras que h está fija en 72, produce un *aumento* en el área de la piel de aproximadamente $0.058 \approx \frac{1}{17}$ pie². ■

■ Interpretación geométrica Como advertimos en la FIGURA 4.3.1a), cuando y es constante, digamos $y = b$, la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $y = b$ es la curva mostrada C . Si definimos la pendiente de una secante a través de los puntos $P(a, b, f(a, b))$ y $R(a + h, b, f(a + h, b))$ como

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

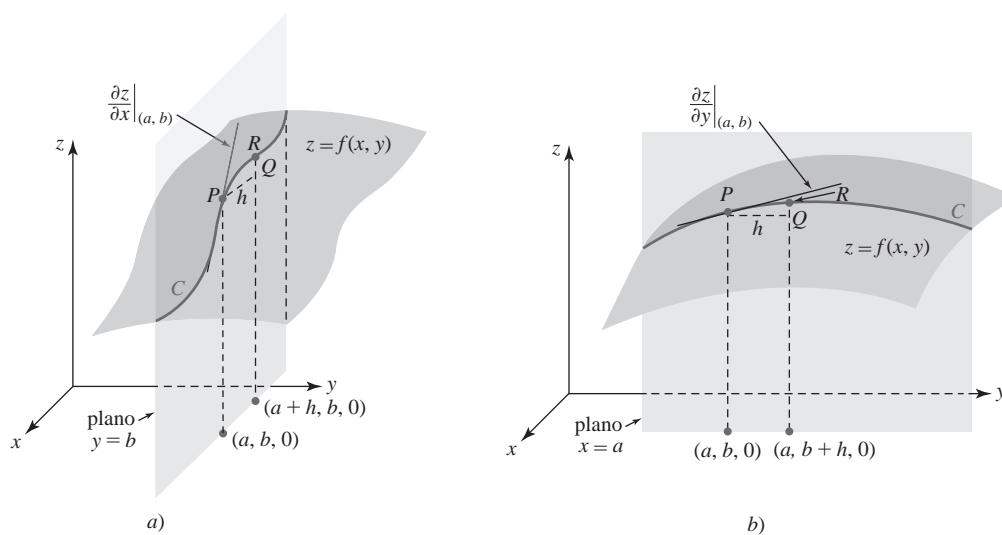


FIGURA 4.3.1 Las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ son pendientes de la recta tangente a la curva C de intersección de la superficie y el plano paralelo a los ejes x o y .

tenemos $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(a, b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$.

En otras palabras, es posible interpretar $\partial z / \partial x$ como la pendiente de la recta tangente en el punto P (para la cual el límite existe) sobre la curva C de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = b$. A su vez, una inspección de la figura 4.3.1b) revela que $\partial z / \partial y$ es la pendiente de la recta tangente en el punto P sobre la curva C de intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $x = a$.

EJEMPLO 4 Pendientes de rectas tangentes

Para $z = 9 - x^2 - y^2$, encuentre la pendiente de la recta tangente en $(2, 1, 4)$ en

- a) el plano $x = 2$ y b) el plano $y = 1$.

Solución

- a) Al especificar el plano $x = 2$, se mantienen todos los valores de x constantes. Por consiguiente, calculamos la derivada parcial de z con respecto a y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

En $(2, 1, 4)$ la pendiente es $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(2, 1)} = -2$.

- b) En el plano $y = 1$, y es constante y por ello encontramos la derivada parcial de z con respecto a x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x.$$

En $(2, 1, 4)$ la pendiente es $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(2, 1)} = -4$.

Vea la FIGURA 4.3.2.

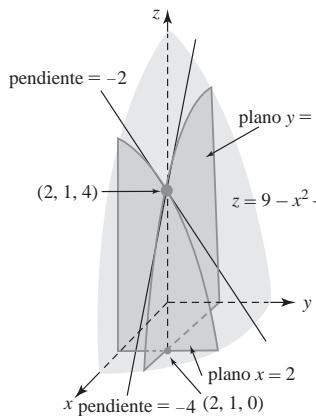


FIGURA 4.3.2 Pendientes de las rectas tangentes del ejemplo 4

Si $z = f(x, y)$, entonces los valores de las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ en un punto $(a, b, f(a, b))$ también se denominan **pendientes de la superficie** en las direcciones x y y , respectivamente.

■ Funciones de tres o más variables Las tasas de cambio de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ en las direcciones x , y y z son las derivadas parciales $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$ y $\partial w / \partial z$, respectivamente. La derivada parcial de f respecto a z se define como

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}, \quad (3)$$

siempre que el límite exista. Para calcular, por ejemplo, $\partial w / \partial x$, se deriva con respecto a x de la manera usual mientras se mantienen constantes tanto y como z . De esta manera se extiende el proceso de diferenciación parcial a funciones de cualquier número de variables. Si $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una función de n variables, entonces la derivada parcial de f con respecto a la variable i -ésima, $i = 1, 2, \dots, n$, se define como

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}. \quad (4)$$

Para calcular $\partial u / \partial x_i$ se deriva con respecto a x_i mientras se mantienen fijas las $n - 1$ variables restantes.

EJEMPLO 5 Empleo de la regla del cociente

Si $w = \frac{x^2 - z^2}{y^2 + z^2}$, encuentre $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Solución Se emplea la regla del cociente mientras se mantiene constante x y y :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(y^2 + z^2)(-2z) - (x^2 - z^2)2z}{(y^2 + z^2)^2} = -\frac{2z(x^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^2}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 Tres derivadas parciales

Si $f(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos 4x \sin 6y$, entonces las derivadas parciales con respecto a x , y y t son, a su vez,

$$f_x(x, y, t) = -4e^{-3\pi t} \sin 4x \sin 6y,$$

$$f_y(x, y, t) = 6e^{-3\pi t} \cos 4x \cos 6y,$$

$$\text{y } f_t(x, y, t) = -3\pi e^{-3\pi t} \cos 4x \sin 6y. \quad \blacksquare$$

Derivadas de orden superior y mixtas Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ son ellas mismas funciones de x y y . En consecuencia, se pueden calcular las **derivadas parciales de segundo orden** y de orden superior. De hecho, se encuentra la derivada parcial de $\partial z / \partial x$ con respecto a y , y la derivada parcial de $\partial z / \partial y$ con respecto a x . Los últimos tipos de derivadas parciales se denominan **derivadas parciales mixtas**. En resumen, las segundas, terceras derivadas parciales y la derivada parcial mixta de $z = f(x, y)$ están definidas por:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Derivadas parciales de segundo orden mixtas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

diferenciar ↑ diferenciar ↑
 primero con primero con
 respecto a y respecto a x

Observe en el resumen que hay cuatro derivadas parciales de segundo orden. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden de $z = f(x, y)$ hay? Las derivadas parciales de orden superior para $z = f(x, y)$ y para funciones de tres o más variables se definen de manera similar.

Símbolos alternos Las derivadas parciales de segundo y tercer orden también se denotan mediante f_{xx} , f_{yy} , f_{xxx} , etcétera. La notación de subíndice para las derivadas parciales de segundo orden mixtas es f_{xy} o f_{yx} .

Nota El orden de los símbolos en los subíndices de las parciales mixtas es justamente lo opuesto al orden de los símbolos cuando se usa la notación de operador de diferenciación parcial:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\text{y } f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Igualdad de parciales mixtas Aunque no se demostrará, el siguiente teorema enuncia que bajo ciertas condiciones es irrelevante el orden en el cual se efectúa una derivada parcial de segundo orden mixta; esto es, las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales.

Teorema 4.3.2 Igualdad de parciales mixtas

Sea f una función de dos variables. Si las derivadas parciales f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} son continuas en algún disco abierto, entonces

$$f_{xy} = f_{yx}$$

en cada punto sobre el disco.

Vea el problema 68 en “Desarrolle su competencia 4.3”.

EJEMPLO 7 Derivadas parciales de segundo orden

Si $z = x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5$, encuentre

$$\text{a)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \quad \text{b)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \quad \text{y} \quad \text{c)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Solución De las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 12x^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 3y^2$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2y^2 + 36x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = 72x, \\ \text{b)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2x^2 - 6y \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = -6, \\ \text{c)} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 4xy. \end{aligned}$$

Debemos verificar que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 4xy$. ■

Si f es una función de dos variables y tiene derivadas parciales de primer, segundo y tercer orden continuas sobre algún disco abierto, entonces las derivadas mixtas de tercer orden son iguales; esto es,

$$f_{xyy} = f_{yxx} = f_{yyx} \quad \text{y} \quad f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy}.$$

Se sostienen comentarios similares para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x , y y z que posee derivadas parciales continuas de cualquier orden en alguna bola abierta, entonces las derivadas parciales como $f_{xyz} = f_{zyx} = f_{yxz}$ son iguales en cada punto en la bola.

EJEMPLO 8 Derivadas parciales mixtas de tercer orden

Si $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 + z^6}$, determine f_{yzz} .

Solución f_{yzz} es una derivada parcial mixta de tercer orden. Primero se encuentra la derivada parcial con respecto a y mediante la regla de potencias para funciones:

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2} 4y^3 = 2y^3(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}.$$

La derivada parcial con respecto a z de la función en la última línea es entonces

$$\begin{aligned} f_{yz} = (f_y)_z &= 2y^3 \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2} \cdot 6z^5 \\ &= -6y^3 z^5 (x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Por último, por la regla del producto,

$$\begin{aligned} f_{yzz} = (f_y)_z &= -6y^3z^5 \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2} \cdot 6z^5 - 30y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2} \\ &= y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2}(24z^6 - 30x^2 - 30y^4). \end{aligned}$$

Se sugiere que el lector calcule f_{zzy} y f_{zyz} y verifique sobre cualquier disco abierto que no contenga al origen que $f_{yzz} = f_{zzy} = f_{zyz}$. ■

Diferenciación parcial implícita La diferenciación parcial implícita se realiza de la misma manera que para funciones de una variable.

EJEMPLO 9 Derivada parcial implícita

Suponga que la ecuación $z^2 = x^2 + xy^2z$ define a z implícitamente como una función de x y y . Encuentre $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$.

Solución Al mantener y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x} z^2 = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy^2z) \quad \text{implica} \quad \frac{\partial}{\partial x} z^2 = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + y^2 \frac{\partial}{\partial x} xz.$$

Por la regla de potencia para funciones junto con la regla del producto:

$$2z \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2 \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + z \right).$$

Después de que resolvamos la última ecuación para $\partial z / \partial x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y^2z}{2z - xy^2}.$$

Al mantener ahora x constante,

$$\frac{\partial}{\partial y} z^2 = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + xy^2z) \quad \text{implica} \quad 2z \frac{\partial z}{\partial y} = x \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2yz \right).$$

Al resolver para $\partial z / \partial y$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xyz}{2z - xy^2}.$$

4.3

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-4, emplee la definición 4.3.1 para calcular $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ con respecto a la función dada.

1. $z = 7x + 8y^2$

2. $z = xy$

3. $z = 3x^2y + 4xy^2$

4. $z = \frac{x}{x+y}$

En los problemas 5-24, encuentre las primeras derivadas parciales de la función dada.

5. $z = x^2 - xy^2 + 4y^5$

6. $z = -x^3 + 6x^2y^3 + 5y^2$

7. $z = 5x^4y^3 - x^2y^6 + 6x^5 - 4y$

8. $z = \tan(x^3y^2)$

9. $z = \frac{4\sqrt{x}}{3y^2 + 1}$

10. $z = 4x^3 - 5x^2 + 8x$

11. $z = (x^3 - y^2)^{-1}$

12. $z = (-x^4 + 7y^2 + 3y)^6$

13. $z = \cos^2 5x + \sin^2 5y$

14. $z = e^{x^2 \tan^{-1} y^2}$

15. $f(x, y) = xe^{x^3y}$

16. $f(\theta, \phi) = \phi^2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{\phi}$

17. $f(x, y) = \frac{3x - y}{x + 2y}$

18. $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 - y^2)^2}$

19. $g(u, v) = \ln(4u^2 + 5v^3)$

20. $h(r, s) = \frac{\sqrt{r}}{s} - \frac{\sqrt{s}}{r}$

21. $w = 2\sqrt{xy} - ye^{y/z}$

22. $w = xy \ln xz$

23. $f(u, v, x, t) = u^2w^2 - uv^3 + vw \cos(ut^2) + (2x^2t)^4$

24. $G(p, q, r, s) = (p^2q^3)e^{2r^4s^5}$

En los problemas 25-26, suponga que $z = 4x^3y^4$.

25. Determine la pendiente de la recta tangente en $(1, -1, 4)$ en el plano $x = 1$.

26. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $(1, -1, 4)$ en el plano $y = -1$.

En los problemas 27 y 28, suponga que $f(x, y) = \frac{18xy}{x + y}$.

27. Determine las ecuaciones paramétricas para la recta tangente en $(-1, 4, -24)$ en el plano $x = -1$.
 28. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta tangente en $(-1, 4, -24)$ en el plano $y = 4$.

En los problemas 29 y 30, suponga que $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

29. ¿A qué tasa está cambiando z con respecto a x en el plano $y = 2$ en el punto $(2, 2, 1)$?
 30. ¿A qué tasa está cambiando z con respecto a y en el plano $x = \sqrt{2}$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2)$?

En los problemas 31-38, encuentre la derivada parcial indicada.

31. $z = e^{xy}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 32. $z = x^4y^{-2}; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$
 33. $f(x, y) = 5x^2y^2 - 2xy^3; f_{xy}$ 34. $f(p, q) = \ln \frac{p+q}{q^2}; f_{qp}$
 35. $w = u^2v^3t^3; w_{uvw}$ 36. $w = \frac{\cos(u^2v)}{t^3}; w_{vvt}$
 37. $F(r, \theta) = e^r \cos \theta; F_{r\theta r}$ 38. $H(s, t) = \frac{s+t}{s-t}; H_{ts}$

En los problemas 39 y 40, verifique que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

39. $z = x^6 - 5x^4y^3 + 4xy^2$ 40. $z = \tan^{-1}(2xy)$

En los problemas 41 y 42, verifique que las derivadas parciales indicadas son iguales.

41. $w = u^3v^4 - 4u^2v^2t^3 + v^2t; w_{uvv}, w_{tvu}, w_{vuu}$
 42. $F(\eta, \xi, \tau) = (\eta^3 + \xi^2 + \tau)^2; F_{\eta\xi\eta}, F_{\xi\eta\eta}, F_{\eta\eta\xi}$

En los problemas 43-46, suponga que la ecuación dada define a z como una función de las dos variables restantes. Emplee diferenciación implícita para encontrar las primeras derivadas parciales.

43. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 44. $z^2 = x^2 + y^2z$
 45. $z^2 + u^2v^3 - uvz = 0$ 46. $se^z - e^{st} + 4s^3t = z$
 47. El área A de un paralelogramo con base x y altura y sen θ es $A = xy \operatorname{sen} \theta$. Encuentre todas las primeras derivadas parciales.
 48. El volumen del cono truncado que se muestra en la FIGURA 4.3.3 es $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$. Determine todas las primeras derivadas parciales.

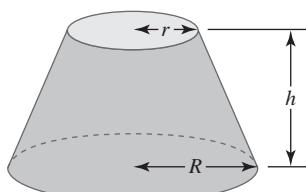


FIGURA 4.3.3 Cono truncado del problema 48

Aplicaciones

En los problemas 49 y 50, verifique que la distribución de temperatura indicada satisface la **ecuación de Laplace en dos dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace (5) puede interpretarse como la distribución de temperatura independiente del tiempo a través de una delgada placa bidimensional. Vea la FIGURA 4.3.4.

49. $u(x, y) = (\cosh 2\pi y + \operatorname{senh} 2\pi y)\operatorname{sen} 2\pi x$
 50. $u(x, y) = e^{-(n\pi x/L)} \operatorname{sen}(n\pi y/L)$, n y L constantes

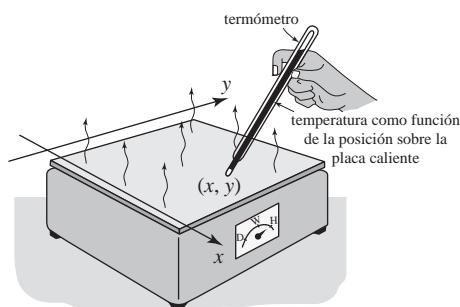


FIGURA 4.3.4 Placa caliente de los problemas 49 y 50

En los problemas 51 y 52, verifique que la función dada satisface la ecuación de Laplace (5).

51. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 52. $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

En los problemas 53 y 54 verifique que la función dada satisface la **ecuación de Laplace en tres dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

53. $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

54. $u(x, y, z) = e^{\sqrt{m^2 + n^2}x} \cos my \operatorname{sen} nz$

En los problemas 55 y 56, verifique que la función dada satisface la **ecuación de onda unidimensional**

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7)$$

La ecuación de onda (7) ocurre en problemas que implican fenómenos vibratorios.

55. $u(x, t) = \cos at \operatorname{sen} x$
 56. $u(x, t) = \cos(x + at) + \operatorname{sen}(x - at)$

57. La concentración molecular $C(x, t)$ de un líquido está dada por $C(x, t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la **ecuación de difusión unidimensional**

$$\frac{k}{4} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

58. La presión P ejercida por un gas ideal encerrado está dada por $P = k(T/V)$, donde k es una constante, T es la temperatura y V es el volumen. Encuentre:

- a) la tasa de cambio de P con respecto a V ,
 b) la tasa de cambio de V con respecto a T y
 c) la tasa de cambio de T con respecto a P .

59. El desplazamiento vertical de una larga cuerda fija en el origen pero cayendo bajo su propio peso está dado por

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & 0 \leq x \leq at \\ -\frac{1}{2}gt^2, & x > at. \end{cases}$$

Vea la FIGURA 4.3.5.

- a) Determine $\partial u / \partial t$. Interprete para $x > at$.
 b) Determine $\partial u / \partial x$. Interprete para $x > at$.

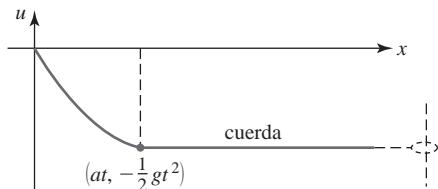


FIGURA 4.3.5 Cuerda que cae del problema 59

60. Para la función de área de la piel $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ que se discutió en el ejemplo 3 encuentre $\partial S / \partial h$ en $w = 60$, $h = 36$. Si una niña crece de 36 a 37 pulg, mientras su peso se mantiene en 60 lb, ¿cuál es el aumento aproximado en el área de la piel?

Piense en ello

61. Formule una definición de límite que sea análoga a la definición 4.3.1 para las derivadas parciales de segundo orden

$$a) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad b) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad c) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

62. Encuentre una función $z = f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 2y + \frac{1}{x} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x + 1.$$

63. ¿Es posible que una función $z = f(x, y)$, con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto, se encuentre de manera tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y^2 \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2?$$

64. a) Suponga que la función $w = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de tercer orden continuas. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden diferentes hay?
 b) Suponga que la función $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de n -ésimo orden. ¿Cuántas derivadas parciales diferentes de n -ésimo orden hay?

65. a) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene la propiedad de que $\partial z / \partial x = 0$ y $\partial z / \partial y = 0$ para todo (x, y) . ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma de f ?

- b) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $\partial^2 z / \partial x \partial y = 0$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma f ?

66. Algunas curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$ se muestran en la FIGURA 4.3.6. Emplee estas curvas de nivel para conjeturar respecto a los signos algebraicos de las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ en el punto que se indica en la figura.

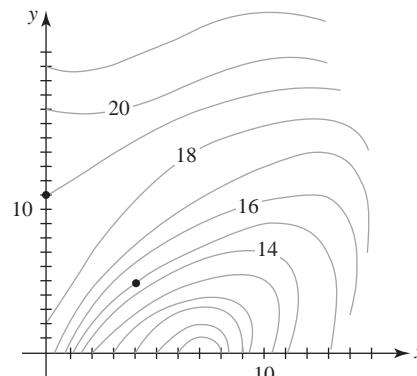


FIGURA 4.3.6 Curvas de nivel del problema 66

67. Un clásico matemático Una función $z = f(x, y)$ quizás no sea continua en un punto aunque es posible que siga teniendo derivadas parciales en ese punto. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es continua en $(0, 0)$. (Vea el problema 38 en “Desarrolle su competencia 4.2”.) Emplee (1) y (2) de la definición 4.3.1 para mostrar que

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, 0)} = 0 \quad y \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0, 0)} = 0.$$

68. Un clásico matemático Considere la función $z = f(x, y)$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$a) \text{ Calcule } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, y)} \text{ y } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x, 0)}.$$

$$b) \text{ Muestre que } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{(0, 0)} \neq \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0, 0)}.$$

4.4 Linealización y diferenciales

- Introducción** Una linealización $L(x)$ de una función de una sola variable $y = f(x)$ en un número x_0 está dada por $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Esta ecuación puede utilizarse para aproximar los valores de la función $f(x)$ en la vecindad de x_0 , esto es, $L(x) \approx f(x)$ para valores de x cercanos a x_0 . De manera similar puede definirse una linealización $L(x, y)$ de una función de dos

variables en un punto (x_0, y_0) . En el caso de una función de una sola variable se asumió que $y = f(x)$ era diferenciable en x_0 , esto es,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

existe. Recuerde también que si f es diferenciable en x_0 , también es continua en ese número. Al repetir la suposición en (1), deseamos que $z = f(x, y)$ sea diferenciable en un punto (x_0, y_0) . Aunque hemos considerado lo que significa que $z = f(x, y)$ posea *derivadas parciales* en un punto, aún no formulamos una definición de *diferenciabilidad* de una función de dos variables f en un punto.

■ Incremento de la variable dependiente La definición de diferenciabilidad de una función de cualquier número de variables independientes no depende de la noción de un cociente de diferencia como en (1), sino más bien de la noción de un *incremento* de la variable dependiente. Recuerde que para una función de una variable $y = f(x)$ el incremento en la variable dependiente está dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

De manera análoga, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, definimos el **incremento de la variable dependiente z** como

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (2)$$

La FIGURA 4.4.1 muestra que Δz produce la cantidad de cambio en la función cuando (x, y) cambia a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

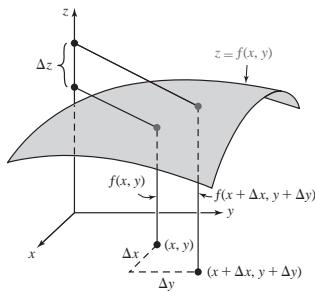


FIGURA 4.4.1 Incremento en z

EJEMPLO 1 Determinando Δz

Encuentre Δz para la función polinomial $z = x^2 - xy$. ¿Cuál es el cambio en la función de $(1, 1)$ a $(1.2, 0.7)$?

Solución De (2),

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - (x^2 - xy) \\ &= (2x - y)\Delta x - x\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x\Delta y. \end{aligned} \quad (3)$$

Con $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.2$ y $\Delta y = -0.3$,

$$\Delta z = (1)(0.2) - (1)(-0.3) + (0.2)^2 - (0.2)(-0.3) = 0.6. \quad \blacksquare$$

■ Una fórmula de incremento fundamental Una breve reinspección del incremento Δz en (3) muestra que en los primeros dos términos los coeficientes de Δx y Δy son $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$, respectivamente. El importante teorema que sigue muestra que esto no es un accidente.

Teorema 4.4.1 Una fórmula del incremento

Considere que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en una región rectangular abierta que está definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Si (x, y) es cualquier punto en esta región, entonces existen ε_1 y ε_2 , las cuales son funciones de Δx y Δy , tales que

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \quad (4)$$

donde $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$.

DEMOSTRACIÓN Al sumar y restar $f(x, y + \Delta y)$ en (2), tenemos,

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Al aplicar el teorema del valor medio a cada conjunto de corchetes, se llega a

$$\Delta z = f_x(x_0, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y, \quad (5)$$

donde, como se muestra en la FIGURA 4.4.2, $x < x_0 < x + \Delta x$ y $y < y_0 < y + \Delta y$. En este caso, definimos

$$\varepsilon_1 = f_x(x_0, y + \Delta y) - f_x(x, y) \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = f_y(x, y_0) - f_y(x, y). \quad (6)$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$, entonces, como se ilustra en la figura, $P_2 \rightarrow P_1$ y $P_3 \rightarrow P_1$. Puesto que f_x y f_y se suponen continuas en la región, tenemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2 = 0.$$

Al resolver (6) para $f_x(x_0, y + \Delta y)$ y $f_y(x, y_0)$ y sustituir en (5), obtenemos (4).

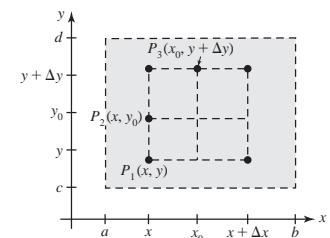


FIGURA 4.4.2 Región rectangular en el teorema 4.4.1

Diferenciabilidad: funciones de dos variables Ahora podemos definir la diferenciabilidad de una función $z = f(x, y)$ en un punto.

Definición 4.4.1 Función diferenciable

Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si el incremento Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en cada punto en una región R del plano xy , entonces se dice que f es **diferenciable en R** . Si f es diferenciable sobre la región consistente en el plano xy completo, se afirma entonces que es **diferenciable en todas partes**.

Es interesante notar que las derivadas parciales f_x y f_y quizás existan en un punto (x_0, y_0) e incluso f no sea diferenciable en ese punto. Desde luego, si f_x y f_y no existen en un punto (x_0, y_0) , entonces f no es diferenciable en ese punto. El siguiente teorema proporciona una condición suficiente bajo la cual la existencia de las derivadas parciales implica diferenciabilidad.

Teorema 4.4.2 Condición suficiente para la diferenciabilidad

Si las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas en un punto en una región abierta R , entonces $z = f(x, y)$ es diferenciable sobre R .

El siguiente teorema establece que si $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto, entonces es continua en el punto.

Teorema 4.4.3 Diferenciabilidad implica continuidad

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0) , entonces f es continua en (x_0, y_0) .

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) y que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Utilizando esta expresión en (4), obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y.$$

Cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, se deduce de la última línea que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

Si se considera $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, entonces el último resultado es equivalente a

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Por (5) de la sección 4.2, f es continua en (x_0, y_0) .

EJEMPLO 2 Diferenciabilidad

Si (3) del ejemplo 1 se escribe como

$$\Delta z = \underbrace{(2x - y)}_{f_x} \Delta x + \underbrace{(-x)}_{f_y} \Delta y + \underbrace{(\Delta x)}_{\varepsilon_1} (\Delta x) + \underbrace{(-\Delta x)}_{\varepsilon_2} (\Delta y),$$

podemos identificar $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = -\Delta x$. Puesto que $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, la función $z = x^2 - xy$ es diferenciable en todo punto en el plano xy .

Como se advirtió en el ejemplo 2, la función dada es un polinomio. Cualquier función polinomial de dos o más variables es diferenciable en todas partes.

■ Linealización Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y (x, y) es un punto muy cercano a (x_0, y_0) , se deduce de la definición 4.4.1 que $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ son ambas cercanas a cero, e igualmente lo son $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$. En vista de (4) esto significa que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Empleando $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ la última línea es lo mismo que

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Esto nos lleva a definir la linealización de f en (x_0, y_0) de la siguiente manera.

Definición 4.4.2 Linealización

Si una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto (x_0, y_0) , entonces la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (7)$$

se dice que es una **linealización** de f en (x_0, y_0) . Para un punto (x, y) cercano a (x_0, y_0) , la aproximación

$$f(x, y) \approx L(x, y) \quad (8)$$

se denomina **aproximación lineal local** de f en (x_0, y_0) .

EJEMPLO 3 Linealización

Encuentre una linealización de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(4, 3)$.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad y \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Utilizando los valores $f(4, 3) = 5$, $f_x(4, 3) = \frac{4}{5}$ y $f_y(4, 3) = \frac{3}{5}$, se deduce de (7) que una linealización de f en $(4, 3)$ es

$$L(x, y) = 5 + \frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y - 3). \quad (9)$$

La última ecuación es equivalente a $L(x, y) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ pero con fines de cálculo (9) es más conveniente.

EJEMPLO 4 Aproximación lineal local

Utilice la aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2}$.

Solución Primero observe que se está pidiendo una aproximación del valor de la función $f(4.01, 2.98)$, donde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Debido a que el punto $(4.01, 2.98)$ es razonablemente cercano al punto $(4, 3)$ es factible utilizar la linealización en (9) para formar una aproximación lineal local $f(x, y) \approx L(x, y)$. De

$$L(4.01, 2.98) = 5 + \frac{4}{5}(4.01 - 4) + \frac{3}{5}(2.98 - 3) = 4.996$$

se sigue que la aproximación deseada es $f(4.01, 2.98) \approx L(4.01, 2.98)$ o

$$\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2} \approx 4.996.$$

Suponga que se deja $z = L(x, y)$ y se reescribe (7) como

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0. \quad (10)$$

Al relacionar (10) término a término con (2) de la sección 1.5 se demuestra que una linealización de una función $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) es una ecuación de un plano.

Plano tangente La linealización $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ de una función f de una sola variable en un número x_0 no es más que una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$. En tres dimensiones el análogo de una *recta tangente* a una curva es un *plano tangente* a una superficie. Veremos en la sección 4.7 que la fórmula de linealización $z = L(x, y)$ en (7) es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Diferenciales Recuerde también que para una función f de una sola variable independiente hay dos diferenciales $\Delta x = dx$ y $dy = f'(x) dx$. La diferencial dx es simplemente el cambio en la variable independiente x . La diferencial dy es el cambio en la linealización $L(x)$; en el número x_0 tenemos

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x) - L(x_0) \\ &= [f(x_0) + f'(x_0)\Delta x] - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0] \\ &= f'(x_0) dx = dy.\end{aligned}$$

En el caso de una función f de dos variables tenemos naturalmente tres diferenciales. Los cambios en las variables independientes x y y son dx y dy ; los cambios en la linealización $L(x, y)$ se denotan por medio de dz . En el punto (x_0, y_0) el cambio en la linealización es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned} \quad (11)$$

Empleando el resultado en (11) definimos a continuación la diferencial dz de una función f en un punto arbitrario en el plano xy . Si (x, y) denota el punto, entonces un punto cercano es $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ o $(x + dx, y + dy)$. La diferencial dz se llama comúnmente **diferencial total** de la función.

Definición 4.4.3 Diferenciales

Sea $z = f(x, y)$ una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y existen. Entonces las **diferenciales de x y y** son $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. La **diferencial de z** ,

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (12)$$

también se denomina **diferencial total de z** .

EJEMPLO 5 Diferencial total

Si $z = x^2 - xy$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x.$$

De (12) la diferencial total de la función es

$$dz = (2x - y) dx - x dy.$$

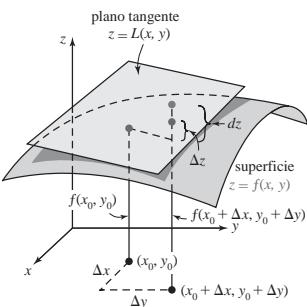


FIGURA 4.4.3 Interpretaciones geométricas de dx , dy , Δz y dz

Concluimos de inmediato de (4) del teorema 4.4.1 que cuando f_x y f_y son continuas y cuando Δx y Δy son cercanas a 0, entonces dz es una aproximación de Δz , esto es

$$dz \approx \Delta z. \quad (13)$$

La **FIGURA 4.4.3** es una versión tridimensional del diferencial. Los puntos marcados son los mismos puntos que se muestran en la figura 4.4.1 y están sobre la superficie. El plano es tangente a la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y el punto marcado más alto de todos es un punto sobre el plano tangente.

EJEMPLO 6 Comparación de Δz y dz

En el ejemplo 1 vimos que la función $z = x^2 - xy$ cambió en la cantidad exacta $\Delta z = 0.6$ cuando hubo un desplazamiento del punto $(1, 1)$ a $(1.2, 0.7)$. Con las identificaciones $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0.2$ y $dy = -0.3$, se observa de (12) y (13) y el resultado del ejemplo 5 que el cambio Δz de la función puede aproximarse por medio de los cambios en la linealización:

$$dz = (1)(0.2) - (1)(-0.3) = 0.5. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Una aproximación de un error

El sistema cardiovascular humano es similar a circuitos eléctricos en serie y en paralelo. Por ejemplo, cuando la sangre circula a través de dos resistencias en paralelo, como se muestra en la **FIGURA 4.4.4**, entonces la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{o} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Si los errores porcentuales en la medición de R_1 y R_2 son $\pm 0.2\%$ y $\pm 0.6\%$, respectivamente, encuentre el error porcentual máximo aproximado en R .

Solución Tenemos que $\Delta R_1 = \pm 0.002R_1$ y $\Delta R_2 = \pm 0.006R_2$. En este caso,

$$dR = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} dR_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} dR_2,$$

y por ello

$$\begin{aligned} |\Delta R| \approx |dR| &\leq \left| \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} (\pm 0.002R_1) \right| + \left| \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} (\pm 0.006R_2) \right| \\ &= R \left[\frac{0.002R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2} \right] \\ &\leq R \left[\frac{0.006R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2} \right] = (0.006)R. \end{aligned}$$

Entonces el error relativo máximo está dado por la aproximación $|dR|/R \approx 0.006$; por tanto, el error porcentual máximo es aproximadamente 0.6% . ■

■ Funciones de tres variables Las definiciones 4.4.1, 4.4.2 y 4.4.3, así como los teoremas 4.4.1, 4.4.2 y 4.4.3, se generalizan de la manera esperada a funciones de tres o más variables. A continuación se mencionan algunos puntos importantes. Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** Δw está dado por

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \quad (14)$$

En este caso f es **diferenciable** en un punto (x_0, y_0, z_0) si Δw puede escribirse

$$\Delta w = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \quad (15)$$

donde ε_1 , ε_2 y $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ cuando Δx , Δy y $\Delta z \rightarrow 0$. Si f es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) , entonces la **linealización** de f se define como

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0). \quad (16)$$

Por último, la **diferencial total** de f es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \quad (17)$$

EJEMPLO 8 Diferencial total: función de tres variables

Si $w = x^2 + 2y^3 + 3z^4$, entonces las tres primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 12z^3.$$

Por (17) la diferencial total es

$$dw = 2x dx + 6y^2 dy + 12z^3 dz. \quad \blacksquare$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

NOTAS DESDE EL AULA

- i) Puesto que $dy \approx \Delta y$ siempre que $f'(x)$ exista y Δx es cercana a 0, parece razonable esperar que $dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$ será una buena aproximación a Δz cuando Δx y Δy son ambas cercanas a 0. Pero la vida no es tan sencilla para funciones de varias variables. La garantía de que $dz \approx \Delta z$ para incrementos cercanos a 0 proviene de la continuidad de las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y no simplemente de su existencia.
- ii) Cuando trabaje en los problemas 27-30 en la sección “Desarrolle su competencia 4.4” descubrirá que las funciones ε_1 y ε_2 introducidas en (4) del teorema 4.4.1 no son únicas.

4.4

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una linealización de la función dada en el punto indicado.

1. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^3y; \quad (1, 1)$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^3y}; \quad (2, 2)$
3. $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}; \quad (8, 15)$
4. $f(x, y) = 3 \operatorname{sen} x \cos y; \quad (\pi/4, 3\pi/4)$
5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3); \quad (-1, 1)$
6. $f(x, y) = e^{-2y} \operatorname{sen} 3x; \quad (0, \pi/3)$

En los problemas 7-10, emplee una aproximación lineal para aproximar la cantidad indicada.

7. $\sqrt{102} + \sqrt[4]{80}$
8. $\sqrt{\frac{35}{63}}$
9. $f(1.95, 2.01)$ para $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$
10. $f(0.52, 2.96)$ para $f(x, y) = \cos \pi xy$

En los problemas 11-22, calcule la diferencial total de la función dada.

11. $z = x^2 \operatorname{sen} 4y$
12. $z = xe^{x^2 - y^2}$
13. $z = \sqrt{2x^2 - 4y^3}$
14. $z = (5x^3y + 4y^5)^3$
15. $f(s, t) = \frac{2s - t}{s + 3t}$
16. $g(r, \theta) = r^2 \cos 3\theta$
17. $w = x^2y^4z^5$
18. $w = e^{-z^2} \cos(x^2 + y^4)$

$$19. F(r, s, t) = r^3 + s^{-2} - 4t^{1/2}$$

$$20. G(\rho, \theta, \phi) = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$21. w = \ln\left(\frac{uv}{st}\right)$$

$$22. w = \sqrt{u^2 + s^2t^2 - v^2}$$

En los problemas 23-26, compare los valores de Δz y dz para la función dada cuando (x, y) varía del primero al segundo punto.

23. $z = 3x + 4y + 8; \quad (2, 4), (2.2, 3.9)$
24. $z = 2x^2y + 5y + 8; \quad (0, 0), (0.2, -0.1)$
25. $z = (x + y)^2; \quad (3, 1), (3.1, 0.8)$
26. $z = x^2 + x^2y^2 + 2; \quad (1, 1), (0.9, 1.1)$

En los problemas 27-30, encuentre funciones ε_1 y ε_2 de Δz como se define en (4) del teorema 4.4.1.

27. $z = 5x^2 + 3y - xy$
28. $z = 10y^2 + 3x - x^2$
29. $z = x^2y^2$
30. $z = x^3 - y^3$

Aplicaciones

31. Cuando la sangre fluye a través de tres resistencias R_1, R_2, R_3 , en paralelo, la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Dado que el error porcentual en la medida de cada resistencia es $\pm 0.9\%$, calcule el error porcentual máximo aproximado en R .

32. La presión P de un gas ideal confinado está dada por $P = k(T/V)$, donde V es el volumen, T es la temperatura y k es una constante. Dado que los errores porcentuales al medir T y V son a lo sumo 0.6 y 0.8%, respectivamente, calcule el error porcentual máximo aproximado en P .
33. La tensión T en la cuerda del yo-yo que se muestra en la FIGURA 4.4.5 es

$$T = mg \frac{R}{2r^2 + R^2},$$

donde mg es su peso constante. Determine el cambio aproximado en la tensión si R y r se incrementan de 4 cm y 0.8 cm a 4.1 cm y 0.9 cm, respectivamente. ¿La tensión aumenta o disminuye?

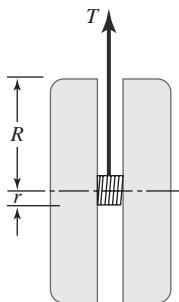


FIGURA 4.4.5 Yo-yo del problema 33

34. Determine el incremento aproximado en el volumen de un cilindro circular recto si su altura aumenta de 10 a 10.5 cm y su radio crece de 5 a 5.3 cm. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado?
35. Si la longitud, ancho y altura de una caja rectangular cerrada aumentan, respectivamente, en 2, 5 y 8%, ¿cuál es el incremento porcentual aproximado en el volumen?
36. En el problema 35, si la longitud, ancho y altura originales son, respectivamente, 3, 1 y 2 pies, ¿cuál es el incremento aproximado en el área de la superficie de la caja? ¿Cuál es la nueva área aproximada de la superficie?
37. La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ produce el área de la superficie del cuerpo de una persona en términos de su peso w y altura h . Si el error en la medición de w es a lo sumo 3% y el error en la medición de h es a lo sumo 5%, ¿cuál es el error porcentual máximo aproximado en la medición de S ?
38. La impedancia Z del circuito en serie que se presenta en la FIGURA 4.4.6 es $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, donde R es la resistencia, $X = 1000L - 1/(1000C)$ es la reactancia neta, L es la inductancia y C es la capacitancia. Si los valores de R , L y C dados en la figura se incrementan, respectivamente, a 425 ohms, 0.45 henrys y 11.1×10^{-5} farads, ¿cuál es el cambio aproximado en la impedancia del circuito? ¿Cuál es el valor aproximado de la nueva impedancia?

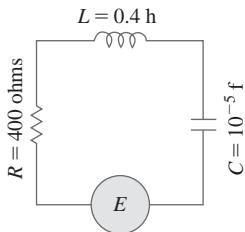


FIGURA 4.4.6 Circuito en serie del problema 38

■ Piense en ello

39. a) Dé una definición para la linealización de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$.
- b) Emplee la linealización para encontrar una aproximación de $\sqrt{(9.1)^2 + (11.75)^2 + (19.98)^2}$.
40. En el problema 67 de “Desarrolle su competencia 4.3” se vio que para

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tanto $\partial z/\partial x$ como $\partial z/\partial y$ existen en $(0, 0)$. Explique por qué f no es diferenciable en $(0, 0)$.

41. a) Dé una explicación intuitiva del porqué $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en $(0, 0)$.
- b) Despues de esto pruebe que f no es diferenciable en $(0, 0)$.
42. La longitud de los lados de la caja rectangular que se muestra en la FIGURA 4.4.7 son x , y y z . Considere que el volumen de la caja es V . Cuando se incrementan los lados de la caja en las cantidades Δx , Δy y Δz obtenemos la caja rectangular que se ilustra en la figura. Dibuje o trace la figura 4.4.7 sobre un pedazo de papel. Identifique por medio de colores diferentes las cantidades Δx , Δy , Δz , ΔV , dV y $\Delta V - dV$.

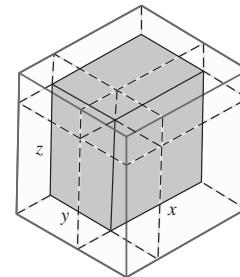


FIGURA 4.4.7 Caja del problema 42

■ Proyectos

43. **Brazo robótico** Un brazo de robot bidimensional cuyo hombro está fijo en el origen sigue el rastro de su posición por medio de un ángulo del hombro θ y un ángulo del codo ϕ como se ilustra en la FIGURA 4.4.8. El ángulo del hombro se mide en el sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x y el ángulo del codo se mide en esa misma dirección desde el brazo superior hasta el brazo inferior, los cuales tienen una longitud respectiva L y l .

- a) La ubicación de la unión del codo está dada por (x_c, y_c) , donde

$$x_c = L \cos \theta, \quad y_c = L \sin \theta.$$

Encuentre fórmulas correspondientes para la ubicación (x_m, y_m) de la mano.

- b) Muestre que las diferenciales totales de x_m y y_m pueden escribirse como

$$dx_m = -y_m d\theta + (y_c - y_m) d\phi$$

$$dy_m = x_m d\theta + (x_c - x_m) d\phi.$$

- c) Suponga que $L = l$ y que el brazo está ubicado de manera que alcanza el punto (L, L) . Suponga también

que el error en la medición de cada uno de los ángulos θ y ϕ es a lo más de $\pm 1^\circ$. Calcule el error máximo aproximado en la coordenada x de la ubicación de la mano para cada una de las dos posiciones posibles.

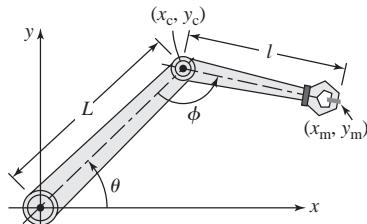


FIGURA 4.4.8 Brazo robótico del problema 43

- 44. Movimiento de proyectiles** Se dispara un proyectil a un ángulo θ con velocidad v a través de un abismo de ancho D hacia el muro del acantilado vertical que es esencialmente infinito tanto en la altura como en profundidad. Vea la FIGURA 4.4.9.

- a) Si el proyectil sólo está sujeto a la fuerza de la gravedad, demuestre que la altura H a la cual golpea el muro del acantilado como una función de las variables v y θ está dada por

$$H = D \tan \theta - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{v^2} \sec^2 \theta.$$

[Sugerencia: Vea la sección 2.1.]

- b) Calcule la diferencial total de H .
c) Suponga que $D = 100$ pies, $g = 32$ pies/s 2 , $v = 100$ pies/s y $\theta = 45^\circ$. Calcule H .
d) Suponga, para los datos del inciso c), que el error en la medición de v es a lo sumo ± 1 pies/s y que el error en la medición de θ es a lo sumo $\pm 1^\circ$. Calcule el error máximo aproximado en H .
e) Al dejar que D varíe, H también puede considerarse como una función de tres variables. Encuentre la diferencial total de H . Empleando los datos de los incisos c) y d) y suponiendo que el error en la medición D es a lo sumo ± 2 pies/s, calcule el error máximo aproximado en H .

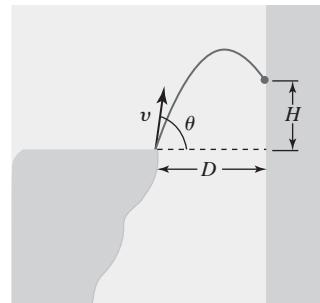


FIGURA 4.4.9 Abismo del problema 44

4.5 Regla de la cadena

■ Introducción La regla de la cadena para funciones de una sola variable indica que si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x , y $x = g(t)$ es una función diferenciable de t , entonces la derivada de la función compuesta es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

En esta sección se extiende la regla de la cadena a funciones de varias variables.

■ Regla de la cadena para derivadas ordinarias Si $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una sola variable t , entonces el siguiente teorema indica cómo calcular la derivada ordinaria dz/dt .

Teorema 4.5.1 Regla de la cadena

Suponga que $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y) y $x = g(t)$ y que $y = h(t)$ son funciones diferenciables en t . Entonces $z = f(g(t), h(t))$ es una función diferenciable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (1)$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Si $z = x^3y - y^4$ y $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$, calcule dz/dt en $t = 1$.

Solución De (1)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (3x^2y)(4t) + (x^3 - 4y^3)(10t - 6). \end{aligned}$$

En este caso, en $t = 1$, $x(1) = 2$ y $y(1) = -1$, por lo que

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1} = (3 \cdot 4 \cdot (-1)) \cdot 4 + (8 + 4) \cdot 4 = 0. \quad \blacksquare$$

Aunque no hay necesidad de hacerlo de esa manera, también podemos encontrar la derivada dz/dt en el ejemplo 1 al sustituir las funciones $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$ en $z = x^3y - y^4$ y después derivar la función resultante de una sola variable $z = 8t^6(5t^2 - 6t) - (5t^2 - 6t)^4$ con respecto a t .

EJEMPLO 2 Tasas relacionadas

En el ejemplo 3 de la sección 4.3 observamos que la función $S(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área de la superficie (pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre la tasa a la cual S cambia cuando $dw/dt = 10$ lb/año, $dh/dt = 2.3$ pulg/año, $w = 100$ lb y $h = 60$ pulgadas.

Solución Con los símbolos w y h desempeñando los papeles de x y y se deduce de (1) que la tasa de cambio de S con respecto al tiempo t es

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial w} \frac{dw}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h} \frac{dh}{dt} \\ &= (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725} \frac{dw}{dt} + (0.1091)(0.725)w^{0.425}h^{-0.275} \frac{dh}{dt}.\end{aligned}$$

Cuando $dw/dt = 10$, $dh/dt = 2.3$, $w = 100$ y $h = 60$, el valor de la derivada es

$$\begin{aligned}\left. \frac{dS}{dt} \right|_{(100, 60)} &= (0.1091)(0.425)(100)^{-0.575}(60)^{0.725} \cdot (10) + (0.1091)(0.725)(100)^{0.425}(60)^{-0.275}. \quad (2.3) \\ &\approx 1.057.\end{aligned}$$

Como $dS/dt > 0$, la superficie de la persona está creciendo a una tasa de aproximadamente 1.057 pies² por año. ■

■ Regla de la cadena para derivadas parciales Para una función compuesta de dos variables $z = f(x, y)$, donde $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, se esperaría naturalmente *dos* fórmulas análogas a (1), ya que $z = f(g(u, v), h(u, v))$ y por ello pueden calcularse tanto $\partial z / \partial u$ como $\partial z / \partial v$. La regla de la cadena para funciones de dos variables se resume en el siguiente teorema.

Teorema 4.5.2 Regla de la cadena

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (2)$$

DEMOSTRACIÓN Probamos el segundo de los resultados en (2). Si $\Delta u = 0$, entonces

$$\Delta z = f(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v)) - f(g(u, v), h(u, v))$$

Ahora bien, si

$$\Delta x = g(u, v + \Delta v) - g(u, v) \quad \text{y} \quad \Delta y = h(u, v + \Delta v) - h(u, v),$$

entonces

$$g(u, v + \Delta v) = x + \Delta x \quad \text{y} \quad h(u, v + \Delta v) = y + \Delta y.$$

Por consiguiente, Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Puesto que f es diferenciable, se deduce de la fórmula de incremento (4) de la sección 4.4 que Δz puede escribirse como

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde, recuerde, ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy con la propiedad de que $\lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1 = 0$ y $\lim_{(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2 = 0$. Puesto que ε_1 y ε_2 no son funciones definidas de manera única, podemos encontrar siempre un par de funciones para las cuales $\varepsilon_1(0, 0) = 0$, $\varepsilon_2(0, 0) = 0$. Por consiguiente, ε_1 y ε_2 son continuas en $(0, 0)$. Por tanto,

$$\frac{\Delta z}{\Delta v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta v} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta v} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta v}.$$

Ahora, tomando el límite de la última línea cuando $\Delta v \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + 0 \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + 0 \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

puesto que Δx y Δy se aproximan a cero cuando $\Delta v \rightarrow 0$. ■

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

Si $z = x^2 - y^3$ y $x = e^{2u-3v}$, $y = \operatorname{sen}(u^2 - v^2)$, determine $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$.

Solución Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial z}{\partial y} &= -3y^2, \\ \frac{\partial x}{\partial u} &= 2e^{2u-3v}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= 2u \cos(u^2 - v^2), \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -3e^{2u-3v}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= -2v \cos(u^2 - v^2),\end{aligned}$$

vemos de (2) que $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$ son, a su vez,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x(2e^{2u-3v}) - 3y^2[2u \cos(u^2 - v^2)] = 4xe^{2u-3v} - 6uy^2 \cos(u^2 - v^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x(-3e^{2u-3v}) - 3y^2[-2v \cos(u^2 - v^2)] = -6xe^{2u-3v} + 6vy^2 \cos(u^2 - v^2). \quad \blacksquare$$

Desde luego, como en el ejemplo 1, podríamos sustituir las expresiones para x y y en la función original y encontrar después las derivadas parciales $\partial z / \partial u$ y $\partial z / \partial v$ de manera directa. Sin embargo, no hay una ventaja particular que se obtenga al hacerlo así.

Generalizaciones Los resultados dados en (1) y (2) se generalizan de inmediato a cualquier número de variables. Si $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable en (x_1, x_2, \dots, x_n) y si x_i , $i = 1, \dots, n$, son funciones diferenciables de una sola variable t , entonces (1) del teorema 4.5.1 se convierte en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}. \quad (3)$$

De manera similar, si $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y cada una de las variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son funciones de k variables $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$, entonces bajo las mismas suposiciones que en el teorema 4.5.2, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_i}, \quad (4)$$

donde $i = 1, 2, \dots, k$.

Diagramas de árbol Los resultados en (1) y (2) pueden memorizarse en términos de **diagramas de árbol**. Los puntos en la FIGURA 4.5.1a) indican que z depende de x y y ; x y y dependen, a su vez, de u y v . Para calcular $\partial z / \partial u$ por ejemplo, leemos el diagrama verticalmente hacia abajo empezando desde z y siguiendo las dos trayectorias que llevan a x y y . Despues seguimos las trayectorias que conducen a u , multiplicamos las derivadas parciales en cada trayectoria y luego sumamos los productos. Para calcular $\partial z / \partial v$ empezamos en las dos trayectorias que llevan a x y y , pero después ramificamos hacia las trayectorias que llevan a v , multiplicar las derivadas parciales en cada segmento y después sumar los productos. El resultado en (1) se representa

mediante el diagrama de árbol de la figura 4.5.1b). Sólo hay una rama que parte de x y de y puesto que estas variables dependen sólo de la variable individual t .

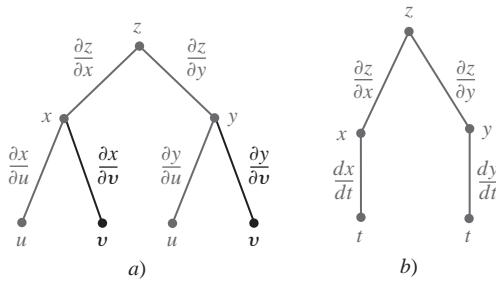


FIGURA 4.5.1 Diagramas de árbol: a) para (2) y b) para (1)

Empleamos los diagramas de árbol en los siguientes tres ejemplos para ilustrar casos especiales de (3) y (4).

EJEMPLO 4 Regla de la cadena

Si $r = x^2 + y^5z^3$ y $x = uve^{2s}$, $y = u^2 - v^2s$, $z = \operatorname{sen}(uvs^2)$, encuentre a) $\partial r/\partial u$ y b) $\partial r/\partial s$.

Solución En este caso r es una función de tres variables x , y y z , y cada una es en sí misma una función de tres variables u , v y s . Para construir un diagrama de árbol dibujamos tres trayectorias desde r hasta tres puntos denominados x , y y z . Luego, ya que x , y y z dependen de tres variables, dibujamos tres trayectorias que parten de los puntos x , y y z hasta los puntos u , v y s . En cada uno de estos doce segmentos indicamos la derivada parcial apropiada. Vea la FIGURA 4.5.2. Para calcular $\partial r/\partial u$ seguimos las tres trayectorias poligonales que empiezan en r siempre hacia u en los tres diagramas. Formamos los productos de las derivadas parciales indicadas sobre cada segmento de las tres trayectorias poligonales hacia u y sumamos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial u} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= 2x(v e^{2s}) + 5y^4z^3(2u) + 3y^5z^2(vs^2 \cos(uvs^2)).\end{aligned}$$

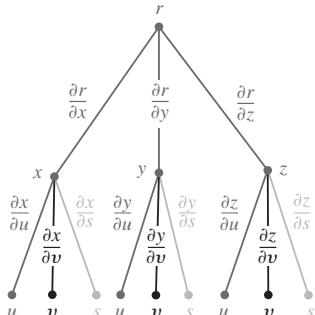


FIGURA 4.5.2 Diagrama de árbol del ejemplo 4

Ahora para calcular $\partial r/\partial s$ empezamos desde r sobre las tres trayectorias poligonales en la figura 4.5.2 y luego ramificamos hacia las trayectorias en x , y y z para llegar a s . Al sumar los productos de la derivada parcial en cada segmento de las tres trayectorias poligonales que llevan a s obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial s} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= 2x(2uve^{2s}) + 5y^4z^3(-v^2) + 3y^5z^2(2uvs \cos(uvs^2)).\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Regla de la cadena

Suponga que $w = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de x , y y z y $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ y $z = k(u, v)$ son funciones diferenciables de u y v . Construya un diagrama de árbol para calcular $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$.

Solución Puesto que f es una función de tres variables x , y y z , y éstas son funciones de dos variables u y v , el diagrama de árbol es como se ilustra en la FIGURA 4.5.3. Las derivadas parciales son entonces

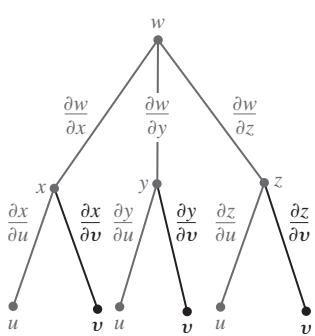


FIGURA 4.5.3 Diagrama de árbol del ejemplo 5

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Regla de la cadena

Si $z = u^2v^3w^4$ y $u = t^2$, $v = 5t - 8$, $w = t^3 + t$, determine dz/dt .

Solución En este caso el diagrama de árbol de la FIGURA 4.5.4 indica que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt} \\ &= 2uv^3w^4(2t) + 3u^2v^2w^4(5) + 4u^2v^3w^3(3t^2 + 1).\end{aligned}$$

Diferenciación implícita Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a una función $y = f(x)$ de manera implícita, entonces $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f . Recuerde que se calcula la derivada dy/dx mediante un proceso llamado *diferenciación implícita*. La derivada dy/dx también puede determinarse de la regla de la cadena. Si suponemos que $w = F(x, y)$ y $y = f(x)$ son funciones diferenciables, entonces de (1) tenemos

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx}. \quad (5)$$

Puesto que $w = F(x, y) = 0$ y $dx/dx = 1$, (5) implica

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)},$$

siempre que $F_y(x, y) \neq 0$.

Además, si $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$, entonces $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para toda (x, y) en el dominio de f . Si $w = F(x, y, z)$ es una función diferenciable y $z = f(x, y)$ es diferenciable en x y y , entonces (3) produce

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x(x, y, z) \frac{\partial x}{\partial x} + F_y(x, y, z) \frac{\partial y}{\partial x} + F_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (6)$$

Puesto que $w = F(x, y, z) = 0$, $\partial x/\partial x = 1$ y $\partial y/\partial x = 0$, (6) produce

$$F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},$$

siempre que $F_z(x, y, z) \neq 0$. La derivada parcial $\partial z/\partial y$ puede obtenerse de manera similar. Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 4.5.3 Diferenciación implícita

- i) Si $w = F(x, y)$ es diferenciable y $y = f(x)$ es una función diferenciable de x definida implícitamente por $F(x, y) = 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad (7)$$

donde $F_y(x, y) \neq 0$.

- ii) Si $w = F(x, y, z)$ es diferenciable y $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad (8)$$

donde $F_z(x, y, z) \neq 0$.

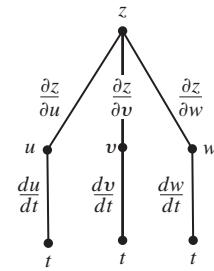


FIGURA 4.5.4 Diagrama de árbol del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Diferenciación implícita

- a) Encuentre dy/dx si $x^2 - 4xy - 3y^2 = 10$.
 b) Encuentre $\partial z/\partial y$ si $x^2y - 5xy^2 = 2yz - 4z^3$.

Solución

- a) Sea $F(x, y) = x^2 - 4xy - 3y^2 - 10$. Entonces definimos y como una función de x por medio de $F(x, y) = 0$. En este caso, $F_x = 2x - 4y$ y $F_y = -4x - 6y$, y consecuentemente por (7) del teorema 4.5.3 tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x - 4y}{-4x - 6y} = \frac{x - 2y}{2x + 3y}.$$

Se le pide al lector verificar este resultado mediante el procedimiento tradicional.

- b) Sea $F(x, y, z) = x^2y - 5xy^2 - 2yz + 4z^3$. Entonces definimos z como una función de x y y mediante $F(x, y, z) = 0$. Puesto que $F_y = x^2 - 10xy - 2z$ y $F_z = -2y + 12z^2$, concluimos de (8) en el teorema 4.5.3 que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{x^2 - 10xy - 2z}{-2y + 12z^2} = \frac{x^2 - 10xy - 2z}{2y - 12z^2}.$$

■

4.5**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la derivada indicada.

1. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = t^2$, $y = t^{-2}$; $\frac{dz}{dt}$

2. $z = x^3y - xy^4$; $x = e^{5t}$, $y = \sec 5t$; $\frac{dz}{dt}$

3. $z = \cos(3x + 4y)$; $x = 2t + \frac{\pi}{2}$, $y = -t - \frac{\pi}{4}$; $\frac{dz}{dt}\Big|_{t=\pi}$

4. $z = e^{xy}$; $x = \frac{4}{2t+1}$, $y = 3t+5$; $\frac{dz}{dt}\Big|_{t=0}$

5. $p = \frac{r}{2s+t}$; $r = u^2$, $s = \frac{1}{u^2}$, $t = \sqrt{u}$; $\frac{dp}{du}$

6. $r = \frac{xy^2}{z^3}$; $x = \cos s$, $y = \sin s$, $z = \tan s$; $\frac{dr}{ds}$

En los problemas 7-16, determine las derivadas parciales indicadas.

7. $z = e^{xy^2}$; $x = u^3$, $y = u - v^2$; $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

8. $z = x^2 \cos 4y$; $x = u^2v^3$, $y = u^3 + v^3$; $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

9. $z = 4x - 5y^2$; $x = u^4 - 8v^3$, $y = (2u - v)^2$; $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

10. $z = \frac{x-y}{x+y}$; $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{v^2}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$

11. $w = (u^2 + v^2)^{3/2}$; $u = e^{-t} \sin \theta$, $v = e^{-t} \cos \theta$; $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial \theta}$

12. $w = \tan^{-1} \sqrt{uv}$; $u = r^2 - s^2$, $v = r^2s^2$; $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial s}$

13. $R = rs^2t^4$; $r = ue^{v^2}$, $s = ve^{-u^2}$, $t = e^{u^2v^2}$; $\frac{\partial R}{\partial u}, \frac{\partial R}{\partial v}$

14. $Q = \ln(pqr)$; $p = t^2 \operatorname{sen}^{-1} x$, $q = \frac{x}{t^2}$, $r = \tan^{-1} \frac{x}{t}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t}$

15. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \ln(rs + tu)$,

$y = \frac{t}{u} \cosh rs$; $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial u}$

16. $s = p^2 + q^2 - r^2 + 4t$; $p = \phi e^{3\theta}$, $q = \cos(\phi + \theta)$,
 $r = \phi \theta^2$, $t = 2\phi + 8\theta$; $\frac{\partial s}{\partial \phi}, \frac{\partial s}{\partial \theta}$

En los problemas 17-20, encuentre dy/dx mediante dos métodos:

- a) diferenciación implícita y
b) el teorema 4.5.3i).

17. $x^3 - 2x^2y^2 + y = 1$ 18. $x + 2y^2 = e^y$

19. $y = \operatorname{sen} xy$ 20. $(x + y)^{2/3} = xy$

En los problemas 21-24, emplee el teorema 4.5.3ii) para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

21. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 22. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$

23. $xy^2z^3 + x^2 - y^2 = 5z^2$ 24. $z = \ln(xyz)$

25. Si F y G tienen segundas derivadas parciales, muestre que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ satisface la **ecuación de onda**

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

26. Sea $\eta = x + at$ y $\xi = x - at$. Muestre que la ecuación de onda del problema 25 se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0,$$

donde $u = f(\eta, \xi)$.

27. Si $u = f(x, y)$ y $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, muestre que la **ecuación de Laplace** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ se vuelve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

28. Si $z = f(u)$ es una función diferenciable de una variable u $y u = g(x, y)$ posee primeras derivadas parciales, entonces, ¿cuáles son $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$?

29. Emplee el resultado del problema 28 con el fin de mostrar que para cualquier función diferenciable f , $z = f(y/x)$ satisface la ecuación diferencial parcial $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

30. Si $u = f(r)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, muestre que la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ se transforma en

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0.$$

31. La función error definida por $\text{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-v^2} dv$ es importante en matemáticas aplicadas. Muestre que $u(x, t) = A + B \text{erf}(x/\sqrt{4kt})$, A y B constantes, satisfacen la ecuación de difusión unidimensional

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Aplicaciones

32. El voltaje en los extremos de un conductor aumenta a una tasa de 2 volts/min y la resistencia disminuye a razón de 1 ohm/min. Emplee $I = E/R$ y la regla de la cadena para calcular la tasa a la cual la corriente que circula por el conductor está cambiando cuando $R = 50$ ohms y $E = 60$ volts.

33. La longitud del lado marcado x del triángulo de la FIGURA 4.5.5 aumenta a una tasa de 0.3 cm/s, el lado marcado y crece a una tasa de 0.5 cm/s y el ángulo incluido θ aumenta a una tasa de 0.1 rad/s. Emplee la regla de la cadena para determinar la tasa a la cual el área del triángulo está cambiando en el instante $x = 10$ cm, $y = 8$ cm y $\theta = \pi/6$.

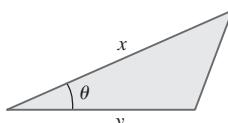


FIGURA 4.5.5 Triángulo del problema 33

34. La ecuación de estado de Van der Waals para un gas real CO₂ es

$$P = \frac{0.08T}{V - 0.0427} - \frac{3.6}{V^2}.$$

Si dT/dt y dV/dt son las tasas a las cuales cambian, respectivamente, la temperatura y el volumen, utilice la regla de la cadena para determinar dP/dt .

35. Un bebé crece a una tasa de 2 pulg/año y gana peso a una tasa de 4.2 lb/año. Utilice $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ y la regla de la cadena para determinar la tasa a la cual el área superficial del bebé está cambiando cuando éste pesa 25 lb y mide 29 pulg de altura.

36. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional de manera que sus coordenadas en cualquier tiempo son $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, $z = 5t$, $t \geq 0$. Emplee la regla de la cadena para encontrar la tasa a la cual su distancia

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

a partir del origen está cambiando en $t = 5\pi/2$ segundos.

37. La ecuación de estado correspondiente a un sistema termodinámico es $F(P, V, T) = 0$, donde P , V y T son la presión, el volumen y la temperatura, respectivamente. Si la ecuación define a V como una función de P y T , y también define a T como una función de V y P , muestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{1}{\frac{\partial T}{\partial V}}.$$

38. Dos barcos de la guardia costera (denotados por A y B en la FIGURA 4.5.6), separados por una distancia de 500 yardas, descubren a un barco sospechoso C con orientaciones relativas θ y ϕ como se ilustra en la figura.

- a) Utilice la ley de los senos para expresar la distancia r de A y C en términos de θ y ϕ .
 b) ¿Cuán lejos está C de A cuando $\theta = 62^\circ$ y $\phi = 75^\circ$?
 c) Suponga que en el momento especificado en el inciso b), el ángulo θ está creciendo a una tasa de 5° por minuto, mientras que ϕ está disminuyendo a una tasa de 10° por minuto. ¿La distancia de C a A crece o decrece? ¿A qué tasa?

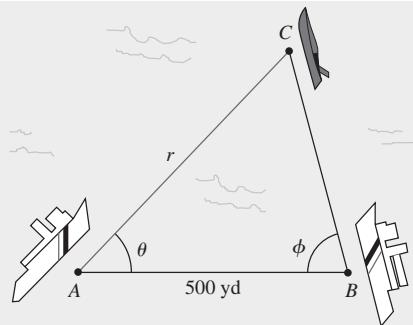


FIGURA 4.5.6 Barcos del problema 38

39. Un resonador de Helmholtz es cualquier recipiente con un cuello y una abertura (tal como una jarra o una botella de cerveza). Cuando se sopla el aire a través de la abertura, el resonador produce un sonido característico cuya frecuencia, en ciclos por segundo, es

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{lV}},$$

donde A es el área de la sección transversal de la abertura, l es la longitud del cuello, V es el volumen del recipiente (sin contar el cuello) y c es la velocidad del sonido (aproximadamente 330 m/s). Vea la FIGURA 4.5.7.

- a) ¿Qué frecuencia sonora producirá una botella si tiene una abertura circular de 2 cm de diámetro, un cuello de 6 cm de largo y un volumen de 100 cm³? [Sugerencia: Asegúrese de convertir c a cm/s.]
 b) Suponga que el volumen de la botella en el inciso a) está disminuyendo a una tasa de 10 cm³/s, mientras que su cuello se adelgaza a una tasa de 1 cm/s. En el instante especificado en el inciso a) (esto es, $V = 100$, $l = 6$) ¿la frecuencia está creciendo o decreciendo?

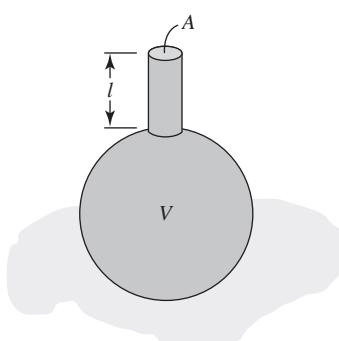


FIGURA 4.5.7 Recipiente del problema 39

☰ Piense en ello

40. a) Suponga que $w = F(x, y, z)$ y $y = g(x), z = h(x)$. Dibuje un diagrama de árbol apropiado y encuentre una expresión para dw/dx .
- b) Suponga que $w = xy^2 - 2yz + x$ y $y = \ln x, z = e^x$. Emplee la regla de la cadena para determinar dw/dx .
41. Suponga que $z = F(u, v, w)$, donde $u = F(t_1, t_2, t_3, t_4)$, $v = g(t_1, t_2, t_3, t_4)$ y $w = h(t_1, t_2, t_3, t_4)$. Dibuje un diagrama de árbol apropiado y encuentre expresiones para las derivadas parciales $\partial z/\partial t_2$ y $\partial z/\partial t_4$.
42. Suponga que $w = F(x, y, z, u)$ es diferenciable y $u = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de x, y y z definida implícitamente por $f(x, y, z, u) = 0$. Encuentre expresiones para $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$.

43. Utilice los resultados del problema 42 para encontrar $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ si u es una función diferenciable de x, y y z definida implícitamente por $-xyz + x^2yu + 2xy^3u - u^4 = 8$.

44. a) Se dice que una función f es **homogénea de grado n** si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. Si f tiene primeras derivadas parciales, muestre que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

b) Verifique que $f(x, y) = 4x^2y^3 - 3xy^4 + x^5$ es una función homogénea de grado 5.

c) Verifique que la función en el inciso b) satisface la ecuación diferencial del inciso a).

d) Reexamine el problema 29. Conjeture acerca de si $z = f(y/x)$ es homogénea.

4.6 Gradiente y derivada direccional

■ Introducción En la sección 4.3 vimos que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son las tasas de cambio de la función $z = f(x, y)$ en las direcciones que son paralelas al eje x o al eje y , respectivamente. En la presente sección generalizaremos la noción de derivadas parciales mostrando cómo encontrar la tasa de cambio de f en una dirección arbitraria. Para hacerlo es conveniente introducir una nueva función vectorial cuyas componentes son derivadas parciales.

■ El gradiente de una función Cuando el **operador diferencial**

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{o} \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

se aplica a una función $z = f(x, y)$ o $w = f(x, y, z)$, obtenemos una función vectorial muy útil.

Definición 4.6.1 Gradienes

i) Suponga que f es una función de dos variables x y y cuyas derivadas parciales f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de f** se define como

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (1)$$

ii) Suponga que f es una función de tres variables x, y y z cuyas derivadas parciales f_x, f_y y f_z existen. Entonces el **gradiente de f** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2)$$

El símbolo ∇ es una delta griega mayúscula invertida, que se denomina *del* o *nabla*. El símbolo ∇f suele leerse “grad f ”.

EJEMPLO 1 Gradiente de una función de dos variables

Calcule $\nabla f(x, y)$ para $f(x, y) = 5y - x^3y^2$.

Solución De (1),

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(5y - x^3y^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(5y - x^3y^2)\mathbf{j} \\ &= -3x^2y^2\mathbf{i} + (5 - 2x^3y)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Gradiente de una función de tres variables

Si $f(x, y, z) = xy^2 + 3x^2 - z^3$, determine $\nabla f(x, y, z)$ en $(2, -1, 4)$.

Solución De (2),

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k}$$

y por ello

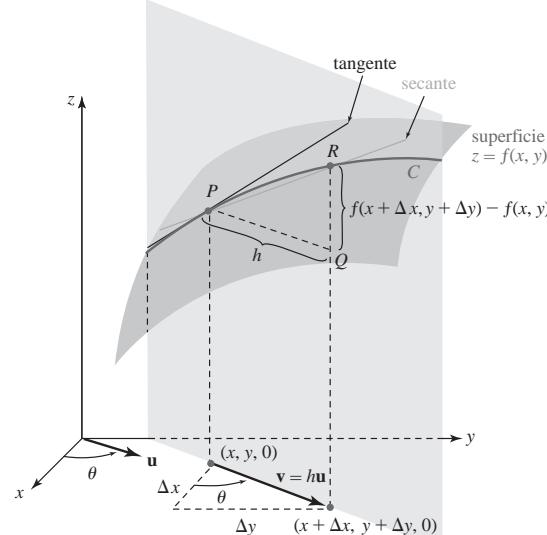
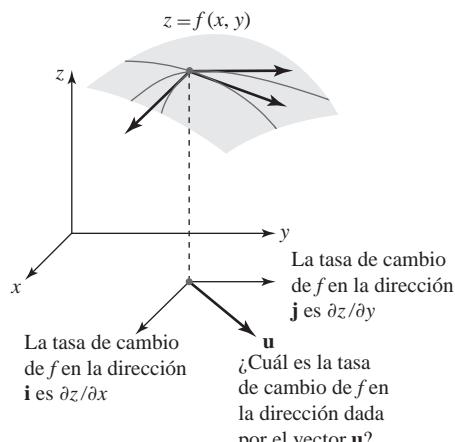
$$\nabla f(2, -1, 4) = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 48\mathbf{k}. \quad \blacksquare$$

El gradiente de una función f tiene muchas aplicaciones. Veremos después que ∇f desempeña un importante papel en la generalización del concepto de derivada parcial.

■ Una generalización de la diferenciación parcial Recuerde que las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ y $\partial z / \partial y$ producen la pendiente de una recta tangente a la traza, o curva de intersección, de una superficie dada por $z = f(x, y)$ y planos verticales que son, respectivamente, paralelos a los ejes de coordenadas x y y . De manera equivalente, $\partial z / \partial x$ es la tasa de cambio de la función f en la dirección dada por el vector \mathbf{i} , y $\partial z / \partial y$ es la tasa de cambio de $z = f(x, y)$ en la dirección \mathbf{j} . No hay razón para restringir nuestra atención sólo a dos direcciones; podemos encontrar la tasa de cambio de una función diferencial en *cualquier* dirección. Vea la FIGURA 4.6.1. Suponga que Δx y Δy denotan incrementos en x y y , respectivamente, y que $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ es un vector unitario en el plano xy que forma un ángulo θ con el eje positivo x y que es paralelo al vector \mathbf{v} de $(x, y, 0)$ a $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$. Si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0$, entonces $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$. Además, considere que el plano perpendicular al plano xy que contiene estos puntos corta la superficie $z = f(x, y)$ en una curva C . Preguntamos:

- ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a C en el punto P con coordenadas $(x, y, f(x, y))$ en la dirección dada por \mathbf{v} ?

Vea la FIGURA 4.6.2.



De la figura 4.6.2, vemos que $\Delta x = h \cos \theta$ y $\Delta y = h \sin \theta$, por lo que la pendiente de la recta secante indicada que pasa por los puntos P y R sobre C es

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h} = \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}. \quad (3)$$

Esperamos que la pendiente de la tangente en P sea el límite de (3) cuando $h \rightarrow 0$. Esta pendiente es la tasa de cambio de f en P en la dirección especificada por el vector unitario \mathbf{u} . Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.6.2 Derivada direccional

La **derivada direccional** de una función $z = f(x, y)$ en (x, y) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{j}$ está dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \operatorname{sen} \theta) - f(x, y)}{h}, \quad (4)$$

siempre que el límite exista.

Observe que (4) es realmente una generalización de (1) y (2) de la sección 4.3, puesto que:

$$\theta = 0 \text{ implica que } D_{\mathbf{i}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

y

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ implica que } D_{\mathbf{j}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Cálculo de una derivada direccional Si bien (4) podría utilizarse para encontrar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ relativa a una función dada, como es usual buscaremos un procedimiento más eficiente. El siguiente teorema muestra cómo el concepto de gradiente de una función desempeña un papel fundamental en el cálculo de una derivada direccional.

Teorema 4.6.1 Cálculo de una derivada direccional

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y , y $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \quad (5)$$

DEMOSTRACIÓN Sean x, y y θ fijas de manera que

$$g(t) = f(x + t \cos \theta, y + t \operatorname{sen} \theta)$$

es una función de una sola variable t . Deseamos comparar el valor de $g'(0)$, el cual se encuentra mediante dos métodos diferentes. Primero, por la definición de una derivada,

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \operatorname{sen} \theta) - f(x, y)}{h}. \quad (6)$$

Segundo, por la regla de la cadena (1) de la sección 4.5,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \operatorname{sen} \theta) \frac{d}{dt}(x + t \cos \theta) + f_2(x + t \cos \theta, y + t \operatorname{sen} \theta) \frac{d}{dt}(y + t \operatorname{sen} \theta) \\ &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \operatorname{sen} \theta) \cos \theta + f_2(x + t \cos \theta, y + t \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Aquí los subíndices 1 y 2 se refieren a las derivadas parciales de $f(x + t \cos \theta, y + t \operatorname{sen} \theta)$ respecto a $x + t \cos \theta$ y $y + t \operatorname{sen} \theta$. Cuando $t = 0$, advertimos que $x + t \cos \theta$ y $y + t \operatorname{sen} \theta$ son simplemente x y y , y en consecuencia (7) se convierte en

$$g'(0) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \operatorname{sen} \theta. \quad (8)$$

Al comparar (4), (6) y (8) se produce entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \operatorname{sen} \theta \\ &= [f_x(x, y) \mathbf{i} + f_y(x, y) \mathbf{j}] \cdot (\cos \theta \mathbf{i} + \operatorname{sen} \theta \mathbf{j}) \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Derivada direccional

Determine la derivada direccional de $f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en $(1, 1)$ en la dirección del vector unitario cuyo ángulo con el eje x positivo sea $\pi/6$.

Solución Puesto que $\partial f/\partial x = 4xy^3 + 6y$ y $\partial f/\partial y = 6x^2y^2 + 6x$ tenemos de (1) de la definición 4.6.1,

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(1, 1) = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

Ahora bien, en $\theta = \pi/6$, $\mathbf{u} + \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ se convierte en

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

Por tanto, por (5) del teorema 4.6.1,

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6. \quad \blacksquare$$

Es importante que usted recuerde que el vector \mathbf{u} en el teorema 4.6.1 es un vector *unitario*. Si un vector \mathbf{v} no unitario especifica una dirección, entonces para utilizar (5) debemos normalizar \mathbf{v} y utilizar $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

EJEMPLO 4 Derivada direccional

Considere el plano que es perpendicular al plano xy y que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(3, 2)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de este plano con la superficie $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ en $(2, 1, 17)$ en la dirección de Q ?

Solución Queremos determinar $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Sin embargo, puesto que \overrightarrow{PQ} no es un vector unitario, formamos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{PQ}|} \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

En este caso,

$$\nabla f(x, y) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(2, 1) = 16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Por tanto, de (5) la pendiente que se desea es

$$D_{\mathbf{u}}f(2, 1) = (16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = 9\sqrt{2}. \quad \blacksquare$$

■ Funciones de tres variables Para una función $w = f(x, y, z)$ la derivada direccional está definida por

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h},$$

donde α, β y γ son los ángulos direccionales del vector \mathbf{u} medidos en relación con los ejes x, y y z , respectivamente.* No obstante, de la misma manera que antes, podemos demostrar que

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}. \quad (9)$$

Note que, puesto que \mathbf{u} es un vector unitario, de (11) de la sección 1.3 se deduce que

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla f(x, y) \quad \text{y} \quad D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla f(x, y, z).$$

Además, (9) revela que

$$D_{\mathbf{k}}f(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

*Advierta que el numerador de (4) puede escribirse como $f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta) - f(x, y)$, donde $\beta = (\pi/2) - \alpha$.

EJEMPLO 5 Derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ en $(1, -1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Tenemos $\partial f / \partial x = y^2 - 8xy$, $\partial f / \partial y = 2xy - 4x^2$ y $\partial f / \partial z = 2z$, por lo que

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \\ \nabla f(1, -1, 2) &= 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Puesto que $|\mathbf{v}| = |6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}| = 7$ entonces $\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$

es un vector unitario en la dirección indicada. De (9) obtenemos

$$D_{\mathbf{u}}f(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}. \quad \blacksquare$$

■ Valor máximo de la derivada direccional Considere que f representa una función de dos o tres variables. Puesto que (5) y (9) expresan la derivada direccional como un producto punto, vemos del teorema 1.3.2 que

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \phi = |\nabla f| \cos \phi, \quad (|u| = 1), \quad (10)$$

donde ϕ es el ángulo entre ∇f y \mathbf{u} que satisface $0 \leq \phi \leq \pi$. Debido a que $-1 \leq \cos \phi \leq 1$ se deduce de (10) que

$$-|\nabla f| \leq D_{\mathbf{u}}f \leq |\nabla f|.$$

En otras palabras:

- El valor máximo de la derivada direccional es $|\nabla f|$ y ocurre cuando \mathbf{u} tiene la misma dirección que ∇f (cuando $\cos \phi = 1$),

y

- El valor mínimo de la derivada direccional es $-|\nabla f|$ y ocurre cuando \mathbf{u} y ∇f tienen direcciones opuestas (cuando $\cos \phi = -1$). (12)

EJEMPLO 6 Valor máximo de la derivada direccional

En el ejemplo 5 el valor máximo de la derivada direccional de f en $(1, -1, 2)$ es $|\nabla f(1, -1, 2)| = \sqrt{133}$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(1, -1, 2)$ es entonces $-\sqrt{133}$. ■

■ Puntos gradientes en la dirección del incremento más rápido de f Puesto de otra forma, (11) y (12) establecen que:

- El vector gradiente ∇f apunta en la dirección en la cual f crece con mayor rapidez, en tanto que $-\nabla f$ apunta en la dirección en la cual f decrece con mayor rapidez.

EJEMPLO 7 Un modelo matemático

Cada año en Los Ángeles hay una carrera de bicicletas hasta la cima de una colina por un camino conocido como el más inclinado de la ciudad. Para entender por qué un ciclista, con un mínimo de cordura, ascenderá en zigzag por el camino, vamos a suponer que la gráfica $f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 4$, que se muestra en la FIGURA 4.6.3a), es un modelo matemático de la colina. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{3} \left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} \right] = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es un vector que apunta hacia el centro de la base circular.

Entonces, la subida más inclinada por la colina es un camino recto cuya proyección en el plano xy es un radio de la base circular. Puesto que $D_{\mathbf{u}}f = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f$, un ciclista realizará zigzag, o buscará una dirección \mathbf{u} distinta a ∇f , para reducir esta componente. Vea la figura 4.6.3b). ■

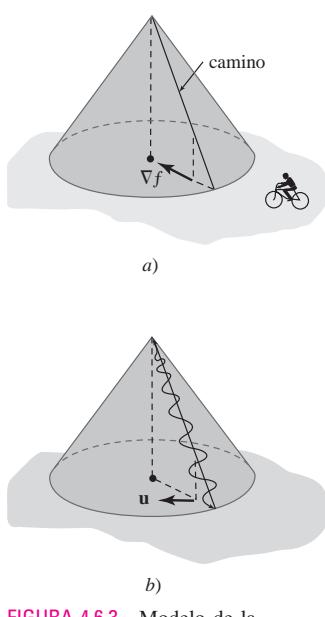


FIGURA 4.6.3 Modelo de la colina inclinada del ejemplo 7

EJEMPLO 8 Un modelo matemático

La temperatura en un caja rectangular se aproxima mediante el modelo matemático $T(x, y, z) = xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$. Si un mosquito se ubica en $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, ¿en qué dirección debería volar para enfriarse tan rápido como sea posible?

Solución El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = yz(2 - y)(3 - z)(1 - x)\mathbf{i} + xz(1 - x)(3 - z)(2 - 2y)\mathbf{j} + xy(1 - x)(2 - y)(3 - 2z)\mathbf{k}.$$

Por tanto,

$$\nabla T\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Para enfriarse con la mayor rapidez, el mosquito debe volar en la dirección de $\frac{1}{4}\mathbf{k}$; esto es, debe volar hacia el piso de la caja, donde la temperatura es $T(x, y, 0) = 0$. ■

4.6**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-12.

Fundamentos

En los problemas 1-4, calcule el gradiente para la función dada.

1. $f(x, y) = x^2 - x^3y^2 + y^4$ 2. $f(x, y) = y - e^{-2x^2y}$

3. $F(x, y, z) = \frac{xy^2}{z^3}$ 4. $G(x, y, z) = xy \cos yz$

En los problemas 5-8, determine el gradiente de la función dada en el punto indicado.

5. $f(x, y) = x^2 - 4y^2$; (2, 4)

6. $f(x, y) = \sqrt{x^3y - y^4}$; (3, 2)

7. $f(x, y, z) = x^2z^2 \operatorname{sen} 4y$; (-2, $\pi/3$, 1)

8. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; (-4, 3, 5)

En los problemas 9 y 10, emplee la definición 4.6.2 para encontrar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ dado que \mathbf{u} forma el ángulo indicado con el eje positivo.

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\theta = 30^\circ$

10. $f(x, y) = 3x - y^2$; $\theta = 45^\circ$

En los problemas 11-20, encuentre la derivada direccional de la función dada en el punto indicado en la dirección señalada.

11. $f(x, y) = 5x^3y^6$; (-1, 1), $\theta = \pi/6$

12. $f(x, y) = 4x + xy^2 - 5y$; (3, -1), $\theta = \pi/4$

13. $f(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$; (2, -2), $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

14. $f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$; (2, -1), $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

15. $f(x, y) = (xy + 1)^2$; (3, 2), en la dirección de (5, 3)

16. $f(x, y) = x^2 \operatorname{tan} y$; ($\frac{1}{2}$, $\pi/3$), en la dirección del eje x negativo.

17. $F(x, y, z) = x^2y^2(2z + 1)^2$; (1, -1, 1), $\langle 0, 3, 3 \rangle$

18. $F(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{z^2}$; (2, 4, -1), $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$; (-2, 2, 1), en la dirección del eje z negativo.

20. $f(x, y, z) = 2x - y^2 + z^2$; (4, -4, 2), en la dirección del origen.

En los problemas 21 y 22, considere el plano que pasa por los puntos P y Q y que es perpendicular al plano xy . Encuentre la pendiente de la tangente en el punto indicado a la curva de intersección de este plano y la gráfica de la función dada en la dirección de Q .

21. $f(x, y) = (x - y)^2$; $P(4, 2)$, $Q(0, 1)$; (4, 2, 4)

22. $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2$; $P(1, 1)$, $Q(-1, 6)$; (1, 1, -3)

En los problemas 23-26, encuentre un vector que produzca la dirección en la cual la función dada aumenta más rápidamente en el punto indicado. Encuentre la tasa máxima.

23. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y$; (0, $\pi/4$) 24. $f(x, y) = xye^{x-y}$; (5, 5)

25. $f(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2$; (1, 2, -1)

26. $f(x, y, z) = xyz$; (3, 1, -5)

En los problemas 27-30, encuentre un vector que produzca la dirección en la cual la función dada disminuye más rápidamente en el punto que se indica. Determine la tasa mínima.

27. $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$; ($\sqrt{\pi/6}$, $\sqrt{\pi/6}$)

28. $f(x, y) = x^3 - y^3$; (2, -2)

29. $f(x, y, z) = \sqrt{xz} e^y$; (16, 0, 9)

30. $f(x, y, z) = \ln\frac{xy}{z}$; ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$)

31. Encuentre la(s) derivada(s) direccional(es) de $f(x, y) = x + y^2$ en (3, 4) en la dirección de un vector tangente a la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ en (2, 1).

32. Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x$, encuentre todos los puntos donde $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ es cero.

33. Suponga $\nabla f(a, b) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario \mathbf{u} de manera que

a) $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$

b) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un máximo

c) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un mínimo

34. Suponga $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 6$. ¿Cuál es el valor de $D_{-\mathbf{u}}f(a, b)$?

35. a) Si $f(x, y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$, encuentre la derivada direccional de f en un punto (x, y) en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{10})(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

b) Si $F(x, y) = D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ en el inciso a), determine $D_{\mathbf{u}}F(x, y)$.

36. Suponga $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 7$, $D_{\mathbf{v}}f(a, b) = 3$, $\mathbf{u} = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}$. Determine $\nabla f(a, b)$.
37. Si $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2 - 10y$, encuentre todos los puntos en los cuales $|\nabla f| = 0$.
38. Si $f(x, y) = x^2 - \frac{5}{2}y^2$, dibuje entonces el conjunto de puntos en el plano xy para los cuales $|\nabla f| = 10$.

Aplicaciones

39. Considere la placa rectangular que se muestra en la FIGURA 4.6.4. La temperatura en el punto (x, y) sobre la placa está dada por $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine la dirección que un insecto seguiría, empezando en $(4, 2)$, con el fin de enfriarse lo más rápidamente posible.

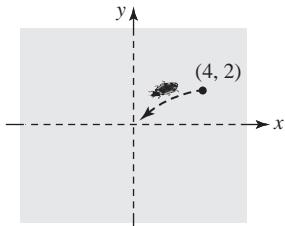


FIGURA 4.6.4 Insecto sobre una placa del problema 39

40. En el problema 39 observe que para $(0, 0)$ es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria de búsqueda de enfriamiento del insecto, empezando en $(4, 2)$, que el insecto seguiría hacia el origen. Si $\langle x(t), y(t) \rangle$ es la ecuación vectorial de la trayectoria, entonces use el hecho de que $-\nabla T(x, y) = \langle x'(t), y'(t) \rangle$. ¿Cuál es la razón de lo anterior?
41. La temperatura T en el punto (x, y) sobre una placa de metal rectangular está dada por $T(x, y) = 100 - 2x^2 - y^2$. Encuentre la trayectoria que tomaría una partícula que busca calor, empezando en $(3, 4)$, cuando ésta se mueve en la

dirección en la cual la temperatura aumenta con mayor rapidez.

42. La temperatura T en un punto (x, y, z) en el espacio es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen. Sabemos que $T(0, 0, 1) = 500$. Encuentre la tasa de cambio de la temperatura T en $(2, 3, 3)$ en la dirección de $(3, 1, 1)$. ¿En cuál dirección a partir de $(2, 3, 3)$ la temperatura T aumenta con mayor rapidez? En $(2, 3, 3)$, ¿cuál es la máxima tasa de cambio de T ?

43. Considere el potencial gravitacional

$$U(x, y) = \frac{-Gm}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

donde G y m son constantes. Muestre que U crece o decrece con mayor rapidez a lo largo de una recta que pasa por el origen.

Piense en ello

44. Encuentre una función f tal que

$$\nabla f = (3x^2 + y^3 + ye^{xy})\mathbf{i} + (-2y^2 + 3xy^2 + xe^{xy})\mathbf{j}.$$

En los problemas 45-48, suponga que f y g son funciones diferenciables de dos variables. Demuestre la identidad dada.

45. $\nabla(cf) = c\nabla f$ 46. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
 47. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ 48. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
 49. Si $\mathbf{r} = xi + yi$ y $r = |\mathbf{r}|$, entonces muestre que $\nabla r = \mathbf{r}/r$.
 50. Emplee el problema 49 para mostrar que $\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{r}/r$.
 51. Sea f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} continua y \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores unitarios. Muestre que $D_{\mathbf{u}}D_{\mathbf{v}}f = D_{\mathbf{v}}D_{\mathbf{u}}f$.
 52. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$, determine $\nabla \times \mathbf{F}$.

4.7 Planos tangentes y rectas normales

Introducción En la sección 4.4 se mencionó que el análogo tridimensional de una recta tangente a una curva es un plano tangente a una superficie. Para obtener una ecuación de un plano tangente en un punto sobre una superficie debemos regresar a la noción del gradiente de una función de dos o tres variables.

Interpretación geométrica del gradiente Suponga que $f(x, y) = c$ es la *curva de nivel* de la función diferenciable de dos variables $z = f(x, y)$ que pasa por un punto especificado $P(x_0, y_0)$; esto es, el número c se define mediante $f(x_0, y_0) = c$. Si la curva de nivel se parametriza mediante las funciones diferenciables

$$x = x(t), y = y(t) \quad \text{tal que} \quad x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0),$$

entonces por la regla de la cadena, (1) de la sección 4.5, la derivada de $f(x(t), y(t)) = c$ con respecto a t está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0. \tag{1}$$

Al introducir los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

(1) puede escribirse como el producto punto $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$. Específicamente, en $t = t_0$, tenemos

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \quad (2)$$

Entonces, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ en $P(x_0, y_0)$. Interpretamos que esto significa lo siguiente:

- El gradiente ∇f es perpendicular a la curva de nivel en P .

Vea la FIGURA 4.7.1.

EJEMPLO 1 Gradiente en un punto sobre una curva de nivel

Encuentre la curva de nivel de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ que pasa por $(2, 3)$. Grafique el gradiente en el punto.

Solución Puesto que $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$, la curva de nivel es la hipérbola $-x^2 + y^2 = 5$. Ahora bien,

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{y por ello} \quad \nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

La FIGURA 4.7.2 muestra la curva de nivel y el gradiente $\nabla f(2, 3)$.

■ **Interpretación geométrica del gradiente (continuación)** Procediendo como antes, sea $F(x, y, z) = c$ la *superficie de nivel* de una función diferenciable de tres variables $w = F(x, y, z)$ que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$. Si las funciones diferenciables $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva C sobre las superficies para las cuales $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$, entonces por (3) de la sección 4.5, la derivada de $F(x(t), y(t), z(t)) = c$ con respecto a t es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0 \\ \text{o} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

En particular, en $t = t_0$, (3) se convierte en

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \quad (4)$$

Entonces, (4) muestra que cuando $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. Puesto que este argumento se cumple para cualquier curva diferenciable que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre la superficie, concluimos que:

- El gradiente ∇F es perpendicular (normal) a la superficie de nivel en P .

Vea la FIGURA 4.7.3.

EJEMPLO 2 Gradiente en un punto sobre una superficie de nivel

Encuentre la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasa por $(1, 1, 1)$. Grafique el gradiente en el punto.

Solución Puesto que $F(1, 1, 1) = 3$, la superficie de nivel que pasa por $(1, 1, 1)$ es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. El gradiente de la función es

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

y por ello, en el punto dado,

$$\nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

La superficie de nivel y $\nabla F(1, 1, 1)$ se ilustran en la FIGURA 4.7.4.

■ **Plano tangente** En unidades anteriores encontramos ecuaciones de rectas tangentes a gráficas de funciones. En el espacio tridimensional podemos resolver ahora el problema análogo de

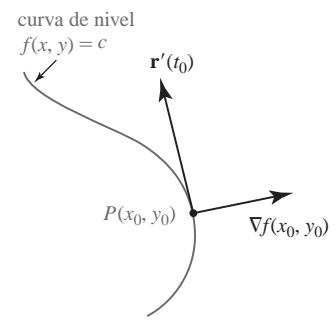


FIGURA 4.7.1 El gradiente es perpendicular a la curva de nivel

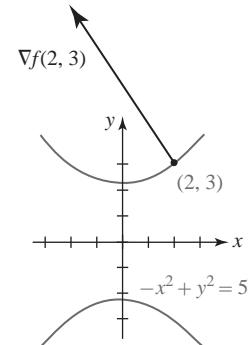


FIGURA 4.7.2 Gradiente del ejemplo 1

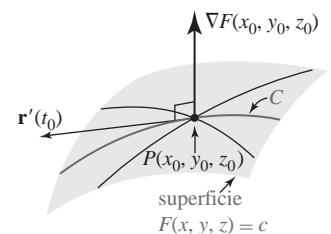


FIGURA 4.7.3 El gradiente es perpendicular a una superficie de nivel

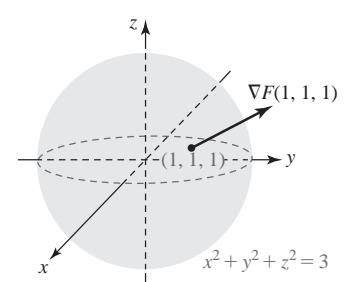


FIGURA 4.7.4 El gradiente es perpendicular a la esfera del ejemplo 2

determinar las ecuaciones de **plano tangente** a superficies. Suponemos también que $w = F(x, y, z)$ es una función diferenciable y que se da una superficie mediante $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante.

Definición 4.7.1 Plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de la superficie de nivel $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es **0**. El **plano tangente** en $P(x_0, y_0, z_0)$ es aquel plano que pasa por P y que es perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

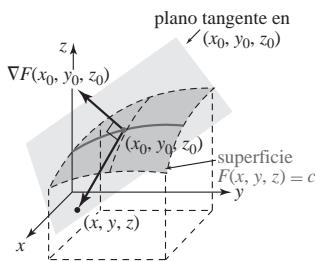


FIGURA 4.7.5 Plano tangente a una superficie

De tal manera, si $P(x, y, z)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ son puntos sobre el plano tangente y $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ y $\mathbf{r}_0 = x_0i + y_0j + z_0k$ son sus respectivos vectores de posición, una ecuación vectorial del plano tangente es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

donde $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. Vea la FIGURA 4.7.5. Resumimos este último resultado.

Teorema 4.7.1 Ecuación de un plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $F(x, y, z) = c$, donde ∇F no es **0**. Entonces una ecuación del plano tangente en P es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (5)$$

EJEMPLO 3 Ecuación de un plano tangente

Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en $(1, 1, 1)$.

Solución Al definir $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, encontramos que la esfera dada es la superficie de nivel $F(x, y, z) = F(1, 1, 1) = 3$ que pasa por $(1, 1, 1)$. En este caso,

$$F_x(x, y, z) = 2x, \quad F_y(x, y, z) = 2y \quad y \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

por lo que

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad y \quad \nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Concluimos de (5) que una ecuación del plano tangente es

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad o \quad x + y + z = 3.$$

Con la ayuda de un SAC el plano tangente se muestra en la FIGURA 4.7.6.

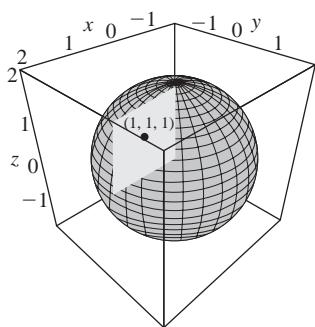


FIGURA 4.7.6 Plano tangente del ejemplo 3

■ Superficies dadas por $z = f(x, y)$ En el caso de una superficie dada explícitamente mediante una función diferenciable $z = f(x, y)$, definimos $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ o $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Así, un punto (x_0, y_0, z_0) está sobre la gráfica de $z = f(x, y)$ si y sólo si se encuentra también sobre la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$. Lo anterior sigue de $F(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) - z_0 = 0$. En este caso,

$$F_x = f_x(x, y), \quad F_y = f_y(x, y), \quad F_z = -1$$

y por ello (5) se convierte en

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \\ o \quad z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (6)$$

Una comparación directa de (6) con (7) de la sección 4.4 muestra que una linealización $L(x, y)$ de una función $z = f(x, y)$ que es diferenciable en un punto (x_0, y_0) es una ecuación de un plano tangente en (x_0, y_0) .

EJEMPLO 4 Ecuación de un plano tangente

Encuentre una ecuación de un plano tangente a la gráfica del paraboloide $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4$ en $(1, -1, 5)$.

Solución Definimos $F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z + 4$ de manera que la superficie de nivel de F que pasa por el punto dado es $F(x, y, z) = F(1, -1, 5)$ o $F(x, y, z) = 0$. En este caso $F_x = x$, $F_y = y$ y $F_z = -1$, por lo que

$$\nabla F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Por consiguiente, de (5) la ecuación deseada es

$$(x - 1) - (y + 1) - (z - 5) = 0 \quad \text{o} \quad -x + y + z = 3.$$

Vea la FIGURA 4.7.7.

Recta normal Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es $\mathbf{0}$. La recta que contiene a $P(x_0, y_0, z_0)$ que es paralela a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se denomina **recta normal** a la superficie en P . La recta normal es perpendicular al plano tangente a la superficie en P .

EJEMPLO 5 Recta normal

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta normal a la superficie del ejemplo 4 en $(1, -1, 5)$.

Solución Un vector de dirección para la recta normal en $(1, -1, 5)$ es $\nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Se sigue de (4) de la sección 11.5 que las ecuaciones paramétricas para la recta normal son $x = 1 + t$, $y = -1 - t$, $z = 5 - t$.

Expresada como ecuaciones simétricas, la recta normal a la superficie $F(x, y, z) = c$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

En el ejemplo 5, usted debe verificar que las ecuaciones simétricas de la recta normal en $(1, -1, 5)$ son

$$x - 1 = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 5}{-1}.$$

∇f NOTAS DESDE EL AULA

El agua que fluye hacia abajo por una colina elige una trayectoria en la dirección del mayor cambio en la altura. La FIGURA 4.7.8 muestra los contornos, o curvas de nivel, de una colina. Como se muestra en la figura, una corriente que empieza en el punto P seguirá una trayectoria que es perpendicular a los contornos.

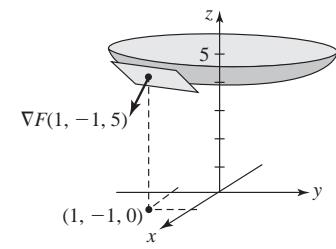


FIGURA 4.7.7 Plano tangente del ejemplo 4

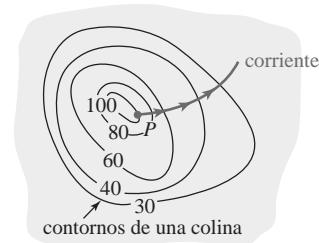


FIGURA 4.7.8 Corriente que fluye colina abajo

4.7**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-13.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-12, dibuje la curva o superficie de nivel que pasa por el punto indicado. Dibuje el gradiente en el punto.

1. $f(x, y) = x - 2y$; $(6, 1)$

2. $f(x, y) = \frac{y + 2x}{x}$; $(1, 3)$

3. $f(x, y) = y - x^2$; $(2, 5)$

4. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $(-1, 3)$

5. $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$; $(-2, -3)$

6. $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$; $(2, 2)$

7. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$; $(1, 1)$

8. $f(x, y) = \frac{y - 1}{\operatorname{sen} x}$; $(\pi/6, \frac{3}{2})$

9. $f(x, y, z) = y + z$; $(3, 1, 1)$

10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; $(1, 1, 3)$

11. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $(3, 4, 0)$

12. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$; $(0, -1, 1)$

En los problemas 13 y 14, determine los puntos sobre la superficie dada en los cuales el gradiente es paralelo al vector indicado.

13. $z = x^2 + y^2$; $4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

14. $x^3 + y^2 + z = 15$; $27\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los problemas 15-24, encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto que se indica.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $(-2, 2, 1)$
16. $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8$; $(2, 4, 1)$
17. $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5$; $(6, 2, 3)$
18. $xy + yz + zx = 7$; $(1, -3, -5)$
19. $z = 25 - x^2 - y^2$; $(3, -4, 0)$
20. $xz = 6$; $(2, 0, 3)$
21. $z = \cos(2x + y)$; $(\pi/2, \pi/4, -1/\sqrt{2})$
22. $x^2y^3 + 6z = 10$; $(2, 1, 1)$
23. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
24. $z = 8e^{-2y} \operatorname{sen} 4x$; $(\pi/24, 0, 4)$

En los problemas 25 y 26, determine los puntos sobre la superficie dada en la cual el plano tangente es paralelo al plano indicado.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 7$; $2x + 4y + 6z = 1$
26. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33$; $8x + 4y + 6z = 5$

27. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal.
28. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy = 16$ en los cuales el plano tangente es paralelo a
 - a) el plano xz ,
 - b) el plano yz y
 - c) el plano xy .

En los problemas 29 y 30, muestre que la segunda ecuación es la de un plano tangente a la gráfica de la primera ecuación en (x_0, y_0, z_0) .

29. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$
30. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$

En los problemas 31 y 32, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta normal en el punto indicado.

31. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$; $(1, -1, 1)$
32. $z = 2x^2 - 4y^2$; $(3, -2, 2)$

En los problemas 33 y 34, determine ecuaciones simétricas para la recta normal en el punto indicado.

33. $z = 4x^2 + 9y^2 + 1$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3)$
34. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(3, 4, 5)$

■ Piense en ello

35. Muestre que todo plano tangente a la gráfica $z^2 = x^2 + y^2$ pasa por el origen.
36. Muestre que la suma de las intersecciones con los ejes x , y y z de todo plano tangente a la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, $a > 0$, es el número a .
37. Muestre que toda recta normal a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el origen.
38. Se afirma que dos superficies son **ortogonales** en el punto P de intersección si sus rectas normales son perpendiculares en P . Demuestre que si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ y $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en $P(x_0, y_0, z_0)$ si y sólo si

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

en P .

En los problemas 39 y 40, emplee el resultado del problema 38 para mostrar que las superficies dadas son ortogonales en un punto de intersección. Las superficies del problema 39 se presentan en la FIGURA 4.7.9.

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
40. $x^2 - y^2 + z^2 = 4$; $z = 1/xy^2$

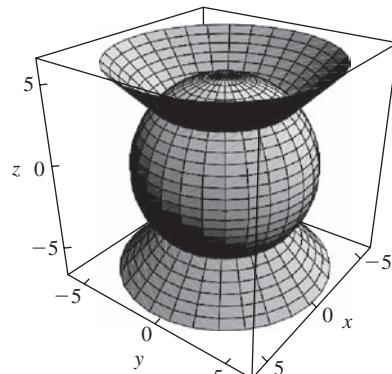


FIGURA 4.7.9 Superficies ortogonales del problema 39

4.8 Extremos de funciones multivariadas

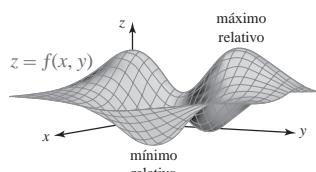


FIGURA 4.8.1 Extremos relativos de f

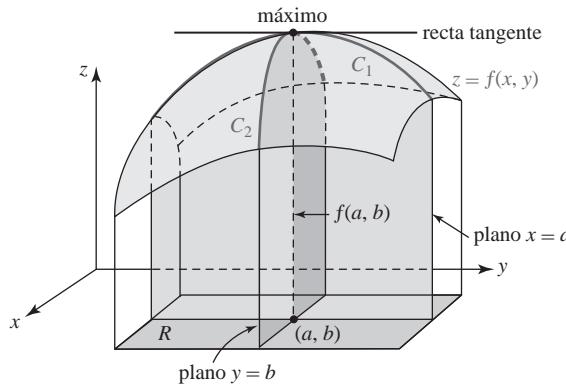
■ Introducción Como se muestra en la FIGURA 4.8.1, una función f de dos variables puede tener máximos relativos y mínimos relativos. En esta sección exploramos una manera de determinar estos extremos. Puesto que muchos de los conceptos considerados en esta sección son las contrapartes tridimensionales de las importantes definiciones y teoremas para funciones de una sola variable, se recomienda un repaso al cálculo de extremos de estas funciones.

■ Extremos Empezamos con la definición de **extremos relativos o locales** para funciones de dos variables x y y .

Definición 4.8.1 Extremos relativos

- Un número $f(a, b)$ es un **máximo relativo** de una función $z = f(x, y)$ si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) en algún disco abierto que contenga a (a, b) .
- Un número $f(a, b)$ es un **mínimo relativo** de una función $z = f(x, y)$ si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo (x, y) en algún disco abierto que contenga a (a, b) .

En aras de la discusión suponga que (a, b) es un punto interior de una región rectangular R en la cual f tiene un máximo relativo en el punto $(a, b, f(a, b))$ y, además, suponga que en las primeras derivadas parciales de f existen en (a, b) . Entonces como advertimos en la FIGURA 4.8.2, sobre la curva C_1 de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = a$, la recta tangente en $(a, b, f(a, b))$ es horizontal y por ello su pendiente en el punto es $f_y(a, b) = 0$. Similarmente, sobre la curva C_2 , la cual es la traza de la superficie en el plano $y = b$, tenemos $f_x(a, b) = 0$.

FIGURA 4.8.2 Máximo relativo de una función f

Dicho de otra manera, como lo hicimos en el espacio bidimensional, podemos argumentar que un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ donde la *recta tangente* es horizontal muchas veces conduce a un extremo relativo. En el espacio tridimensional podemos buscar un *plano tangente* horizontal a la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Si f tiene un máximo o mínimo relativo en un punto (a, b) y las primeras parciales existen en el punto, entonces una ecuación del plano tangente en $(a, b, f(a, b))$ es

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \quad (1)$$

Si el plano es horizontal, su ecuación debe ser $z = \text{constante}$, o de manera más específica, $z = f(a, b)$. Utilizando este último hecho, podemos concluir de (1) que debemos tener $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Esta discusión sugiere el siguiente teorema.

Teorema 4.8.1 Extremos relativos

Si una función $z = f(x, y)$ tiene un extremo relativo en el punto (a, b) y si las primeras derivadas parciales existen en este punto, entonces

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0.$$

Puntos críticos Para una variable definimos un **número crítico** c de una función f de una sola variable x como un número en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. En la definición que sigue definimos un **punto crítico** de una función f de dos variables x y y .

Definición 4.8.2 Puntos críticos

Un **punto crítico** de una función $z = f(x, y)$ es un punto (a, b) en el dominio de f para el cual $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de sus derivadas parciales no existe en el punto.

Los puntos críticos corresponden a puntos donde f podría *posiblemente* tener un extremo relativo. En algunos libros los puntos críticos también reciben el nombre de **puntos estacionarios**. En el caso en que las primeras derivadas parciales existan, notamos que un punto crítico (a, b) se encuentra al resolver las ecuaciones

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 0$$

simultáneamente.

EJEMPLO 1 Puntos críticos

Encuentre todos los puntos críticos para $f(x, y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 27 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 12.$$

Por consiguiente, $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ implican que

$$x^2 = 9 \quad \text{y} \quad y^2 = 4$$

y por ello $x = \pm 3$, $y = \pm 2$. Entonces, hay cuatro puntos críticos $(3, 2)$, $(-3, 2)$, $(3, -2)$ y $(-3, -2)$. ■

■ **Prueba de las segundas derivadas parciales** El siguiente teorema da condiciones suficientes para establecer extremos relativos. No se dará la demostración del teorema. En términos generales, el teorema 4.8.2 es análogo al criterio de la segunda derivada.

Teorema 4.8.2 Prueba de las segundas derivadas parciales

Sea (a, b) un punto crítico de $z = f(x, y)$ y suponga que f_{xx} , f_{yy} y f_{xy} son continuas en un disco centrado en (a, b) . Considere que

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2.$$

- i) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un **mínimo relativo**.
- ii) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un **máximo relativo**.
- iii) Si $D(a, b) < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ **no es un extremo relativo**.
- iv) Si $D(a, b) = 0$, entonces la prueba **no es concluyente**.

Si usted se siente cómodo al trabajar con determinantes, la función $D(x, y)$ puede escribirse como

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

Determine los extremos de $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy - 10y - 2x$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 8x - 2y - 2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4y - 2x - 10.$$

Al resolver las ecuaciones simultáneas

$$8x - 2y = 2 \quad \text{y} \quad -2x + 4y = 10$$

obtenemos un punto crítico $(1, 3)$. En este caso,

$$f_{xx}(x, y) = 8, \quad f_{yy}(x, y) = 4, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

y por ello $D(x, y) = (8)(4) - (-2)^2 = 28$. Debido a $D(1, 3) > 0$ y $f_{xx}(1, 3) > 0$, se deduce de la parte i) del teorema 4.8.2 que $f(1, 3) = -16$ es un mínimo relativo. ■

EJEMPLO 3 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

La gráfica de $f(x, y) = y^2 - x^2$ es el parabolóide hiperbólico dado en la FIGURA 4.8.3. De $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 2y$ vemos que $(0, 0)$ es un punto crítico y que $f(0, 0) = 0$ es el único extremo posible de la función. Sin embargo, antes de usar la prueba de las segundas derivadas parciales, observe que

$$f(0, y) = y^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad f(x, 0) = -x^2 \leq 0$$

indica que en una vecindad de $(0, 0)$, los puntos a lo largo del eje y corresponden a valores de la función que son *mayores* o iguales a $f(0, 0) = 0$ y los puntos a lo largo del eje x corresponden a valores de la función que son *menores* o iguales a $f(0, 0) = 0$. Por consiguiente, podemos afirmar que $f(0, 0) = 0$ no es un extremo.

La conclusión anterior es consistente con los resultados de la prueba de las segundas derivadas parciales. De $f_{xx}(x, y) = -2, f_{yy}(x, y) = 2, f_{xy}(x, y) = 0$ vemos que en el punto crítico $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 \\ &= (-2)(2) - (0)^2 = -4 < 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, concluimos del inciso *iii*) del teorema 4.8.2 que $f(0, 0) = 0$ no es un extremo relativo. ■

El punto $(0, 0)$ en el ejemplo 3 se dice que es un **punto silla** de la función. En general, el punto crítico (a, b) en el caso *iii*) del teorema 4.8.2 es un punto silla. Si $D(a, b) < 0$ para un punto crítico (a, b) , entonces la gráfica de la función f se comporta esencialmente como el parabolóide hiperbólico en forma de sillón de montar en la vecindad de (a, b) .

EJEMPLO 4 Punto silla

Encuentre los extremos para $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 14x + 4y + 10$.

Solución Las primeras derivadas parciales son $f_x(x, y) = 4y - 2x - 14$ y $f_y(x, y) = 4x - 2y + 4$. Encontramos entonces que la única solución del sistema

$$4y - 2x - 14 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 2y + 4 = 0$$

es $x = 1$ y $y = 4$; esto es, $(1, 4)$ es un punto crítico. En este caso, $f_{xx}(x, y) = -2, f_{yy}(x, y) = -2$ y $f_{xy}(x, y) = 4$ muestra que

$$D(1, 4) = (-2)(-2) - (4)^2 < 0$$

y por ello $f(1, 4)$ no es un extremo debido a que $(1, 4)$ es un punto silla. La gráfica de f generada por computadora de la FIGURA 4.8.4 sugiere la característica de la forma de parabolóide hiperbólico en una proximidad cercana a $(1, 4)$. ■

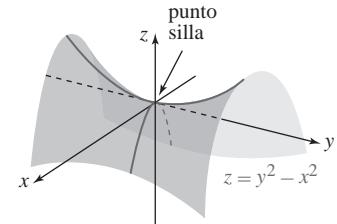


FIGURA 4.8.3 Parabolóide hiperbólico del ejemplo 3

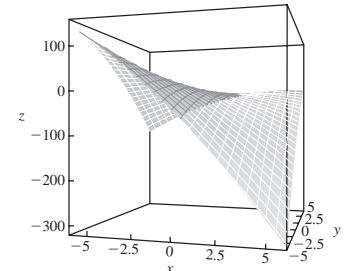


FIGURA 4.8.4 Gráfica de la función del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

Encuentre los extremos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$.

Solución De las primeras derivadas parciales

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1), \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 6y = 3y(y - 2)$$

y las ecuaciones

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \quad \text{y} \quad y(y - 2) = 0$$

encontramos que hay cuatro puntos críticos: $(3, 0), (3, 2), (-1, 0), (-1, 2)$. Puesto que

$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xy} = 0$$

se deduce que $D(x, y) = 36(x - 1)(y - 1)$. La prueba de las segundas derivadas parciales se resume en la siguiente tabla.

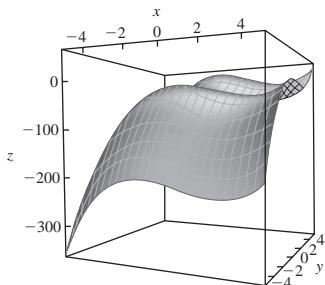


FIGURA 4.8.5 Gráfica de la función del ejemplo 5

Punto crítico (a, b)	$D(a, b)$	$f_{xx}(a, b)$	$f(a, b)$	Conclusión
$(3, 0)$	negativo	positivo	-27	no extremo
$(3, 2)$	positivo	positivo	-31	mín. relativo
$(-1, 0)$	positivo	negativo	5	máx. relativo
$(-1, 2)$	negativo	negativo	1	no extremo

Un estudio de la gráfica de f de la **FIGURA 4.8.5** muestra claramente el máximo y el mínimo.

Extremos en conjuntos acotados cerrados Recuerde que el teorema del valor extremo para una función f de una variable x establece que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f posee siempre un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo. También vimos que estos extremos absolutos sobre $[a, b]$ ocurren en un punto extremo del intervalo o en un número crítico c en el intervalo abierto (a, b) . A continuación se presenta el **teorema del valor extremo** para una función f de dos variables x y y que es continua sobre un conjunto R cerrado y acotado en el plano xy .

Teorema 4.8.3 Teorema del valor extremo

Una función f de dos variables x y y que es continua sobre un conjunto R cerrado y acotado tiene siempre un **máximo absoluto** y un **mínimo absoluto** sobre R .

En otras palabras, cuando $x = f(x, y)$ es continua sobre R , hay números $f(x_1, y_1)$ y $f(x_2, y_2)$ tales que $f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2)$ para todo (x, y) en R . Los valores $f(x_1, y_1)$ y $f(x_2, y_2)$ son, respectivamente, el máximo y mínimo absolutos sobre el conjunto cerrado R .

Análogo a los extremos de puntos extremos, una función de dos variables puede tener **extremos frontera**; esto es, extremos sobre la frontera del conjunto cerrado.

Guías para encontrar los extremos sobre un conjunto R cerrado y acotado

- Encuentre el valor de f en los puntos críticos de f en R .
- Encuentre todos los valores extremos de f sobre la frontera de R .

El valor más grande de la función en la lista de valores obtenidos de los pasos *i* y *ii* es el máximo absoluto de f sobre R ; el valor más pequeño de la función de esta lista es el mínimo absoluto de f sobre R .

EJEMPLO 6 Determinación de extremos absolutos

Puesto que $f(x, y) = 6x^2 - 8x + 2y^2 - 5$ es una función polinomial, ésta es continua sobre un conjunto cerrado R definido por $x^2 + y^2 \leq 1$. Encuentre sus extremos absolutos sobre R .

Solución Encontramos primero cualesquiera puntos críticos de f en el interior de R . De $f_x(x, y) = 12x - 8$ y $f_y(x, y) = 4y$, así como de

$$12x - 8 = 0, \quad 4y = 0$$

obtenemos el punto crítico $(\frac{2}{3}, 0)$. Como $(\frac{2}{3})^2 + 0^2 < 1$, el punto está en el interior de R .

Con el fin de examinar f en la frontera de la región, representamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por medio de ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, sobre la frontera podemos escribir f como una función de una sola variable t :

$$F(t) = f(\cos t, \sin t) = 6 \cos^2 t - 8 \cos t + 2 \sin^2 t - 5.$$

Recuerde que R recibe el nombre de *disco cerrado*.

Procedemos ahora como en el caso de funciones de una variable. Al diferenciar F con respecto a t y simplificar, obtenemos

$$F'(t) = 8 \operatorname{sen} t(-\cos t + 1).$$

Por consiguiente, $F'(t) = 0$ implica que $\operatorname{sen} t = 0$ o $\cos t = 1$. A partir de estas ecuaciones encontramos que el único número crítico de F en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$ es $t = \pi$. En este número $x = \cos \pi = -1$, $y = \operatorname{sen} \pi = 0$ de manera que el punto correspondiente en R es $(-1, 0)$. Los puntos extremos del intervalo del parámetro $[0, 2\pi]$, $t = 0$ y $t = 2\pi$, corresponden ambos al punto $(1, 0)$ en R . De los valores de la función

$$f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}, \quad f(-1, 0) = 9, \quad f(1, 0) = -7$$

vemos que el máximo absoluto de f sobre R es $f(-1, 0) = 9$ y el mínimo absoluto es $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}$. ■

En el ejemplo 6, podemos entender lo que está sucediendo al completar el cuadrado en x y reescribir la función f como

$$f(x, y) = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 2(y - 0)^2 - \frac{23}{3}. \quad (2)$$

A partir de (2) es evidente que el “vértice” del paraboloide corresponde al punto interior $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ del disco cerrado definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ y que $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}$. La FIGURA 4.8.6a) muestra una perspectiva de la gráfica de f ; en la figura 4.8.6b) hemos superpuesto las gráficas de $z = 6x^2 - 8x + 2y^2 - 5$ y el cilindro definido por $x^2 + y^2 = 1$ sobre los mismos ejes de coordenadas. En la parte b) de la figura, el extremo de la frontera $f(-1, 0) = 9$ se marca mediante un punto.

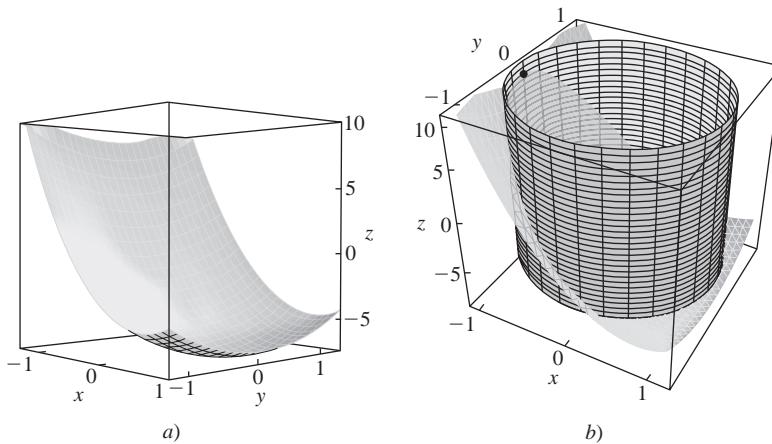


FIGURA 4.8.6 Gráfica de la función en a); intersección del cilindro y la superficie en b)

$\frac{\partial z}{\partial x}$

NOTAS DESDE EL AULA

- i) La prueba de las segundas derivadas parciales tiene un caso inclusivo al igual que el criterio de la segunda derivada. Recuerde que si c es un número crítico de una función $y = f(x)$, entonces debemos utilizar el criterio de la primera derivada cuando $f''(c) = 0$. Desafortunadamente, para funciones de dos variables no hay una prueba conveniente de la primera derivada a la cual recurrir cuando (a, b) es un punto crítico para el cual $D(a, b) = 0$.
- ii) El método de solución para el sistema

$$f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0$$

no siempre será obvio, en especial cuando f_x y f_y no son lineales. No dude en ejercitarse sus habilidades algebraicas en los problemas que siguen.

4.8**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-13.

Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre los extremos relativos de la función indicada.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$
2. $f(x, y) = 4x^2 + 8y^2$
3. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y$
4. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$
5. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$
6. $f(x, y) = -4x^2 - 2y^2 - 8x + 12y + 5$
7. $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$
8. $f(x, y) = -x^3 + 2y^3 + 27x - 24y + 3$
9. $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$
10. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 5xy - 10x - 5y + 18$
11. $f(x, y) = (2x - 5)(y - 4)$
12. $f(x, y) = (x + 5)(2y + 6)$
13. $f(x, y) = -2x^3 - 2y^3 + 6xy + 10$
14. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 27$
15. $f(x, y) = xy - \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + 8$
16. $f(x, y) = -3x^2y - 3xy^2 + 36xy$
17. $f(x, y) = xe^x \operatorname{sen} y$
18. $f(x, y) = e^{y^2 - 3y + x^2 + 4x}$
19. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$
20. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$

21. Determine tres números positivos cuya suma sea 21, tal que su producto P sea un máximo. [Sugerencia: Exprese P como una función de sólo dos variables.]
22. Determine las dimensiones de una caja rectangular con un volumen de 1 pie³ que tiene un área superficial mínima S .
23. Encuentre el punto sobre el plano $x + 2y + z = 1$ más cercano al origen. [Sugerencia: Considere el cuadrado de la distancia.]
24. Encuentre la distancia mínima entre el punto $(2, 3, 1)$ y el plano $x + y + z = 1$.
25. Encuentre todos los puntos sobre la superficie $xyz = 8$ que son los más cercanos al origen. Determine la distancia mínima.
26. Encuentre la distancia más corta entre las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son

$$L_1: x = t, y = 4 - 2t, z = 1 + t,$$

$$L_2: x = 3 + 2s, y = 6 + 2s, z = 8 - 2s.$$

¿En qué puntos sobre las rectas ocurre el mínimo?

27. Determine el volumen máximo de una caja rectangular con lados paralelos a los planos de coordenadas que puede ser inscrito en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

28. El volumen de un elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$

es $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Muestre que el elipsoide de mayor volumen que satisface $a + b + c = \text{constante}$ es una esfera.

29. El pentágono que se muestra en la FIGURA 4.8.7, formado por un triángulo isósceles sobrepujado sobre un rectángulo, tiene un perímetro fijo P . Calcule x , y y θ de manera que el área del pentágono sea un máximo.

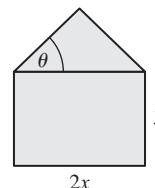


FIGURA 4.8.7 Pentágono del problema 29

30. Un pedazo de latón de 24 pulg de ancho se dobla de manera tal que su sección transversal es un trapezoide isósceles. Vea la FIGURA 4.8.8. Calcule x y θ de manera que el área de la sección transversal sea un máximo. ¿Cuál es el área máxima?

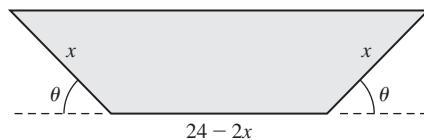


FIGURA 4.8.8 Sección transversal trapezoidal del problema 30

En los problemas 31-34, muestre que la función dada tiene un extremo absoluto pero que el teorema 4.8.2 no es aplicable.

31. $f(x, y) = 16 - x^{2/3} - y^{2/3}$
32. $f(x, y) = 1 - x^4y^2$
33. $f(x, y) = 5x^2 + y^4 - 8$
34. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

En los problemas 35-38, encuentre los extremos absolutos de la función continua dada sobre la región cerrada R definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$35. f(x, y) = x + \sqrt{3}y \quad 36. f(x, y) = xy$$

$$37. f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$38. f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$$

39. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = 4x - 6y$ sobre la región cerrada R definida por $\frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1$.

40. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = xy - 2x - y + 6$ sobre la región triangular cerrada R con vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$ y $(4, 0)$.

41. La función $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$ es continua sobre la región rectangular cerrada R definida por $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$.
 - a) Encuentre los puntos críticos en la región.
 - b) Determine los puntos donde f tiene un extremo absoluto.
 - c) Grafique la función sobre la región rectangular.

Aplicaciones

42. Una función de ingresos es

$$R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y),$$

donde x y y denotan el número de artículos de dos mercancías vendidas. Dado que la función de costo correspondiente es

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20$$

encuentre la ganancia máxima, donde ganancia = ingresos - costo.

43. Se va a construir una caja rectangular cerrada de modo tal que su volumen corresponda a 60 pies³. El costo del material para la parte superior y el fondo son, respectivamente, de 10 centavos por pie cuadrado y 20 centavos por pie cuadrado. El costo de los lados es de 2 centavos por pie cuadrado. Determine la función de costo $C(x, y)$, donde x y y son la longitud y el ancho de la caja, respectivamente. Calcule las dimensiones de la caja que producirán un costo mínimo.

4.9 Multiplicadores de Lagrange

Introducción En los problemas 21-30 de la sección “Desarrolle su competencia 4.8” se le pidió encontrar el máximo o mínimo de una función sujeta a una condición o restricción secundaria dada. La condición secundaria se utilizó para eliminar una de las variables en la función de manera que fuera aplicable la prueba de las segundas derivadas parciales (teorema 4.8.2). En la presente discusión examinamos otro procedimiento para determinar lo que se denomina **extremos con restricciones** de una función.

Antes de definir ese concepto, vamos a considerar un ejemplo.

EJEMPLO 1 Extremos con restricciones

Determine geométricamente si la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ tiene un extremo cuando las variables x y y están restringidas por $x + y = 3$.

Solución Como advertimos en la FIGURA 4.9.1, la gráfica de $x + y = 3$ es un plano vertical que interseca el paraboloide dado por $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. Es claro, de acuerdo con la figura, que la función tiene un *máximo con restricciones* para algunas x_1 y y_1 que satisfacen $0 < x_1 < 3$, $0 < y_1 < 3$ y $x_1 + y_1 = 3$. La tabla de valores numéricos que acompaña la figura también indica que este nuevo máximo es $f(1.5, 1.5) = 4.5$. Advierta que no podemos utilizar números como $x = 1.7$ y $y = 2.4$, ya que estos valores no satisfacen la restricción $x + y = 3$.

x	y	$f(x, y)$
0.5	2.5	2.5
1	2	4
1.25	1.75	4.375
1.5	1.5	4.5
1.75	1.25	4.375
2	1	4
2.5	0.5	2.5
3	0	0

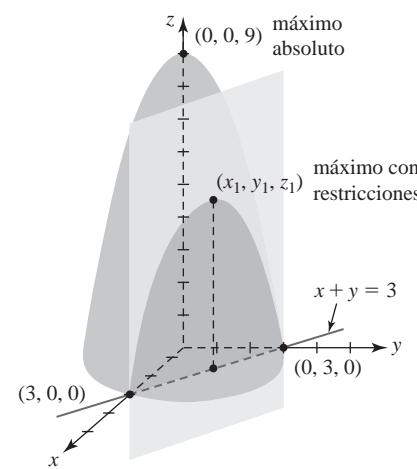


FIGURA 4.9.1 Gráfica de la función y la restricción del ejemplo 1

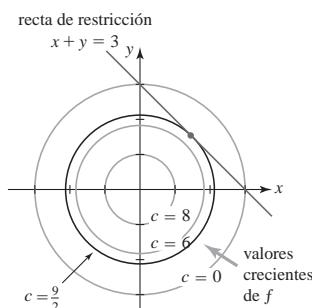


FIGURA 4.9.2 Curvas de nivel y recta de restricción

De manera alterna, podemos analizar el ejemplo 1 por medio de curvas de nivel. Como se ilustra en la FIGURA 4.9.2, valores de función crecientes de f corresponden a valores crecientes de

c en las curvas de nivel $9 - x^2 - y^2 = c$. El máximo valor de f (esto es, c) sujeto a la restricción ocurre donde la curva de nivel correspondiente a $c = \frac{9}{2}$ interseca, o más precisamente es tangente a, la recta $x + y = 3$. Al resolver simultáneamente $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ y $x + y = 3$ encontramos que el punto de tangencia es $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

■ Funciones de dos variables

Para generalizar la discusión anterior, suponga que deseamos:

- Encontrar los extremos de una función $z = f(x, y)$ sujeta a una restricción dada por $g(x, y) = 0$.

Parece plausible de la FIGURA 4.9.3 que para encontrar, digamos, un máximo con restricciones de f , sólo necesitamos encontrar la curva de nivel más alta $f(x, y) = c$ que es tangente a la gráfica de la ecuación de restricción $g(x, y) = 0$. En este caso, recuerde que los gradientes ∇f y ∇g son perpendiculares a las curvas $f(x, y) = c$ y $g(x, y) = 0$, respectivamente. Por consiguiente, si $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en un punto P de tangencia de las curvas, entonces ∇f y ∇g son paralelos a P ; esto es, yacen a lo largo de una normal común. Por tanto, para algún escalar λ (la letra griega lambda minúscula) distinto de cero, debemos tener $\nabla f = \lambda \nabla g$. Enunciamos este resultado de manera formal.

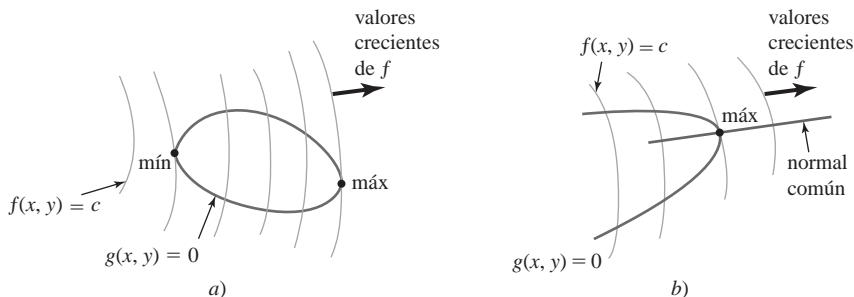


FIGURA 4.9.3 Curvas de nivel de f ; ecuación de restricción

Teorema 4.9.1 Teorema de Lagrange

Suponga que la función $z = f(x, y)$ tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) sobre la gráfica de la ecuación de restricción $g(x, y) = 0$. Si f y g tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene la gráfica de la ecuación de restricción y $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

■ **Método de multiplicadores de Lagrange** El número real λ para el cual $\nabla f = \lambda \nabla g$ recibe el nombre de **multiplicador de Lagrange**. Después de igualar componentes, la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ es equivalente a

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x_0, y_0), \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

Si f tiene un extremo con restricciones en el punto (x_0, y_0) , entonces acabamos de ver que hay un número λ tal que

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lambda g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) &= \lambda g_y(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Las ecuaciones en (1) sugieren el siguiente procedimiento, conocido como **método de los multiplicadores de Lagrange**, para determinar los extremos con restricciones.

Guías para el método de los multiplicadores de Lagrange

- i) Para encontrar los extremos de $z = f(x, y)$ sujetos a la restricción $g(x, y) = 0$, resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\g(x, y) &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

- ii) Entre las soluciones (x, y, λ) del sistema (2) estarán los puntos (x_i, y_i) , donde f tiene un extremo. Cuando f tiene un máximo (mínimo), éste será el número más grande (o más pequeño) en la lista de los valores de la función $f(x_i, y_i)$.

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Emplee el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 3$.

Solución Con $g(x, y) = x + y - 3$ y $f_x = -2x, f_y = -2y, g_x = 1, g_y = 1$ el sistema en (2) es

$$\begin{aligned}-2x &= \lambda \\-2y &= \lambda \\x + y - 3 &= 0.\end{aligned}$$

Al igualar la primera y la segunda ecuaciones obtenemos $-2x = -2y$ o $x = y$. Al sustituir este resultado en la tercera ecuación, se encuentra que $2y - 3 = 0$ o $y = \frac{3}{2}$. Entonces, $x = y = \frac{3}{2}$ y el máximo con restricciones es $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$. ■

EJEMPLO 3 Empleo de los multiplicadores de Lagrange

Determine los extremos $f(x, y) = y^2 - 4x$ sujetos a $x^2 + y^2 = 9$.

Solución Si definimos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$, entonces $f_x = -4, f_y = 2y, g_x = 2x$ y $g_y = 2y$. Por tanto, (2) se convierte en

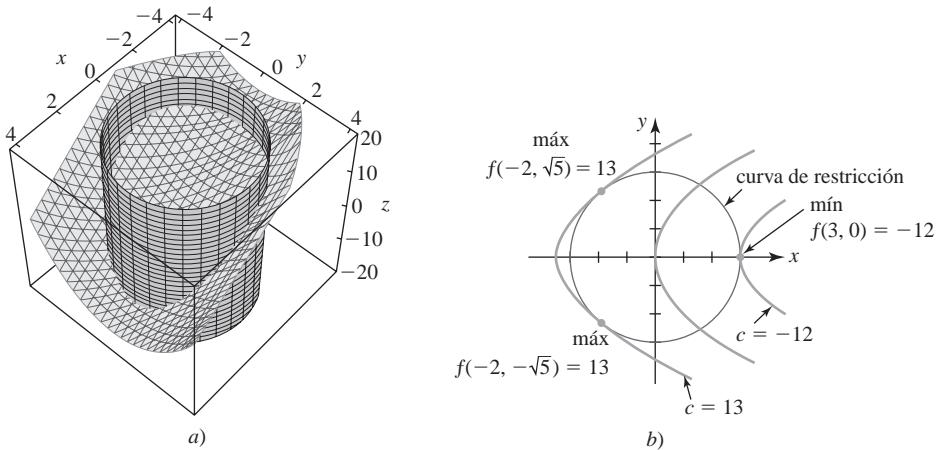
$$\begin{aligned}-4 &= 2x\lambda \\2y &= 2y\lambda \\x^2 + y^2 - 9 &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

De la segunda de estas ecuaciones, $y(1 - \lambda) = 0$, vemos que $y = 0$ o $\lambda = 1$. Primero, si $y = 0$, la tercera ecuación en el sistema produce $x^2 = 9$ o $x = \pm 3$. Por consiguiente, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ son soluciones del sistema y son puntos en los cuales f podría tener un extremo. Continuando, si $\lambda = 1$, entonces la primera ecuación produce $x = -2$. Al sustituir este valor en $x^2 + y^2 - 9 = 0$ obtenemos $y^2 = 5$ o $y = \pm\sqrt{5}$. Dos o más soluciones del sistema son $(-2, -\sqrt{5})$ y $(-2, \sqrt{5})$. De la lista de valores de la función

$$f(-3, 0) = 12, \quad f(3, 0) = -12, \quad f(-2, -\sqrt{5}) = 13 \quad y \quad f(-2, \sqrt{5}) = 13$$

concluimos que f tiene un número con restricciones de -12 en $(3, 0)$ y un máximo con restricciones de 13 en $(-2, -\sqrt{5})$ y en $(-2, \sqrt{5})$.

La FIGURA 4.9.4a) muestra la gráfica $f(x, y) = y^2 - 4x$ intersecando el cilindro definido por la ecuación de restricción $x^2 + y^2 = 9$. Los cuatro puntos que encontramos al resolver (3) yacen en el plano xy sobre el círculo de radio 3; los tres extremos con restricciones corresponden a los puntos $(3, 0, -12)$, $(-2, -\sqrt{5}, 13)$ y $(-2, \sqrt{5}, 13)$ en el espacio tridimensional sobre la curva de intersección de la superficie del cilindro circular. Alternativamente la figura 4.9.4b) muestra tres curvas de nivel de $y^2 - 4x = c$. Dos de las curvas de nivel son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 9$.

FIGURA 4.9.4 Intersección del cilindro y la superficie en a); curvas de nivel de f y ecuación de restricción en b)

Al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, en realidad no estamos interesados en determinar los valores de λ que satisfacen el sistema (2). ¿Notó en el ejemplo 1 que no nos molestamos por encontrar λ ? En el ejemplo 3, empleamos el valor $\lambda = 1$ para que nos ayude a encontrar $x = -2$, pero después lo ignoramos.

EJEMPLO 4 Costo mínimo

Un cilindro circular recto cerrado tendrá un volumen de 1 000 pies³. La parte superior y el fondo del cilindro se construirán con metal que cuesta 2 dólares por pie cuadrado. El costado se formará con metal que cuesta 2.50 dólares por pie cuadrado. Determine el costo mínimo de fabricación.

Solución La función de costo es

$$\begin{aligned} &\text{costo del fondo} \quad \text{costo del costado} \\ &\text{y de la parte superior} \downarrow \quad \downarrow \\ C(r, h) &= 2(2\pi r^2) + 2.5(2\pi rh) \\ &= 4\pi r^2 + 5\pi rh. \end{aligned}$$

En este caso, de la restricción $1\ 000 = \pi r^2 h$, podemos identificar $g(r, h) = \pi r^2 h - 1\ 000$, y por ello las primeras derivadas parciales son $C_r = 8\pi r + 5\pi h$, $C_h = 5\pi r$, $g_r = 2\pi rh$ y $g_h = \pi r^2$. Debemos resolver entonces el sistema

$$\begin{aligned} 8\pi r + 5\pi h &= 2\pi rh\lambda \\ 5\pi r &= \pi r^2\lambda \\ \pi r^2 h - 1\ 000 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Al multiplicar la primera ecuación por r , la segunda por $2h$ y restar, obtenemos

$$8\pi r^2 - 5\pi rh = 0 \quad \text{o} \quad \pi r(8r - 5h) = 0.$$

Puesto que $r = 0$ no satisface la ecuación de restricción, tenemos $r = \frac{5}{8}h$. La restricción nos da

$$h^3 = \frac{1\ 000 \cdot 64}{25\pi} \quad \text{o} \quad h = \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}.$$

Entonces, $r = 25/\sqrt[3]{25\pi}$ y la única solución de (4) es $(25/\sqrt[3]{25\pi}, 40/\sqrt[3]{25})$.

El costo mínimo con restricciones es

$$\begin{aligned} C\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}, \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right) &= 4\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)^2 + 5\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)\left(\frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right) \\ &= 300\sqrt[3]{25\pi} \approx \$1\ 284.75. \end{aligned}$$

■ Funciones de tres variables Para encontrar los extremos de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, resolvemos un sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned}f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) \\f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) \\f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) \\g(x, y, z) &= 0.\end{aligned}\tag{5}$$

EJEMPLO 5 Función de tres variables

Determine los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujetos a $2x - 2y - z = 5$.

Solución Con $g(x, y, z) = 2x - 2y - z - 5$, el sistema (5) es

$$\begin{aligned}2x &= 2\lambda \\2y &= -2\lambda \\2z &= -\lambda \\2x - 2y - z - 5 &= 0.\end{aligned}$$

Con $\lambda = x = -y = -2z$, la última ecuación produce $x = \frac{10}{9}$ y por ello $y = -\frac{10}{9}$, $z = -\frac{5}{9}$. De tal manera, un extremo con restricciones es $f\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}\right) = \frac{225}{81}$. ■

■ Dos restricciones Con el fin de optimizar una función $w = f(x, y, z)$ sujeta a *dos* restricciones, $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, debemos introducir un segundo multiplicador de Lagrange μ (la letra griega minúscula mu) y resolver el sistema

$$\begin{aligned}f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\g(x, y, z) &= 0 \\h(x, y, z) &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

EJEMPLO 6 Dos restricciones

Encuentre el punto sobre la curva C de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $x - y + 3z = 6$ que está más alejada del plano xy . Luego determine el punto sobre C que está más cercano al plano xy .

Solución La FIGURA 4.9.5 sugiere que existen dos de tales puntos P_1 y P_2 con coordenadas z no negativas. La función f para la cual deseamos encontrar un máximo y un mínimo es simplemente la distancia desde cada uno de estos puntos al plano xy , esto es, $f(x, y, z) = z$. Si tomamos $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ y $h(x, y, z) = x - y + 3z - 6$, entonces el sistema (6) es

$$\begin{aligned}0 &= 2x\lambda + \mu \\0 &= 2y\lambda - \mu \\1 &= 2z\lambda + 3\mu \\x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\x - y + 3z - 6 &= 0.\end{aligned}$$

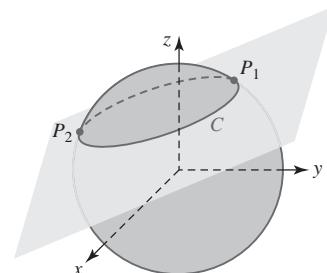


FIGURA 4.9.5 Intersección de una esfera y un plano en el ejemplo 6

Sumamos la primera y la segunda ecuaciones para obtener $2\lambda(y + x) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces la primera ecuación implica $\mu = 0$, pero la tercera ecuación en el sistema conduce a la contradicción $0 = 1$. Ahora bien, si tomamos $y = -x$, las dos ecuaciones se vuelven

$$\begin{array}{lll}x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 & \text{o} & 2x^2 + z^2 = 9 \\x + x + 3z - 6 = 0 & & 2x + 3z = 6.\end{array}$$

Al resolver el último sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, \quad z = \frac{18}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{14} \\ y &\quad x = \frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, \quad z = \frac{18}{11} + \frac{3}{11}\sqrt{14}. \end{aligned}$$

Entonces, los puntos en C que están más alejado y más cercano al plano xy son, respectivamente,

$$\begin{aligned} P_1\left(\frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, -\frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, \frac{18}{11} + \frac{3}{11}\sqrt{14}\right) \\ y \quad P_2\left(\frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, -\frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, \frac{18}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{14}\right). \end{aligned}$$

Las coordenadas aproximadas de P_1 y P_2 son $(-0.99, 0.99, 2.66)$ y $(2.08, -2.08, 0.62)$.

■ Posdata: Un poco de historia Joseph Louis Lagrange nació en 1736 como Giuseppe Lodovico Lagrangia en Turín, en el reino de Sardinia, y murió en París en 1813. Lagrange fue



Lagrange

el último de los once hijos de su madre y el único que vivió más allá de la infancia. En su adolescencia ya era profesor en la Escuela Real de Artillería en Turín. Invitado ahí gracias a los esfuerzos de Euler y D'Alembert, dedicó veinte productivos años en la corte de Federico el Grande, hasta la posterior muerte de éste en 1786. Luego, Luis XVI lo instaló en el Louvre, donde se dice que fue el favorito de María Antonieta. Deploró los excesos de la Revolución francesa, aunque ayudó al nuevo gobierno a establecer el sistema métrico. Fue el primer profesor de la Escuela Politécnica, donde el cálculo y la teoría de números fueron sus especialidades.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ NOTAS DESDE EL AULA

Advierta que en el ejemplo 5 concluimos con las vagas palabras “un extremo con restricciones es”. El método de los multiplicadores de Lagrange no tiene un indicador integrado que señale **MÁX** o **MÍN** cuando se encuentra un extremo. Además del procedimiento gráfico analizado al principio de esta sección, otra manera de que usted mismo se convenza respecto a la naturaleza del extremo es compararlo con los valores obtenidos al calcular la función dada en otros puntos que satisfagan la ecuación de restricción. De hecho, de esta manera encontramos que $\frac{225}{81}$ del ejemplo 5 es en realidad un **mínimo** con restricciones de la función f .

4.9

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-14.

☰ Fundamentos

En los problemas 1 y 2, dibuje las gráficas de las curvas de nivel de la función f dada y la ecuación de restricción que se indica. Determine si f tiene un extremo con restricciones.

1. $f(x, y) = x + 3y$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x, y) = xy$, sujeta a $\frac{1}{2}x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

En los problemas 3-20, utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos con restricciones de la función dada.

3. Problema 1

4. Problema 2

5. $f(x, y) = xy$, sujeta a $x^2 + y^2 = 2$

6. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $2x + y = 5$

7. $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 5$, sujeta a $x - y = 1$

8. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 10$, sujeta a $4x^2 + y^2 = 4$

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $x^4 + y^4 = 1$

10. $f(x, y) = 8x^2 - 8xy + 2y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 10$

11. $f(x, y) = x^3y$, sujeta a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

12. $f(x, y) = xy^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 27$

13. $f(x, y, z) = x + 2y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 30$

14. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $x + 2y + 3z = 4$
15. $f(x, y, z) = xyz$, sujeta a $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$,
 $x > 0, y > 0, z > 0$
16. $f(x, y, z) = xyz + 5$, sujeta a $x^3 + y^3 + z^3 = 24$
17. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, sujeta a $x + y + z = 1$,
 $x > 0, y > 0, z > 0$
18. $f(x, y, z) = 4x^2y^2z^2$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,
 $x > 0, y > 0, z > 0$
19. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $2x + y + z = 1$,
 $-x + 2y - 3z = 4$
20. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $4x + z = 7$,
 $z^2 = x^2 + y^2$
21. Encuentre el área máxima de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 4.
22. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular abierta con volumen máximo si su área superficial es igual a 75 cm^3 . ¿Cuáles son las dimensiones si la caja es cerrada?

Aplicaciones

23. A un tanque cilíndrico recto se le superpone una tapa cónica en la forma que se ilustra en la FIGURA 4.9.6. El radio del tanque es de 3 m y su área superficial total corresponde a $81\pi \text{ m}^2$. Encuentre las alturas x y y de manera que el volumen del tanque sea un máximo. [Sugerencia: El área superficial del cono es $3\pi\sqrt{9 + y^2}$.]

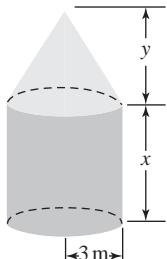
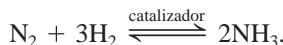


FIGURA 4.9.6 Cilindro con
tapa cónica del problema 23

24. En negocios, un índice de utilidad U es una función que produce una medida de la satisfacción obtenida a partir de la compra de cantidades variables, x y y , de dos productos que se venden regularmente. Si $U(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$ es un índice de utilidad, encuentre sus extremos sujetos a $x + 6y = 18$.
25. El **proceso de Haber-Bosch*** produce amoniaco mediante una unión directa de nitrógeno e hidrógeno bajo condiciones de presión P y temperatura constantes:



* **Fritz Haber** (1868-1934) fue un químico alemán. Por el invento de este proceso, Haber obtuvo el premio Nobel de Química en 1918. Carl Bosch, cuñado de Haber e ingeniero químico, fue quien hizo que este proceso fuera práctico a gran escala. Bosch obtuvo el premio Nobel de Química en 1931. Durante la Primera Guerra Mundial el gobierno alemán utilizó el proceso de Haber-Bosch para producir grandes cantidades de fertilizantes y explosivos. Haber fue posteriormente expulsado de Alemania por Adolfo Hitler y murió en el exilio.

Las presiones parciales x , y y z del hidrógeno, nitrógeno y amoníaco satisfacen $x + y + z = P$ y la ley de equilibrio $z^2/xy^3 = k$, donde k es una constante. La cantidad máxima de amoníaco ocurre cuando se obtiene la presión parcial máxima de este mismo. Determine el valor máximo de z .

26. Si una especie de animales tiene n fuentes de alimento, el **índice de amplitud** de su nicho ecológico se define como

$$\frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

donde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, es la fracción de la dieta de los animales que proviene de la i -ésima fuente de alimentos. Por ejemplo, si la dieta de los pájaros consiste en 50% de insectos, 30% de gusanos y 20% de semillas, el índice de amplitud es

$$\begin{aligned} \frac{1}{(0.50)^2 + (0.30)^2 + (0.20)^2} &= \frac{1}{0.25 + 0.09 + 0.04} \\ &= \frac{1}{0.38} \approx 2.63. \end{aligned}$$

Advierta que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ y $0 \leq x_i \leq 1$ para toda i .

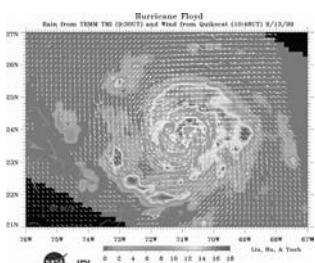
- a) Para especies con tres fuentes alimenticias, demuestre que el índice de amplitud se maximiza si $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$.
- b) Demuestre que el índice de amplitud con n fuentes se maximiza cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1/n$.

Piense en ello

27. Dé una interpretación geométrica de los extremos en el problema 9.
28. Dé una interpretación geométrica de los extremos en el problema 14.
29. Dé una interpretación geométrica del extremo en el problema 19.
30. Dé una interpretación geométrica del extremo en el problema 20.
31. Encuentre el punto $P(x, y)$, $x > 0, y > 0$, sobre la superficie $xy^2 = 1$ que es más cercano al origen. Muestre que el segmento de recta del origen a P es perpendicular a la recta tangente en P .
32. Encuentre el valor máximo de $f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ sobre el plano $x + y + z = k$.
33. Utilice el resultado del problema 32 para probar la desigualdad

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

34. Encuentre el punto sobre la curva C de intersección del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + 2z = 4$ que está más alejado del plano xz . Encuentre el punto sobre C que es más cercano al plano xz .



Huracán

4.10 Campos vectoriales

■ Introducción El movimiento del viento o el flujo de fluidos pueden describirse mediante un *campo de velocidades* en el que es posible asignar un vector en cada punto representando la velocidad de una partícula en el punto. Vea la FIGURA 4.10.1a) y b). Advierta que, en el campo de velocidades sobre puesto a una imagen de satélite de un huracán en la foto al margen, los vectores muestran claramente la rotación característica en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de los vientos dentro de un área de baja presión. Los vectores más largos cerca del centro del campo indican vientos de mayor velocidad que los de la periferia del campo. El concepto de un *campo de fuerza* desempeña un papel importante en mecánica, electricidad y magnetismo. Vea la figura 4.10.1c) y d). En esta sección estudiaremos una nueva función vectorial que describe a un campo de vectores, o **campo vectorial**, bidimensional o tridimensional y la conexión entre los campos vectoriales y las integrales de línea.

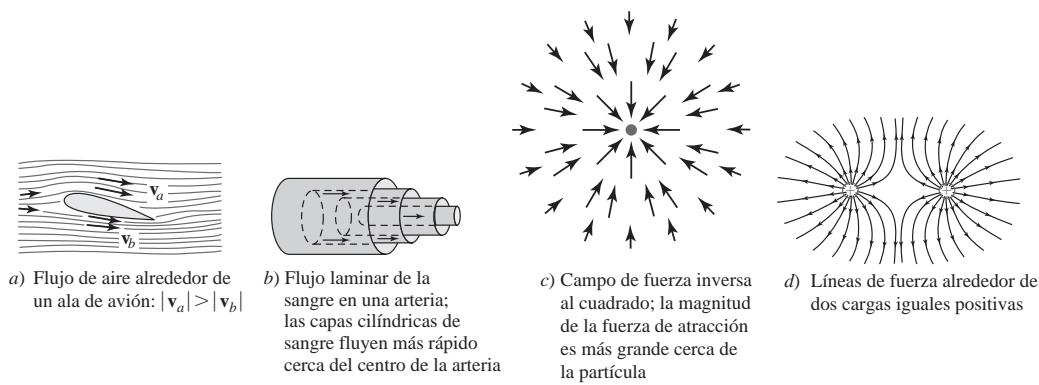


FIGURA 4.10.1 Ejemplos de campos vectoriales

■ Campos vectoriales Un **campo vectorial** en el espacio bidimensional es una función de valores vectoriales

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

que asocia un único vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$ con cada punto (x, y) en una región R en el plano xy sobre el cual están definidas las funciones componentes escalares P y Q . De manera similar, un campo vectorial en el espacio tridimensional es una función

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

que asocia un único vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$ con cada punto (x, y, z) en una región D del espacio tridimensional con un sistema de coordenadas xyz .

EJEMPLO 1 Campo vectorial en el espacio bidimensional

Grafique el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución Una manera de proceder consiste simplemente en elegir puntos en el plano xy y después graficar el vector \mathbf{F} en cada punto. Por ejemplo, en $(1, 1)$ dibujaríamos el vector $\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Para el campo vectorial dado es posible dibujar de manera sistemática vectores de la misma longitud. Observe que $|\mathbf{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y por ello los vectores de la misma longitud k deben yacer a lo largo de la curva definida por $\sqrt{x^2 + y^2} = k$; esto es, en cualquier punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = k^2$, un vector tendría la misma longitud k . Por simplicidad vamos a elegir círculos que tienen algunos puntos en ellos con coordenadas enteras. Por ejemplo, para $k = 1$, $k = \sqrt{2}$ y $k = 2$ tenemos:

En $x^2 + y^2 = 1$: En los puntos $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$, los vectores correspondientes $\mathbf{j}, -\mathbf{i}, -\mathbf{j}, \mathbf{i}$ tienen la misma longitud 1.

En $x^2 + y^2 = 2$: En los puntos $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$, los vectores correspondientes $-\mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}$ tienen la misma longitud $\sqrt{2}$.

Sobre $x^2 + y^2 = 4$: En los puntos $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$, los vectores correspondientes $2\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i}$, $-2\mathbf{j}$, $2\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 2.

Los vectores en estos puntos se ilustran en la FIGURA 4.10.2.

En general, es casi imposible dibujar campos vectoriales a mano y por ello debemos confiar en tecnologías como las de un SAC. En la FIGURA 4.10.3 hemos mostrado una versión generada por computadora del campo vectorial del ejemplo 1. Muchas veces cuando los vectores se dibujan con su longitud correcta, el campo vectorial luce amontonado con vectores que se traslanan. Vea la figura 4.10.3a). Un SAC escalará los vectores de manera tal que los que se muestran tienen longitudes proporcionales a su longitud verdadera. Vea la figura 4.10.3b). En la figura 4.10.3c) se presenta la versión normalizada del mismo campo vectorial; en otras palabras, todos los vectores tienen la misma longitud unitaria. Advierta que la pequeña inclinación en las representaciones del campo vectorial de la figura 4.10.3 se deben al hecho de que el SAC calcula y grafica el vector en la dirección apropiada con el punto inicial (su cola) del vector ubicada en un punto especificado.

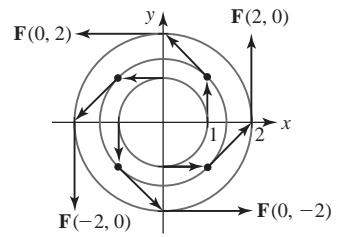
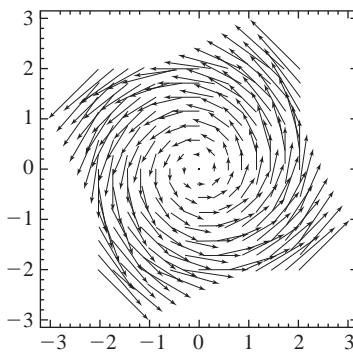
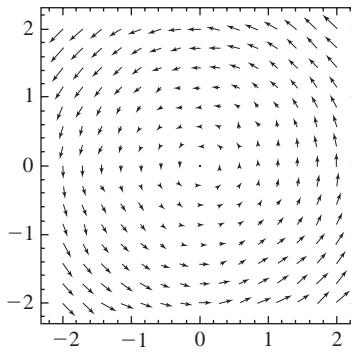


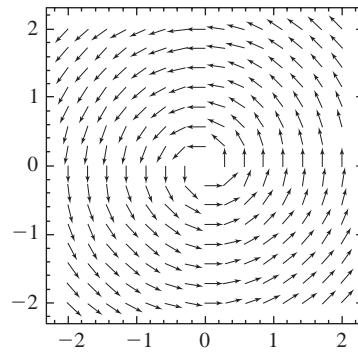
FIGURA 4.10.2 Campo vectorial bidimensional del ejemplo 1



a) Campo vectorial sin escalamiento



b) Campo vectorial con escalamiento



c) Campo vectorial normalizado

FIGURA 4.10.3 Campo vectorial del ejemplo 1

En la FIGURA 4.10.4 se ilustran dos campos vectoriales en el espacio tridimensional.

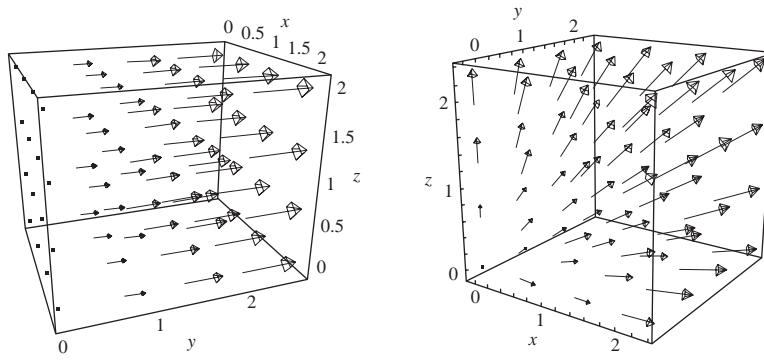


FIGURA 4.10.4 Campos vectoriales en el espacio tridimensional

Campos vectoriales gradiente Asociado con una función f de dos o tres variables hay un campo vectorial. Para una función de dos variables $f(x, y)$, el gradiente

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \quad (1)$$

define un campo vectorial bidimensional llamado **campo gradiente** de f . Para una función de tres variables $f(x, y, z)$, el campo gradiente tridimensional de f se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (2)$$

EJEMPLO 2 Campo gradiente

Determine el campo gradiente de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Solución Por definición, el campo gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$$

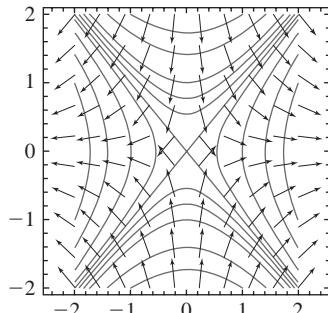


FIGURA 4.10.5 Curvas de nivel de f y campo gradiente de f en el ejemplo 4

Recuerde de la sección 4.1 que las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para c adecuada, se denominan **curvas de nivel** de f . En el ejemplo 5, las curvas de nivel de f son la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = c$, donde c es una constante. Con la ayuda de un SAC, hemos superpuesto en la **FIGURA 4.10.5** un muestreo de las curvas de nivel $x^2 - y^2 = c$ y vectores en el campo gradiente $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$. Para un mayor énfasis visual hemos elegido graficar todos los vectores en el campo de manera que sus longitudes sean las mismas. Cada vector en el campo gradiente $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ es perpendicular a alguna curva de nivel. En otras palabras, si la cola o punto inicial de un vector coincide con un punto (x, y) sobre una curva de nivel, entonces el vector es perpendicular a la curva de nivel en (x, y) .

■ Campos vectoriales conservativos Un campo vectorial \mathbf{F} se dice que es **conservativo** si \mathbf{F} puede escribirse como un gradiente de una función escalar ϕ . En otras palabras, \mathbf{F} es conservativo si existe una función ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. La función ϕ recibe el nombre de **función potencial** de \mathbf{F} .

EJEMPLO 3 Campo vectorial conservativo

Demuestre que el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Considere la función $\phi(x, y) = xy$. El gradiente de la función escalar ϕ es

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Como $\nabla\phi = \mathbf{F}(x, y)$ concluimos que $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo y que ϕ es una función potencial de \mathbf{F} . El campo vectorial se presenta en la **FIGURA 4.10.6**.

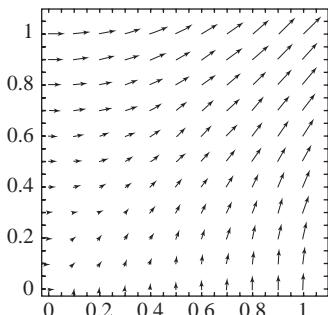


FIGURA 4.10.6 Campo vectorial conservativo del ejemplo 5

Desde luego, no todo campo vectorial es un campo conservativo aunque muchos campos vectoriales encontrados en física son conservativos. (Vea el problema 43 en la sección “Desarrolle su competencia 4.10”.) Para los propósitos presentes, la importancia de los campos vectoriales conservativos será evidente en la siguiente sección cuando continuemos con nuestro estudio de integrales de línea.

■ Prueba para un campo conservativo Hay una forma sencilla de determinar si \mathbf{F} es conservativo. El siguiente teorema es una prueba para un campo vectorial conservativo que recurre a las derivadas parciales de las funciones componentes de $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Teorema 4.10.1 Prueba para un campo conservativo

Suponga que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en una región abierta R y que P y Q son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en R . Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3}$$

para todo (x, y) en R . Inversamente, si se cumple la igualdad (3) para todo (x, y) en una región R simplemente conexa, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es conservativo en R .

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Probamos la primera mitad del teorema. Suponemos que las funciones componentes del campo vectorial conservativo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ son continuas y tienen pri-

meras derivadas parciales continuas en una región abierta R . Puesto que \mathbf{F} es conservativo, existe una función potencial ϕ tal que

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Así, $P = \partial\phi/\partial x$ y $Q = \partial\phi/\partial y$. En este caso

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}.$$

Del teorema 4.3.1, las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales y por ello $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ como fue demostrado. ■

EJEMPLO 4 Empleo del teorema 4.10.1

El campo vectorial conservativo $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ en el ejemplo 2 es continuo y tiene funciones componentes cuyas primeras derivadas parciales son continuas en toda la región abierta R consistente en todo el plano xy . Con las identificaciones $P = y$ y $Q = x$ se deduce de (3) del teorema 4.10.1,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Empleo del teorema 4.10.1

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2y^3)\mathbf{i} + (x + 5y)\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Con $P = x^2 - 2y^3$ y $Q = x + 5y$, encontramos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ para todos los puntos en el plano, se sigue del teorema 4.10.1 que \mathbf{F} no es conservativo. ■

EJEMPLO 6 Empleo del teorema 4.10.1

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -ye^{-xy}\mathbf{i} - xe^{-xy}\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Con $P = -ye^{-xy}$ y $Q = -xe^{-xy}$, encontramos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xye^{-xy} - e^{-xy} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Las componentes de \mathbf{F} son continuas y tienen derivadas parciales continuas. De tal modo, (3) se cumple en todo el plano xy , que es una región simplemente conexa. Del inverso del teorema 4.10.1 concluimos que \mathbf{F} es conservativo. ■

4.10

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-14.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique algunos vectores representativos en el campo vectorial dado.

- | | |
|---|--|
| 1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ | 2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ |
| 3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ | 4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ |
| 5. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{j}$ | 6. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$ |

En los problemas 7-10, asocie la figura dada con uno de los campos vectoriales en a)-d).

- | | |
|--|--|
| a) $\mathbf{F}(x, y) = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ | b) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ |
| c) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ | d) $\mathbf{F}(x, y) = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ |

7.

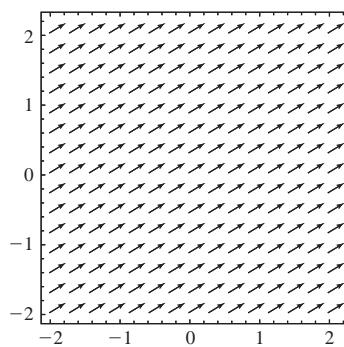


FIGURA 4.10.7 Campo vectorial del problema 7

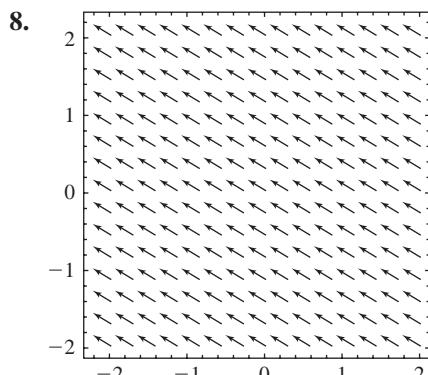


FIGURA 4.10.8 Campo vectorial del problema 8

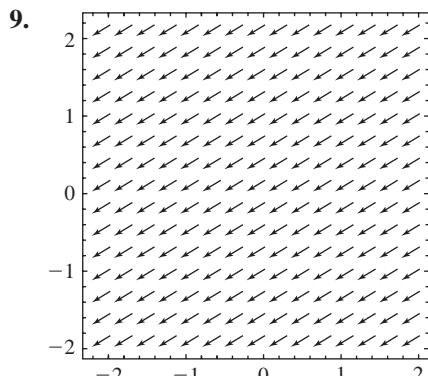


FIGURA 4.10.9 Campo vectorial del problema 9

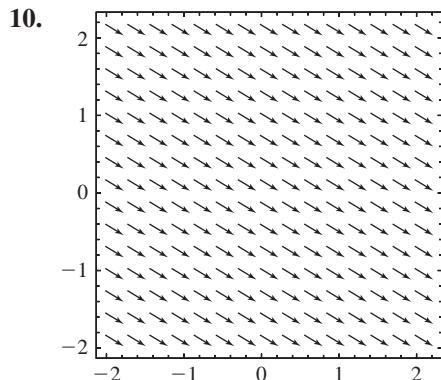


FIGURA 4.10.10 Campo vectorial del problema 10

En los problemas 11-14, asocie la figura dada con uno de los campos vectoriales en a)-d).

- a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- b) $\mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{k}$
- c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$
- d) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

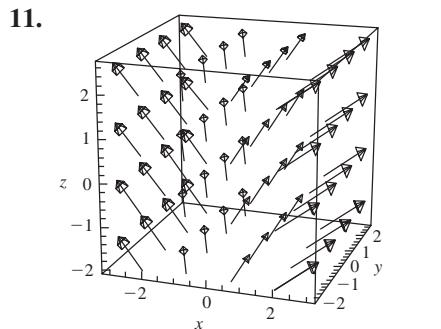


FIGURA 4.10.11 Campo vectorial del problema 11

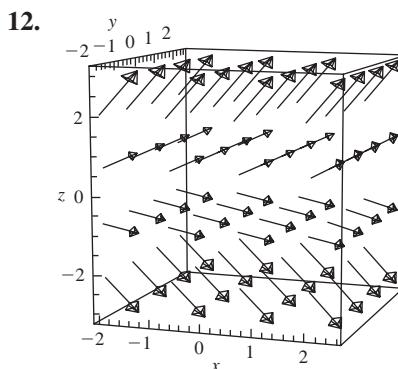


FIGURA 4.10.12 Campo vectorial del problema 12

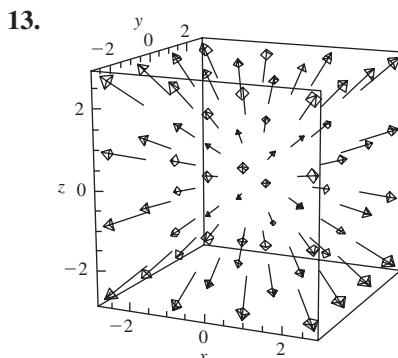


FIGURA 4.10.13 Campo vectorial del problema 13

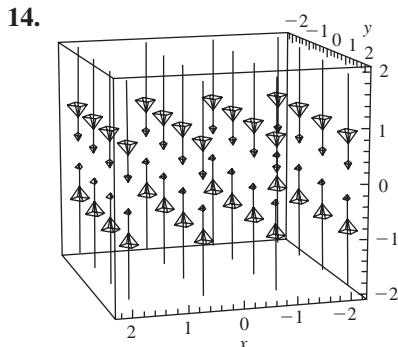


FIGURA 4.10.14 Campo vectorial del problema 14

En los problemas 15-20, encuentre el campo gradiente de la función f dada.

15. $f(x, y) = \frac{1}{6}(3x - 6y)^2$
16. $f(x, y) = x - y + 2x \cos 5xy$
17. $f(x, y, z) = x \tan^{-1} yz$
18. $f(x, y, z) = x - x^2yz^4$
19. $f(x, y, z) = y + z - xe^{-y^2}$
20. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^4 + 3z^6)$

En los problemas 21-24, asocie el campo vectorial conservativo dado \mathbf{F} con una de las funciones potencial en a)-d).

- a) $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 5$
 - b) $\phi(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$
 - c) $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 4$
 - d) $\phi(x, y) = 2x + \frac{1}{2}y^2 + 1$
21. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 22. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$
 23. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 24. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

En los problemas 25-28, el campo vectorial dado es conservativo. Mediante ensayo y error, determine una función potencial ϕ para \mathbf{F} .

25. $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} + (1 - \sin y)\mathbf{j}$

26. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\mathbf{i} - xe^{-y}\mathbf{j}$

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 12z^2\mathbf{k}$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$

En los problemas 29-36, determine si el campo vectorial dado es un campo conservativo. Si es así, encuentre la función potencial ϕ para \mathbf{F} .

29. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$

30. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\mathbf{j}$

31. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos xy^2\mathbf{i} - 2xy \sin xy^2\mathbf{j}$

32. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

33. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$

34. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + (3y^2 - z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - ze^{-y})\mathbf{j} + (e^{-y} - 1)\mathbf{k}$.

Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 37-42, utilice un SAC para superponer las gráficas del campo gradiente de f y las curvas de nivel de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados.

37. $f(x, y) = x + 3y$

38. $f(x, y) = x - y^2$

39. $f(x, y) = \sin x \sin y$

40. $f(x, y) = \sin x + \sin y$

41. $f(x, y) = e^{-x} \cos y$

42. $f(x, y) = \cos(x + y)$

Piense en ello

43. Todo campo de fuerzas inverso al cuadrado $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, es conservativo. Demuestre lo anterior determinando la función potencial $\phi(x, y, z)$ para \mathbf{F} .

44. ¿Dos funciones diferentes f y g pueden tener el mismo campo gradiente?

4.11 Rotacional y divergencia

Introducción Hemos visto que si un campo vectorial de fuerza \mathbf{F} es conservativo, entonces puede escribirse como el gradiente de una función potencial ϕ :

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

El operador diferencial vectorial, u operador nabla,

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad (1)$$

que se usa en el gradiente también puede combinarse con un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad (2)$$

de dos modos diferentes: en un caso produciendo otro campo vectorial y en el otro dando lugar a una función escalar.

Nota: Supondremos en la siguiente discusión que P , Q y R tienen derivadas parciales continuas por toda una región apropiada del espacio tridimensional.

Rotacional Empezamos combinando el operador diferencial (1) con el campo vectorial (2) para producir otro campo vectorial llamado el **rotacional** de \mathbf{F} .

Definición 4.11.1 Rotacional de un campo vectorial

El **rotacional** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es el campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (3)$$

No es necesario memorizar los complicados componentes en el campo vectorial de (3). Como un procedimiento práctico, (3) puede interpretarse como un producto cruz. Interpretamos

(1) como un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, y entonces el rotacional \mathbf{F} puede escribirse como el producto cruz de ∇ y el vector \mathbf{F} :

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (4)$$

EJEMPLO 1 Rotacional de un campo vectorial

Si $\mathbf{F} = (x^2y^3 - z^4)\mathbf{i} + 4x^5y^2z\mathbf{j} - y^4z^6\mathbf{k}$, encuentre el rotacional \mathbf{F} .

Solución De (4),

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 - z^4 & 4x^5y^2z & -y^4z^6 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^4z^6) - \frac{\partial}{\partial z}(4x^5y^2z) \right] \mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^4z^6) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^3 - z^4) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x^5y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 - z^4) \right] \mathbf{k} \\ &= (-4y^3z^6 - 4x^5y^2)\mathbf{i} - 4z^3\mathbf{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Si f es una función escalar con segundas derivadas parciales continuas, entonces es fácil demostrar que

$$\text{rot}(\text{grad } f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Vea el problema 23 de la sección “Desarrolle su competencia 4.11”. Puesto que un campo vectorial conservativo \mathbf{F} es un campo gradiente, esto es, existe una función potencial ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, se deduce de (5) que *si \mathbf{F} es conservativo, entonces $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$* .

EJEMPLO 2 Un campo vectorial no conservativo

Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. De (4),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Debido a que $\text{rot } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ podemos concluir que \mathbf{F} es no conservativo.

Bajo la suposición de que las funciones componentes P , Q y R de un campo vectorial \mathbf{F} son continuas y tienen derivadas parciales continuas por toda una región abierta D del espacio tridimensional, también podemos concluir que *si $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces \mathbf{F} es conservativo*. Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema.

Teorema 4.11.1 Conceptos equivalentes

Suponga que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial donde P , Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en alguna región abierta del espacio tridimensional. El campo vectorial \mathbf{F} es conservativo si y sólo si $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Advierta que cuando $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces las tres componentes del vector deben ser 0. De (3) vemos que esto quiere decir que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Divergencia Hay otra combinación de derivadas parciales de las funciones componentes de un campo vectorial que ocurren con frecuencia en ciencia e ingeniería. Antes de enunciar la siguiente definición, considere lo siguiente.

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ representa el campo de velocidades de un fluido, entonces el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo, esto es, el flujo del campo vectorial \mathbf{F} a través del área ΔS , es aproximadamente

$$(\text{altura}) \cdot (\text{área de la base}) = (\text{comp}_n \mathbf{F})\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta S, \quad (6)$$

donde \mathbf{n} es un vector normal unitario a la superficie. Considere ahora el paralelepípedo rectangular que se ilustra en la FIGURA 4.11.1. Para calcular el flujo total de \mathbf{F} a través de sus seis lados en la dirección hacia fuera, calculamos primero el flujo total hacia el exterior de dos caras paralelas. El área de la cara F_1 es $\Delta x\Delta z$, y la normal unitaria hacia fuera es $-\mathbf{j}$, y por ello por (6) el flujo de \mathbf{F} a través de F_1 es

$$\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\Delta x\Delta z = -Q(x, y, z)\Delta x\Delta z.$$

El flujo hacia fuera de la cara F_2 , cuya normal hacia fuera es \mathbf{j} , está dado por

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{j})\Delta x\Delta z = Q(x, y + \Delta y, z)\Delta x\Delta z.$$

En consecuencia, el flujo total hacia fuera de estas caras paralelas es

$$Q(x, y + \Delta y, z)\Delta x\Delta z + (-Q(x, y, z)\Delta x\Delta z) = [Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]\Delta x\Delta z. \quad (7)$$

Multiplicando (7) por $\Delta y/\Delta y$ y utilizando la definición de una derivada parcial, entonces para Δy cercana a 0,

$$\frac{[Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]}{\Delta y}\Delta x\Delta y\Delta z \approx \frac{\partial Q}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Argumentando exactamente de la misma manera, vemos que las contribuciones al flujo total hacia fuera del paralelepípedo desde las dos caras paralelas al plano yz , y desde las dos caras paralelas al plano xy , originan

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \quad \text{y} \quad \frac{\partial R}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Al sumar estos resultados, vemos que el flujo total de \mathbf{F} hacia fuera del paralelepípedo es aproximadamente

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Dividiendo la última expresión entre $\Delta x\Delta y\Delta z$, obtenemos el flujo hacia fuera de \mathbf{F} por unidad de volumen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Esta combinación de derivadas parciales es una función escalar y recibe el nombre especial de **divergencia** de \mathbf{F} .

Definición 4.11.2 Divergencia

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (8)$$

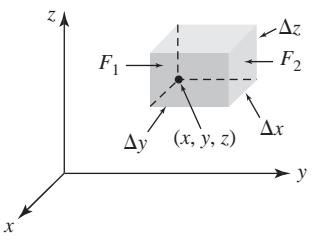


FIGURA 4.11.1 Flujo que pasa a través de un paralelepípedo rectangular

La función escalar $\text{div } \mathbf{F}$ dada en (8) también puede escribirse en términos del operador nabla (1) como un producto punto:

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}R(x, y, z). \quad (9)$$

EJEMPLO 3 Divergencia de un campo vectorial

Si $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + 2xy^2z\mathbf{j} - 5yz\mathbf{k}$, encuentre $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

Solución De (9),

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-5yz) \\ &= z^2 + 4xyz - 5y.\end{aligned}$$

La siguiente identidad relaciona las nociones de divergencia y rotacional. Si \mathbf{F} es un campo vectorial que tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (10)$$

Vea el problema 24 de la sección “Desarrolle su competencia 4.11”.

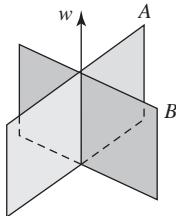
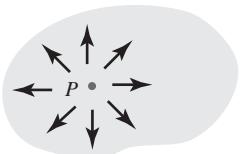
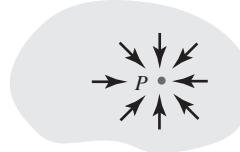


FIGURA 4.11.2 Dispositivo de paleta para detectar la rotación de un fluido

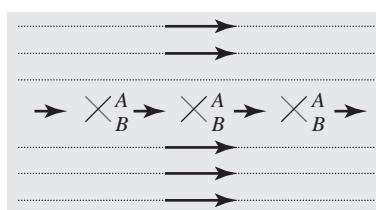


a) $\operatorname{Div} \mathbf{F}(P) > 0$; P una fuente

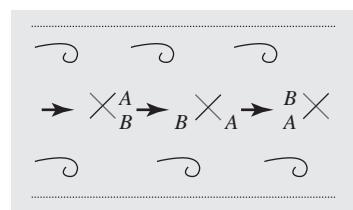


b) $\operatorname{Div} \mathbf{F}(P) < 0$; P un sumidero

FIGURA 4.11.4 El punto P es una fuente en a); un sumidero en b)



a) Flujo irrotacional



b) Flujo rotacional

FIGURA 4.11.3 Flujo de fluido irrotacional y rotacional

En la discusión que condujo a la definición 4.11.2, vimos que la divergencia de un campo de velocidades \mathbf{F} cerca de un punto $P(x, y, z)$ es el flujo por unidad de volumen. Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$, se dice que P es una **fuente** para \mathbf{F} , ya que hay un flujo neto hacia fuera del fluido cerca de P ; si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$, se afirma entonces que P es un **sumidero** para \mathbf{F} , puesto que hay un flujo neto hacia dentro del fluido cerca de P ; si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = 0$, no hay fuentes o sumideros cerca de P . Vea la FIGURA 4.11.4.

La divergencia de un campo vectorial tiene otra interpretación en el concepto del flujo de fluidos. Una medida de la tasa de cambio de la densidad del fluido en un punto es simplemente $\operatorname{div} \mathbf{F}$. En otras palabras, $\operatorname{div} \mathbf{F}$ es una medida de la compresibilidad del fluido. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se dice que el fluido es **incompresible**. En la teoría electromagnética, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se afirma que el campo vectorial \mathbf{F} es **solenoidal**.

Tomando el producto punto de ∇ consigo mismo obtenemos un importante operador diferencial escalar de segundo orden:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (11)$$

Cuando (11) se aplica a una función escalar $f(x, y, z)$ el resultado se denomina **laplaciano tridimensional**,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (12)$$

y aparece en matemáticas aplicadas en muchas ecuaciones diferenciales parciales. Una de las ecuaciones diferenciales parciales más famosas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad (13)$$

recibe el nombre de **ecuación de Laplace** en tres dimensiones. La ecuación de Laplace a menudo se abrevia como $\nabla^2 f = 0$. Vea los problemas 49-54 de la sección “Desarrolle su competencia 4.3”.

I Posdata: Un poco de historia Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827) fue un notable matemático, físico y astrónomo francés. Su trabajo más famoso, la *Mécanique Céleste* (*Mecánica celestia*), de cinco volúmenes, resume y extiende el trabajo de algunos de sus famosos predecesores, tal como Isaac Newton. En realidad, algunos de sus entusiastas contemporáneos llamaron a Laplace el “Newton de Francia”. Nacido en una pobre familia granjera, Laplace adulto tuvo éxito en combinar la ciencia y las matemáticas con la política. Napoleón lo nombró ministro del interior, aunque después lo destituyó debido a que él “buscaba los detalles en todo y llevó a la administración el espíritu de lo infinitamente pequeño”, es decir, el cálculo infinitesimal. Incluso Napoleón lo nombró posteriormente senador. Después de la abdicación de Napoleón y de la restauración de la monarquía borbona en 1814, Luis XVIII otorgó a Laplace el título nobiliario de marqués en 1817.



Laplace

4.11

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-14.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine el rotacional y la divergencia del campo vectorial dado.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 10yz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + 6x^3\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + (2x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (3z^2 + y^2)\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)^3\mathbf{i} + e^{-yz}\mathbf{j} + xye^{2y}\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5y^3\mathbf{i} + (\frac{1}{2}x^3y^2 - xy)\mathbf{j} - (x^3yz - xz)\mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{-z}\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 3ye^{-z}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \ln x\mathbf{i} + (2x - 3yz)\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^x\mathbf{i} - x^3yze^z\mathbf{j} + xy^2e^y\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} yz\mathbf{i} + z \cos xz^3\mathbf{j} + ye^{5xy}\mathbf{k}$

En los problemas 11-18, considere que \mathbf{a} es un vector constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Verifique la identidad dada.

11. $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$
12. $\operatorname{rot} \mathbf{r} = \mathbf{0}$
13. $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}$
14. $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$
15. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$
16. $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
17. $\nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$
18. $\nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$
19. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
20. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
21. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

22. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
23. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$
24. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$
25. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$
26. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$
27. Determine $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$ para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$.
28. Suponga que ∇^2 es el operador diferencial definido en (11). Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales, demuestre que

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}),$$

$$\text{donde } \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \nabla^2P\mathbf{i} + \nabla^2Q\mathbf{j} + \nabla^2R\mathbf{k}.$$

29. Emplee la identidad en el problema 28 para obtener el resultado del problema 27.
30. Demuestre que $\nabla \cdot (f \nabla f) = f \nabla^2 f + |\nabla f|^2$, donde $\nabla^2 f$ es el laplaciano definido en (12). [Sugerencia: Vea el problema 21.]

Cualquier función f con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace se dice que es una **función armónica**. En los problemas 31 y 32, muestre que una función f dada es armónica comprobando que f satisface (13).

31. $f(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 4xy - 9xz - 8z^2$
32. $f(x, y, z) = \frac{A}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}}$,
 A, a, b y c constantes

La ecuación de Laplace en dos dimensiones es

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

En los problemas 33 y 34, demuestre que la función f dada es armónica comprobando que f satisface (14).

33. $f(x, y) = \arctan\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right)$

34. $f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

En los problemas 35 y 36, suponga que f y g tienen segundas derivadas parciales continuas. Demuestre que el campo vectorial dado es solenoide. [Sugerencia: Vea el problema 25.]

35. $\mathbf{F} = \nabla f \times \nabla g$

36. $\mathbf{F} = \nabla f \times (f \nabla g)$

37. Si $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de la porción del elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ en el primer octante que está acotado por $y = 0, y = x, z = 0$. Suponga que la superficie se orienta hacia arriba.

Aplicaciones

38. Suponga que un cuerpo gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje. Si \mathbf{r} es el vector de posición de un punto P sobre el cuerpo medido desde el origen, entonces el vector de velocidad lineal \mathbf{v} de rotación es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Vea la FIGURA 4.11.5. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, demuestre que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v}$.

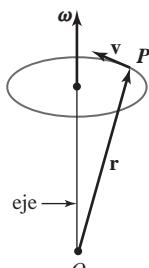


FIGURA 4.11.5 Cuerpo rotante del problema 38

39. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de masa m_1 y deje que la masa m_2 esté ubicada en el origen. Si la fuerza de atracción gravitacional es

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r},$$

verifique que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

40. El campo vectorial de velocidades para el flujo bidimensional de un fluido ideal alrededor de un cilindro está dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = A \left[\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) \mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j} \right],$$

para alguna constante A positiva. Vea la FIGURA 4.11.6.

- a) Demuestre que cuando el punto (x, y) está alejado del origen, $\mathbf{F}(x, y) \approx A\mathbf{i}$.
 b) Demuestre que \mathbf{F} es irrotacional.
 c) Demuestre que \mathbf{F} es incompresible.

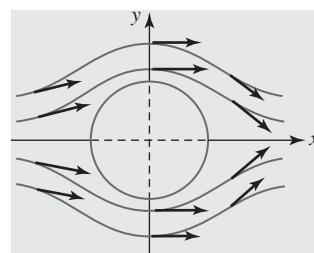


FIGURA 4.11.6 Campo de velocidades del problema 40

41. Si $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ representan los campos eléctrico y magnético en el espacio vacío, entonces las ecuaciones de Maxwell son

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

donde c es la velocidad de la luz. Utilice la identidad en el problema 28 para demostrar que \mathbf{E} y \mathbf{H} satisfacen

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Piense en ello

42. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} + (z + 5x)\mathbf{k}$. Explique por qué \mathbf{F} no es el rotacional de otro campo vectorial \mathbf{G} .

Competencia final de la unidad 4

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-14.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-10, responda verdadero (V) o falso (F).

1. Si $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ tiene el mismo valor para un número infinito de aproximaciones (a, b) , entonces el límite existe. _____
2. Los dominios de las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 16)} \quad \text{y} \quad g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 16)$$

son los mismos. _____

3. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$. _____

4. La función $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$ es continua en todas partes. _____
5. Si $\partial z / \partial x = 0$, entonces z = constante. _____
6. Si $\nabla f = \mathbf{0}$, entonces f = constante. _____
7. ∇z es perpendicular a la gráfica de $z = f(x, y)$. _____
8. ∇f apunta en la dirección en la cual f aumenta con mayor rapidez. _____
9. Si f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces $f_{xy} = f_{yx}$. _____
10. Si $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ en (a, b) entonces $f(a, b)$ es un extremo relativo. _____

B. Llene los espacios en blanco _____

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 1)} \frac{3x^2 + xy^2 - 3xy - 2y^3}{5x^2 - y^2} =$ _____.
2. $f(x, y) = \frac{xy^2 + 1}{x - y + 1}$ es continua excepto en los puntos _____.
3. Para $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ la curva de nivel que pasa por $(2, -4)$ es _____.
4. Si $p = g(\eta, \xi)$, $q = h(\eta, \xi)$, entonces $\frac{\partial}{\partial \xi} T(p, q) =$ _____.
5. Si $r = g(w)$, $s = h(w)$, entonces $\frac{d}{dw} F(r, s) =$ _____.
6. Si s es la distancia que un cuerpo demora en caer en el tiempo t , entonces la aceleración de la gravedad g puede obtenerse de $g = 2s/t^2$. Pequeños errores de Δs y Δt en las mediciones de s y t resultarán en un error aproximado en g de _____.
7. La derivada parcial $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z \partial y^2}$ en notación de subíndices es _____.
8. La derivada parcial f_{xyy} en notación ∂ es _____.
9. Si $f(x, y) = \int_x^y F(t) dt$, entonces $\frac{\partial f}{\partial y} =$ _____ y $\frac{\partial f}{\partial x} =$ _____.
10. En (x_0, y_0, z_0) la función $F(x, y, z) = x + y + z$ aumenta más rápidamente en la dirección de _____.
11. Si $F(x, y, z) = f(x, y)g(y)h(z)$, entonces $F_{xyz} =$ _____.
12. Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, escriba todas las posibles derivadas parciales de cuarto orden. _____.

C. Ejercicios _____

En los problemas 1-8, calcule la derivada indicada

1. $z = ye^{-x^3y}$; z_y
2. $z = \ln(\cos(uv))$; z_u
3. $f(r, \theta) = \sqrt{r^3 + \theta^2}$; $f_{r\theta}$
4. $f(x, y) = (2x + xy^2)^2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
5. $z = \cosh(x^2y^3)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
6. $z = (e^{x^2} + e^{-y^2})^2$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$
7. $F(s, t, v) = s^3t^5v^{-4}$; F_{stv}
8. $w = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}$; $\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2 \partial z}$

En los problemas 9 y 10, encuentre el gradiente de la función dada en el punto que se indica.

9. $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}; (1, -1)$

10. $f(x, y, z) = \frac{x^2 - 3y^3}{z^4}; (1, 2, 1)$

En los problemas 11 y 12, determine la derivada direccional de la función dada en la dirección que se indica.

11. $f(x, y) = x^2y - y^2x; D_{\mathbf{u}}f$ en la dirección de $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

12. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2); D_{\mathbf{u}}f$ en la dirección de $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los problemas 13 y 14, dibuje el dominio de la función dada.

13. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)^2}$

14. $f(x, y) = \frac{1}{\ln(y - x)}$

En los problemas 15 y 16, determine Δz para la función dada.

15. $z = 2xy - y^2$

16. $z = x^2 - 4y^2 + 7x - 9y + 10$

En los problemas 17 y 18, encuentre la diferencial total de la función dada.

17. $z = \frac{x - 2y}{4x + 3y}$

18. $A = 2xy + 2yz + 2zx$

19. Determine las ecuaciones simétricas de la recta tangente de $(-\sqrt{5}, 1, 3)$ para la traza de $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ en el plano $x = -\sqrt{5}$.

20. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $(2, 3, 10)$ a la curva de intersección de la superficie $z = xy + x^2$ y el plano vertical que pasa por $P(2, 3)$ y $Q(4, 5)$ en la dirección de Q .

21. Considere la función $f(x, y) = x^2y^4$. En $(1, 1)$ ¿cuál es:

- a) la tasa de cambio de f en la dirección de \mathbf{i} ?
- b) la tasa de cambio de f en la dirección de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$?
- c) la tasa de cambio de f en la dirección de \mathbf{j} ?

22. Sea $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a) Si $x = 3 \sin 2t, y = 4 \cos 2t, z = 5t^3$, determine $\frac{dw}{dt}$.

b) Si $x = 3 \sin(2t/r), y = 4 \cos(2r/t), z = 5r^3t^3$, encuentre $\frac{\partial w}{\partial t}$.

23. Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = \sin xy$ en $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

24. Determine si hay algunos puntos sobre la superficie $z^2 + xy - 2x - y^2 = 1$ en los cuales el plano tangente es paralelo a $z = 2$.

25. Encuentre una ecuación del plano tangente al cilindro $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4, 6)$.

26. ¿En qué punto la derivada direccional de $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 3x^2$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es un mínimo?

27. Calcule las dimensiones de una caja rectangular con volumen máximo que está acotada en el primer octante por los planos de coordenadas y el plano $x + 2y + z = 6$. Vea la FIGURA 4.R.1.

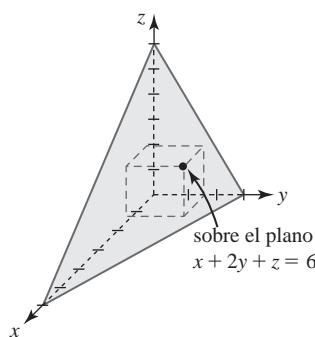


FIGURA 4.R.1 Caja y plano del problema 27

28. Un efecto de la teoría general de la relatividad de Einstein es que un objeto masivo, como una galaxia, puede actuar como una “lente gravitacional”; esto es, si la galaxia está ubicada entre un observador (en la Tierra) y una fuente luminosa (como un cuásar), entonces esa fuente luminosa aparece como un anillo que rodea la galaxia. Si la lente gravitacional es mucho más cercana a la fuente luminosa que al observador, entonces el radio angular θ del anillo (en radianes) se relaciona con la masa M de la lente y su distancia D desde el observador mediante

$$\theta = \left(\frac{GM}{c^2 D} \right)^{1/2},$$

donde G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz. Vea la FIGURA 4.R.2.

- a) Resuelva para M en términos de θ y D .
- b) Encuentre la diferencial total de M como una función de θ y D .
- c) Si el radio angular θ puede medirse con un error no mayor a 2% y la distancia D a la lente puede estimarse con un error no mayor a 10%, ¿cuál es el error porcentual máximo aproximado en el cálculo de la masa M de la lente?

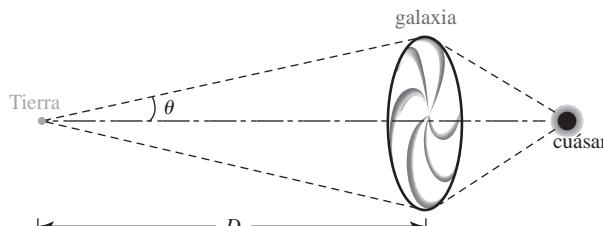


FIGURA 4.R.2 Galaxia del problema 28

29. La velocidad del péndulo cónico que se muestra en la FIGURA 4.R.3 está dada por $v = r\sqrt{g/y}$, donde $g = 980 \text{ cm/s}^2$. Si r disminuye de 20 a 19 cm y y aumenta de 25 a 26 cm, ¿cuál es el cambio aproximado en la velocidad del péndulo?

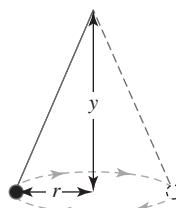


FIGURA 4.R.3 Péndulo cónico del problema 29

30. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en $(3, 4)$ en la dirección de a) $\nabla f(1, -2)$ y b) $\nabla f(3, 4)$.
31. Las llamadas temperaturas de estado estable dentro de un círculo de radio R están dadas por la **fórmula de la integral de Poisson**.

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi) d\phi.$$

Diferenciando formalmente bajo el signo de la integral, demuestre que U satisface la ecuación diferencial parcial

$$r^2 U_{rr} + rU_r + U_{\theta\theta} = 0.$$

- 32.** La función de producción Cobb-Douglas $z = f(x, y)$ se define mediante $z = Ax^\alpha y^\beta$, donde A, α y β son constantes. El valor de z recibe el nombre de *salida eficiente* para las entradas x y y . Demuestre que

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\alpha z}{x}, & f_y &= \frac{\beta z}{y}, & f_{xx} &= \frac{\alpha(\alpha - 1)z}{x^2}, \\f_{yy} &= \frac{\beta(\beta - 1)z}{y^2} & \text{y} & & f_{xy} &= f_{yx} = \frac{\alpha\beta z}{xy}.\end{aligned}$$

En los problemas 33–36, suponga que $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$. Si las derivadas parciales de orden superior dadas se evalúan en (a, b) , determine, si es posible, si $f(a, b)$ es un extremo relativo.

33. $f_{xx} = 4, f_{yy} = 6, f_{xy} = 5$

34. $f_{xx} = 2, f_{yy} = 7, f_{xy} = 0$

35. $f_{xx} = -5, f_{yy} = -9, f_{xy} = 6$

36. $f_{xx} = -2, f_{yy} = -8, f_{xy} = 4$

- 37.** Exprese el área A del triángulo recto como una función de la longitud L de su hipotenusa y uno de sus ángulos agudos θ .

- 38.** En la FIGURA 4.R.4 exprese la altura h de la montaña como una función de los ángulos θ y ϕ .

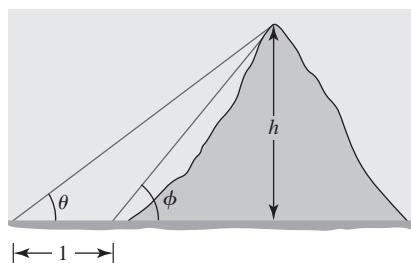


FIGURA 4.R.4 Montaña del problema 38

- 39.** El pasillo de tabique que se muestra en la FIGURA 4.R.5 tiene un ancho uniforme z . Exprese el área A del pasillo en términos de x , y y z .

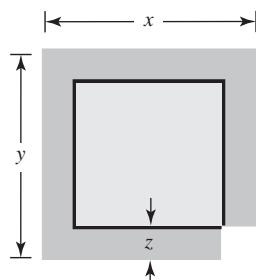


FIGURA 4.R.5 Pasillo del problema 39

- 40.** Una caja abierta hecha de plástico tiene la forma de un paralelepípedo rectangular. Las dimensiones exteriores de la caja se dan en la FIGURA 4.R.6. Si el plástico es de $\frac{1}{2}$ cm de espesor, encuentre el volumen aproximado del plástico.

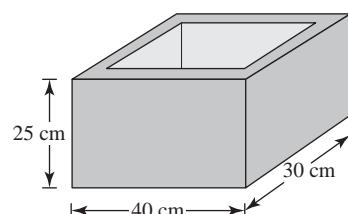


FIGURA 4.R.6 Caja abierta del problema 40

41. Una caja rectangular, que se muestra en la FIGURA 4.R.7, está inscrita en el cono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 4$. Exprese el volumen V de la caja en términos de x y y .

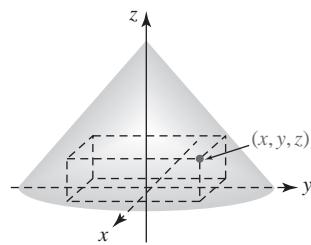


FIGURA 4.R.7 Caja inscrita del problema 41

42. La caja rectangular que se muestra en la FIGURA 4.R.8 tiene una cubierta y 12 compartimentos. La caja está hecha de un plástico pesado que cuesta 1.5 centavos por pulgada cuadrada. Encuentre una función que dé el costo C de construcción de la caja.

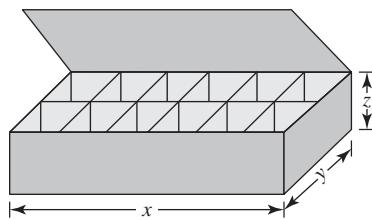
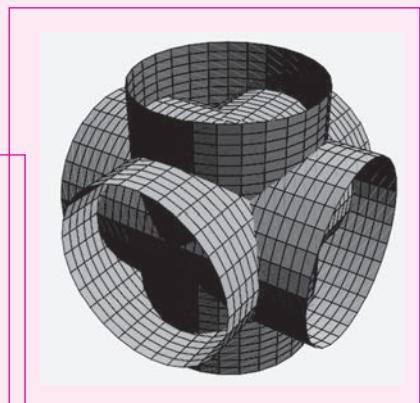
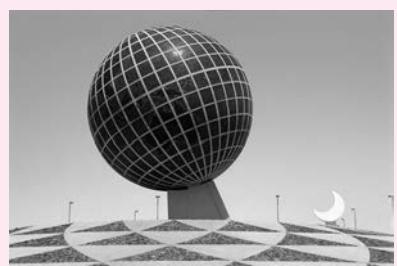
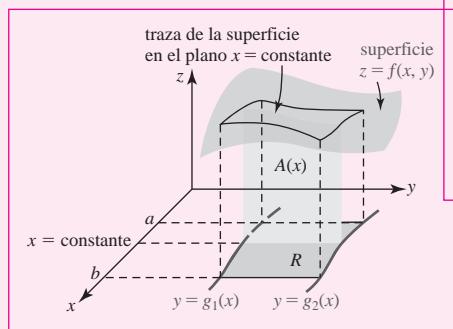


FIGURA 4.R.8 Caja rectangular del problema 42

Integrales múltiples



En esta unidad Concluimos nuestro estudio del cálculo de funciones de múltiples variables con las definiciones y aplicaciones de integrales definidas en dos y tres dimensiones. Estas integrales se llaman de modo más común como la **integral doble** y la **integral triple**, respectivamente. También se estudia la integral de línea.

Competencias específicas

- Plantear y resolver integrales a partir de una situación propuesta, eligiendo el sistema de coordenadas más adecuado.
- Usar software para hallar la representación gráfica de un campo vectorial.

5.1 La integral doble

■ Introducción Recuerde que la definición de la *integral definida* de una función de una sola variable está dada por el límite de una suma:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (1)$$

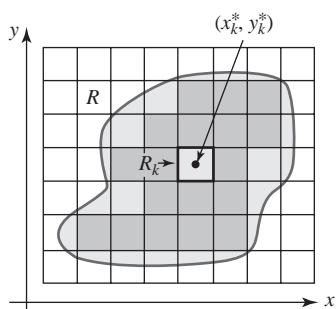


FIGURA 5.1.1 Punto muestra en R_k

Se le pide revisar los pasos que llevan a esta definición. Los pasos preliminares análogos que conducen al concepto de *integral definida bidimensional*, conocidos simplemente como **integral doble** de una función f de dos variables, se dan a continuación.

Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región cerrada y acotada R del plano xy . Considere los siguientes cuatro pasos:

- Por medio de una retícula de líneas verticales y horizontales paralelas a los ejes de coordenadas, forme una partición P de R en n subregiones rectangulares R_k de áreas ΔA_k que estén por completo sobre R . Son los rectángulos que se muestran en claro en la FIGURA 5.1.1.
- Sea $\|P\|$ la norma de la partición o la longitud de la diagonal más grande de las n subregiones rectangulares R_k .
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*) en cada subregión R_k .
- Forme la suma $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$.

Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 5.1.1 La integral doble

Sea f una función de dos variables definida sobre una región cerrada R del plano xy . Entonces la **integral doble de f sobre R** , denotada por $\iint_R f(x, y) dA$, se define como

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k. \quad (2)$$

Si el límite en (2) existe, afirmamos que f es **integrable sobre R** y que R es la **región de integración**. Para una partición P de R en subregiones R_k con (x_k^*, y_k^*) en R_k , una suma de la forma $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$ se denomina **suma de Riemann**. La partición de R , donde las R_k yacen por completo en R , recibe el nombre de **partición interior** de R . La colección de rectángulos sombreados en las siguientes dos figuras ilustra una partición interna.

Nota: Cuando f es continua sobre R , el límite en (2) existe, esto es, f es necesariamente integrable sobre R .

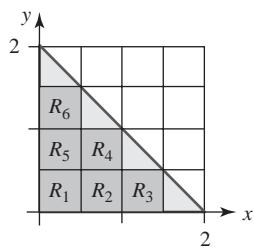


FIGURA 5.1.2 Región de integración R en el ejemplo 1

EJEMPLO 1 Suma de Riemann

Considere la región de integración R en el primer cuadrante acotado por las gráficas de $x + y = 2$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (5 - x - 2y) dA$ utilizando una suma de Riemann, las R_k que se muestran en la FIGURA 5.1.2 y los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en el centro geométrico de cada R_k .

Solución De la figura 5.1.2 vemos que $\Delta A_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $k = 1, 2, \dots, 6$ y las (x_k^*, y_k^*) en las R_k para $k = 1, 2, \dots, 6$, son a su vez, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{5}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$. Por consiguiente, la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k &= f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right) \frac{1}{4} \\ &= \frac{17}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{17}{16} + \frac{15}{16} + \frac{13}{16} + \frac{11}{16} + \frac{13}{16} + \frac{9}{16} = 4.875. \end{aligned}$$

Volumen Sabemos que cuando $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces la integral definida (1) produce el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. De manera similar, si $f(x, y) \geq 0$ sobre R , entonces sobre R_k como se muestra en la FIGURA 5.1.3, el producto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ puede interpretarse como el volumen de un paralelepípedo, o prisma, rectangular, de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y área de la base ΔA_k . La suma de n volúmenes $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ es una aproximación al volumen V del sólido acotado entre la región R y la superficie $z = f(x, y)$. El límite de esta suma cuando $\|P\| \rightarrow 0$, si existe, producirá el **volumen** de este sólido; esto es, si f es no negativa sobre R , entonces

$$V = \iint_R f(x, y) dA. \quad (3)$$

Los paralelepípedos construidos en las seis R_k que se muestran en la figura 5.1.2 se ilustran en la FIGURA 5.1.4. Puesto que el integrando es no negativo sobre R , el valor de la suma de Riemann dada en el ejemplo 1 representa una aproximación al volumen del sólido acotado entre la región R y la superficie definida por la función $f(x, y) = 5 - x - 2y$.

Área Cuando $f(x, y) = 1$ sobre R , entonces $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta A_k$ dará simplemente el **área** A de la región; esto es,

$$A = \iint_R dA. \quad (4)$$

Propiedades Las siguientes propiedades de la integral doble son similares a aquellas de la integral definida en una variable.

Teorema 5.1.1 Propiedades

Sean f y g funciones de dos variables que son integrables sobre una región R del plano xy . Entonces

- i) $\iint_R kf(x, y) dA = k \iint_R f(x, y) dA$, donde k es cualquier constante
- ii) $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$
- iii) $\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$, donde R_1 y R_2 son subregiones que no se traslanan y $R = R_1 \cup R_2$
- iv) $\iint_R f(x, y) dA \geq \iint_R g(x, y) dA$ si $f(x, y) \geq g(x, y)$ sobre R .

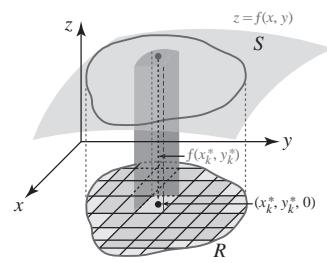


FIGURA 5.1.3 Se construye un paralelepípedo rectangular sobre cada R_k

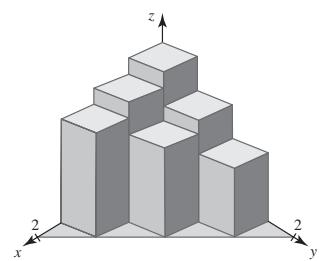


FIGURA 5.1.4 Paralelepípedos rectangulares sobre cada R_k en la figura 5.1.2

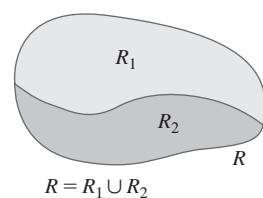


FIGURA 5.1.5 La región R es la unión de dos regiones

La parte iii) del teorema 5.1.1 es el equivalente bidimensional de la propiedad del intervalo aditivo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

La FIGURA 5.1.5 ilustra la división de una región en subregiones R_1 y R_2 para las cuales $R = R_1 \cup R_2$. Las regiones R_1 y R_2 pueden no tener puntos en común excepto posiblemente en su frontera común. Además, el teorema 5.1.1iii) se extiende a cualquier número finito de subregiones que no se traslanan cuya unión es R . También se sigue del teorema 5.1.1iv) que $\iint_R f(x, y) dA > 0$ siempre que $f(x, y) > 0$ para todo (x, y) en R .

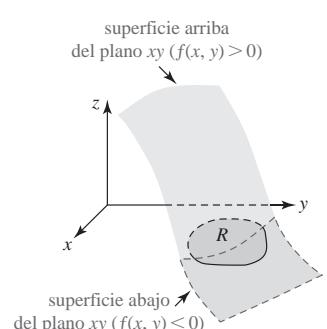


FIGURA 5.1.6 Sobre R la superficie está parcialmente por arriba y parcialmente por abajo del plano xy

Volumen neto Desde luego, no toda integral doble produce volumen. Para la superficie $z = f(x, y)$ que se muestra en la FIGURA 5.1.6, $\iint_R f(x, y) dA$ es un número real pero no es el volu-

men puesto que f es no negativa sobre R . Análogo al concepto del área neta que se estudia en un curso de cálculo integral, podemos interpretar la integral doble como la suma del volumen acotado entre la gráfica de f y la región R siempre que $f(x, y) \geq 0$ y el negativo del volumen entre la gráfica de f y la región R siempre que $f(x, y) \leq 0$. En otras palabras, $\iint_R f(x, y) dA$ representa un **volumen neto** entre la gráfica de f y el plano xy sobre la región R .

5.1

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-15.

Fundamentos

1. Considere la región R en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (x + 3y + 1) dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la FIGURA 5.1.7. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en el centro geométrico de cada R_k .

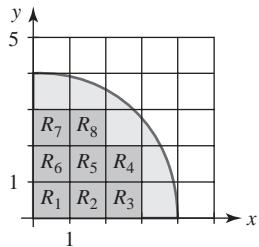


FIGURA 5.1.7 Región de integración del problema 1

2. Considere la región R en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x + y = 1$, $x + y = 3$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (2x + 4y) dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la FIGURA 5.1.8. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en la esquina superior derecha de cada R_k .

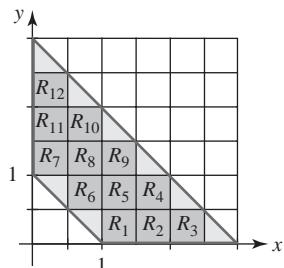


FIGURA 5.1.8 Región de integración del problema 2

3. Considere la región rectangular R que se muestra en la FIGURA 5.1.9. Aproxime la integral doble $\iint_R (x + y) dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la figura. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en
- el centro geométrico de cada R_k y
 - la esquina superior izquierda de cada R_k .

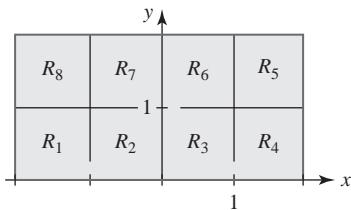


FIGURA 5.1.9 Región de integración del problema 3

4. Considere la región R acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$. Ponga una retícula rectangular sobre R correspondiente a las rectas $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1, \dots, x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1, \dots, y = 4$. Aproxime la integral doble $\iint_R xy dA$ utilizando una suma de Riemann, donde los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) se elijan en la esquina inferior derecha de cada rectángulo completo R_k en R .

En los problemas 5-8, evalúe $\iint_R 10 dA$ sobre la región R dada. Emplee fórmulas geométricas.

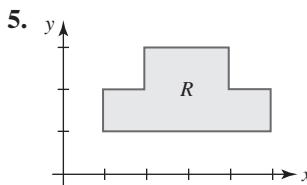


FIGURA 5.1.10 Región de integración del problema 5

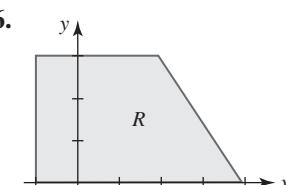


FIGURA 5.1.11 Región de integración del problema 6

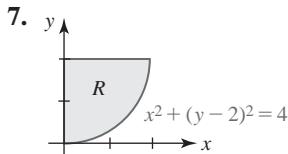


FIGURA 5.1.12 Región de integración del problema 7

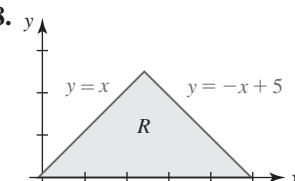


FIGURA 5.1.13 Región de integración del problema 8

9. Considere la región R acotada por el círculo $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. ¿La integral doble $\iint_R (x + 5y) dA$ representa un volumen? Explique.
10. Considere la región R del segundo cuadrante que está acotada por las gráficas de $-2x + y = 6$, $x = 0$ y $y = 0$.

¿La integral doble $\iint_R(x^2 + y^2) dA$ representa un volumen? Explique.

En los problemas 11-16, suponga que $\iint_R x dA = 3$, $\iint_R y dA = 7$ y el área de R es 8. Evalúe la integral doble dada.

11. $\iint_R 10 dA$

12. $\iint_R -5x dA$

13. $\iint_R (2x + 4y) dA$

14. $\iint_R (x - y) dA$

15. $\iint_R (3x + 7y + 1) dA$

16. $\iint_R y^2 dA - \iint_R (2 + y)^2 dA$

En los problemas 17 y 18, considere que R_1 y R_2 son regiones que no se traslanan tales que $R = R_1 \cup R_2$.

17. Si $\iint_{R_1} f(x, y) dA = 4$ y $\iint_{R_2} f(x, y) dA = 14$, ¿cuál es el valor de $\iint_R f(x, y) dA$?

18. Suponga que $\iint_R f(x, y) dA = 25$ y $\iint_{R_1} f(x, y) dA = 30$. ¿Cuál es el valor de $\iint_{R_2} f(x, y) dA$?

5.2 Integrales iteradas

■ Introducción De manera similar al proceso de la diferenciación parcial podemos definir la **integración parcial**. El concepto de la integración parcial es la clave para un método práctico de evaluación de una integral doble. Puesto que estaremos utilizando la integración indefinida y la definida, le recomendamos ampliamente un repaso del cálculo integral.

■ Integración parcial Si $F(x, y)$ es una función tal que su derivada parcial con respecto a y es una función f , esto es $F_y(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a y** es

$$\int f(x, y) dy = F(x, y) + c_1(x), \quad (1)$$

donde la función $c_1(x)$ desempeña la parte de la “constante de integración”. De manera similar, si $F(x, y)$ es una función tal que $F_x(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a x** es

$$\int f(x, y) dx = F(x, y) + c_2(y). \quad (2)$$

En otras palabras, para evaluar la integral parcial $\int f(x, y) dy$ mantenemos x fija (como si fuera una constante), en tanto que en $\int f(x, y) dx$ mantenemos y fija.

EJEMPLO 1 Empleo de (1) y (2)

Evalúe:

a) $\int 6xy^2 dy$ b) $\int 6xy^2 dx$.

Solución

a) Al mantener a x fija,

$$\int 6xy^2 dy = 6x \cdot \left(\frac{1}{3}y^3 \right) + c_1(x) = 2xy^3 + c_1(x).$$

$$\text{Comprobación: } \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3 + c_1(x)) = \frac{\partial}{\partial y} 2xy^3 + \frac{\partial}{\partial y} c_1(x) = 2x(3y^2) + 0 = 6xy^2.$$

b) Al mantener ahora y fija,

$$\int 6xy^2 dx = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \cdot y^2 + c_2(y) = 3x^2y^2 + c_2(y).$$

Usted debe verificar este resultado tomando su derivada parcial con respecto a x . ■

■ Integración parcial definida Al evaluar una integral definida podemos prescindir de las funciones $c_1(y)$ y $c_2(x)$ en (1) y (2). También en este caso, si $F(x, y)$ es una función tal que $F_y(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial definida con respecto a y** se define como

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = F(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = F(x, g_2(x)) - F(x, g_1(x)). \quad (3)$$

Si $F(x, y)$ es una función tal que $F_x(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial definida con respecto a x** es

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx = F(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = F(h_2(y), y) - F(h_1(y), y). \quad (4)$$

Las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ en (3) y las funciones $h_1(y)$ y $h_2(y)$ en (4) se denominan los **límites de integración**. Desde luego los resultados en (3) y (4) se cumplen cuando los límites de integración son constantes.

EJEMPLO 2 Empleo de (3) y (4)

Evalúe:

$$a) \int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y} \right) dy \qquad b) \int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y} \right) dx.$$

Solución

a) Se deduce de (3) que

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y} \right) dy &= \left[2xy^3 - 4x \ln|y| \right]_1^2 \\ &= (16x - 4x \ln 2) - (2x - 4x \ln 1) \\ &= 14x - 4x \ln 2. \end{aligned}$$

b) De (4),

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y} \right) dx &= \left(3x^2y^2 - 2\frac{x^2}{y} \right) \Big|_{-1}^3 \\ &= \left(27y^2 - \frac{18}{y} \right) - \left(3y^2 - \frac{2}{y} \right) \\ &= 24y^2 - \frac{16}{y}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Empleo de (3)

Evalúe $\int_{x^2}^x \sin xy dy$.

Solución Puesto que estamos tratando a x como constante, advertimos primero que la integral parcial de $\sin xy$ con respecto a y es $(-\cos xy)/x$. Para ver lo anterior, tenemos por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{x} \cos xy \right) = -\frac{1}{x} (-\sin xy) \frac{\partial}{\partial y} xy = -\frac{1}{x} (-\sin xy) \cdot x = \sin xy.$$

Por consiguiente, por (3) la integral parcial definida es

$$\int_{x^2}^x \sin xy dy = -\frac{\cos xy}{x} \Big|_{x^2}^x = \left(-\frac{\cos(x \cdot x)}{x} \right) - \left(-\frac{\cos(x \cdot x^2)}{x} \right) = -\frac{\cos x^2}{x} + \frac{\cos x^3}{x}. \quad \blacksquare$$

Antes de continuar necesitamos examinar algunas regiones especiales en el plano xy .

I Regiones de tipo I y II La región que se ilustra en la FIGURA 5.2.1a),

$$R: a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x),$$

donde las funciones frontera g_1 y g_2 son continuas, se denomina **región tipo I**. En la figura 5.2.1b), la región

$$R: c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y),$$

donde h_1 y h_2 son continuas, se denomina **región tipo II**.

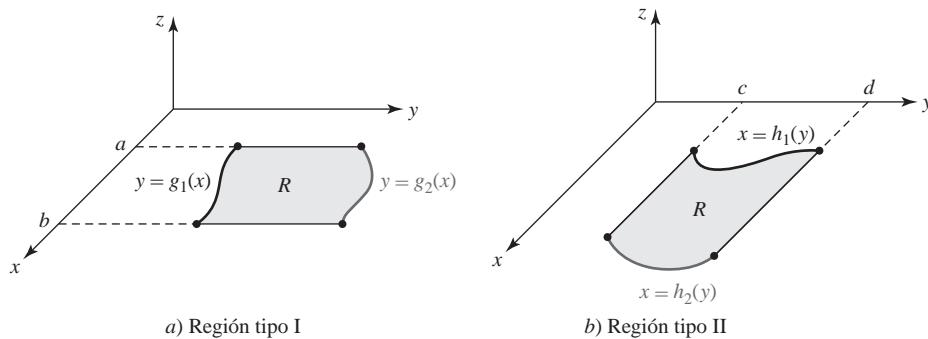


FIGURA 5.2.1 Regiones en el plano

■ Integrales iteradas Puesto que la integral parcial definida $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ es una función de x únicamente, podríamos, como alternativa, integrar la función resultante con respecto a x . Si f es continua sobre una región R de tipo I, definimos una **integral iterada de f** sobre la región mediante

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (5)$$

La idea básica en (5) es realizar integraciones *repetidas o sucesivas*. El proceso de dos pasos empieza con una integración parcial definida que produce una función de x , la cual se integra después de la manera usual de $x = a$ a $x = b$. El resultado final de las dos integraciones será un número real. De manera similar, definimos una integral iterada de una función f continua sobre una región R tipo II por medio de

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy. \quad (6)$$

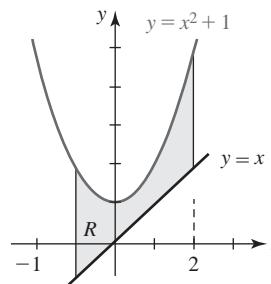
En (5) y (6), R recibe el nombre de **región de integración**.

EJEMPLO 4 Integral iterada

Evalúe la integral iterada de $f(x, y) = 2xy$ sobre la región que se muestra en la FIGURA 5.2.2.

Solución La región es de tipo I y por ello de acuerdo con (5) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \int_x^{x^2+1} 2xy dy dx &= \int_{-1}^2 \left[\int_x^{x^2+1} 2xy dy \right] dx = \int_{-1}^2 xy^2 \Big|_x^{x^2+1} dx \\ &= \int_{-1}^2 [x(x^2 + 1)^2 - x^3] dx \\ &= \left[\frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^2 = \frac{63}{4}. \end{aligned}$$

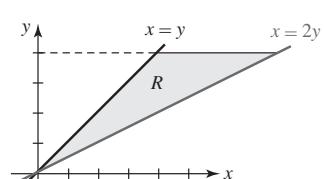
FIGURA 5.2.2 Región R del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Integral iterada

Evalúe $\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y) dx dy$.

Solución Al comparar la integral iterada con (6), vemos que la región de integración es de tipo II. Vea la FIGURA 5.2.3. Iniciamos integraciones sucesivas utilizando (4):

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y) dx dy &= \int_0^4 \left[\int_y^{2y} (8x + e^y) dx \right] dy = \int_0^4 (4x^2 + xe^y) \Big|_y^{2y} dy \\ &= \int_0^4 [(16y^2 + 2ye^y) - (4y^2 + ye^y)] dy \\ &= \int_0^4 (12y^2 + ye^y) dy \leftarrow \text{integración por partes} \\ &= \left[4y^3 + ye^y - e^y \right]_0^4 = 257 + 3e^4 \approx 420.79. \end{aligned}$$

FIGURA 5.2.3 Región R del ejemplo 5

EJEMPLO 6 Integral iterada

Evalúe $\int_{-1}^3 \int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy dx$.

Solución En el resultado del inciso *a*) del ejemplo 2, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 \int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy dx &= \int_{-1}^3 \left[\int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy \right] dx \\ &= \int_{-1}^3 (14x - 4x \ln 2) dx \\ &= (7x^2 - 2x^2 \ln 2) \Big|_{-1}^3 = 56 - 16 \ln 2 \approx 44.91. \end{aligned}$$

La inspección de la FIGURA 5.2.4 debe convencerlo de que una región rectangular R definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ es simultáneamente del tipo I y del tipo II. Si f es continua sobre R , puede demostrarse que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \quad (7)$$

Usted debe verificar que

$$\int_1^2 \int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx dy$$

produce el mismo resultado que la integral iterada del ejemplo 6.

Una región rectangular no es la única región que puede ser tanto de tipo I como de tipo II. Como en (7), si f es continua sobre una región R que es simultáneamente del tipo I y del tipo II, entonces las dos integrales iteradas de f sobre R son iguales. Vea los problemas 47 y 48 de la sección “Desarrolle su competencia 5.2”.

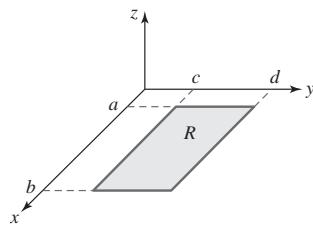


FIGURA 5.2.4 La región rectangular es tanto del tipo I como del tipo II

5.2

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-15.

Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe la integral parcial dada.

1. $\int dy$

2. $\int (1 - 2y) dx$

3. $\int (6x^2y - 3x\sqrt{y}) dx$

4. $\int (6x^2y - 3x\sqrt{y}) dy$

5. $\int \frac{1}{x(y+1)} dy$

6. $\int (1 + 10x - 5y^4) dx$

7. $\int (12y \cos 4x - 3 \operatorname{sen} y) dx$

8. $\int \sec^2 3xy dy$

9. $\int \frac{y}{\sqrt{2x+3y}} dx$

10. $\int (2x + 5y)^6 dy$

En los problemas 11-20, evalúe la integral parcial definida dada.

11. $\int_{-1}^3 (6xy - 5e^y) dx$

12. $\int_1^2 \tan xy dy$

13. $\int_1^{3x} x^3 e^{xy} dy$

14. $\int_{\sqrt{y}}^{y^3} (8x^3y - 4xy^2) dx$

15. $\int_0^{2x} \frac{xy}{x^2 + y^2} dy$

16. $\int_{x^3}^x e^{2y/x} dy$

17. $\int_{\tan y}^{\sec y} (2x + \cos y) dx$

18. $\int_{\sqrt{y}}^1 y \ln x dx$

19. $\int_x^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}^3 y dy$

20. $\int_{1/2}^1 y \cos^2 xy dx$

En los problemas 21-42, evalúe la integral iterada dada.

21. $\int_1^2 \int_{-x}^{x^2} (8x - 10y + 2) dy dx$

22. $\int_{-1}^1 \int_0^y (x+y)^2 dx dy$

23. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x - y) dx dy$

24. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos x} (1 + 4y \tan^2 x) dy dx$

25. $\int_0^\pi \int_y^{3y} \cos(2x+y) dx dy$

26. $\int_1^2 \int_0^{\sqrt{x}} 2y \operatorname{sen} \pi x^2 dy dx$

27. $\int_1^{\ln 3} \int_0^x 6e^{x+2y} dy dx$

28. $\int_0^1 \int_0^{2y} e^{-y^2} dx dy$

29. $\int_0^3 \int_{x+1}^{2x+1} \frac{1}{\sqrt{y-x}} dy dx$

30. $\int_0^1 \int_0^y x(y^2 - x^2)^{3/2} dx dy$

31. $\int_1^9 \int_0^x \frac{1}{x^2 + y^2} dy dx$

32. $\int_0^{1/2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx dy$

33. $\int_1^e \int_1^y \frac{y}{x} dx dy$

34. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x} dy dx$

35. $\int_0^6 \int_0^{\sqrt{25-y^2}/2} \frac{1}{\sqrt{(25-y^2)-x^2}} dx dy$

36. $\int_0^2 \int_{y^2}^{\sqrt{20-y^2}} y dx dy$

37. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\cos y}^0 e^x \sin y dx dy$

38. $\int_0^1 \int_0^{y^{1/3}} 6x^2 \ln(y+1) dx dy$

39. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^x (\cos x - \sin y) dy dx$ 40. $\int_1^3 \int_0^{1/x} \frac{1}{x+1} dy dx$

41. $\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \int_1^{\sqrt{2 \operatorname{sen} 2\theta}} r dr d\theta$ 42. $\int_0^{\pi/3} \int_{3 \operatorname{cos} \theta}^{1+\cos \theta} r dr d\theta$

En los problemas 43-46, dibuje la región de integración R para la integral iterada que se indica.

43. $\int_0^2 \int_1^{2x+1} f(x, y) dy dx$

44. $\int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$

45. $\int_{-1}^3 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y) dx dy$

46. $\int_{-1}^2 \int_{-x^2}^{x^2+1} f(x, y) dy dx$

En los problemas 47 y 48, verifique mediante un dibujo que la región tipo I es la misma que la región tipo II. Verifique que las integrales iteradas que se indican son iguales.

47. Tipo I: $\frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$
Tipo II: $y^2 \leq x \leq 2y$, $0 \leq y \leq 2$

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} x^2 y dy dx = \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} x^2 y dx dy$$

48. Tipo I: $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$
Tipo II: $0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$, $-1 \leq y \leq 1$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2x dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 2x dy dx$$

En los problemas 49-52, verifique la igualdad que se indica.

49. $\int_{-1}^2 \int_0^3 x^2 dy dx = \int_0^3 \int_{-1}^2 x^2 dx dy$

50. $\int_{-2}^2 \int_2^4 (2x+4y) dx dy = \int_2^4 \int_{-2}^2 (2x+4y) dy dx$

51. $\int_1^3 \int_0^\pi (3x^2 y - 4 \operatorname{sen} y) dy dx = \int_0^\pi \int_1^3 (3x^2 y - 4 \operatorname{sen} y) dx dy$

52. $\int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1} \right) dx dy = \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1} \right) dy dx$

■ Piense en ello

53. Si f y g son integrales, demuestre que

$$\int_a^d \int_a^b f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right).$$

54. Emplee el resultado del problema 53 para evaluar

$$\int_0^\infty \int_0^\infty xye^{-(2x^2+3y^2)} dx dy.$$

5.3 Evaluación de integrales dobles

■ Introducción Las integrales iteradas de la sección anterior proporcionan los medios para evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y) dA$ sobre una región tipo I o tipo II o una región que puede expresarse como una unión de un número finito de estas regiones. El siguiente resultado se debe al matemático italiano **Guido Fubini** (1879-1943).

Teorema 5.3.1 Teorema de Fubini

Sea f continua sobre una región R .

i) Si R es una región de tipo I, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (1)$$

ii) Si R es una región de tipo II, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

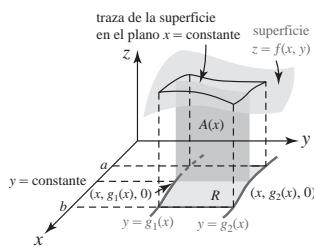


FIGURA 5.3.1 El área $A(x)$ del plano vertical es una integral definida de f

El teorema 5.3.1 es la contraparte de la integral doble del teorema fundamental del cálculo. Si bien el teorema 5.3.1 es difícil de probar, podemos tener alguna idea intuitiva de su importancia al considerar volúmenes. Sea R una región de tipo I y $z = f(x, y)$ continua y no negativa sobre R . El área A del plano vertical que se muestra en la **FIGURA 5.3.1** es el área bajo la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $x = \text{constante}$ y en consecuencia está dado por la integral parcial

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Al sumar todas estas áreas de $x = a$ a $x = b$, obtenemos el volumen V del sólido sobre R y debajo de la superficie:

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Sin embargo, como ya hemos visto en (3) de la sección 5.1, este volumen está también dado por la integral doble $V = \iint_R f(x, y) dA$. En consecuencia,

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

EJEMPLO 1 Integral doble

Evalúe la integral doble $\iint_R e^{x+3y} dA$ sobre la región R acotada por las gráficas de $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ y $y = -x + 5$.

Solución Como se advierte en la **FIGURA 5.3.2**, R es una región de tipo II; por consiguiente, por (2) integramos primero con respecto a x desde la frontera izquierda $x = y$ hasta la frontera derecha $x = 5 - y$:

$$\begin{aligned} \iint_R e^{x+3y} dA &= \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y} dx dy \\ &= \int_1^2 \left[e^{x+3y} \right]_y^{5-y} dy \\ &= \int_1^2 (e^{5+2y} - e^{4y}) dy \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{5+2y} - \frac{1}{4} e^{4y} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} e^9 - \frac{1}{4} e^8 - \frac{1}{2} e^7 + \frac{1}{4} e^4 \approx 2771.64. \end{aligned}$$

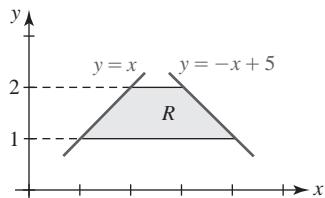


FIGURA 5.3.2 Región R del ejemplo 1

Como una ayuda para reducir una integral doble a una integral iterada con límites de integración correctos, resulta útil visualizar, como se sugiere en la discusión anterior, la integral doble como un proceso de suma. Sobre una región de tipo I la integral iterada $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$ es primero una sumatoria en la dirección de y . De manera gráfica, esto se indica mediante la flecha vertical en la **FIGURA 5.3.3a**; el rectángulo típico en la flecha tiene un área $dy dx$. El dy situado antes del dx significa que los “volúmenes” $f(x, y) dy dx$ de los paralelepípedos construidos sobre los rectángulos se suman verticalmente con respecto a y desde la curva frontera inferior $y = g_1(x)$ hasta la curva frontera superior $y = g_2(x)$. El dx que sigue al dy significa que el resultado de cada sumatoria vertical se suma después horizontalmente con respecto a x de izquierda ($x = a$) a derecha ($x = b$). Se hacen comentarios similares en relación con las integrales dobles sobre regiones de tipo II. Vea la figura 5.3.3b). Recuerde de (4) de la sección 5.1 que cuando $f(x, y) = 1$, la integral doble $A = \iint_R dA$ produce el área de la región. Entonces, la figura 5.3.3a) muestra que $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx$ suma verticalmente las áreas rectangulares y después horizontalmente, en tanto que la figura 5.3.3b) muestra que $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx dy$ suma horizontalmente las áreas rectangulares y después verticalmente.

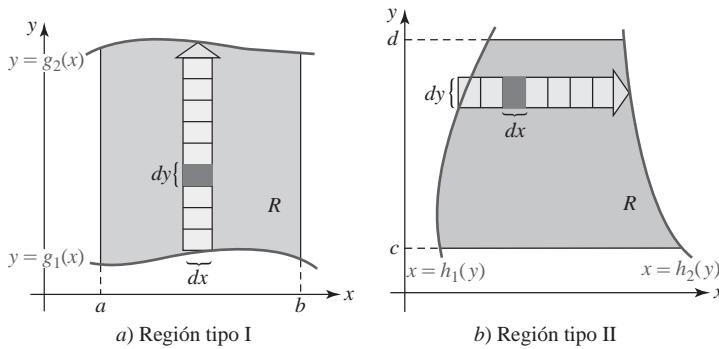


FIGURA 5.3.3 En a) la primera integración es con respecto a y ; en b) la primera integración es con respecto a x

EJEMPLO 2 Área mediante integración doble

Emplee la integral doble para determinar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

Solución Las gráficas y sus puntos de intersección se muestran en la FIGURA 5.3.4. Puesto que R es evidentemente del tipo I, tenemos de (1)

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 [(8 - x^2) - x^2] dx \\ &= \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx \\ &= \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right) \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

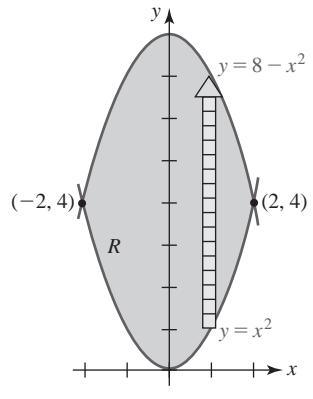


FIGURA 5.3.4 Región R del ejemplo 2

Nota: Usted debe reconocer

$$A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx$$

como la fórmula para calcular el área acotada entre dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 3 Volumen mediante doble integración

Utilice la integral doble para calcular el volumen V del sólido en el primer octante que está acotado por los planos de coordenadas y las gráficas del plano $z = 3 - x - y$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución De la FIGURA 5.3.5a) vemos que el volumen está dado por $V = \iint_R (3 - x - y) dA$. Puesto que la figura 5.3.5b) muestra que la región de integración R es tipo I, tenemos de (1),

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{1}{2}y^2\right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(3\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica} \\ &= \left[\frac{3}{2} \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{3}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3} \approx 1.69. \end{aligned}$$

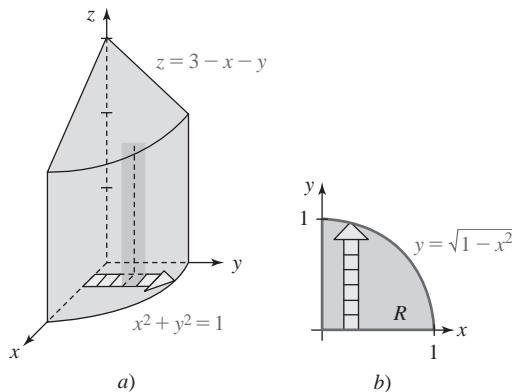


FIGURA 5.3.5 En el ejemplo 3, superficies en *a*); región de integración en *b*)

La reducción de una integral doble ya sea a las integrales iteradas (1) o (2) depende de *a*) el tipo de región y *b*) la función misma. Los siguientes dos ejemplos ilustran cada caso.

EJEMPLO 4 Integral doble

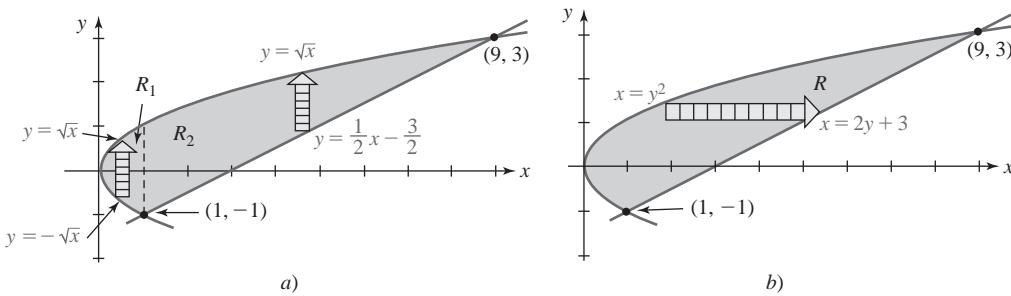
Evalúe $\iint_R (x + y) dA$ sobre la región acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución La región, que se muestra en la FIGURA 5.3.6*a*), puede escribirse como la unión $R = R_1 \cup R_2$ de las dos regiones tipo I. Al resolver la ecuación $y^2 = 2y + 3$ o $(y + 1)(y - 3) = 0$ encontramos que los puntos de intersección de las dos gráficas son $(1, -1)$ y $(9, 3)$. Por tanto, de (1) y el teorema 5.1.1*iii*), tenemos

$$\begin{aligned}\iint_R (x + y) dA &= \iint_{R_1} (x + y) dA + \iint_{R_2} (x + y) dA \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx + \int_1^9 \int_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} (x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^9 \left(xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 2x^{3/2} dx + \int_1^9 \left(x^{3/2} + \frac{11}{4}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{9}{8} \right) dx \\ &= \left[\frac{4}{5}x^{5/2} \right]_0^1 + \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{11}{8}x^2 - \frac{5}{24}x^3 - \frac{9}{8}x \right) \Big|_1^9 \approx 46.93.\end{aligned}$$

Solución alterna Al interpretar la región como una región individual de tipo II, vemos de la figura 5.3.6*b*) que

$$\begin{aligned}\iint_R (x + y) dA &= \int_{-1}^3 \int_{y^2}^{2y+3} (x + y) dx dy \\ &= \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy \right) \Big|_{y^2}^{2y+3} dy \\ &= \int_{-1}^3 \left(-\frac{1}{2}y^4 - y^3 + 4y^2 + 9y + \frac{9}{2} \right) dy \\ &= \left(-\frac{1}{10}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{9}{2}y^2 + \frac{9}{2}y \right) \Big|_{-1}^3 \approx 46.93.\end{aligned}$$



Advierta que la respuesta en el ejemplo 4 no representa el volumen del sólido sobre R y debajo del plano $z = x + y$. ¿Por qué no?

Inversión del orden de integración Como ilustra el ejemplo 4, un problema puede volverse más sencillo cuando el orden de integración se **cambia o invierte**. Además, algunas integrales iteradas que quizás sea imposible evaluar utilizando un orden de integración puedan, tal vez, evaluarse utilizando el orden de integración inverso.

EJEMPLO 5 Integral doble

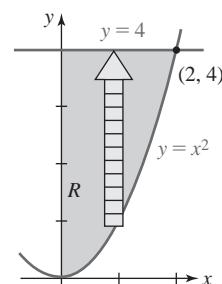
Evalué $\iint_R xe^{y^2} dA$ sobre la región R en el primer cuadrante acotado por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$.

Solución Cuando se observa como una región de tipo I, tenemos de la FIGURA 5.3.7a), $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 4$, por lo que

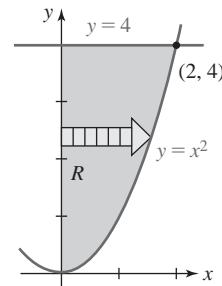
$$\iint_R xe^{y^2} dA = \int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2} dy dx.$$

La dificultad aquí es que la integral parcial definida $\int_{x^2}^4 xe^{y^2} dy$ no puede evaluarse debido a que e^{y^2} no tiene una antiderivada como función elemental con respecto a y . Sin embargo, como vemos en la figura 5.3.7b), podemos interpretar la misma región como una de tipo II definida por $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq x \leq \sqrt{y}$. Por consiguiente, de (2),

$$\begin{aligned} \iint_R xe^{y^2} dA &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2} dx dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} x^2 e^{y^2} \Big|_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} y e^{y^2} dy \\ &= \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1). \end{aligned}$$



a) Región tipo I



b) Región tipo II

FIGURA 5.3.7 Región de integración del ejemplo 5

\iint_R NOTAS DESDE EL AULA

i) Como se mencionó después del ejemplo 1, es posible definir la integral doble en términos de un doble límite de una doble suma tal como

$$\sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*) \Delta y_j \Delta x_i \quad \text{o} \quad \sum_j \sum_i f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j.$$

No daremos los detalles.

- ii) Se le sugiere aprovechar las simetrías para minimizar su trabajo cuando calcule áreas y volúmenes mediante integración doble. En el caso de volúmenes, asegúrese de que tanto la región R como la superficie sobre la región posean simetrías correspondientes. Vea el problema 19 en la sección “Desarrolle su competencia 5.3”.
- iii) Antes de intentar evaluar la integral doble, trate *siempre* de dibujar una imagen exacta de la región R de integración.

5.3**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-15.

Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe la integral doble sobre la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Elija el orden de integración más conveniente.

1. $\iint_R x^3 y^2 \, dA; \quad y = x, y = 0, x = 1$

2. $\iint_R (x + 1) \, dA; \quad y = x, x + y = 4, x = 0$

3. $\iint_R (2x + 4y + 1) \, dA; \quad y = x^2, y = x^3$

4. $\iint_R xe^y \, dA; \quad R$ la misma que en el problema 1

5. $\iint_R 2xy \, dA; \quad y = x^3, y = 8, x = 0$

6. $\iint_R \frac{x}{\sqrt{y}} \, dA; \quad y = x^2 + 1, y = 3 - x^2$

7. $\iint_R \frac{y}{1 + xy} \, dA; \quad y = 0, y = 1, x = 0, x = 1$

8. $\iint_R \operatorname{sen} \frac{\pi x}{y} \, dA; \quad x = y^2, x = 0, y = 1, y = 2$

9. $\iint_R \sqrt{x^2 + 1} \, dA; \quad x = y, x = -y, x = \sqrt{3}$

10. $\iint_R x \, dA; \quad y = \tan^{-1} x, y = 0, x = 1$

En los problemas 11 y 12, evalúe $\iint_R (x + y) \, dA$ para la región dada R .

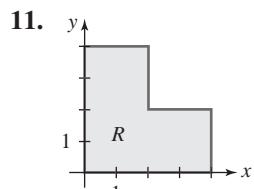


FIGURA 5.3.8 Región de integración del problema 11

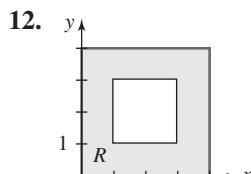


FIGURA 5.3.9 Región de integración del problema 12

En los problemas 13-18, emplee la integral doble para calcular el área de la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones que se indican.

13. $y = -x, y = 2x - x^2$

14. $x = y^2, x = 2 - y^2$

15. $y = e^x, y = \ln x, x = 1, x = 4$

16. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x + y = 4$

17. $y = -2x + 3, y = x^3, x = -2$

18. $y = -x^2 + 3x, y = -2x + 4, y = 0, 0 \leq x \leq 2$

19. Considere el sólido acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4, z = 4 - y$ y $z = 0$ que se muestran en la FIGURA 5.3.10. Elija y evalúe la integral correcta que represente al volumen V del sólido.

a) $4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y) \, dy \, dx$

b) $2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y) \, dy \, dx$

c) $2 \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y) \, dx \, dy$

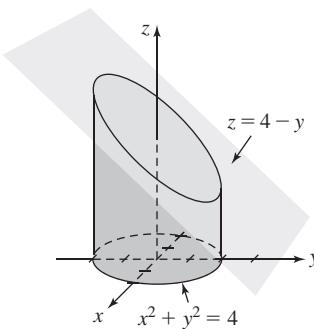


FIGURA 5.3.10 Sólido del problema 19

20. El sólido acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$ recibe el nombre de **bicilindro**. Un octavo del sólido se muestra en la FIGURA 5.3.11. Elija y evalúe la integral correcta correspondiente al volumen V del bicilindro.

a) $4 \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (r^2 - y^2)^{1/2} \, dy \, dx$

b) $8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} (r^2 - y^2)^{1/2} \, dx \, dy$

c) $8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (r^2 - x^2)^{1/2} \, dy \, dx$

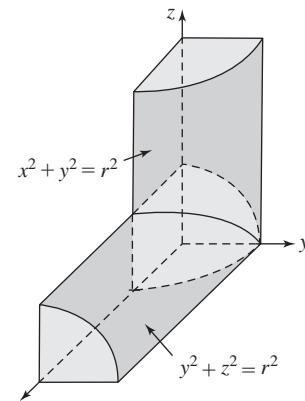


FIGURA 5.3.11 Sólido del problema 20

En los problemas 21-30, determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

21. $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
22. $z = 4 - y^2, x = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
23. $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
24. $y = x^2, y + z = 3, z = 0$
25. $z = 1 + x^2 + y^2, 3x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
26. $z = x + y, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
27. $yz = 6, x = 0, x = 5, y = 1, y = 6, z = 0$
28. $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2, z = 0$
29. $z = 4 - y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$
30. $z = 1 - x^2, z = 1 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

Si $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ para todo (x, y) en una región R , entonces el volumen del sólido acotado por las dos superficies sobre R es

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dA.$$

En los problemas 31-34, determine el volumen acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

31. $x + 2y + z = 4, z = x + y, x = 0, y = 0$, primer octante
32. $z = x^2 + y^2, z = 9$
33. $z = x^2, z = -x + 2, x = 0, y = 0, y = 5$, primer octante
34. $2z = 4 - x^2 - y^2, z = 2 - y$

En los problemas 35-40, invierta el orden de integración.

35. $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$
36. $\int_{-5}^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy$
37. $\int_0^3 \int_1^{e^x} f(x, y) dy dx$
38. $\int_0^2 \int_{y/2}^{3-y} f(x, y) dx dy$
39. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx$
40. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx dy$

En los problemas 41-46, evalúe la integral iterada que se indica invirtiendo el orden de integración.

41. $\int_0^1 \int_x^1 x^2 \sqrt{1+y^4} dy dx$
42. $\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{-y/x} dx dy$
43. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos \sqrt{x^3} dx dy$
44. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$

$$45. \int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+y^4} dy dx \quad 46. \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1} dx dy$$

El **valor promedio** f_{pro} de una función continua $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy se define como

$$f_{\text{pro}} = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y) dA, \quad (3)$$

donde A es el área de R . En los problemas 47 y 48, determine f_{pro} para la función y la región R dadas.

47. $f(x, y) = xy; R$ definida mediante $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$
48. $f(x, y) = 9 - x^2 - 3y^2; R$ acotada mediante la elipse $x^2 + 3y^2 = 9$

☰ Piense en ello

49. De (3) podemos escribir $\iint_R f(x, y) dA = f_{\text{pro}} \cdot A$, donde A es el área de R . Discuta acerca de la interpretación geométrica de este resultado en el caso $f(x, y) > 0$ sobre R .
50. Sea R una región rectangular acotada por las rectas $x = a, x = b, y = c$ y $y = d$, donde $a < b, c < d$.
 - a) Muestre que

$$\begin{aligned} \iint_R \cos 2\pi(x+y) dA &= \frac{1}{4\pi^2} (S_1S_2 - C_1C_2) \\ \iint_R \sin 2\pi(x+y) dA &= -\frac{1}{4\pi^2} (C_1S_2 + S_1C_2), \end{aligned}$$

donde

$$S_1 = \sin 2\pi b - \sin 2\pi a, \quad S_2 = \sin 2\pi d - \sin 2\pi c \\ C_1 = \cos 2\pi b - \cos 2\pi a, \quad C_2 = \cos 2\pi d - \cos 2\pi c.$$

- b) Muestre que si al menos uno de los dos lados perpendiculares de R tiene una longitud entera, entonces

$$\iint_R \cos 2\pi(x+y) dA = 0 \quad y \quad \iint_R \sin 2\pi(x+y) dA = 0.$$

- c) Inversamente, muestre que si

$$\iint_R \cos 2\pi(x+y) dA = 0 \quad y \quad \iint_R \sin 2\pi(x+y) dA = 0,$$

entonces al menos uno de los dos lados perpendiculares de R debe tener longitud entera. [Sugerencia: Considere $0 = (S_1S_2 - C_1C_2)^2 + (C_1S_2 + S_1C_2)^2$.]

51. Sea R una región rectangular que se ha dividido en n subregiones rectangulares R_1, R_2, \dots, R_n que no se traslanan y cuyos lados son todos paralelos a los lados horizontal y vertical de R . Vea la FIGURA 5.3.12. Suponga que cada rectángulo interior tiene la propiedad de que uno de sus dos lados perpendiculares tiene longitud entera. Muestre que R tiene la misma propiedad. [Sugerencia: Recurra al problema 50 y al teorema 5.1.1iii].]

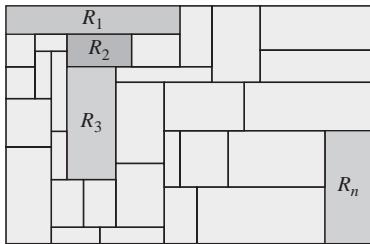


FIGURA 5.3.12 Región rectangular del problema 51

≡ Proyectos

52. El sólido acotado por la intersección de tres cilindros $x^2 + y^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = r^2$ y $x^2 + z^2 = r^2$ recibe el nombre de **tricilindro**. Vea la FIGURA 5.3.13. Realice una búsqueda en internet y encuentre una figura del sólido real. Determine el volumen del sólido.

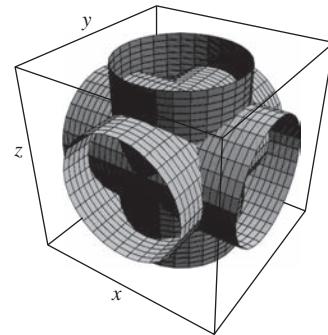


FIGURA 5.3.13 Tres cilindros del mismo radio se intersecan en ángulos rectos en el problema 52

5.4 Centro de masa y momentos

■ Introducción En la sección 6.10 vimos que si ρ es una densidad (masa por área unitaria), entonces la masa de una mancha de materia, o lámina, bidimensional que coincide con una región acotada por las gráficas de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho \Delta A_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho f(x_k^*) \Delta x_k = \int_a^b \rho f(x) dx. \quad (1)$$

La densidad ρ en (1) puede ser una función de x ; cuando $\rho = \text{constante}$ se dice que la lámina es homogénea.

Veremos después que si la densidad de ρ es una función de dos variables, entonces la masa m de una lámina está dada por una integral doble.

■ Láminas con densidad variable: centro de masa Si una lámina que corresponde a una región R en el plano xy tiene una densidad variable $\rho(x, y)$ (unidades de masa por área unitaria), donde ρ es no negativa y continua sobre R , entonces de manera análoga a (1) definimos su **masa** m por la integral doble

$$m = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \quad \text{o} \quad m = \iint_R \rho(x, y) dA. \quad (2)$$

Como en la sección 6.10, definimos las coordenadas del **centro de masa** de la lámina por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \quad (3)$$

donde

$$M_y = \iint_R x \rho(x, y) dA \quad \text{y} \quad M_x = \iint_R y \rho(x, y) dA \quad (4)$$

son los **momentos** de la lámina alrededor de los ejes y y x , respectivamente. El centro de masa es el punto donde consideramos que se concentra toda la masa de la lámina. Si $\rho(x, y)$ es una constante, se dice que la lámina será homogénea y su centro de masa recibe el nombre de **centroide** de la lámina.

EJEMPLO 1 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región R en el primer cuadrante que está acotado por las gráficas de $y = \sin x$ y $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$. Determine su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = y$.

Solución De la FIGURA 5.4.1 vemos que

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_R y \, dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} y \, dy \, dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} y^2 \Big|_{\sin x}^{\cos x} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_R xy \, dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} xy \, dy \, dx \\
 &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{\sin x}^{\cos x} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x \cos 2x \, dx \quad \leftarrow \text{integración por partes} \\
 &= \left(\frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{16}(\pi - 2).
 \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_R y^2 \, dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} y^2 \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} (\cos^3 x - \sin^3 x) \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} [\cos x(1 - \sin^2 x) - \sin x(1 - \cos^2 x)] \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{18}(5\sqrt{2} - 4).
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, de (3), las coordenadas del centro de masa de la lámina son

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{16}(\pi - 2)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(\pi - 2), \\
 \bar{y} &= \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{18}(5\sqrt{2} - 4)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}(10\sqrt{2} - 8).
 \end{aligned}$$

Las coordenadas aproximadas del centro de masa son (0.29, 0.68).

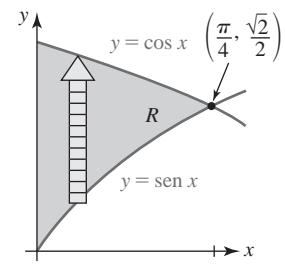


FIGURA 5.4.1 Lámina del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región R acotada por la gráfica de la elipse $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, $0 \leq y \leq 4$ y $y = 0$. Encuentre su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = |x|y$.

Solución De la FIGURA 5.4.2 vemos que la región es simétrica con respecto al eje y . Además, puesto que $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$, la densidad ρ es simétrica alrededor de este eje. De esta manera,

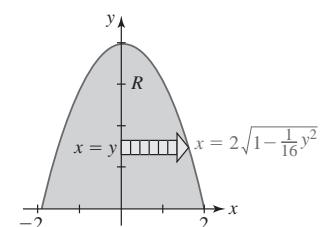


FIGURA 5.4.2 Lámina en el ejemplo 2

la coordenada y del centro de masa debe estar sobre el eje de simetría, y por ello tenemos $\bar{x} = 0$. Utilizando simetría, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \iint_R |x|y \, dA = 2 \int_0^4 \int_{-\sqrt{1-y^2/16}}^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^4 x^2 y \Big|_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} \, dy \\ &= 4 \int_0^4 \left(y - \frac{1}{16}y^3 \right) \, dy \\ &= 4 \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{64}y^4 \right) \Big|_0^4 = 16. \end{aligned}$$

De modo similar,

$$M_x = \iint_R |x|y^2 \, dA = 2 \int_0^4 \int_{-\sqrt{1-y^2/16}}^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy^2 \, dx \, dy = \frac{512}{15}.$$

De (3)

$$\bar{y} = \frac{\frac{512}{15}}{\frac{16}{15}} = \frac{32}{15}.$$

Las coordenadas del centro de masa son $(0, \frac{32}{15})$.

No concluimos del ejemplo 2 que el centro de masa debe estar siempre sobre un eje de simetría de una lámina. Tenga en mente que la función de densidad $\rho(x, y)$ también debe ser simétrica con respecto a ese eje.

I Momentos de inercia Las integrales M_x y M_y en (4) reciben el nombre de **primeros momentos** de una lámina alrededor del eje x y el eje y , respectivamente. Los llamados **segundos momentos** de una lámina o **momento de inercia** en torno a los ejes x y y son, a su vez, definidos por las integrales dobles

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) \, dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) \, dA. \quad (5)$$

Un momento de inercia es el equivalente rotacional de la masa. Para el movimiento translacional, la energía cinética está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es la masa y v es la velocidad lineal. La energía cinética de una partícula de masa m que rota a una distancia r del eje es $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$, donde $I = mr^2$ es su momento de inercia alrededor del eje de rotación y ω es su velocidad angular.

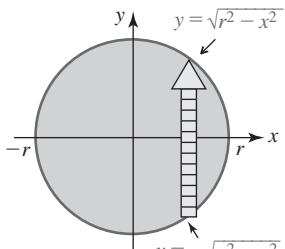


FIGURA 5.4.3 Disco del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Momento de inercia

Encuentre el momento de inercia alrededor del eje y del delgado disco homogéneo de masa m que se presenta en la FIGURA 5.4.3.

Solución Puesto que el disco es homogéneo, su densidad es la constante $\rho(x, y) = m/\pi r^2$. Por consiguiente, de (5),

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_R x^2 \rho(x, y) \, dA = \iint_R x^2 \left(\frac{m}{\pi r^2} \right) \, dA \\ &= \frac{m}{\pi r^2} \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2 \, dy \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2m}{\pi r^2} \int_{-r}^r x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx \quad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica} \\
&= \frac{2mr^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\
&= \frac{mr^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta \quad \leftarrow \text{fórmula de mitad de ángulo} \\
&= \frac{mr^2}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4} mr^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

■ Radio de giro El radio de giro de una lámina de masa m y el momento de inercia I alrededor de un eje se definen por medio de

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}. \quad (6)$$

Puesto que (6) implica que $I = mR_g^2$, el radio de giro se interpreta como la distancia radial que la lámina, considerada como una masa puntual, puede girar alrededor del eje sin cambiar la inercia rotacional del cuerpo. En el ejemplo 3, el radio de giro es $R_g = \sqrt{I_y/m} = \sqrt{(\frac{1}{4}mr^2)/m} = \frac{1}{2}r$.

5.4

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-15.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3; \rho(x, y) = xy$
2. $x = 0, y = 0, 2x + y = 4; \rho(x, y) = x^2$
3. $y = x, x + y = 6, y = 0; \rho(x, y) = 2y$
4. $y = |x|, y = 3; \rho(x, y) = x^2 + y^2$
5. $y = x^2, x = 1, y = 0; \rho(x, y) = x + y$
6. $x = y^2, x = 4; \rho(x, y) = y + 5$
7. $y = 1 - x^2, y = 0; \text{ densidad } \rho \text{ en un punto } P \text{ directamente proporcional a la distancia desde el eje } x.$
8. $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0; \text{ densidad } \rho \text{ en el punto } P \text{ directamente proporcional a la distancia desde el eje } y.$
9. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0; \rho(x, y) = y^3$
10. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0; \rho(x, y) = x^2$

En los problemas 11-14, determine el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

11. $x = y - y^2, x = 0; \rho(x, y) = 2x$
12. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \rho(x, y) = x^2$
13. $y = \cos x, -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y = 0; \rho(x, y) = k \text{ (constante)}$
14. $y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, y = 0, \text{ primer cuadrante}; \rho(x, y) = y$

En los problemas 15-18, encuentre el momento de inercia alrededor del eje y de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

15. $y = x^2, x = 0, y = 4, \text{ primer cuadrante}; \rho(x, y) = y$
16. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \rho(x, y) = x^2$

17. $y = x, y = 0, y = 1, x = 3; \rho(x, y) = 4x + 3y$
18. Misma R y densidad que en el problema 7.

En los problemas 19 y 20, encuentre el radio de giro alrededor del eje indicado de la lámina que tiene la forma y densidad dadas.

19. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, x = 0; \rho(x, y) = x; \text{ eje } y$
20. $x + y = a, a > 0, x = 0, y = 0; \rho(x, y) = k \text{ (constante); eje } x.$
21. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la gráfica de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Si la densidad es $\rho(x, y) = 1$, encuentre:
 - a) el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina,
 - b) el momento de inercia alrededor del eje y de la lámina,
 - c) el radio de giro alrededor del eje x [sugerencia: El área de la elipse es πab],
 - d) el radio de giro alrededor del eje y .

22. La sección transversal de un perfil aerodinámico experimental es la lámina que se muestra en la FIGURA 5.4.4. El arco ABC es elíptico, en tanto que los dos arcos AD y CD son parabólicos. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina bajo la suposición de que la densidad es $\rho(x, y) = 1$.

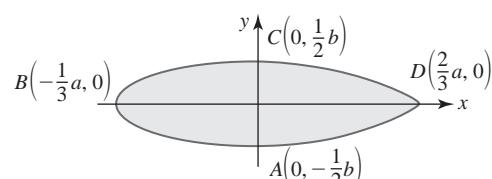


FIGURA 5.4.4 Perfil aerodinámico del problema 22

En los problemas 23-26, encuentre el momento de inercia polar I_0 de la lámina que tiene la forma y la densidad dadas. El **momento de inercia polar** de una lámina con respecto al origen se define como

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA = I_x + I_y.$$

23. $x + y = a$, $a > 0$, $x = 0$, $y = 0$; $\rho(x, y) = k$ (constante)
24. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; $\rho(x, y) = x^2$. [Sugerencia: Vea los problemas 12 y 16.]

25. $x = y^2 + 2$, $x = 6 - y^2$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir del origen.

26. $y = x$, $y = 0$, $y = 3$, $x = 4$; $\rho(x, y) = k$ (constante)

27. Encuentre el radio de giro del problema 23.

28. Demuestre que el momento de inercia polar con respecto al origen alrededor del centro de una delgada placa rectangular homogénea de masa m , con ancho w y longitud l es $I_0 = \frac{1}{12}m(l^2 + w^2)$.

5.5 Integrales dobles en coordenadas polares

■ Introducción Suponga que R es una región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$, $r = g_2(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, y que f es una función de r y θ que es continua sobre R . Con el fin de definir la integral doble de f sobre R , empleamos rayos y círculos concéntricos para dividir la región en una retícula de “rectángulos polares” o subregiones R_k . Vea la FIGURA 5.5.1a) y b). El área ΔA_k de una subregión típica R_k , que se muestra en la figura 5.5.1c), es la diferencia de áreas de dos sectores circulares:

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \frac{1}{2}r_{k+1}^2\Delta\theta_k - \frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}(r_{k+1}^2 - r_k^2)\Delta\theta_k \\ &= \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)(r_{k+1} - r_k)\Delta\theta_k = r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k,\end{aligned}$$

donde $\Delta r_k = r_{k+1} - r_k$ y r_k^* denotan el radio promedio $\frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)$.

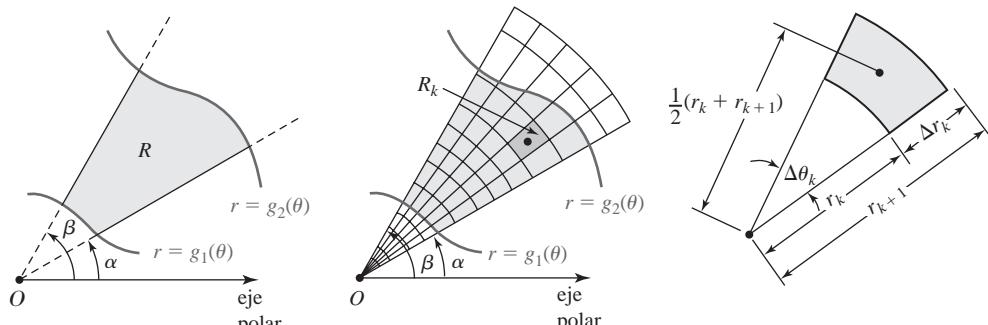


FIGURA 5.5.1 Partición de R usando coordenadas polares

Eliriendo un punto muestra (r_k^*, θ_k^*) en cada R_k , la integral doble de f sobre R es

$$\lim_{\|P\|\rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(r_k^*, \theta_k^*) r_k^* \Delta r_k \Delta \theta_k = \iint_R f(r, \theta) dA.$$

La integral doble se evalúa entonces por medio de la integral iterada

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (1)$$

Por otro lado, si la región R es como se indica en la FIGURA 5.5.2, la integral doble de f sobre R es entonces

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr. \quad (2)$$

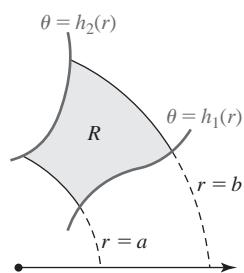


FIGURA 5.5.2 Región R de integración en (2)

EJEMPLO 1 Centro de masa

Encuentre el centro de masa de la lámina que corresponde a la región acotada por la curva llamada pétalo de rosa $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ en el primer cuadrante si la densidad en el punto P en la lámina es directamente proporcional a la distancia desde el origen polar.

Solución Al variar θ de 0 a $\pi/2$, obtenemos la gráfica de la FIGURA 5.5.3. En este caso, la distancia desde el origen polar es $d(0, P) = |r|$. Por consiguiente, la densidad de la lámina es $\rho(r, \theta) = k|r|$, donde k es una constante de proporcionalidad. De (2) de la sección 5.4, tenemos

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k|r| dA = k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} 2\theta} (r)r dr d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{2 \operatorname{sen} 2\theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3} k \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} k \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \operatorname{sen} 2\theta d\theta \quad \leftarrow \text{identidad trigonométrica} \\ &= \frac{8}{3} k \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta) \operatorname{sen} 2\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3} k \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{6} \cos^3 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{9} k. \end{aligned}$$

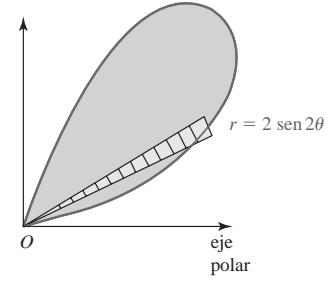


FIGURA 5.5.3 Lámina del ejemplo 1

Puesto que $x = r \cos \theta$, podemos escribir el primer momento $M_y = k \iint_R x|r| dA$ como

$$\begin{aligned} M_y &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} 2\theta} r^3 \cos \theta dr d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} r^4 \cos \theta \Big|_0^{2 \operatorname{sen} 2\theta} d\theta \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} 2\theta)^4 \cos \theta d\theta \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\ &= 4k \int_0^{\pi/2} (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^4 \cos \theta d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \theta \cos^5 \theta d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^2 \cos \theta d\theta \\ &= 64k \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^4 \theta - 2 \operatorname{sen}^6 \theta + \operatorname{sen}^8 \theta) \cos \theta d\theta \\ &= 64k \left(\frac{1}{5} \operatorname{sen}^5 \theta - \frac{2}{7} \operatorname{sen}^7 \theta + \frac{1}{9} \operatorname{sen}^9 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{512}{315} k. \end{aligned}$$

De manera similar, utilizando $y = r \operatorname{sen} \theta$, encontramos

$$M_x = k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \operatorname{sen} 2\theta} r^3 \operatorname{sen} \theta dr d\theta = \frac{512}{315} k.$$

Aquí las coordenadas rectangulares del centro de masa son

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{512}{315} k}{\frac{16}{9} k} = \frac{32}{35}.$$

En el ejemplo 1 podríamos haber señalado el hecho de que $M_x = M_y$ y, consecuentemente, $\bar{x} = \bar{y}$ a partir de que la lámina y la función de densidad son simétricas alrededor del rayo $\theta = \pi/4$.

Cambio de variables: coordenadas rectangulares a polares En algunos casos una integral doble $\iint_R f(x, y) dA$ que es difícil o incluso imposible de evaluar utilizando coordenadas rectangulares puede evaluarse fácilmente cuando se recurre a un cambio de variables. Si suponemos que f es continua sobre la región R , y si R puede describirse en coordenadas polares como $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \quad (3)$$

La ecuación (3) es particularmente útil cuando f contiene la expresión $x^2 + y^2$, puesto que, en coordenadas polares, no podemos escribir

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad y \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

EJEMPLO 2 Cambio de variables

Use coordenadas polares para evaluar

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2} dy dx.$$

Solución A partir de $x \leq y \leq \sqrt{8-x^2}$, $0 \leq x \leq 2$, hemos dibujado la región R de integración en la FIGURA 5.5.4. Puesto que $x^2 + y^2 = r^2$, la descripción polar de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ es $r = \sqrt{8}$. En consecuencia, en coordenadas polares, la región de R está dada por $0 \leq r \leq \sqrt{8}$, $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$. De acuerdo con $1/(5+x^2+y^2) = 1/(5+r^2)$, la integral original se convierte en

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2} dy dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5+r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5+r^2} (2r dr) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\ln(5+r^2) \right]_0^{\sqrt{8}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\ln 13 - \ln 5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\ln 13 - \ln 5) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \ln \frac{13}{5}. \end{aligned}$$

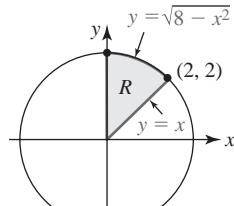


FIGURA 5.5.4 Región R de integración del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Volumen

Encuentre el volumen del sólido que está bajo el hemisferio $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ y sobre la región acotada por la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 = y$.

Solución De la FIGURA 5.5.5 vemos que

$$V = \iint_R \sqrt{1-x^2-y^2} dA.$$

En coordenadas polares las ecuaciones del hemisferio y la circunferencia se vuelven, respectivamente, $z = \sqrt{1-r^2}$ y $r = \sin \theta$. Ahora, usando simetría tenemos

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \sqrt{1-r^2} dA = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} (1-r^2)^{1/2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} \right]_0^{\sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

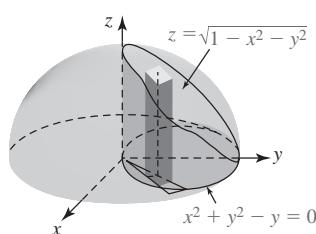


FIGURA 5.5.5 Sólido dentro de un hemisferio del ejemplo 3

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \sin^2 \theta)^{3/2}] d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (\cos^2 \theta)^{3/2}] d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3 \theta) d\theta \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \sin^2 \theta)\cos \theta] d\theta \\
&= \frac{2}{3} \left(\theta - \sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\pi - \frac{4}{9} \approx 0.60. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Área Advierta que en (1) si $f(r, \theta) = 1$, entonces el **área** de la región R en la figura 5.5.1a) está dada por

$$A = \iint_R dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r dr d\theta. \quad (4)$$

La misma observación se cumple para (2) y la figura 5.5.2 cuando $f(r, \theta) = 1$.

\iint_R NOTAS DESDE EL AULA

Se le pide reexaminar el ejemplo 3. La gráfica de la circunferencia $r = \sin \theta$ se obtiene al variar θ de 0 a π . Sin embargo, efectúe la integración iterada

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} (1 - r^2)^{1/2} r dr d\theta$$

y vea si obtiene la respuesta *incorrecta* $\pi/3$. ¿Dónde está el error?

5.5

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-15.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-4, emplee la integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares que se indican.

- 1. $r = 3 + 3 \sin \theta$
- 2. $r = 2 + \cos \theta$
- 3. $r = 2 \sin \theta, r = 1$, área común
- 4. $r = 8 \sin 4\theta$, un pétalo

En los problemas 5-10, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

- 5. Un pétalo de $r = 5 \cos 3\theta, z = 0, z = 4$
- 6. $x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = 0$
- 7. Entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9, z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, z = 0$
- 8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 25, z = 0$
- 9. $r = 1 + \cos \theta, z = y, z = 0$, primer octante
- 10. $r = \cos \theta, z = 2 + x^2 + y^2, z = 0$

En los problemas 11-16, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad dadas.

- 11. $r = 1, r = 3, x = 0, y = 0$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)
- 12. $r = \cos \theta$; densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el origen.
- 13. $y = \sqrt{3}x, y = 0, x = 3; \rho(r, \theta) = r^2$
- 14. $r = 4 \cos 2\theta$, pétalo sobre el eje polar; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)
- 15. Fuera de $r = 2$ y dentro de $r = 2 + 2 \cos \theta, y = 0$, primer cuadrante; densidad ρ en el punto P inversamente proporcional a la distancia desde el origen.
- 16. $r = 2 + 2 \cos \theta, y = 0$, primero y segundo cuadrantes; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas 17-20, encuentre el momento de inercia indicado de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

- 17. $r = a; \rho(r, \theta) = k$ (constante); I_x

18. $r = a; \rho(r, \theta) = \frac{1}{1 + r^4}; I_x$
19. Fuera de $r = a$ y dentro de $r = 2a \cos \theta$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el origen; I_y
20. Fuera de $r = 1$ y dentro de $r = 2 \sin 2\theta$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = \sec^2 \theta; I_y$

En los problemas 21-24, determine el **momento polar de inercia** $I_0 = \iint_R r^2 \rho(r, \theta) dA = I_x + I_y$ de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

21. $r = a; \rho(r, \theta) = k$ (constante). [Sugerencia: Use el problema 17 y el hecho de que $I_x = I_y$.]
22. $r = \theta, 0 \leq \theta \leq \pi, y = 0$; densidad ρ en un punto P proporcional a la distancia desde el origen.
23. $r\theta = 1, \frac{1}{3} \leq \theta \leq 1, r = 1, r = 3, y = 0$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional a la distancia desde el origen. [Sugerencia: Integre primero con respecto a θ .]
24. $r = 2a \cos \theta; \rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas 25-32, evalúe la integral iterada que se indica cambiando a coordenadas polares.

25. $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

26. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$

27. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$

28. $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy dx$

29. $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy dx$

30. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} (1 - x^2 - y^2) dx dy$

31. $\int_{-5}^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} (4x + 3y) dy dx$

32. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$

33. La integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ es importante en la teoría de probabilidad, estadística y otras áreas de las matemáticas aplicadas. Si I denota la integral, entonces debido a que la variable de integración es una variable sustituta tenemos

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \quad \text{e} \quad I = \int_0^\infty e^{-y^2} dy.$$

En vista del problema 53 de los ejercicios 5.2 se tiene

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Emplee coordenadas polares para evaluar la última integral. Calcule el valor de I .

34. Evalúe $\iint_R (x + y) dA$ sobre la región que se muestra en la FIGURA 5.5.6.

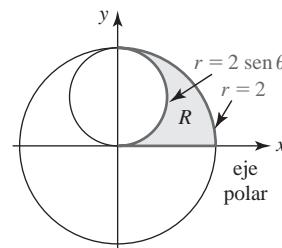


FIGURA 5.5.6 Región R del problema 34

■ Aplicaciones

35. El tanque de hidrógeno líquido en el transbordador espacial tiene la forma de un cilindro circular recto con una tapa semielipsoidal en cada extremo. El radio de la parte cilíndrica del tanque es de 4.2 m. Determine el volumen del tanque que se muestra en la FIGURA 5.5.7.

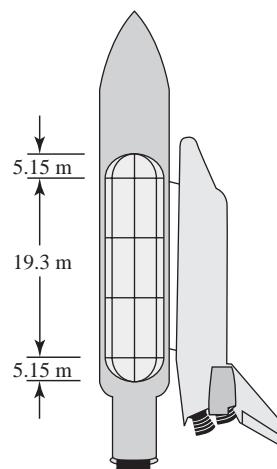


FIGURA 5.5.7 Transbordador espacial del problema 35

36. En algunos estudios de la diseminación de enfermedades de plantas, el número de infecciones por área unitaria como una función de la distancia desde la planta fuente infectada se describe por medio de una fórmula del tipo

$$I(r) = a(r + c)^{-b},$$

donde $I(r)$ es el número de infecciones por unidad de área a una distancia radial r de la planta fuente infectada, y a, b y c son parámetros (positivos) que dependen de la enfermedad.

- a) Deduzca una fórmula para el número total de infecciones dentro de un círculo de radio R centrado en la planta fuente infectada; esto es, evalúe $\iint_C I(r) dA$, donde C es una región circular de radio R centrada en el origen. Suponga que el parámetro b no es 1 o 2.
- b) Muestre que si $b > 2$, entonces el resultado en el inciso a) tiende a un límite finito cuando $R \rightarrow \infty$.
- c) Para la roya del maíz común, el número de infecciones por metro cuadrado se modela como

$$I(r) = 68.585(r + 0.248)^{-2.351},$$

donde r se mide en metros. Encuentre el número total de infecciones.

37. Las densidades de población urbana decaen exponencialmente con la distancia desde el distrito comercial central (DCC); esto es,

$$D(r) = D_0 e^{-r/d},$$

donde $D(r)$ es la densidad de población a una distancia radial r desde el DCC, D_0 es la densidad en el centro y d es un parámetro.

- a) Utilizando la fórmula $P = \iint_C D(r) dA$, encuentre una expresión para la población total que vive dentro de una región circular C de radio R del DCC.

- b) Empleando

$$\frac{\iint_C r D(r) dA}{\iint_C D(r) dA}$$

determine una expresión para los viajes promedio (distancia recorrida) al DCC de la gente que vive dentro de la región C .

- c) Utilizando los resultados de los incisos a) y b), encuentre la población total y los viajes promedio cuando $R \rightarrow \infty$.

38. Se argumenta que el costo, en términos de tiempo, dinero o esfuerzo, de colectar o distribuir material a o desde una localidad es proporcional a la integral $\iint_R r dA$, donde R es la región que se cubre y r denota la distancia al sitio de colección/distribución. Suponga, por ejemplo, que un quitanieves se envía a limpiar un área de estacionamiento circular de diámetro D . Muestre que quitar la nieve y acumularla en el perímetro es aproximadamente 70% más costoso que acumular toda la nieve en el centro del estacionamiento. [Sugerencia: Establezca por separado la integral para cada caso, empleando una ecuación de coordenadas polares para el círculo con el sitio de colección en el origen.]

5.6 Área de una superficie

- Introducción** La longitud de arco de la gráfica $y = f(x)$ desde $x = a$ a $x = b$ está dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (1)$$

El problema en tres dimensiones, que es la contraparte del problema de la longitud de arco, es encontrar el área $A(S)$ de la porción de la superficie dada por la función $z = f(x, y)$ que tiene primeras derivadas parciales continuas sobre una región cerrada R en el plano xy . Una superficie S de este tipo se dice que es **continua**.

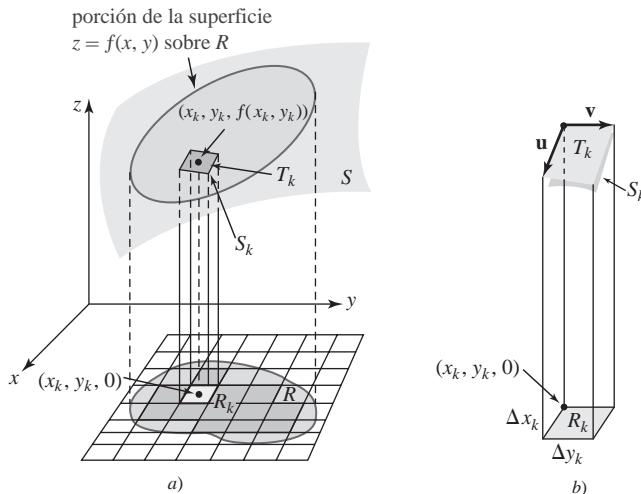
■ Construcción de una integral Suponga, como se muestra en la FIGURA 5.6.1a), que una partición interior P de R se forma utilizando líneas paralelas a los ejes x y y . La partición P consiste entonces de n elementos rectangulares R_k de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ que yacen por completo dentro de R . Deje que $(x_k, y_k, 0)$ denote cualquier punto en un elemento R_k . Como se advierte en la figura 5.6.1a), al proyectar los lados de R_k hacia arriba, determinamos dos cantidades: una porción del parche S_k de la superficie y una porción de T_k de un plano tangente en $(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Parece razonable suponer que cuando R_k es pequeño, el área ΔT_k de T_k es aproximadamente la misma que el área ΔS_k del parche S_k .

Para determinar el área de T_k vamos a elegir $(x_k, y_k, 0)$ en una esquina de R_k como se muestra en la figura 5.6.1b). Los vectores indicados \mathbf{u} y \mathbf{v} , los cuales forman dos lados de T_k , están dados por

$$\mathbf{u} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k) \Delta x_k \mathbf{k} \quad y \quad \mathbf{v} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k) \Delta y_k \mathbf{k},$$

donde $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$ son las pendientes de las rectas que contienen a \mathbf{u} y \mathbf{v} , respectivamente. En este caso sabemos que $\Delta T_k = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k) \Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k) \Delta y_k \end{vmatrix} \\ &= [-f_x(x_k, y_k) \mathbf{i} - f_y(x_k, y_k) \mathbf{j} + \mathbf{k}] \Delta x_k \Delta y_k. \end{aligned}$$

FIGURA 5.6.1 Superficie en a); ampliación de R_k , S_k y T_k en b)

En otras palabras,

$$\Delta T_k = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1} \Delta x_k \Delta y_k.$$

En consecuencia, el área $A(S)$ es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2} \Delta x_k \Delta y_k.$$

Al tomar el límite de la suma anterior cuando $\|P\| \rightarrow 0$ se llega a la siguiente definición.

Definición 5.6.1 Área de la superficie

Sea f una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas sobre una región cerrada R . Entonces el **área de la superficie** sobre R está dada por

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA. \quad (2)$$

Nota: Podría haberse adivinado la forma (2) extendiendo naturalmente la estructura de una variable de (1) a dos variables.

EJEMPLO 1 Empleo de (2)

Determine el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está sobre el plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

Solución Si se define $z = f(x, y)$ por $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, entonces

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad y \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\text{y por ello} \quad 1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Por consiguiente, (2) es

$$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA,$$

donde R se indica en la FIGURA 5.6.2. Para evaluar esta integral doble, cambiamos a coordenadas polares. El círculo $x^2 + y^2 = b^2$ se convierte en $r = b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} A(S) &= a \int_0^{2\pi} \int_0^b (a^2 - r^2)^{-1/2} r \, dr \, d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} -(a^2 - r^2)^{-1/2} \Big|_0^b \, d\theta \\ &= a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \int_0^{2\pi} \, d\theta \\ &= 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}). \end{aligned}$$

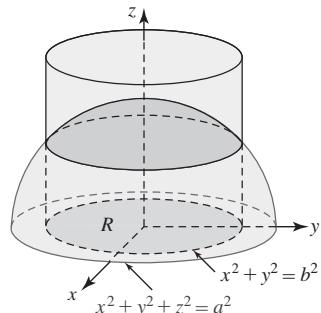


FIGURA 5.6.2 Superficie del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Empleo de (2)

Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Solución El área de superficie en cuestión consiste en las dos regiones sombreadas y oscuras de la superficie (arriba y debajo del plano xy) en la FIGURA 5.6.3. Como en el ejemplo 1, (2) se simplifica en

$$A(S) = 2 \iint_R \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \, dA,$$

donde R es la región acotada por la gráfica de $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. El factor adicional de (2) en la integral surge del uso de la simetría. En este caso, en coordenadas polares la frontera de R es simplemente $r = 2 \cos \theta$. De tal modo,

$$\begin{aligned} A(S) &= 4 \int_0^{\pi} \int_0^{2 \cos \theta} (4 - r^2)^{-1/2} r \, dr \, d\theta \\ &= 8(\pi - 2) \approx 9.13. \end{aligned}$$

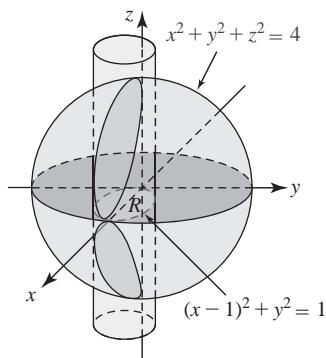


FIGURA 5.6.3 Superficie del ejemplo 2

Diferencial del área de la superficie

La función

$$dS = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA \quad (3)$$

recibe el nombre de **diferencial del área de la superficie**.

5.6

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-16.

Fundamentos

- Encuentre el área de la superficie de aquella porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está acotada por los planos de coordenadas en el primer octante.
- Determine el área de la superficie de aquella porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está arriba de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica $r = \operatorname{sen} 2\theta$.
- Determine el área de la superficie de aquella porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ que está sobre la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 5$.
- Encuentre el área de la superficie de aquella porción del parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 2$.
- Determine el área de la superficie de aquella porción del parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está arriba del plano xy .

- Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que están dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
- Encuentre el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está arriba de la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 0$, $y = 0$, $4x^2 + y^2 = 25$. [Sugerencia: Integre primero con respecto a x .]
- Encuentre el área de la superficie de aquella porción de la gráfica de $z = x^2 - y^2$ que está en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
- Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.
- Encuentre el área de la superficie de las porciones del cono $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Vea la FIGURA 5.6.4.

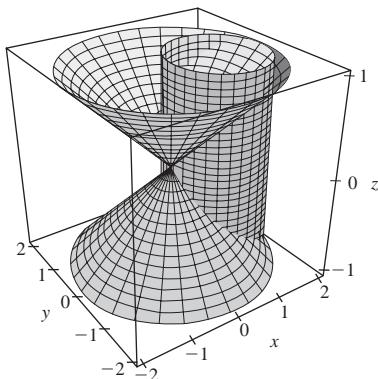


FIGURA 5.6.4 Cono de intersección y cilindro del problema 10

11. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [Sugerencia: Vea la figura 5.3.11.]
12. Emplee el resultado dado en el ejemplo 1 para demostrar que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$. [Sugerencia: Considere el límite cuando $b \rightarrow a$.]
13. Determine el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está acotada entre $y = c_1$ y $y = c_2$, $0 < c_1 < c_2 < a$. [Sugerencia: Emplee coordenadas polares en el plano xz.]
14. Demuestre que el área que se encontró en el problema 13 es la misma que el área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ entre $y = c_1$ y $y = c_2$.

Piense en ello

15. Como se ilustra en la FIGURA 5.6.5, una esfera de radio 1 tiene su centro sobre la superficie de una esfera de radio $a > 1$. Determine el área de la superficie de esa porción de la esfera mayor que es cortada por la esfera más pequeña.

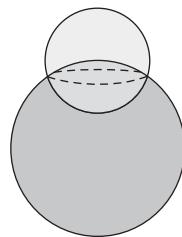


FIGURA 5.6.5 Esferas de intersección del problema 15

16. Sobre la superficie de un globo o, más precisamente, sobre la superficie de la Tierra, las fronteras de los estados de Colorado y Wyoming son ambas “rectángulos esféricos”. (En este problema suponemos que la Tierra es una esfera perfecta.) Colorado está acotado por las líneas de longitud 102°O y 109°O y las líneas de latitud 37°N y 41°N . Wyoming está acotado por las longitudes 104°O y 111°O y las latitudes 41°N y 45°N . Vea la FIGURA 5.6.6.
 - a) Sin calcular explícitamente sus áreas, determine cuál de los estados es más grande y explique por qué.
 - b) ¿En qué porcentaje Wyoming es más grande (o más pequeño) que Colorado? [Sugerencia: Suponga que el radio de la Tierra es R . Proyecte un rectángulo esférico en el hemisferio norte que sea determinado por las latitudes θ_1 y θ_2 y las longitudes ϕ_1 y ϕ_2 sobre el plano xy.]
 - c) Un libro de referencia indica que las áreas de los estados mencionados son $104\,247 \text{ mi}^2$ y $97\,914 \text{ mi}^2$. ¿Cómo se compara esta respuesta con su respuesta en el inciso b)?



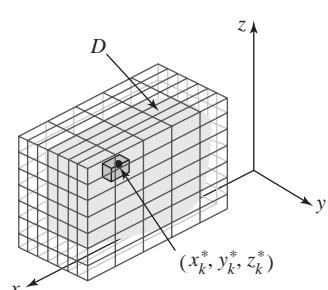
FIGURA 5.6.6 Dos rectángulos esféricos del problema 16

5.7 La integral triple

Introducción Los pasos que conducen a la definición de la *integral definida tridimensional*, o **integral triple**, $\iiint_D f(x, y, z) dV$ son bastante similares a los de la integral doble.

Sea $w = f(x, y, z)$ definida sobre una región cerrada y acotada D del espacio tridimensional.

- Por medio de una retícula tridimensional de planos verticales y horizontales paralelos a los planos de coordenadas, forme una partición P de D en n subregiones (cajas) D_k de volúmenes ΔV_k que se encuentre por completo dentro de D . Vea la FIGURA 5.7.1.
- Considere que $\|P\|$ es la norma de la partición o longitud de la diagonal más larga de la caja D_k .
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada subregión D_k .
- Forme la suma $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$.

FIGURA 5.7.1 Punto muestra en D_k

Una suma de la forma $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k$, donde (x_k^*, y_k^*, z_k^*) es un punto arbitrario dentro de cada D_k y ΔV_k denota el volumen de cada D_k , recibe el nombre de **suma de Riemann**. El tipo de partición utilizado, donde todos los D_k yacen por completo dentro de D , se denomina **partición interior** de D .

Definición 5.7.1 La integral triple

Sea f una función de tres variables definida sobre una región cerrada D del espacio tridimensional. Entonces la **integral triple de f sobre D** , denotada por medio de $\iiint_D f(x, y, z) dV$, se define como

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k. \quad (1)$$

Como en nuestras discusiones anteriores sobre la integral, cuando f es continua sobre D , entonces el límite en (1) existe; esto es, f es **integrable** sobre D . Las propiedades de integración básicas de una integral triple son las mismas que aquellas de la integral doble dadas en el teorema 5.1.1.

Evaluación mediante integrales iteradas Si la región D está acotada por arriba por la gráfica de $z = g_2(x, y)$ y acotada por abajo por la gráfica de $z = g_1(x, y)$, entonces es posible demostrar que la integral triple (1) puede expresarse como una integral doble de la integral parcial $\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz$; esto es,

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA, \quad (2)$$

donde R es la proyección ortogonal de D sobre el plano xy . En particular, si R es una región de tipo I definida por:

$$R: a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x),$$

entonces, como se ilustra en la FIGURA 5.7.2, la integral triple de f sobre D puede escribirse como una integral iterada:

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx. \quad (3)$$

Para evaluar la integral iterada en (3) empezamos evaluando la integral definida parcial

$$\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

en la cual x y y se mantienen fijas.

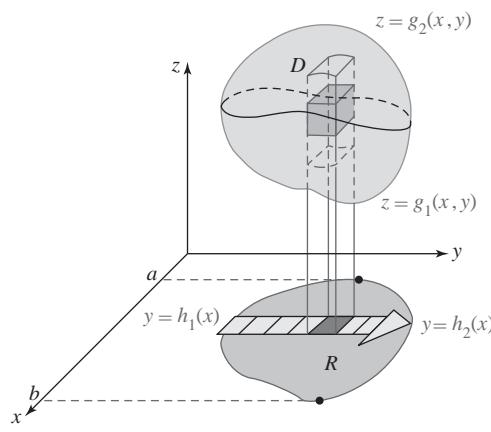


FIGURA 5.7.2 Región tipo I en el plano xy

Por otro lado, si R es una región de tipo II:

$$R: c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y),$$

entonces (2) se convierte en

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy. \quad (4)$$

En una integral doble hay sólo dos posibles órdenes de integración: $dy\,dx$ y $dx\,dy$. Las integrales triples en (3) y (4) ilustran dos de *seis* posibles órdenes de integración:

$$\begin{array}{lll} dz\,dy\,dx & dz\,dx\,dy & dy\,dx\,dz \\ dx\,dy\,dz & dx\,dz\,dy & dy\,dz\,dx. \end{array}$$

Las dos últimas diferenciales nos indican el plano de coordenadas en el cual se localiza la región R . Por ejemplo, la integral iterada correspondiente al orden de integración $dx\,dz\,dy$ tendría la forma

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy.$$

La interpretación geométrica de esta integral y la región R de integración en el plano yz se muestran en la FIGURA 5.7.3.

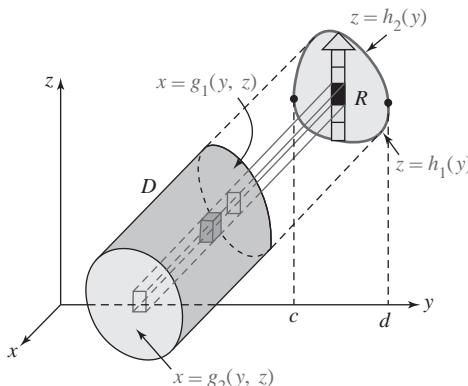


FIGURA 5.7.3 Región tipo I en el plano yz

■ Aplicaciones

A continuación se listan algunas de las aplicaciones estándar de la integral triple.

Volumen: Si $f(x, y, z) = 1$, entonces el **volumen** del sólido D es

$$V = \iiint_D dV.$$

Masa: Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad (masa por volumen unitario), entonces la **masa** del sólido D está dada por

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z) dV.$$

Primeros momentos: Los **primeros momentos** del sólido alrededor de los planos de coordenadas indicados por los subíndices indicados por los subíndices están dados por

$$M_{xy} = \iiint_D z \rho(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \rho(x, y, z) dV, \quad M_{yz} = \iiint_D x \rho(x, y, z) dV.$$

Centro de masa: Las coordenadas del **centro de masa** de D están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Centroide: Si $\rho(x, y, z) = \text{constante}$, el centro de masa de D recibe el nombre de **centroide** del sólido.

Segundos momentos: Los **segundos momentos**, o **momentos de inercia**, de D alrededor de los ejes de coordenadas indicados por los subíndices están dados por

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

Radio de giro: Como en la sección 5.4, si I es un momento de inercia del sólido en torno a un eje dado, entonces el **radio de giro** es

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

EJEMPLO 1 Volumen

Encuentre el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2x$ y $x = 3$.

Solución Como se indica en la FIGURA 5.7.4a), la primera integración con respecto a z será de 0 a $1 - y^2$. Además, de la figura 5.7.4b) vemos que la proyección del sólido D sobre el plano xy es una región de tipo II. Por consiguiente, a continuación integramos, con respecto a x , de $y/2$ a 3. La última integración es con respecto a y de 0 a 1. De tal manera,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dV = \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_{1-y^2}^{1-y^2} dz dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 (x - xy^2) \Big|_{y/2}^3 dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3 \right) dy \\ &= \left(3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

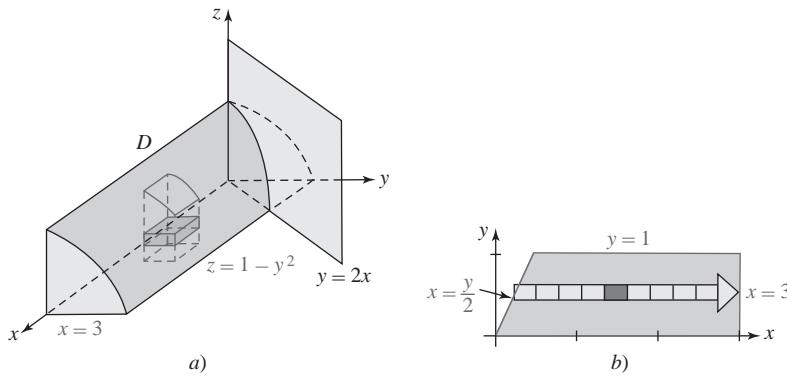


FIGURA 5.7.4 Sólido del ejemplo 1

El lector debe observar que el volumen en el ejemplo 1 podría haberse obtenido con la misma facilidad por medio de una integral doble.

EJEMPLO 2 Volumen

Calcule la integral triple que produce el volumen del sólido que tiene la forma determinada por el cono de un manto $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y el parabolóide $x = 6 - y^2 - z^2$.

Solución Al sustituir $y^2 + z^2 = x^2$ en $y^2 + z^2 = 6 - x$, encontramos que $x^2 = 6 - x$ o $(x + 3)(x - 2) = 0$. Así, las dos superficies se intersecan en el plano $x = 2$. La proyección sobre el plano yz de la curva de intersección es $y^2 + z^2 = 4$. Al utilizar simetría y referirnos a la FIGURA 5.7.5a) y b), vemos que

$$V = \iiint_D dV = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx dz dy.$$

Si bien la evaluación de esta integral es directa, sin duda resulta “descuidada”. Regresaremos a esta integral en la siguiente sección después de haber examinado integrales triples en otros sistemas de coordenadas.

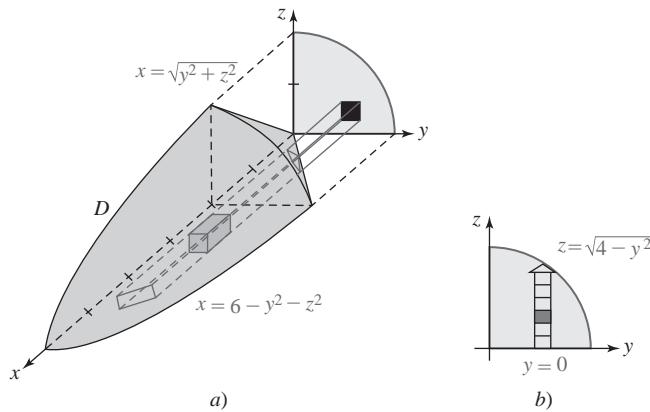


FIGURA 5.7.5 Sólido del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Centro de masa

Un sólido tiene la forma determinada por las gráficas del cilindro $|x| + |y| = 1$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$. Encuentre su centro de masa si la densidad está dada por $\rho(x, y, z) = kz$, con k una constante.

Solución El sólido y su proyección ortogonal sobre una región R del tipo I en el plano xy se ilustran en la FIGURA 5.7.6a). La ecuación $|x| + |y| = 1$ es equivalente a cuatro rectas:

$$\begin{aligned} x + y &= 1, x > 0, y > 0; & x - y &= 1, x > 0, y < 0; \\ -x + y &= 1, x < 0, y > 0; & -x - y &= 1, x < 0, y < 0. \end{aligned}$$

Puesto que la función de densidad $\rho(x, y, z) = kz$ es simétrica sobre R , concluimos que el centro de masa yace sobre el eje z ; esto es, necesitamos calcular sólo m y M_{xy} . De la simetría y la figura 5.7.6b) se concluye que

$$\begin{aligned} m &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_2^4 kz \, dz \, dy \, dx = 4k \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}z^2 \Big|_2^4 \, dy \, dx \\ &= 24k \int_0^1 \int_0^{1-x} dy \, dx \\ &= 24k \int_0^1 (1 - x) \, dx \\ &= 24k \left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = 12k, \\ M_{xy} &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_2^4 kz^2 \, dz \, dy \, dx = 4k \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{3}z^3 \Big|_2^4 \, dy \, dx \\ &= \frac{224}{3}k \int_0^1 \int_0^{1-x} dy \, dx = \frac{112}{3}k. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{112}{3}k}{12k} = \frac{28}{9}.$$

Las coordenadas del centro de masa son entonces $(0, 0, \frac{28}{9})$.

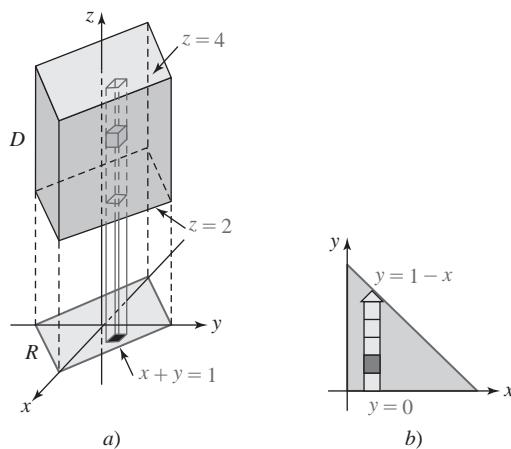


FIGURA 5.7.6 Sólido del ejemplo 3

■

EJEMPLO 4 Repaso del ejemplo 3

Determine el momento de inercia del sólido del ejemplo 3 alrededor del eje z . Encuentre el radio de giro.

Solución Sabemos que $I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)kz \, dV$. Con simetría podemos escribir esta integral triple como

$$\begin{aligned} I_z &= 4k \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_2^4 (x^2 + y^2)z \, dz \, dy \, dx \\ &= 4k \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) \frac{1}{2}z^2 \Big|_2^4 \, dy \, dx \\ &= 24k \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx \\ &= 24k \int_0^1 \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^{1-x} \, dx \\ &= 24k \int_0^1 \left[x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3 \right] \, dx \\ &= 24k \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4 \right]_0^1 = 4k. \end{aligned}$$

Del ejemplo 3 es claro que $m = 12k$ y por ello se deduce que el radio de giro es

$$R_g = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{12k}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \quad ■$$

El último ejemplo ilustra cómo cambiar el orden de integración en una integral triple.

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

Cambie el orden de integración en

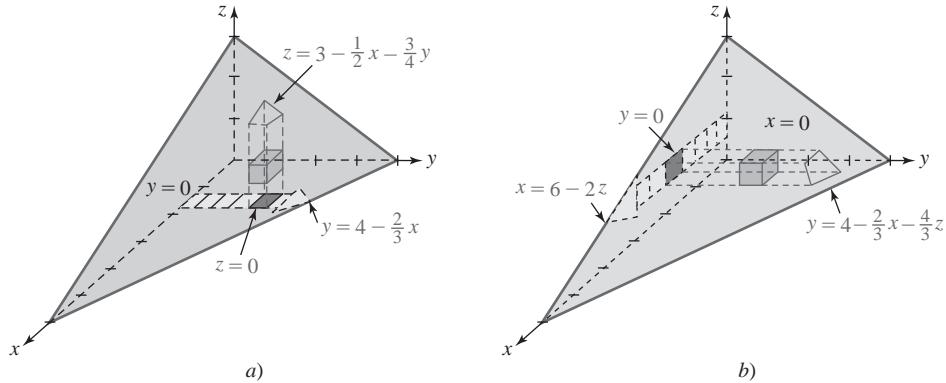
$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

a $dy \, dx \, dz$.

Solución Como se observa en la FIGURA 5.7.7a), la región D es el sólido en el primer octante acotado por los tres planos de coordenadas y el plano $2x + 3y + 4z = 12$. Con referencia a la figura 5.7.7b) y la tabla incluida, concluimos que

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = \int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{4-2x/3-4z/3} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz.$$

Orden de integración	Primera integración	Segunda integración	Tercera integración
$dz\ dy\ dx$	0 ≤ a ≤ 3 - $x/2 - 3y/4$	0 ≤ a ≤ 4 - $2x/3$	0 ≤ a ≤ 6
$dy\ dx\ dz$	0 ≤ a ≤ 4 - $2x/3 - 4z/3$	0 ≤ a ≤ 6 - $2z$	0 ≤ a ≤ 3

FIGURA 5.7.7 Cambio de integración de $dz\ dy\ dx$ a $dy\ dx\ dz$ en el ejemplo 5

5.7

DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-16.

Fundamentos

En los problemas 1-8, evalúe la integral iterada que se indica.

1. $\int_2^4 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$ 2. $\int_1^3 \int_1^x \int_2^{xy} 24xy \, dz \, dy \, dx$

3. $\int_0^6 \int_0^{6-x} \int_0^{6-x-z} dy \, dz \, dx$ 4. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{y}} 4x^2z^3 \, dz \, dy \, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y^2} \int_0^y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \, dz \, dx \, dy$ 6. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^2 \int_0^{e^{x^2}} x \, dz \, dx \, dy$

7. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z \, dz \, dx \, dy$

8. $\int_0^4 \int_0^{1/2} \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \, dy \, dx \, dz$

9. Evalúe $\iiint_D z \, dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por las gráficas de $y = x$, $y = x - 2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 5$.10. Evalúe $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dV$, donde D es la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $z = 4 - y$ y $z = 0$.

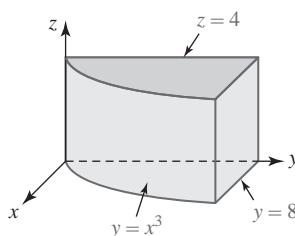
En los problemas 11 y 12, cambie el orden de integración indicado en cada uno de los otros cinco órdenes.

11. $\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_{x+2y}^4 f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

12. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{36-9x^2}/2} \int_1^3 f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$

En los problemas 13 y 14, considere el sólido dado en la figura. Plantee, pero no evalúe, las integrales que producen el volumen V del sólido utilizando los órdenes de integración indicados.

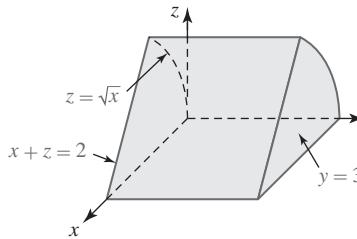
13.



- a) $dz\ dy\ dx$
b) $dx\ dz\ dy$
c) $dy\ dx\ dz$

FIGURA 5.7.8 Sólido del problema 13

14.



- a) $dx\ dz\ dy$
b) $dy\ dx\ dz$
c) $dz\ dx\ dy$ [Sugerencia: Esto requerirá dos integrales.]

FIGURA 5.7.9 Sólido del problema 14

En los problemas 15-20, dibuje la región D cuyo volumen V está dado por la integral iterada.

15. $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{2-2z/3} dx \, dz \, dy$ 16. $4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz \, dx \, dy$

17. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^5 dz \, dy \, dx$ 18. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz \, dy \, dx$

19. $\int_0^2 \int_{-y}^{2-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \, dz \, dy$ 20. $\int_1^3 \int_0^{1/x} \int_0^3 dy \, dz \, dx$

En los problemas 21-24, encuentre el volumen V del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $x = y^2$, $4 - x = y^2$, $z = 0$, $z = 3$

22. $x^2 + y^2 = 4$, $z = x + y$, los planos de coordenadas, el primer octante.

23. $y = x^2 + z^2, y = 8 - x^2 - z^2$
 24. $x = 2, y = x, y = 0, z = x^2 + y^2, z = 0$
 25. Encuentre el centro de masa del sólido dado en la figura 5.7.8 si la densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy .
 26. Encuentre el centroide del sólido de la figura 5.7.9 si la densidad ρ es constante.
 27. Determine el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + z^2 = 4, y = 0$ y $y = 3$ si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xz .
 28. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y = x^2, y = x, z = y + 2$ y $z = 0$ si la densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy .

En los problemas 29 y 30, plantee, pero no evalúe, las integrales iteradas que producen la masa m del sólido que tiene la forma y densidad indicadas.

29. $x^2 + y^2 = 1, z + y = 8, z - 2y = 2;$
 $\rho(x, y, z) = x + y + 4$
 30. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, z = -1, z = 2; \rho(x, y, z) = z^2$ [Sugerencia: No use $dz dy dx$.]

31. Calcule el momento de inercia del sólido de la figura 5.7.8 alrededor del eje y si la densidad ρ es como se indica en el problema 25. Determine el radio de giro.
 32. Calcule el momento de inercia del sólido de la figura 5.7.9 alrededor del eje x si la densidad ρ es constante. Determine el radio de giro.
 33. Calcule el momento de inercia alrededor del eje z del sólido en el primer octante que está acotado por los planos de coordenadas y la gráfica $x + y + z = 1$ si la densidad ρ es constante.
 34. Determine el momento de inercia alrededor del eje y del sólido acotado por las gráficas $z = y, z = 4 - y, z = 1, z = 0, x = 2$ y $x = 0$ si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano yz .

En los problemas 35 y 36, plantee, pero no evalúe, la integral iterada que produce el momento de inercia indicado del sólido que tiene la forma y densidad que se señalan.

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 5$; densidad ρ en un punto P directamente proporcional a la distancia desde el origen; I_z
 36. $x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$; densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el plano yz ; I_y

5.8 Integrales triples en otros sistemas de coordenadas

■ Introducción A partir de la geometría de una región en el espacio tridimensional, la evaluación de una integral triple sobre la región puede a menudo facilitarse al utilizar un nuevo sistema de coordenadas.

■ Coordenadas cilíndricas El sistema de coordenadas cilíndricas combina la descripción polar de un punto en el plano con la descripción rectangular de la componente z de un punto en el espacio. Como se advierte en la FIGURA 5.8.1a), las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan mediante la triada ordenada (r, θ, z) . La palabra *cilíndricas* surge del hecho de que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de los planos $z = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$, con un cilindro $r = \text{constante}$. Vea la figura 5.8.1b).

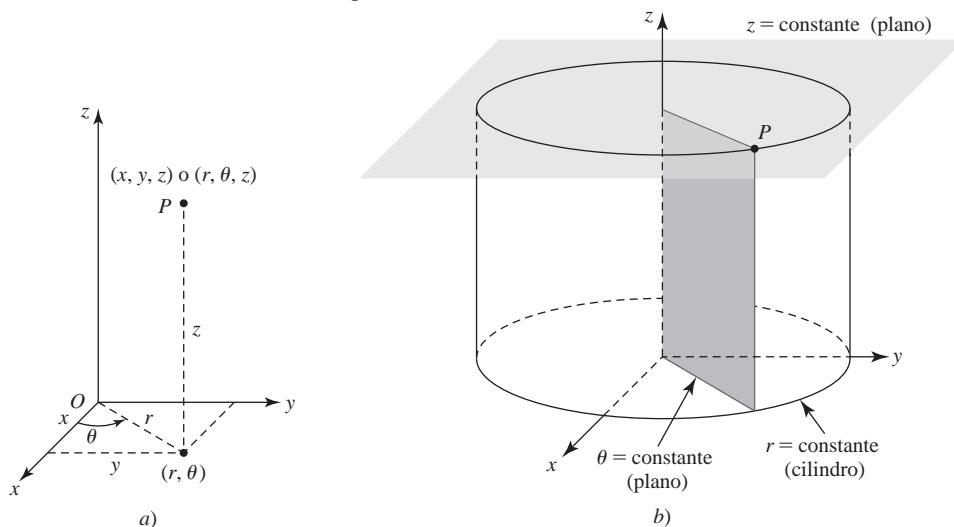


FIGURA 5.8.1 Coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio tridimensional

■ Coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares De la figura 5.8.1a) también vemos que las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto se obtienen de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) mediante las ecuaciones.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (1)$$

EJEMPLO 1 Centro de masa

Convierta $(8, \pi/3, 7)$ en coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

Solución De (1),

$$\begin{aligned} x &= 8 \cos \frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ y &= 8 \sin \frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} \\ z &= 7. \end{aligned}$$

Entonces, $(8, \pi/3, 7)$ es equivalente a $(4, 4\sqrt{3}, 7)$ en coordenadas rectangulares. ■

■ Coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas Para convertir las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , usamos

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (2)$$

EJEMPLO 2 Centro de masa

Convierta $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ en coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas.

Solución De (2) vemos que

$$\begin{aligned} r^2 &= (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \\ \tan \theta &= \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

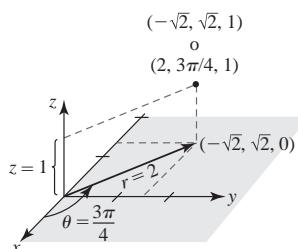


FIGURA 5.8.2 Conversión de coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas en el ejemplo 2

Si tomamos $r = 2$, entonces, consistente con el hecho de que $x < 0$ y $y > 0$, tomamos $\theta = 3\pi/4$. Si utilizamos $\theta = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, entonces es posible usar $r = -2$. Advierta que las combinaciones $r = 2$, $\theta = -\pi/4$ y $r = -2$, $\theta = 3\pi/4$ son inconsistentes. En consecuencia, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ es equivalente a $(2, 3\pi/4, 1)$ en coordenadas cilíndricas. Vea la FIGURA 5.8.2. ■

■ Integrales triples en coordenadas cilíndricas Recuerde de la sección 5.5 que el área de un “rectángulo polar” es $\Delta A = r^* \Delta r \Delta \theta$, donde r^* es el radio promedio. De la FIGURA 5.8.3a) vemos que el volumen de una “cuña cilíndrica” es simplemente

$$\Delta V = (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) = r^* \Delta r \Delta \theta \Delta z.$$

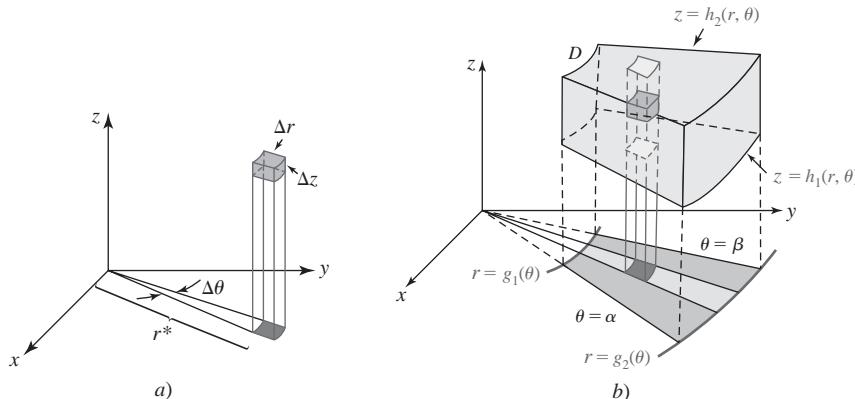


FIGURA 5.8.3 Cuña cilíndrica en a); región en el espacio tridimensional en b)

Entonces, si $f(r, \theta, z)$ es una función continua sobre la región D , como se ilustra en la figura 5.8.3b), la integral triple de F sobre D está dada por

$$\iiint_D f(r, \theta, z) dV = \iint_R \left[\int_{h_1(r, \theta)}^{h_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r, \theta)}^{h_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta.$$

EJEMPLO 3 Centro de masa

Un sólido en el primer octante tiene la forma determinada por la gráfica del cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$ y $y = 0$. Determine el centro de masa si la densidad está dada por $\rho(r, \theta, z) = r$.

Solución En vista de (2), la ecuación del cono es $z = r$. Por consiguiente, vemos de la FIGURA 5.8.4 que

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D r dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r(r dz dr d\theta) \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 z \Big|_r^1 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^3) dr d\theta = \frac{1}{24}\pi, \\ M_{xy} &= \iiint_D zr dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 zr^2 dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{2}z^2 r^2 \Big|_r^1 dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^4) dr d\theta = \frac{1}{30}\pi. \end{aligned}$$

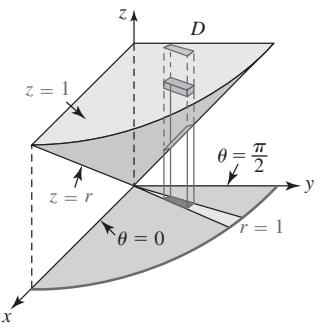


FIGURA 5.8.4 Sólido del ejemplo 3

Empleando $y = r \sin \theta$ y $x = r \cos \theta$, tenemos también que

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_D r^2 \sin \theta dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \sin \theta dz dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 z \sin \theta \Big|_r^1 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^3 - r^4) \sin \theta dr d\theta = \frac{1}{20}, \\ M_{yz} &= \iiint_D r^2 \cos \theta dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \cos \theta dz dr d\theta = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38,$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38,$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{30}\pi}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

El centro de masa tiene las coordenadas aproximadas $(0.38, 0.38, 0.8)$. ■

EJEMPLO 4 Centro de masa

Evalúe la integral de volumen

$$V = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx dz dy$$

del ejemplo 2 en la sección 5.7.

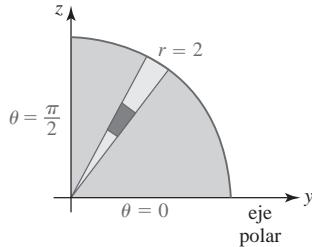


FIGURA 5.8.5 Versión polar de la figura 5.7.5b)

Solución Si introducimos coordenadas polares en el plano yz mediante $y = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$, entonces las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio tridimensional son (r, θ, x) . La descripción polar de la figura 5.7.5b) está dada en la **FIGURA 5.8.5**. En este caso, puesto que $y^2 + z^2 = r^2$, tenemos

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} = r \quad y \quad x = 6 - y^2 - z^2 = 6 - r^2.$$

Por consiguiente, la integral se transforma en

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_r^{6-r^2} r dx dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 rx \Big|_r^{6-r^2} dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(3r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 \right) \Big|_0^2 d\theta \\ &= \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

■

■ Coordenadas esféricas Como se ve en la **FIGURA 5.8.6a)**, las **coordenadas esféricas** de un punto P están dadas por la triada ordenada (ρ, ϕ, θ) , donde ρ es la distancia del origen a P , ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el vector \overrightarrow{OP} , y θ es el ángulo medido desde el eje x positivo hasta la proyección del vector \overrightarrow{OQ} de \overrightarrow{OP} . El ángulo θ es el mismo ángulo que en coordenadas polares y cilíndricas. La figura 5.8.6b) muestra que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de un cono $\phi = \text{constante}$, un plano $\theta = \text{constante}$ y una esfera $\rho = \text{constante}$; de ahí surge el nombre de coordenadas “esféricas”.

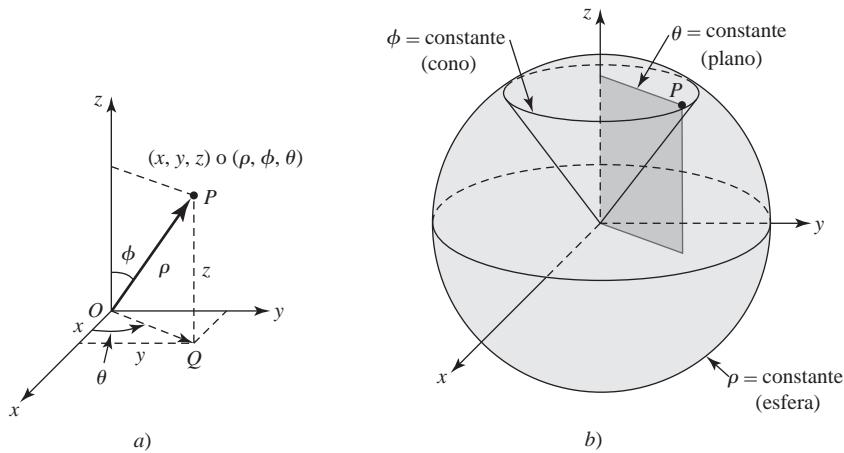


FIGURA 5.8.6 Coordenadas esféricas de un punto en el espacio tridimensional

■ Coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas Para transformar coordenadas esféricicas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas rectangulares (x, y, z) , observamos de la figura 5.8.6a) que

$$x = |\overrightarrow{OQ}| \cos \theta, \quad y = |\overrightarrow{OQ}| \sin \theta, \quad z = |\overrightarrow{OP}| \cos \phi.$$

Puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \sin \phi$ y $|\overrightarrow{OP}| = \rho$, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi. \quad (3)$$

Suele tomarse $\rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Además, puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \sin \phi = r$, las fórmulas

$$r = \rho \sin \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi \quad (4)$$

nos permiten transformar las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . ■

EJEMPLO 5 Centro de masa

Convierta las coordenadas esféricas $(6, \pi/4, \pi/3)$ en

- a) coordenadas rectangulares y b) coordenadas cilíndricas.

Solución

- a) Identificando $\rho = 6$, $\phi = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$, encontramos de (3) que

$$\begin{aligned} x &= 6 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = 6 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \sqrt{2} \\ y &= 6 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = 6 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} \sqrt{6} \\ z &= 6 \cos \frac{\pi}{4} = 6 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 3 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Las coordenadas rectangulares del punto son $(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$.

- b) De (4) obtenemos

$$\begin{aligned} r &= 6 \sin \frac{\pi}{4} = 6 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 3\sqrt{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \\ z &= 6 \cos \frac{\pi}{4} = 6 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right) = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

De tal modo, las coordenadas cilíndricas del punto son $(3\sqrt{2}, \pi/3, 3\sqrt{2})$. ■

■ Coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas Para convertir las coordenadas rectangulares (x, y, z) en coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) , usamos

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (5)$$

■ Integrales triples en coordenadas esféricas Como se observa en la FIGURA 5.8.7, el volumen de una “cuña esférica” está dado por la aproximación

$$\Delta V \approx \rho^2 \sin \phi \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta.$$

De tal modo, en una integral triple de una función continua en coordenadas esféricas $f(\rho, \phi, \theta)$, la diferencial de volumen dV es

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Por consiguiente, una integral triple común en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) \, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(\phi, \theta)}^{h_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

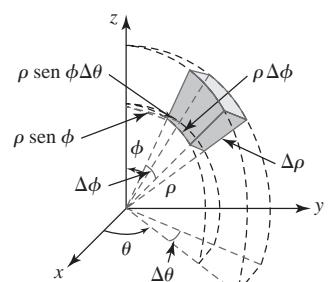


FIGURA 5.8.7 Cuña esférica

EJEMPLO 6 Centro de masa

Emplee coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido del ejemplo 3.

Solución Empleando (3),

$$\begin{aligned} z = 1 &\text{ se vuelve } \rho \cos \phi = 1 \text{ o } \rho = \sec \phi, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} &\text{ se vuelve } \phi = \pi/4. \end{aligned}$$

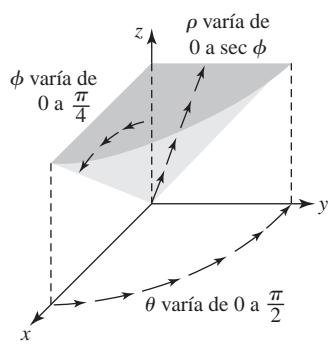


FIGURA 5.8.8 Sólido del ejemplo 3

Utilizamos un símbolo diferente para la densidad para evitar una confusión con el símbolo ρ de coordenadas esféricas.

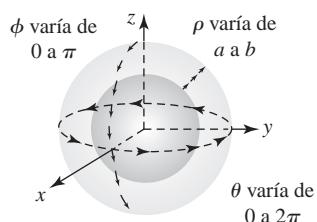


FIGURA 5.8.9 Límites de integración del ejemplo 7

Como se indica en la FIGURA 5.8.8, $V = \iiint_D dV$ escrita como una integral iterada es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^{\sec \phi} \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \phi \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \tan \phi \sec^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \tan^2 \phi \Big|_0^{\pi/4} \, d\theta \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \, d\theta = \frac{1}{12} \pi. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Centro de masa

Determine el momento de inercia en torno al eje z del sólido homogéneo acotado entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a < b$.

Si $\delta(\rho, \phi, \theta) = k$ es la densidad, entonces

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) k \, dV.$$

De (3) encontramos $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$, y de la primera ecuación en (5) vemos que las ecuaciones de las esferas son simplemente $\rho = a$ y $\rho = b$. Vea la FIGURA 5.8.9. Consecuentemente, en coordenadas esféricas la integral anterior se vuelve

$$\begin{aligned} I_z &= k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \rho^2 \sin^2 \phi (\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta) \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \sin^3 \phi \right]_a^b \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{5} k (b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{5} k (b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} \left(-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) \Big|_0^\pi \, d\theta \\ &= \frac{4}{15} k (b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} \, d\theta = \frac{8}{15} \pi k (b^5 - a^5). \end{aligned}$$

■

NOTAS DESDE EL AULA

Las coordenadas esféricas se usan en la navegación. Si consideramos a la Tierra como una esfera de radio fijo centrada en el origen, entonces un punto P puede ubicarse especificando dos ángulos θ y ϕ . Como se muestra en la FIGURA 5.8.10, cuando ϕ se mantiene constante, la curva resultante se denomina **paralela**. Los valores fijos de θ producen curvas llamadas **círculos grandes**. La mitad de uno de estos círculos grandes que une los polos norte y sur recibe el nombre de **meridiano**. La intersección de una paralela y un meridiano produce la posición de un punto P . Si $0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ y $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, se dice que los ángulos $90^\circ - \phi$ y θ son, respectivamente, la **latitud** y **longitud** de P . El **meridiano primo** corresponde a una longitud de 0° . La latitud del ecuador es 0° ; las latitudes de los polos norte y sur son, a su vez, $+90^\circ$ (o 90° norte) y -90° (o 90° sur).



FIGURA 5.8.10 Latitudes y longitudes

5.8**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-16.

Fundamentos

En los problemas 1-6, convierta el punto dado de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

1. $(10, 3\pi/4, 5)$ 2. $(2, 5\pi/6, -3)$
 3. $(\sqrt{3}, \pi/3, -4)$ 4. $(4, 7\pi/4, 0)$
 5. $(5, \pi/2, 1)$ 6. $(10, 5\pi/3, 2)$

En los problemas 7-12, convierta el punto dado de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas.

7. $(1, -1, -9)$ 8. $(2\sqrt{3}, 2, 17)$
 9. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$ 10. $(1, 2, 7)$
 11. $(0, -4, 0)$ 12. $(\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 3)$

En los problemas 13-16, convierta la ecuación dada a coordenadas cilíndricas.

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 14. $x + y - z = 1$
 15. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 16. $x^2 + z^2 = 16$

En los problemas 17-20, convierta la ecuación dada a coordenadas rectangulares.

17. $z = r^2$ 18. $z = 2r \operatorname{sen} \theta$
 19. $r = 5 \operatorname{sec} \theta$ 20. $\theta = \pi/6$

En los problemas 21-24, use una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar el volumen del sólido que está acotado por las gráficas de las ecuaciones que se indican.

21. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0$
 22. $z = 10 - x^2 - y^2, z = 1$
 23. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 25, z = 0$
 24. $y = x^2 + z^2, 2y = x^2 + z^2 + 4$

En los problemas 25-28, emplee una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar la cantidad indicada.

25. El centroide del sólido homogéneo acotado por el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.
 26. El centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y^2 + z^2 = 16, x = 0$ y $x = 5$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el punto P al eje xy .
 27. El momento de inercia en torno al eje z del sólido acotado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ y por abajo por el plano $z = 2$, donde la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje z .
 28. El momento de inercia alrededor del eje x del sólido acotado por el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el eje x .

En los problemas 29-34, convierta el punto dado de coordenadas esféricas a

- a) coordenadas rectangulares y
 b) coordenadas cilíndricas.

29. $(\frac{2}{3}, \pi/2, \pi/6)$ 30. $(5, 5\pi/4, 2\pi/3)$
 31. $(8, \pi/4, 3\pi/4)$ 32. $(\frac{1}{3}, 5\pi/3, \pi/6)$
 33. $(4, 3\pi/4, 0)$ 34. $(1, 11\pi/6, \pi)$

En los problemas 35-40, convierta los puntos dados de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

35. $(-5, -5, 0)$ 36. $(1, -\sqrt{3}, 1)$
 37. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 1)$ 38. $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2})$
 39. $(3, -3, 3\sqrt{2})$ 40. $(1, 1, -\sqrt{6})$

En los problemas 41-44, convierta la ecuación dada a coordenadas esféricas.

41. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ 42. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$
 43. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ 44. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

En los problemas 45-48, convierta la ecuación dada a coordenadas rectangulares.

45. $\rho = 10$ 46. $\phi = \pi/3$
 47. $\rho = 2 \operatorname{sec} \phi$ 48. $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$

En los problemas 49-52, emplee una integral triple y coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que está acotado por las gráficas de las ecuaciones que se indican:

49. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 9$
 50. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0$, primer octante
 51. $z^2 = 3x^2 + 3y^2, x = 0, y = 0, z = 2$, primer octante
 52. En el interior por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y en el exterior por $z^2 = x^2 + y^2$

En los problemas 53-56, emplee una integral triple y coordenadas esféricas para encontrar la cantidad indicada.

53. El centroide del sólido homogéneo acotado por el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.
 54. El centro de masa del sólido acotado por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$, donde la densidad en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el punto P al eje xy .
 55. La masa del sólido acotado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 4$, donde la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia desde el origen [Sugerencia: Expresese el límite ϕ superior de integración como un coseno inverso.]
 56. El momento de inercia en torno al eje z del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el origen.

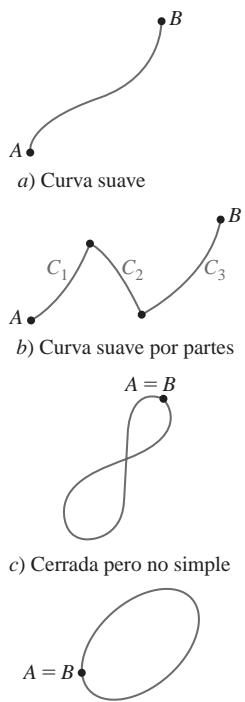
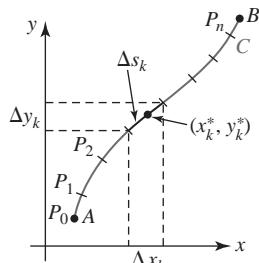


FIGURA 5.9.1 Tipos de curvas

Una desafortunada elección de nombre. El término “integrales curvilíneas” sería más apropiado.

FIGURA 5.9.2 Punto muestra sobre el subarco k -ésimo

5.9 Integrales de línea

Introducción La noción de integral definida $\int_a^b f(x) dx$, esto es, *integración de una función de una sola variable definida sobre un intervalo*, puede generalizarse a la *integración de una función de varias variables definidas a lo largo de una curva*. Para este fin necesitamos introducir cierta terminología acerca de curvas.

Terminología Suponga que C es una curva parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, y que A y B son los puntos inicial y terminal $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, respectivamente. Afirmamos que:

- C es una **curva suave** si $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y no son simultáneamente cero sobre el intervalo abierto (a, b) .
- C es una **curva suave por partes** si consiste en un número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n unidas extremo por extremo; esto es, $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$.
- C es una **curva cerrada** si $A = B$.
- C es una **curva simple** si no se cruza a sí misma entre A y B .
- C es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza a sí misma.
- Si C no es una curva cerrada, entonces la **orientación** impuesta sobre C es la dirección que corresponde a los valores crecientes de t .

Cada tipo de curva definida antes se ilustra en la FIGURA 5.9.1.

Esta misma terminología lleva de manera natural a las curvas en espacio tridimensional. Por ejemplo, una curva espacial C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, es suave si las derivadas x' , y' y z' son continuas sobre $[a, b]$ y no simultáneamente cero sobre (a, b) .

Integrales de línea en el plano Sea $z = f(x, y)$ una función definida en alguna región bidimensional que contiene a la curva suave C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$. Los siguientes pasos conducen a las definiciones de tres **integrales de línea** en el plano.

- Sea

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

una partición del intervalo paramétrico $[a, b]$ y considere que los puntos correspondientes sobre la curva C , o puntos de partición, son

$$A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B.$$

- Los puntos de partición $P_k = (x(t_k), y(t_k))$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ dividen a C en n subarcos de longitudes Δs_k . Considere que la proyección de cada subarco sobre los ejes x y y tienen longitudes Δx_k y Δy_k , respectivamente.
- Sea $\|P\|$ la longitud del subarco más largo.
- Escoja un punto muestra (x_k^*, y_k^*) sobre cada subarco como se ilustra en la FIGURA 5.9.2. Este punto corresponde a un número t_k^* en el subintervalo k -ésimo $[t_{k-1}, t_k]$ en la partición del intervalo del parámetro $[a, b]$.
- Forme las sumas

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta y_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k.$$

Tomamos el límite de estas tres sumas cuando $\|P\| \rightarrow 0$. Las integrales que resultan se resumen a continuación.

Definición 5.9.1 Integrales de línea en el plano

Sea f una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene una curva suave C .

- i) La **integral de línea de f con respecto a x** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k. \quad (1)$$

(continúa)

ii) La **integral de línea de f con respecto a y** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y) dy = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta y_k. \quad (2)$$

iii) La **integral de línea de f con respecto a la longitud de arco s** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k. \quad (3)$$

Es posible demostrar que si $f(x, y)$ es continua sobre C , entonces las integrales definidas en (1), (2) y (3) existen. Asumiremos la continuidad de f como un hecho.

■ Interpretación geométrica En el caso de dos variables, la integral de línea con respecto a la longitud de arco $\int_C f(x, y) ds$ puede interpretarse de manera geométrica cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre C . En la definición 5.9.1 el símbolo Δs_k representa la longitud del subarco k -ésimo sobre la curva C . Sin embargo, de la figura 5.9.2 tenemos la aproximación $\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Con esta interpretación de Δs_k , vemos de la FIGURA 5.9.3a) que el producto $f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k$ es el área de un rectángulo vertical de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y ancho Δs_k . La integral $\int_C f(x, y) ds$ representa entonces el área de un lado de una “cerca” o “cortina” que se extiende a partir de la curva C en el plano xy hacia arriba de la gráfica de $f(x, y)$ y que corresponde a los puntos (x, y) sobre C . Vea la figura 5.9.3b).

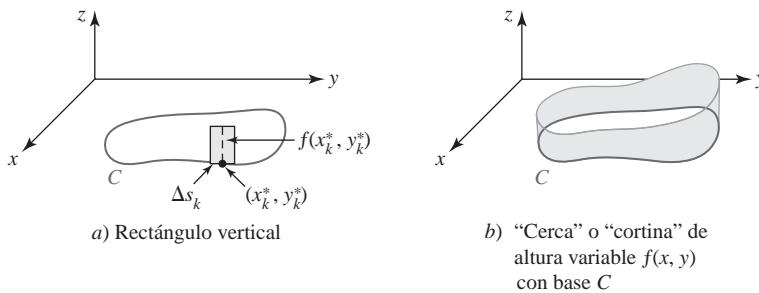


FIGURA 5.9.3 Interpretación geométrica de iii) de la definición 5.9.1

■ Método de evaluación: C definida paramétricamente Las integrales de línea en la definición 5.9.1 se evalúan de dos maneras, dependiendo de si la curva C está definida paramétricamente o mediante una función explícita. En cualquier caso, la idea básica es convertir la integral de línea en una integral definida de una sola variable. Si C es una curva suave parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$, y por ello (1) y (2) se vuelven, respectivamente,

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt, \quad (4)$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (5)$$

Además, utilizando la fórmula para calcular la longitud de arco y la parametrización dada, encontramos que $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$. Por consiguiente, (3) puede escribirse como

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (6)$$

EJEMPLO 1 Empleo de (4), (5) y (6)

Evalúe

a) $\int_C xy^2 dx$, b) $\int_C xy^2 dy$, c) $\int_C xy^2 ds$

sobre el cuarto de círculo C definido por $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Vea la FIGURA 5.9.4.

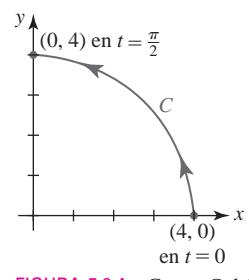


FIGURA 5.9.4 Curva C del ejemplo 1

Solución**a)** De (4),

$$\begin{aligned}\int_C xy^2 \, dx &= \int_0^{\pi/2} (4 \cos t)(16 \sin^2 t)(-4 \sin t \, dt) \\ &= -256 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos t \, dt \\ &= -256 \left[\frac{1}{4} \sin^4 t \right]_0^{\pi/2} = -64.\end{aligned}$$

b) De (5),

$$\begin{aligned}\int_C xy^2 \, dy &= \int_0^{\pi/2} (4 \cos t)(16 \sin^2 t)(4 \cos t \, dt) \\ &= 256 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \, dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo doble para el seno} \\ &= 256 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2t \, dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo mitad para el seno} \\ &= 64 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t) \, dt \\ &= 32 \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\pi/2} = 16\pi.\end{aligned}$$

c) De (6),

$$\begin{aligned}\int_C xy^2 \, ds &= \int_0^{\pi/2} (4 \cos t)(16 \sin^2 t) \sqrt{16(\cos^2 t + \sin^2 t)} \, dt \\ &= 256 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt \\ &= 256 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.\end{aligned}$$

■

Método de evaluación: C definida por $y = g(x)$ Si la curva C está definida por una función explícita $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, es posible utilizar x como un parámetro. Con $dy = g'(x) \, dx$ y $ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \, dx$, las integrales de línea (1), (2) y (3) se vuelven, a su vez,

$$\int_C f(x, y) \, dx = \int_a^b f(x, g(x)) \, dx, \tag{7}$$

$$\int_C f(x, y) \, dy = \int_a^b f(x, g(x)) g'(x) \, dx, \tag{8}$$

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \, dx. \tag{9}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva C *suave por partes* se define como la *suma* de las integrales sobre las distintas curvas suaves cuya unión compone a C . Por ejemplo, en el caso de (3), si C está compuesta por curvas suaves C_1 y C_2 , entonces

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_{C_1} f(x, y) \, ds + \int_{C_2} f(x, y) \, ds.$$

Notación En muchas aplicaciones, las integrales de línea aparecen como una suma

$$\int_C P(x, y) \, dx + \int_C Q(x, y) \, dy.$$

Es una práctica común escribir esta suma sin el segundo símbolo integral como

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad \text{o simplemente} \quad \int_C P dx + Q dy. \quad (10)$$

EJEMPLO 2 Uso de (7), (8) y (10)

Evalúe $\int_C xy dx + x^2 dy$, donde C está dada por $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 2$.

Solución La curva C se ilustra en la FIGURA 5.9.5 y se define mediante la función explícita $y = x^3$. Por consiguiente, podemos usar x como el parámetro. Con $dy = 3x^2 dx$, se deduce de (7) y (8) que

$$\begin{aligned} \int_C xy dx + x^2 dy &= \int_{-1}^2 x(\overbrace{x^3}^y) dx + x^2(\overbrace{3x^2 dx}^{dy}) \\ &= \int_{-1}^2 4x^4 dx = \left. \frac{4}{5}x^5 \right|_{-1}^2 = \frac{132}{5}. \end{aligned}$$

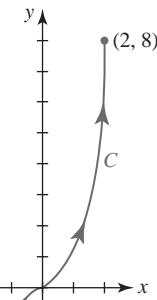


FIGURA 5.9.5 Curva C en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 La curva C definida por partes

Evalúe $\int_C y^2 dx - x^2 dy$ sobre la curva cerrada C que se muestra en la FIGURA 5.9.6a).

Solución Puesto que C es suave por partes, expresamos la integral como una suma de integrales. Simbólicamente, escribimos

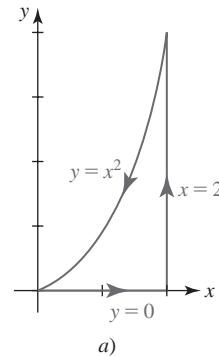
$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3},$$

donde C_1 , C_2 y C_3 son las curvas que se muestran en la figura 5.9.6b). En C_1 , usamos x como parámetro. Puesto que $y = 0$, $dy = 0$,

$$\int_{C_1} y^2 dx - x^2 dy = \int_0^2 0 dx - x^2(0) = 0.$$

En C_2 , usamos y como parámetro. De $x = 2$, $dx = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx - x^2 dy &= \int_0^4 y^2(0) - 4 dy = \\ &= - \int_0^4 4 dy = -4y \Big|_0^4 = -16. \end{aligned}$$



Por último, en C_3 , usamos de nuevo x como parámetro. De $y = x^2$, obtenemos $dy = 2x dx$ y por ello

$$\begin{aligned} \int_{C_3} y^2 dx - x^2 dy &= \int_2^0 x^4 dx - x^2(2x dx) \\ &= \int_2^0 (x^4 - 2x^3) dx \\ &= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_2^0 = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

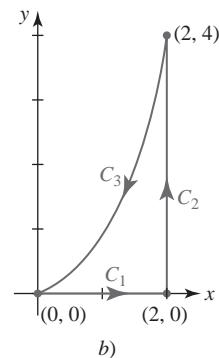


FIGURA 5.9.6 Curva C en el ejemplo 3

Por consiguiente,

$$\int_C y^2 dx - x^2 dy = 0 + (-16) + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}. \quad \blacksquare$$

■ Propiedades Es importante advertir que una integral de línea es independiente de la parametrización de la curva C siempre que a C se le dé la misma orientación por medio de todos los conjuntos de ecuaciones paramétricas que definen la curva. Vea el problema 33 en la sección “Desarrolle su competencia 5.9”. Recuerde que la dirección positiva de una curva parametrizada C corresponde a valores crecientes del parámetro t .

Suponga, como se ilustra en la FIGURA 5.9.7, que el símbolo $-C$ denota la curva que tiene los mismos puntos pero la orientación opuesta de C . En ese caso es posible demostrar que

Para integrales definidas ordinarias, esta propiedad es equivalente a $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

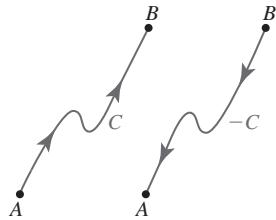


FIGURA 5.9.7 Las curvas C y $-C$ tienen orientaciones opuestas

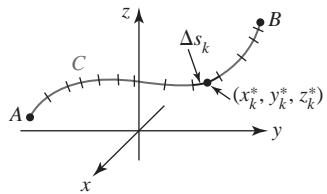


FIGURA 5.9.8 Punto muestra sobre el subarco k -ésimo

Por ejemplo, en el inciso *a*) del ejemplo 1 vimos que $\int_C xy^2 dx = -64$ y por ello (11) puede escribirse como $\int_{-C} xy^2 dx = 64$.

I Integrales de línea en el espacio Suponga que C es una curva suave en espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Si f es una función de tres variables definida en alguna región del espacio tridimensional que contiene a C , podemos definir *cuatro* integrales de línea a lo largo de la curva:

$$\int_C f(x, y, z) dx, \quad \int_C f(x, y, z) dy, \quad \int_C f(x, y, z) dz \quad \text{y} \quad \int_C f(x, y, z) ds.$$

La primera, segunda y cuarta integrales se definen de manera análoga a (1), (2) y (3) de la definición 5.9.1. Por ejemplo, si C se divide en n subarcos de longitud Δs_k como se muestra en la FIGURA 5.9.8, entonces

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta s_k.$$

La nueva integral en la lista, la **integral de línea de f con respecto a z** a lo largo de C de A a B , se define como

$$\int_C f(x, y, z) dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta z_k. \quad (12)$$

I Método de evaluación Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, podemos evaluar las integrales de línea a lo largo de la curva en el espacio C de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) dx &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt, \\ \int_C f(x, y, z) dy &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt, \\ \int_C f(x, y, z) dz &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt, \\ \int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Si C se define mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, entonces la última integral en (13) puede escribirse

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (14)$$

Como en (10), en el espacio tridimensional a menudo estamos interesados en integrales de línea de la forma de una suma:

$$\int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

EJEMPLO 4 Integral de línea en espacio tridimensional

Evalúe $\int_C y dx + x dy + z dz$, donde C es la hélice $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución Al sustituir las expresiones para x , y y z junto con $dx = -2 \sin t dt$, $dy = 2 \cos t dt$, $dz = dt$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_C y \, dx + x \, dy + z \, dz &= \int_0^{2\pi} -4 \underbrace{\sin^2 t \, dt + 4 \cos^2 t \, dt}_{4(\cos^2 t - \sin^2 t)} + t \, dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (4 \cos 2t + t) \, dt \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\
 &= \left(2 \sin 2t + \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.
 \end{aligned}$$

■

5.9**DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-16.

Fundamentos

En los problemas 1-4, evalúe $\int_C f(x, y) \, dx$, $\int_C f(x, y) \, dy$ y $\int_C f(x, y) \, ds$ sobre la curva indicada C .

1. $f(x, y) = 2xy$; $x = 5 \cos t$, $y = 5 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/4$
2. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$
3. $f(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$
4. $f(x, y) = x^2/y^3$; $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$, $1 \leq x \leq 8$
5. Evalúe $\int_C (x^2 - y^2) \, ds$, donde C está dada por $x = 5 \cos t$, $y = 5 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
6. Evalúe $\int_C (2x + 3y) \, dy$, donde C está dada por $x = 3 \sin 2t$, $y = 2 \cos 2t$, $0 \leq t \leq \pi$.

En los problemas 7 y 8, evalúe $\int_C f(x, y, z) \, dx$, $\int_C f(x, y, z) \, dy$, $\int_C f(x, y, z) \, dz$ y $\int_C f(x, y, z) \, ds$ sobre la curva indicada C .

7. $f(x, y, z) = z$; $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
8. $f(x, y, z) = 4xyz$; $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = t^2$, $z = 2t$, $0 \leq t \leq 1$

En los problemas 9-12, evalúe $\int_C (2x + y) \, dx + xy \, dy$ sobre la curva dada C entre $(-1, 2)$ y $(2, 5)$.

9. $y = x + 3$
10. $y = x^2 + 1$

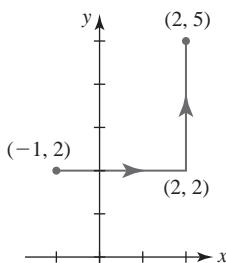


FIGURA 5.9.9 Curva del problema 11

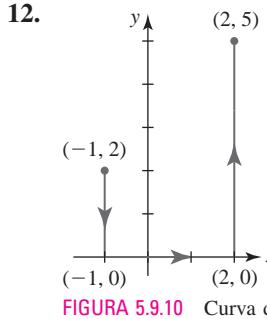


FIGURA 5.9.10 Curva del problema 12

En los problemas 13-16, evalúe $\int_C y \, dx + x \, dy$ sobre la curva dada C entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

13. $y = x^2$
14. $y = x$
15. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(1, 1)$.
16. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.
17. Evalúe $\int_C (6x^2 + 2y^2) \, dx + 4xy \, dy$, donde C está dada por $x = \sqrt[4]{t}$, $y = t$, $4 \leq t \leq 9$.

18. Evalúe $\int_C -y^2 \, dx + xy \, dy$, donde C está dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \leq t \leq 2$.
19. Evalúe $\int_C 2x^3y \, dx + (3x + y) \, dy$, donde C está dada por $x = y^2$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.
20. Evalúe $\int_C 4x \, dx + 2y \, dy$, donde C está dada por $x = y^3 + 1$ de $(0, -1)$ a $(9, 2)$.

En los problemas 21 y 22, evalúe $\int_C (x^2 + y^2) \, dx - 2xy \, dy$ sobre la curva C dada.

21.

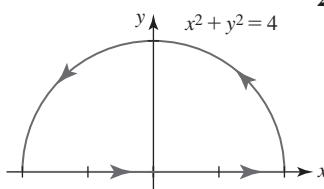


FIGURA 5.9.11 Curva del problema 21

22.

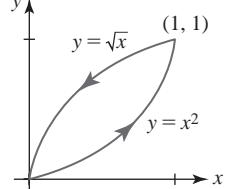


FIGURA 5.9.12 Curva del problema 22

En los problemas 23 y 24, evalúe $\int_C x^2y^3 \, dx - xy^2 \, dy$ sobre la curva C dada.

23.

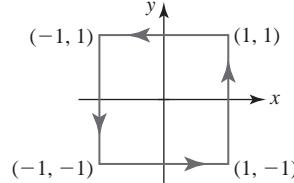


FIGURA 5.9.13 Curva del problema 23

24.

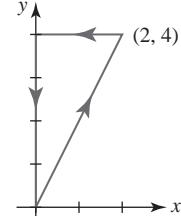


FIGURA 5.9.14 Curva del problema 24

25. Evalúe $\int_{-C} y \, dx - x \, dy$, donde C está dada por $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.
26. Evalúe $\int_{-C} x^2y^3 \, dx + x^3y^2 \, dy$, donde C está dada por $y = x^4$, $-1 \leq x \leq 1$.

En los problemas 27-30, evalúe $\int_C y \, dx + z \, dy + x \, dz$ sobre la curva C dada entre $(0, 0, 0)$ y $(6, 8, 5)$.

27. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$ y de $(2, 3, 4)$ a $(6, 8, 5)$.
28. C definida por $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \frac{5}{4}t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$.

29.

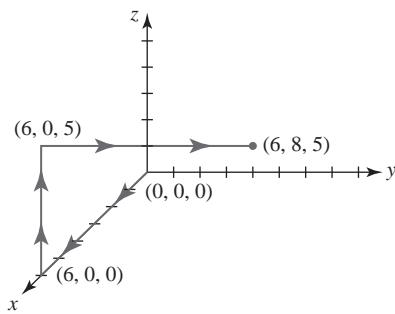


FIGURA 5.9.15 Curva del problema 29

30.

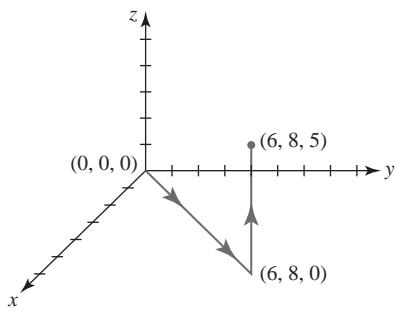


FIGURA 5.9.16 Curva del problema 30

31. Evalúe $\int_C 10x \, dx - 2xy^2 \, dy + 6xz \, dz$ donde C está definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.32. Evalúe $\int_C 3x \, dx - y^2 \, dy + z^2 \, dz$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y C_1 : el segmento de recta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$. C_2 : el segmento de recta de $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$. C_3 : el segmento de recta de $(1, 1, 1)$ a $(0, 0, 0)$.33. Verifique que la integral de línea $\int_C y^2 \, dx + xy \, dy$ tiene el mismo valor sobre C para cada una de las siguientes parametrizaciones:

$$C: x = 2t + 1, y = 4t + 2, 0 \leq t \leq 1$$

$$C: x = t^2, y = 2t^2, 1 \leq t \leq \sqrt{3}$$

$$C: x = \ln t, y = 2 \ln t, e \leq t \leq e^3.$$

34. Considere las tres curvas entre $(0, 0)$ y $(2, 4)$.

$$C_1: x = t, y = 2t, 0 \leq t \leq 2$$

$$C_2: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 2$$

$$C_3: x = 2t - 4, y = 4t - 8, 2 \leq t \leq 3.$$

Demuestre que $\int_{C_1} xy \, ds = \int_{C_3} xy \, ds$, pero $\int_{C_1} xy \, ds \neq \int_{C_2} xy \, ds$. Explique.

Aplicaciones

35. Si $\rho(x, y)$ es la densidad de un alambre (masa por longitud unitaria), entonces $m = \int_C \rho(x, y) \, ds$ es la masa del alambre. Calcule la masa de un alambre que tiene la forma del semicírculo $x = 1 + \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el eje y .

36. Las coordenadas del centro de masa de un alambre con densidad variable están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

donde

$$m = \int_C \rho(x, y) \, ds, \quad M_x = \int_C y\rho(x, y) \, ds, \quad M_y = \int_C x\rho(x, y) \, ds.$$

Encuentre el centro de masa del alambre del problema 35.

Competencia final de la unidad 5

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-16.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-6, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. $\int_{-2}^3 \int_1^5 e^{x^2-y} \, dx \, dy = \int_1^5 \int_{-2}^3 e^{x^2-y} \, dy \, dx$ _____

2. Si $\int f(x, y) \, dx = F(x, y) + c_2(y)$ es una integral parcial, entonces $F_x(x, y) = f(x, y)$. _____

3. Si I es la integral parcial definida $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy$, entonces $\partial I / \partial y = 0$. _____

4. Para toda función continua f , $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx = 2 \int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx$. _____

5. El centro de masa de una lámina que posee simetría yace sobre el eje de simetría de la lámina. _____

6. En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación del plano $y = x$ es la misma. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. $\int_{y^2+1}^5 \left(8y^3 - \frac{5y}{x}\right) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. Si R_1 y R_2 son regiones que no se traslapan tales como $R = R_1 \cup R_2$, $\iint_R f(x, y) dA = 10$ y $\iint_{R_2} f(x, y) dA = -6$, entonces $\iint_{R_1} f(x, y) dA = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\int_{-a}^a \int_{-a}^a dx dy$ produce el área de un $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. La región acotada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36$, $y = -2$, $y = 5$ es una región de tipo $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\int_2^4 f_y(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad, entonces la integral iterada que produce la masa de un sólido acotado por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx dy = \int_{\underline{\hspace{2cm}}}^{\underline{\hspace{2cm}}} \int_{\underline{\hspace{2cm}}}^{\underline{\hspace{2cm}}} f(x, y) dy dx$

8. Las coordenadas rectangulares del punto $(6, 5\pi/3, 5\pi/6)$ dadas en coordenadas esféricas son $\underline{\hspace{2cm}}$.

9. Las coordenadas cilíndricas del punto $(2, \pi/4, 2\pi/3)$ dadas en coordenadas esféricas son $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. La región R acotada por las gráficas $y = 4 - x^2$ y $y = 0$ es tanto del tipo I como del tipo II. Interpretada como una región tipo II, $\iint_R f(x, y) dA = \int_{\underline{\hspace{2cm}}}^{\underline{\hspace{2cm}}} \int_{\underline{\hspace{2cm}}}^{\underline{\hspace{2cm}}} f(x, y) \underline{\hspace{2cm}}$.

11. La ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas es $\underline{\hspace{2cm}}$, en tanto que en coordenadas esféricas su ecuación es $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. La región cuya área es $A = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} r dr d\theta$ es $\underline{\hspace{2cm}}$.

C. Ejercicios

En los problemas 1-14, evalúe la integral dada.

1. $\int (12x^2 e^{-4xy} - 5x + 1) dy$

2. $\int \frac{1}{4 + 3xy} dx$

3. $\int_{y^3}^y y^2 \operatorname{sen} xy dx$

4. $\int_{1/x}^{e^x} \frac{x}{y^2} dy$

5. $\int_0^2 \int_0^{2x} ye^{y-x} dy dx$

6. $\int_0^4 \int_x^4 \frac{1}{16 + x^2} dy dx$

7. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{sen} y}{y} dy dx$

8. $\int_e^{e^2} \int_0^{1/x} \ln x dy dx$

9. $\int_0^5 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} 3r^2 dr d\theta dz$

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} z} \int_0^{\ln x} e^y dy dx dz$

11. $\iint_R 5 dA$, donde R está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 64$

12. $\iint_R dA$, donde R está acotada por la cardioide $r = 1 + \cos \theta$

13. $\iint_R (2x + y) dA$, donde R está acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{2}x$, $x = y^2 + 1$, $y = 0$

14. $\iiint_D x dV$, donde D está acotada por los planos $z = x + y$, $z = 6 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$

15. Empleando coordenadas rectangulares, exprese

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2} dA$$

como una integral iterada, donde R es la región en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$ y $y = x$. No evalúe.

16. Evalúe la integral doble del problema 15 utilizando coordenadas polares.

En los problemas 17 y 18, dibuje la región de integración.

17. $\int_{-2}^2 \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy dx$

18. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz dx dy$

19. Invierta el orden de integración y evalúe

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \cos x^2 dx dy.$$

20. Considere $\iiint_D f(x, y, z) dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por los planos $z = 8 - 2x - y$, $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$. Exprese la integral triple como seis diferentes integrales iteradas.

En los problemas 21 y 22, utilice un sistema de coordenadas apropiado para evaluar la integral dada.

21. $\int_0^2 \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} (4z + 1) dy dx dz$

22. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^4 dz dy dx$

23. Encuentre el área de la superficie de la porción de la gráfica de $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

24. Utilice una integral doble para encontrar el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 5.R.1.

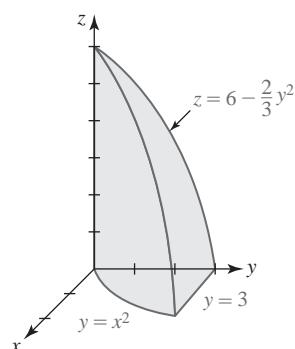


FIGURA 5.R.1 Sólido del problema 24

25. Exprese el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 5.R.2 como una o más integrales iteradas utilizando el orden de integración
a) $dy\ dx$ **b)** $dx\ dy$.
 Elija el inciso **a**) o el inciso **b**) para determinar el volumen.

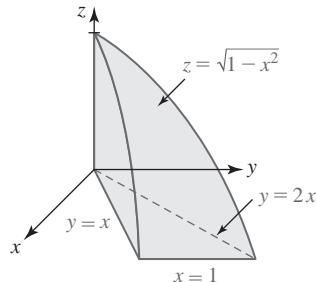


FIGURA 5.R.2 Sólido del problema 25

26. Una lámina tiene la forma de la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$. Encuentre el centro de masa si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen.
 27. Determine el momento de inercia de la lámina descrita en el problema 26 en torno al eje y .
 28. Encuentre el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ utilizando una integral triple en
 a) coordenadas rectangulares, *b)* coordenadas cilíndricas y *c)* coordenadas esféricas.
 29. Determine el volumen del sólido que está acotado entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,
 $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 3$.
 30. Determine el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 5.R.3.

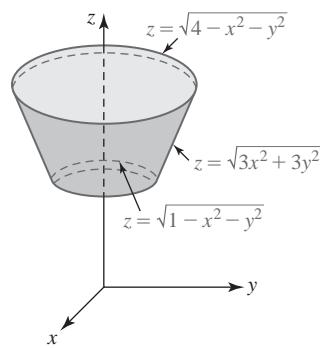


FIGURA 5.R.3 Sólido del problema 30

Secciones cónicas



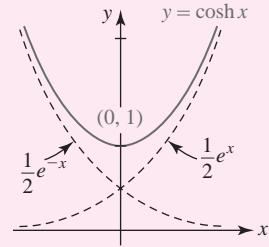
Diagram illustrating the geometric interpretation of derivatives using secant and tangent lines.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= 2x$$



En este apéndice El estudio de las secciones cónicas ha sido realizado desde tiempos antiguos y ha sido fundamental para el desarrollo de las matemáticas modernas.

El cálculo, al igual que otras ramas de las matemáticas, utiliza conceptos geométricos precisos para el desarrollo de múltiples aplicaciones.

En el presente apéndice se aborda el estudio de los conceptos fundamentales relacionados con las secciones cónicas.



Hipatia

Cuando el plano pasa por el vértice del cono obtenemos una **cónica degenerada**: un punto, un par de rectas o una sola recta.

Introducción **Hipatia** es la primera mujer en la historia de las matemáticas sobre la que se tiene un considerable conocimiento. Nacida en 370 d.C., en Alejandría, fue una matemática y filósofa renombrada. Entre sus escritos está *Sobre las cónicas de Apolonio*, el cual popularizó el trabajo de Apolonio (200 a.C.) sobre las curvas que se obtienen al interseccar un doble cono con un plano: el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Vea la FIGURA A.1.1. Al finalizar el periodo griego se desvaneció el interés en las secciones cónicas; después de Hipatia el estudio de estas curvas fue ignorado durante 1 000 años.

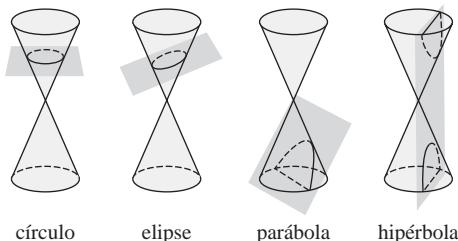


FIGURA A.1.1 Cuatro secciones cónicas

En el siglo xvii, Galileo demostró que ante la ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil sigue un arco parabólico. Casi al mismo tiempo Johannes Kepler propuso la hipótesis de que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses con el Sol en un foco. Esto fue verificado después por Isaac Newton, utilizando los métodos del recién desarrollado cálculo. Kepler experimentó también con las propiedades de reflexión de los espejos parabólicos. Estas investigaciones aceleraron el desarrollo del telescopio reflector. Los griegos supieron poco de estas aplicaciones prácticas: habían estudiado las cónicas por su belleza y propiedades fascinantes. En lugar de utilizar un cono, veremos en esta sección cómo la parábola, la elipse y la hipérbola se definen mediante la distancia. Con el empleo de un sistema de coordenadas rectangular y la fórmula de la distancia, obtendremos ecuaciones para las cónicas. Cada una de estas ecuaciones estará en la forma de una ecuación cuadrática en las variables x y y :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes. La **forma estándar** de un círculo con centro (h, k) y radio r ,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \quad (2)$$

es un caso especial de (1). La ecuación (2) es un resultado directo de la definición de un círculo:

- Un **círculo** se define como el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano de coordenadas que se encuentran a una distancia fija r dada, denominada **radio**, a partir de un punto fijo dado (h, k) , llamado **centro**.

De manera similar, utilizamos la fórmula de la distancia para obtener ecuaciones correspondientes a la parábola, la elipse y la hipérbola.

La gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. Sin embargo, no toda parábola es la gráfica de una función de x . En general, una parábola se define de la siguiente manera:

Definición A.1.1 Parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes de una línea fija L , llamada **directriz**, y un punto fijo F , llamado **foco**.

La línea a través del foco perpendicular a la directriz se denomina **eje** de la parábola. El punto de intersección de la parábola y el eje se conoce como **vértice** de la parábola.

Ecuación de una parábola Para describir una parábola analíticamente, supondremos en aras de la discusión que la directriz L es la recta horizontal $y = -p$ y que el foco es $F(0, p)$. Utilizando la definición A.1.1 y la FIGURA A.1.2, observamos que $d(F, P) = d(P, Q)$ es la misma que

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y simplificar se llega a

$$x^2 = 4py. \quad (3)$$

Afirmamos que (3) es la **forma estándar** de la ecuación de una parábola con foco $F(0, p)$ y directriz $y = -p$. De la misma manera, si la directriz y el foco son, respectivamente, $x = -p$ y $F(p, 0)$, encontramos que la forma estándar para la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 4px. \quad (4)$$

Aunque asumimos que $p > 0$ en la figura A.1.2, esto, desde luego, no necesariamente es el caso. La FIGURA A.1.3 resume la información acerca de las ecuaciones (3) y (4).

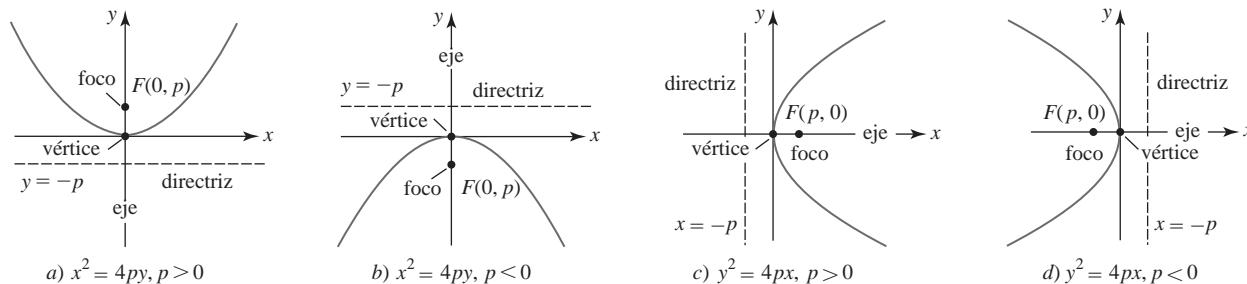


FIGURA A.1.3 Resumen gráfico de las ecuaciones (3) y (4).

EJEMPLO 1 Foco y directriz

Determine el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y = x^2$.

Solución Al comparar la ecuación $y = x^2$ con (3) es factible identificar los coeficientes de y , $4p = 1$ y por ello $p = \frac{1}{4}$. En consecuencia, el foco de la parábola es $(0, \frac{1}{4})$ y su directriz es la recta horizontal $y = -\frac{1}{4}$. La familiar gráfica, junto con el foco y la directriz, se presentan en la FIGURA A.1.4.

Al conocer la forma parabólica básica, lo único que necesitamos saber para dibujar una gráfica *aproximada* de la ecuación (3) o (4) es el hecho de que la gráfica pasa por su vértice $(0, 0)$ y la dirección en la cual se abre la parábola. Para agregar más exactitud a la gráfica es conveniente utilizar el número p determinado por la ecuación en forma estándar para dibujar dos puntos adicionales. Advierta que si se elige $y = p$ en (3), entonces $x^2 = 4p^2$ implica $x = \pm 2p$. De tal modo, $(2p, p)$ y $(-2p, p)$ yacen sobre la gráfica de $x^2 = 4py$. De manera similar, la elección $x = p$ en (2) produce los puntos $(p, 2p)$ y $(p, -2p)$ sobre la gráfica de $y^2 = 4px$. El *segmento de recta* a través del foco con puntos frontera $(2p, p)$, $(-2p, p)$ para las ecuaciones con forma estándar (3), y $(p, 2p)$, $(p, -2p)$ para ecuaciones con la forma estándar (4) recibe el nombre de **cuerda focal**. Por ejemplo, en la figura A.1.4, si elegimos $y = \frac{1}{4}$, entonces $x^2 = \frac{1}{4}$ implica $x = \pm \frac{1}{2}$. Los puntos frontera de la cuerda focal horizontal para $y = x^2$ son $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

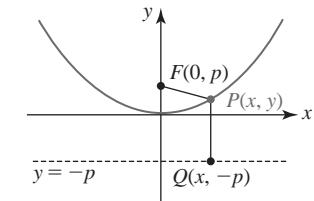


FIGURA A.1.2 Parábola con vértice $(0, 0)$ y foco en el eje y

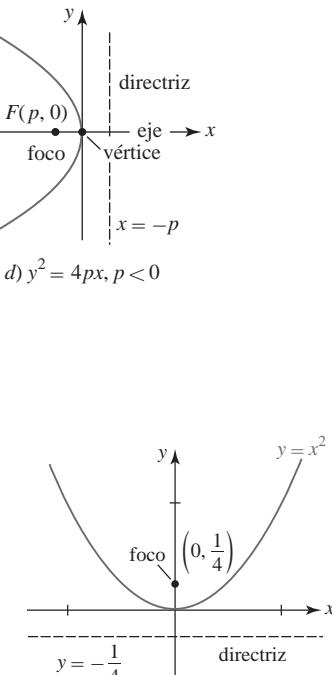
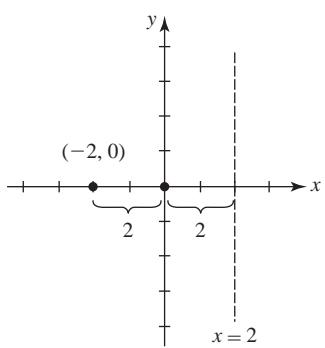


FIGURA A.1.4 Gráfica de la ecuación del ejemplo 1

► Sugerencia de graficación para las ecuaciones (3) y (4).



EJEMPLO 2 Determinación de la ecuación de una parábola

Determine la ecuación en forma estándar de la parábola con directriz $x = 2$ y foco $(-2, 0)$. Grafique.

Solución En la FIGURA A.1.5 hemos graficado la directriz y el foco, y nos hemos dado cuenta, por su ubicación, que la ecuación que buscamos es de la forma $y^2 = 4px$. Puesto que $p = -2$, la parábola se abre hacia la izquierda y por ello

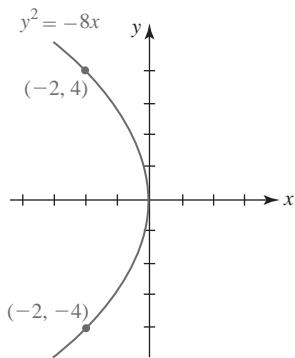
$$y^2 = 4(-2)x \quad \text{o} \quad y^2 = -8x.$$

Como mencionamos en la discusión precedente a este ejemplo, si sustituye $x = p = -2$ en la ecuación $y^2 = -8x$ es posible que encontremos dos puntos sobre su gráfica. De $y^2 = -8(-2) = 16$ se obtiene $y = \pm 4$. Como se muestra en la FIGURA A.1.6, la gráfica pasa por $(0, 0)$ así como a través de los puntos frontera $(-2, -4)$ y $(-2, 4)$ de la cuerda focal. ■

■ Vértice trasladado a (h, k) En general, la **forma estándar** de la ecuación de una parábola con vértice (h, k) está dada por

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (5)$$

$$\text{o} \quad (y - k)^2 = 4p(x - h). \quad (6)$$



Las parábolas definidas por estas ecuaciones son idénticas en forma a las parábolas definidas por las ecuaciones (3) y (4) debido a que las ecuaciones (5) y (6) representan transformaciones rígidas (desplazamientos hacia arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha) de las gráficas de (3) y (4). Por ejemplo, la parábola $(x + 1)^2 = 8(y - 5)$ tiene vértice $(-1, 5)$. Su gráfica es la de $x^2 = 8y$ desplazada horizontalmente una unidad hacia la izquierda seguida de un desplazamiento vertical hacia arriba de cinco unidades.

En cada una de las ecuaciones, (3) y (4) o (5) y (6), la *distancia* del vértice al foco, así como la distancia del vértice a la directriz, es $|p|$.

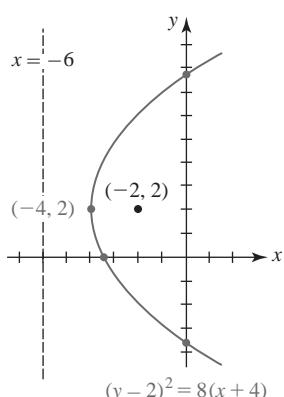
EJEMPLO 3 Determinación completa

Encuentre el vértice, foco, eje, directriz y gráfica de la parábola

$$y^2 - 4y - 8x - 28 = 0. \quad (7)$$

Solución Con el fin de escribir la ecuación en una de las formas estándares, completamos el cuadrado en y :

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 4 &= 8x + 28 + 4 && \leftarrow \text{sume 4 a ambos lados} \\ (y - 2)^2 &= 8(x + 4). \end{aligned}$$



Al comparar la última ecuación con (6) concluimos que el vértice es $(-4, 2)$ y que $4p = 8$ o $p = 2$. De acuerdo con $p = 2 > 0$, la parábola se abre hacia la derecha y el foco está a 2 unidades a la derecha del vértice en $(-2, 2)$. La directriz es la recta vertical a 2 unidades a la izquierda del vértice $x = -6$. Una vez que sabemos que la parábola se abre hacia la derecha desde el punto $(-4, 2)$, eso nos indica que la gráfica tiene intersecciones. Para encontrar la intersección con el eje x se deja $y = 0$ en (7) y se determina de inmediato que $x = -\frac{7}{2}$. La intersección con x es $(-\frac{7}{2}, 0)$. Para determinar la intersección con y dejamos $x = 0$ en (7) y se encuentra a partir de la fórmula cuadrática que $y = 2 \pm 4\sqrt{2}$ o $y \approx 7.66$ y $y \approx -3.66$. Las intersecciones con y son $(0, 2 - 4\sqrt{2})$ y $(0, 2 + 4\sqrt{2})$. Al juntar toda esta información obtenemos la gráfica de la FIGURA A.1.7. ■

La elipse se define como sigue:

Definición A.1.2 Elipse

Una **elipse** es un conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano tal que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de recta que une a F_1 y F_2 se denomina **centro** de la elipse.

Si P es un punto de la elipse y $d_1 = d(F_1, P)$, $d_2 = d(F_2, P)$ son las distancias desde los focos hasta P , entonces la definición A.1.2 afirma que

$$d_1 + d_2 = k, \quad (8)$$

donde $k > 0$ es una constante.

En un nivel práctico (8) puede utilizarse para dibujar una elipse. La FIGURA A.1.8 muestra que si una cuerda de longitud k se une a un papel por medio de dos tachuelas, entonces puede trazarse una elipse insertando un lápiz contra la cuerda y moviéndolo de tal manera que la cuerda permanezca tirante.

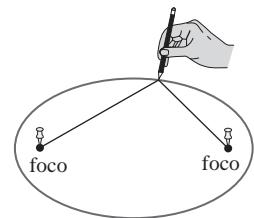


FIGURA A.1.8 Una manera de dibujar una elipse

Ecuación de una elipse Por conveniencia elegiremos $k = 2a$ y pondremos los focos sobre el eje x con coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$. Vea la FIGURA A.1.9. De (8) se concluye que

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \quad (9)$$

Al elevar al cuadrado (9), simplificar y elevar al cuadrado otra vez obtenemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (10)$$

En la figura A.1.9 advertimos que los puntos F_1 , F_2 y P forman un triángulo. Como la suma de las longitudes de cualesquier dos lados de un triángulo es mayor que el lado restante, tenemos $2a > 2c$ o $a > c$. En consecuencia, $a^2 - c^2 > 0$. Cuando dejamos $b^2 = a^2 - c^2$, entonces (8) se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Al dividir esta última ecuación entre a^2b^2 se llega a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (11)$$

La ecuación (11) se denomina la **forma estándar** de la ecuación de una elipse centrada en $(0, 0)$ con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde c está definida por $b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b > 0$.

Si los focos se ubican sobre el eje y , entonces la repetición del análisis anterior conduce a

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (12)$$

La ecuación (12) se llama la **forma estándar** de la ecuación de una elipse centrada en $(0, 0)$ con focos $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde c está definida por $b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b > 0$.

Ejes mayor y menor El **eje mayor** de una elipse es el segmento de recta que pasa por su centro, contiene a los focos y con puntos frontera sobre la elipse. Para una elipse con ecuación estándar (11), el eje mayor es horizontal mientras que para (12) el eje mayor es vertical. El segmento de recta que pasa por el centro, perpendicular al eje mayor, y con puntos frontera sobre la elipse recibe el nombre de **eje menor**. Los dos puntos frontera del eje mayor se denominan **vértices** de la elipse. Para (11) los vértices son las intersecciones con el eje x . Si dejamos $y = 0$ en (11) da $x = \pm a$. Los vértices son entonces $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Para (12) los vértices son las intersecciones con el eje y $(0, -a)$ y $(0, a)$. Para la ecuación (11), los puntos frontera del eje menor son $(0, -b)$ y $(0, b)$; para (12) los puntos frontera son $(-b, 0)$ y $(b, 0)$. Para (11) o (12), la **longitud del eje mayor** es $a - (-a) = 2a$; la longitud del eje menor corresponde a $2b$. Puesto que $a > b$, el eje mayor de una elipse es siempre mayor que el eje menor.

Un resumen de esta información para las ecuaciones (11) y (12) aparece en la FIGURA A.1.10.

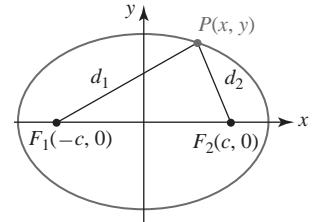


FIGURA A.1.9 Elipse con centro $(0, 0)$ y focos en el eje x

EJEMPLO 4 Vértices, focos, gráfica

Determine los vértices y focos de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 3y^2 = 27$. Grafique.

Solución Si divide ambos lados de la igualdad entre 27, la forma estándar de la ecuación es

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Advierta que $9 > 3$ y por ello se identifica la ecuación con (12). De $a^2 = 9$ y $b^2 = 3$ obtenemos $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$. El eje mayor es vertical con puntos frontera o vértices $(0, -3)$ y $(0, 3)$. El eje menor es horizontal con puntos frontera $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Desde luego, los vértices también

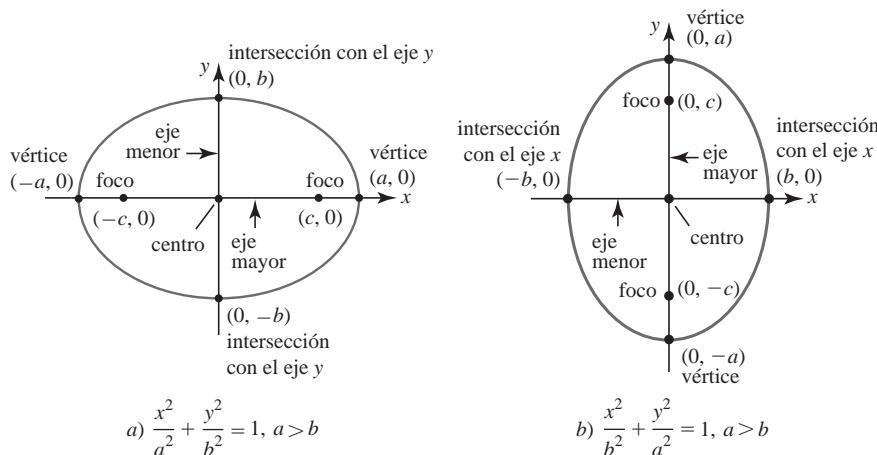


FIGURA A.1.10 Resumen gráfico de las ecuaciones (11) y (12)

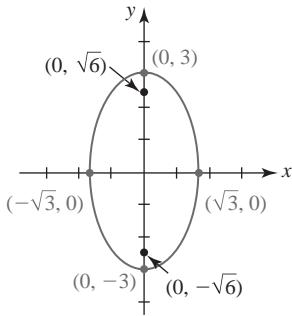


FIGURA A.1.11 Elipse del ejemplo 4

se encuentran en las intersecciones con el eje y y los puntos frontera del eje menor son las intersecciones con el eje x. En este caso, para encontrar los focos recurrimos a $b^2 = a^2 - c^2$ o $c^2 = a^2 - b^2$ para escribir $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Con $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, obtenemos $c = \sqrt{6}$. En consecuencia, los focos están sobre el eje y en $(0, -\sqrt{6})$ y $(0, \sqrt{6})$. La gráfica se presenta en la FIGURA A.1.11.

■ Centro trasladado a (h, k) Cuando el centro está en (h, k) , la forma estándar de la ecuación de una elipse es

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

$$\text{o} \quad \frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1. \quad (14)$$

Las elipses definidas por estas ecuaciones son idénticas en forma a las elipses definidas por las ecuaciones (11) y (12), puesto que las ecuaciones (13) y (14) representan transformaciones rígidas de las gráficas (11) y (12). Por ejemplo, la gráfica de la elipse

$$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1$$

con centro $(1, -3)$ es la gráfica de $x^2/9 + y^2/16 = 1$ desplazada horizontalmente 1 unidad hacia la derecha seguida por un desplazamiento vertical hacia abajo de 3 unidades.

No es una buena idea memorizar fórmulas para los vértices y focos de una elipse con centro (h, k) . Todo es lo mismo que antes, a , b y c son positivos, $a > b$, $a > c$ y $c^2 = a^2 - b^2$. Usted puede ubicar los vértices, focos y puntos frontera del eje menor utilizando el hecho de que a es la distancia del centro al vértice, b es la distancia del centro a un punto extremo sobre el eje menor y c es la distancia del centro a un foco.

EJEMPLO 5 Determinación completa

Encuentre los vértices y focos de la elipse $4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0$. Grafique.

Solución Para escribir la ecuación dada en una de las formas estándares (13) o (14) se completa el cuadrado en x y en y . Para hacerlo, recuerde que se desean los coeficientes de los términos cuadráticos x^2 y y^2 iguales a 1. Si factoriza 4 de los términos x y 16 de los términos y , obtiene

$$4(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -84 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 9$$

o $4(x - 1)^2 + 16(y - 3)^2 = 64$. La última ecuación produce la forma estándar

$$\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1. \quad (15)$$

En (15) identificamos $a^2 = 16$ o $a = 4$, $b^2 = 4$ o $b = 2$, y $c^2 = a^2 - b^2 = 12$, o $c = 2\sqrt{3}$. El eje mayor es horizontal y yace sobre la recta horizontal $y = 3$ que pasa por el centro $(1, 3)$. Corresponde al segmento de recta horizontal punteado de la FIGURA A.1.12. Al medir $a = 4$ unidades a la izquierda y luego a la derecha del centro a lo largo de la recta $y = 3$, llegamos a los vértices $(-3, 3)$ y $(5, 3)$. Al medir $b = 2$ unidades tanto arriba como abajo de la recta vertical $x = 1$ a través del centro llegamos a los puntos frontera $(1, 1)$ y $(1, 5)$ del eje menor. El eje menor es el segmento de recta vertical punteada de la figura A.1.12. Por último, al medir $c = 2\sqrt{3}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro a lo largo de $y = 3$ obtenemos los focos $(1 - 2\sqrt{3}, 3)$ y $(1 + 2\sqrt{3}, 3)$. ■

La definición de una hipérbola es básicamente la misma que la definición de la elipse con sólo una excepción: la palabra *suma* se sustituye por la palabra *diferencia*.

Definición A.1.3 Hipérbola

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano tal que la diferencia de las distancias entre P y los puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 reciben el nombre de **focos**. El punto medio del segmento de recta que une los puntos F_1 y F_2 se denomina **centro** de la hipérbola.

Si P es un punto sobre la hipérbola, entonces

$$|d_1 - d_2| = k, \quad (16)$$

donde $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$. Al proceder como para la elipse, ubicamos los focos sobre el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ como se muestra en la FIGURA A.1.13 y se elige la constante k igual a $2a$ por conveniencia algebraica. Como se ilustra en la figura, la gráfica de una hipérbola consta de dos **ramas**.

Hipérbola con centro $(0, 0)$ Si aplica la fórmula de la distancia y el álgebra usuales a (16) se obtiene la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola centrada en $(0, 0)$ con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (17)$$

Cuando los focos yacen sobre el eje x , la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola centrada en $(0, 0)$ con focos $(0, -c)$ y $(0, c)$ es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (18)$$

Tanto en (17) como en (18), c está definida por $b^2 = c^2 - a^2$ y $c > a$.

Para la hipérbola (a diferencia de la elipse) tenga en mente que en (17) y (18) no hay relación entre los tamaños relativos de a y b ; en vez de eso, a^2 siempre es el denominador del *término positivo* y la ordenada al origen *siempre* tiene $\pm a$ como una coordenada.

Ejes transversal y conjugado El segmento de recta con puntos frontera sobre la hipérbola y que yace sobre la recta que pasa por los focos se denomina **eje transversal**; sus puntos frontera reciben el nombre de **vértices** de la hipérbola. Para la hipérbola descrita por la ecuación (17), el eje transversal yace sobre el eje x . Por tanto, las coordenadas de los vértices son las intersecciones con el eje x . Si deja $y = 0$ obtiene $x^2/a^2 = 1$, o $x = \pm a$. De tal manera, como se muestra en la FIGURA A.1.14, los vértices son $(-a, 0)$ y $(a, 0)$; la **longitud del eje transversal** es $2a$. Advierta que dejando $y = 0$ en (18) obtenemos $-y^2/b^2 = 1$ o $y^2 = -b^2$, la cual no tiene soluciones reales. En consecuencia, la gráfica de cualquier ecuación en esa forma no tiene intersecciones con el eje y . De cualquier modo, los números $\pm b$ son importantes. El segmento de recta que pasa por el

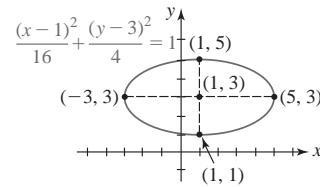


FIGURA A.1.12 Elipse del ejemplo 5

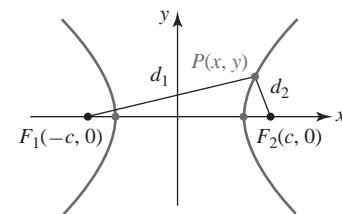


FIGURA A.1.13 Hipérbola con centro $(0, 0)$ y focos en el eje x

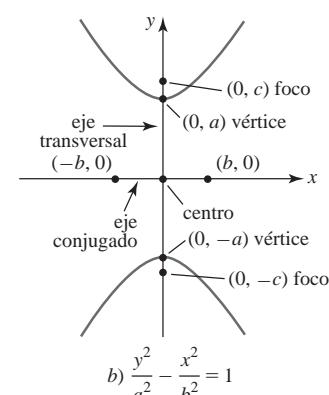
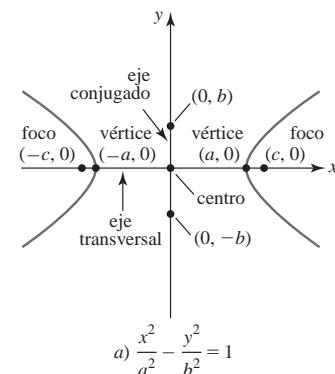


FIGURA A.1.14 Resumen gráfico de las ecuaciones (17) y (18)

centro de la hipérbola perpendicular al eje transversal y con puntos frontera $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado**. De manera similar, la gráfica de una ecuación en forma estándar (18) no tiene intersecciones con el eje x . El eje conjugado (18) es el segmento de recta con puntos frontera $(-b, 0)$ y $(b, 0)$.

Esta información para las ecuaciones (17) y (18) se resume en la figura A.1.14.

I Asíntotas Toda hipérbola posee un par de asíntotas inclinadas que pasan por su centro. Estas asíntotas son indicativas del comportamiento final, y como tales son una ayuda invaluable en el trazado de la gráfica de una hipérbola. Al resolver (17) con respecto a y en términos de x obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$ o cuando $x \rightarrow \infty$, $a^2/x^2 \rightarrow 0$, entonces $\sqrt{1 - a^2/x^2} \rightarrow 1$. Por tanto, para valores grandes de $|x|$, los puntos sobre la gráfica de la hipérbola son cercanos a los puntos sobre estas rectas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (19)$$

Por un análisis similar encontramos que las asíntotas inclinadas para (18) son

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x. \quad (20)$$

Cada par de asíntotas se interseca en el origen, que es el centro de la hipérbola. Advierta, también, en la FIGURA A.1.15a) que las asíntotas son simplemente las *diagonales extendidas* de un rectángulo de ancho $2a$ (la longitud del eje transversal) y altura $2b$ (la longitud del eje conjugado) en la figura A.1.15b) las asíntotas son las diagonales extendidas de un rectángulo de ancho $2b$ y altura $2a$.

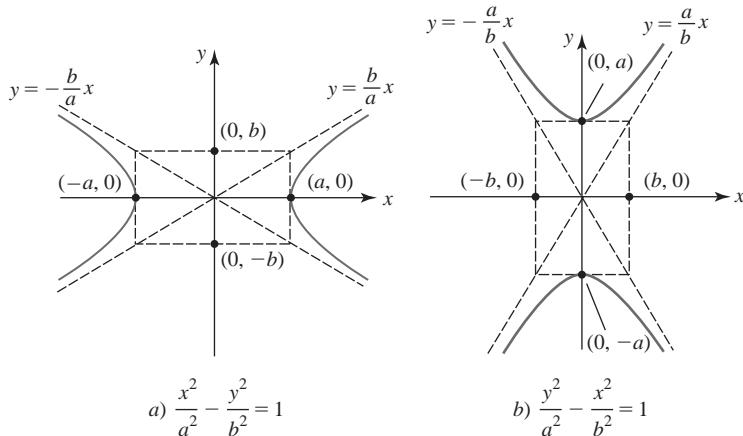


FIGURA A.1.15 Hipérbolas (17) y (18) con asíntotas inclinadas

Recomendamos al lector que *no* memorice las ecuaciones (19) y (20). Hay un método sencillo para obtener las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, puesto que $y = \pm \frac{b}{a}x$ es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (21)$$

Note que la última ecuación en (21) se factoriza como la diferencia de dos cuadrados:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Este es un dispositivo mnemónico o de memoria. No tiene importancia geométrica.

► Al igualar a cero cada factor y resolver para y obtenemos una ecuación de una asíntota. La ecuación (21) es simplemente el lado izquierdo de la forma estándar de la ecuación de una hipérbola dada en (17). De manera similar, para obtener la asíntota de (18) sólo se sustituye 1 por 0 en la forma estándar, se factoriza $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 0$, y se resuelve para y .

EJEMPLO 6 Vértices, focos, asíntotas, gráficas

Determine los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 = 225$. Grafique.

Solución Primero escribimos la ecuación en forma estándar al dividir ambos lados de la igualdad entre 225:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. \quad (22)$$

A partir de esta ecuación se advierte que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, y por ello $a = 5$ y $b = 3$. Por tanto, los vértices son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Puesto que $b^2 = c^2 - a^2$ implica $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos $c^2 = 34$ y por ello los focos son $(-\sqrt{34}, 0)$ y $(\sqrt{34}, 0)$. Para determinar las asíntotas inclinadas se recurre a la forma estándar (22) con 1 sustituido por 0:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0 \quad \text{se factoriza como} \quad \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3}\right) = 0.$$

Al igualar a 0 cada factor y resolver para y obtenemos las asíntotas $y = \pm 3x/5$. Trazamos los vértices y la gráfica de las dos rectas que pasan por el origen. Ambas ramas de la hipérbola deben volverse arbitrariamente cercanas a las asíntotas cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Vea la FIGURA A.1.16. ■

■ Centro trasladado a (h, k) Cuando el centro de la hipérbola es (h, k) , los análogos de la **forma estándar** de las ecuaciones (17) y (18) son, a su vez,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

$$\text{y} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \quad (24)$$

Como en (17) y (18), los números a^2 , b^2 y c^2 están relacionados mediante $b^2 = c^2 - a^2$.

El lector puede localizar los vértices y focos utilizando el hecho de que a es la distancia del centro a un vértice y c es la distancia del centro a un foco. Es posible obtener las asíntotas inclinadas de (23) factorizando

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0 \quad \text{como} \quad \left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0.$$

De manera similar, las asíntotas de (24) se obtienen al factorizar $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 0$, al igualar cada factor a cero y resolver para y en términos de x . Como una verificación de su trabajo, recuerde que (h, k) debe ser un punto que yace en cada asíntota.

EJEMPLO 7 Determinación completa

Encuentre el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Grafique.

Solución Antes de completar el cuadrado en x y y , factorizamos el 4 de los dos términos en x y -1 de los dos términos en y de manera que el coeficiente en cada expresión es 1. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) &= 4 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\ 4(x - 1)^2 - (y + 2)^2 &= 4 \\ \frac{(x - 1)^2}{1} - \frac{(y + 2)^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Ahora vemos que el centro es $(1, -2)$. Puesto que el término en la forma estándar que implica a x tiene el coeficiente positivo, el eje transversal es horizontal a lo largo de la recta $y = -2$ e identificamos $a = 1$ y $b = 2$. Los vértices están a una unidad a la izquierda y a la derecha del centro en $(0, -2)$ y $(2, -2)$, respectivamente. De $b^2 = c^2 - a^2$ resulta $c^2 = a^2 + b^2 = 5$, por lo que $c = \sqrt{5}$. En consecuencia, los focos están a $\sqrt{5}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro $(1, -2)$ en $(1 - \sqrt{5}, -2)$ y $(1 + \sqrt{5}, -2)$.

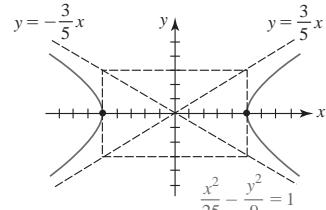


FIGURA A.1.16 Hipérbola del ejemplo 6

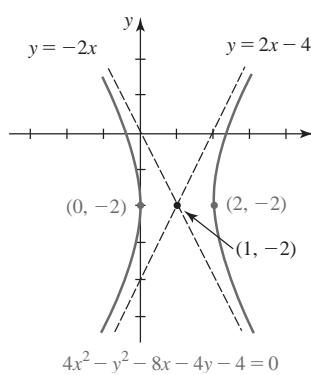


FIGURA A.1.17 Hipérbola del ejemplo 7

Para encontrar las asíntotas, resolvemos

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 0 \quad \text{o} \quad \left(x-1 - \frac{y+2}{2}\right)\left(x-1 + \frac{y+2}{2}\right) = 0$$

para y . De $y+2 = \pm 2(x-1)$ encontramos que las asíntotas son $y = -2x$ y $y = 2x - 4$. Observe que al sustituir $x = 1$, ambas ecuaciones producen $y = -2$, lo que muestra que ambas rectas pasan por el centro. Ahora ubicamos el centro, trazamos los vértices y graficamos las asíntotas. Como se muestra en la FIGURA A.1.17, la gráfica de la hipérbola pasa por los vértices y se vuelve cada vez más cercana a las asíntotas conforme $x \rightarrow \pm\infty$.

■ **Excentricidad** A cada sección cónica se asocia un número e llamado **excentricidad**.

Definición A.1.4 Excentricidad

La **excentricidad** de una elipse y una hipérbola es

$$e = \frac{c}{a}.$$

Desde luego, debe tener en mente que para una elipse $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y para una hipérbola $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. A partir de las desigualdades $0 < \sqrt{a^2 - b^2} < a$ y $0 < a < \sqrt{a^2 + b^2}$, observamos, a su vez, que

- la excentricidad de una elipse satisface $0 < e < 1$, y
- la excentricidad de una hipérbola satisface $e > 1$.

EJEMPLO 8 Excentricidad

Determine la excentricidad de

a) la elipse en el ejemplo 5,

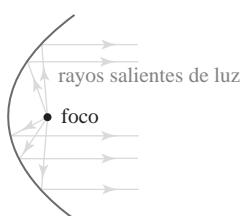
b) la hipérbola en el ejemplo 7.

Solución

a) En la solución de ejemplo 5 encontramos que $a = 4$ y $c = 2\sqrt{3}$. En consecuencia, la excentricidad de una elipse es $e = (2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$.

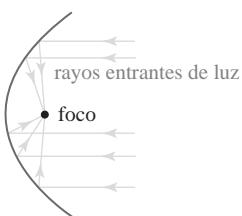
b) En el ejemplo 7 encontramos que $a = 1$ y $c = \sqrt{5}$. Por consiguiente, la excentricidad de la hipérbola es $e = \sqrt{5}/1 \approx 2.23$.

superficie reflectora



a) Los rayos emitidos en el foco se reflejan como rayos paralelos

superficie reflectora



b) Los rayos entrantes se reflejan en el foco

FIGURA A.1.18 Superficie reflectora parabólica

La **excentricidad** es un indicador de la forma de una elipse o una hipérbola. Si $e \approx 0$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$ y en consecuencia $a \approx b$. Esto significa que la elipse es casi circular. Por otro lado, si $e \approx 1$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ y por ello $b \approx 0$. Esto quiere decir que cada foco es cercano a un vértice y debido a ello la elipse es elongada. Vea la FIGURA A.1.18. Las formas de una hipérbola en los dos casos extremos $e \approx 1$ y e mucho mayor que 1 se ilustran en la FIGURA A.1.19.

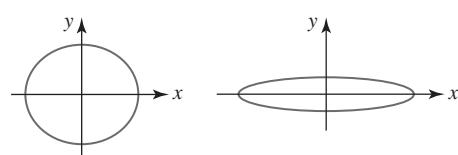
a) e cercana a 1b) e cercana a 1

FIGURA A.1.19 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una hipérbola

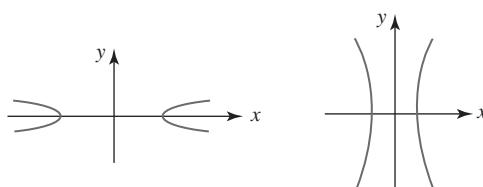
a) e cercana a 1b) e mucho mayor que 1

FIGURA A.1.19 Efecto de la excentricidad sobre la forma de una hipérbola

■ **Aplicaciones** La parábola tiene muchas propiedades que la hacen apropiada en ciertas aplicaciones. Las superficies reflectoras se diseñan para aprovechar la propiedad de reflexión de las paráboles. Estas superficies, llamadas **paraboloides**, son tridimensionales y se forman rotando una parábola alrededor de su eje. Como se ilustra en la FIGURA A.1.20, los rayos de luz (o señales

electrónicas) provenientes de una fuente puntual ubicada en el foco de una superficie reflectora parabólica se reflejarán a lo largo de líneas paralelas al eje. Ésta es la idea detrás del diseño de reflectores de búsqueda, algunas luces de destellos y los platos satelitales de ubicación. En sentido inverso, si los rayos de luz entrantes son paralelos al eje de una parábola, se reflejarán en la superficie a lo largo de líneas que pasan por el foco. Los haces de luz de un objeto distante tal como una galaxia son esencialmente paralelos, y por eso cuando estos haces entran a un telescopio reflector son reflejados por un espejo parabólico hacia el foco, donde suele ubicarse una cámara para capturar la imagen a lo largo del tiempo. Un disco parabólico satelital doméstico opera bajo el mismo principio que el telescopio reflector; la señal digital de un satélite de televisión es capturada en el foco del disco por un receptor.

Las elipses tienen una propiedad de reflexión análoga a la parábola. Es posible demostrar que si una fuente luminosa o sonora se ubica en uno de los focos de una elipse, entonces todos los rayos u ondas se reflejarán desde la elipse hacia el otro foco. Vea la FIGURA A.1.21. Por ejemplo, si un techo es elíptico con dos focos sobre (o cerca) del piso, pero con una considerable distancia entre ellos, entonces cualquier susurro en uno de los focos se escuchará en el otro. Algunas famosas “galerías de los susurros” son el Statuary Hall en el Capitolio en Washington, D.C., el Mormon Tabernacle en Salt Lake City y la Catedral de San Pablo en Londres.

Mediante su ley de la gravedad universal, Isaac Newton fue el primero en demostrar la primera ley del movimiento planetario de Kepler. La órbita de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los focos.

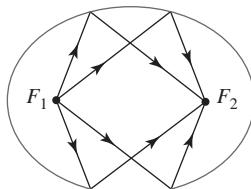


FIGURA A.1.21 Propiedad de reflexión de una elipse



Telescopio reflector de 200 pulg en Monte Palomar



Disco de satélite de TV

EJEMPLO 9 Excentricidad de la órbita terrestre

La distancia del perihelio de la Tierra (la distancia mínima entre la Tierra y el Sol) es aproximadamente de 9.16×10^7 mi, y su distancia del afelio (la distancia más grande entre la Tierra y el Sol) es casi de 9.46×10^7 mi. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita elíptica de la Tierra?

Solución Asumimos que la órbita de la Tierra es como se ilustra en la FIGURA A.1.22. De acuerdo con la figura advertimos que

$$a - c = 9.16 \times 10^7$$

$$a + c = 9.46 \times 10^7.$$

La solución de este sistema de ecuaciones produce $a = 9.31 \times 10^7$ y $c = 0.15 \times 10^7$. De tal modo, la excentricidad $e = c/a$ es

$$e = \frac{0.15 \times 10^7}{9.31 \times 10^7} \approx 0.016.$$

Las órbitas de siete de los planetas tienen excentricidades menores que 0.1 y, en consecuencia, las órbitas no son muy alejadas de la circular. Mercurio es una excepción. Muchos de los asteroides y cometas tienen órbitas altamente excéntricas. La órbita del asteroide Hidalgo es una de las más excéntricas, con $e = 0.66$. Otro notable caso es la órbita del cometa Halley. Vea el problema 79 en los ejercicios de este apéndice.

La hipérbola tiene varias aplicaciones importantes que implican técnicas de sonido. En particular, varios sistemas de navegación utilizan a las hipérbolas de la siguiente manera: dos transmisores de radio fijos a una distancia conocida uno del otro transmiten señales sincronizadas. La diferencia en los tiempos de recepción por parte de un navegante determina la diferencia $2a$ de las distancias del navegante a los dos transmisores. Esta información ubica al navegante en algún



Statuary Hall en Washington, D.C.

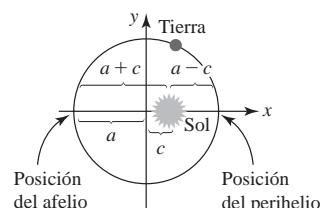


FIGURA A.1.22 Interpretación gráfica de datos en el ejemplo 9

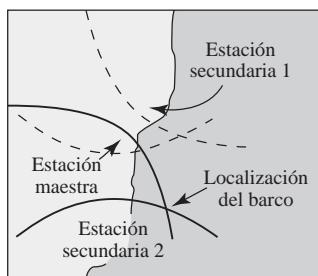


FIGURA A.1.23 La idea detrás de LORAN

lugar sobre la hipérbola con focos en los transmisores y fija la diferencia en distancias desde los focos en una cantidad igual a $2a$. Al utilizar dos conjuntos de señales obtenidas de una estación maestra apareada con cada una de dos estaciones secundarias, el sistema de navegación de largo alcance LORAN ubica a un barco o a un avión en la intersección de las dos hipérbolas. Vea la FIGURA A.1.23.

Hay muchas otras aplicaciones de la hipérbola. Como se muestra en la FIGURA A.1.24a), un avión que vuela a una velocidad supersónica paralela al nivel del suelo deja una “huella” sónica hipérbólica sobre el suelo. Al igual que la parábola y la elipse, una hipérbola también posee una propiedad reflectora. El telescopio reflector Cassegrain presentado en la figura A.1.24b) utiliza un espejo secundario hipérbólico convexo para reflejar un rayo de luz de regreso a través de un hoyo en un ocular (o cámara) detrás del espejo primario parabólico. Esta construcción del telescopio aprovecha el hecho de que un rayo de luz dirigido a lo largo de una línea a través de uno de los focos de un espejo hipérbólico se reflejará sobre una línea que pasa por el otro foco.

Las órbitas de objetos en el Universo pueden ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas. Cuando un objeto pasa cerca del Sol (o un planeta), no necesariamente es capturado por el campo gravitacional del cuerpo más grande. Bajo ciertas condiciones, el objeto toma una cantidad fraccionaria de la energía orbital de este cuerpo mucho mayor y la órbita de “honda” resultante del objeto cuando pasa por el Sol es hiperbólica. Vea la figura A.1.24c).

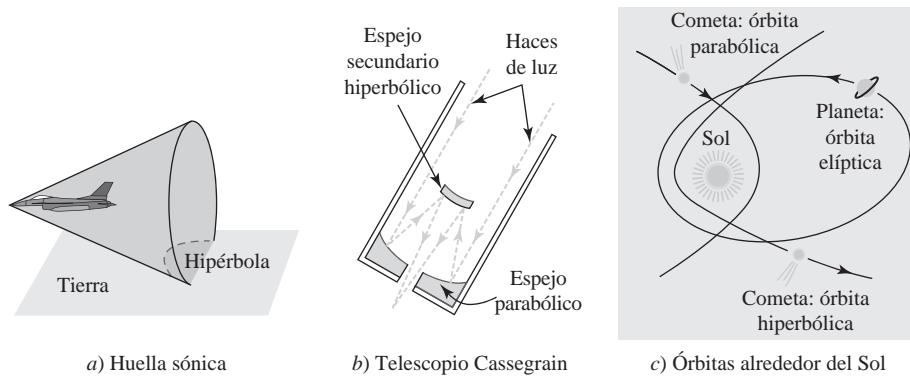


FIGURA A.1.24 Aplicaciones de hipérbolas

PROBLEMAS A.1

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-17.

Fundamentos

En los problemas 1-14, encuentre el vértice, el foco, la directriz y el eje de la parábola dada. Grafique la parábola.

1. $y^2 = 4x$

2. $y^2 = \frac{7}{2}x$

3. $x^2 = -16y$

4. $x^2 = \frac{1}{10}y$

5. $(y - 1)^2 = 16x$

6. $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$

7. $(x + 5)^2 = -4(y + 1)$

8. $(x - 2)^2 + y = 0$

9. $y^2 + 12y - 4x + 16 = 0$ 10. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$

11. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$ 12. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$

13. $y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$ 14. $y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$

En los problemas 15-22, encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

15. Foco, $(0, 7)$, directriz $y = -7$

16. Foco $(-4, 0)$, directriz $x = 4$

17. Foco $(\frac{5}{2}, 0)$, vértice $(0, 0)$

18. Foco $(0, -10)$, vértice $(0, 0)$

19. Foco $(1, -7)$, directriz $x = -5$

20. Foco $(2, 3)$, directriz $y = -3$

21. Vértice $(0, 0)$, que pasa por $(-2, 8)$, eje a lo largo del eje y

22. Vértice $(0, 0)$, que pasa por $(1, \frac{1}{4})$, eje a lo largo del eje x

En los problemas 23 y 24, encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la parábola dada.

23. $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$

24. $(x - 1)^2 = -2(y - 1)$

En los problemas 25-38, encuentre el centro, foco, vértices, puntos frontera del eje menor y la excentricidad de la elipse dada. Grafique la elipse.

25. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$

26. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

27. $9x^2 + 16y^2 = 144$

28. $2x^2 + y^2 = 4$

29. $\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$ 30. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$
 31. $(x+5)^2 + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ 32. $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{81} = 1$
 33. $4x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 4$
 34. $36(x+2)^2 + (y-4)^2 = 72$
 35. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$
 36. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$
 37. $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$
 38. $12x^2 + 4y^2 - 24x - 4y + 1 = 0$

En los problemas 39-48, encuentre una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

39. Vértices $(\pm 5, 0)$, focos $(\pm 3, 0)$
 40. Vértices $(\pm 9, 0)$, focos $(\pm 2, 0)$
 41. Vértices $(-3, -3), (5, -3)$, puntos frontera del eje menor $(1, -1), (1, -5)$
 42. Vértice $(1, -6), (1, 2)$, puntos frontera del eje menor $(-2, -2), (4, -2)$
 43. Focos $(\pm \sqrt{2}, 0)$, longitud del eje menor 6
 44. Focos $(0, \pm \sqrt{5})$, longitud del eje menor 16
 45. Focos $(0, \pm 3)$, que pasa por $(-1, 2\sqrt{2})$
 46. Vértices $(\pm 5, 0)$, que pasa por $(\sqrt{5}, 4)$
 47. Centro $(1, 3)$, un foco $(1, 0)$, un vértice $(1, -1)$
 48. Puntos frontera del eje mayor $(2, 4), (13, 4)$, un foco $(4, 4)$

En los problemas 49-62, encuentre el centro, focos, vértices, asíntotas y excentricidad de la hipérbola dada. Grafique la hipérbola.

49. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ 50. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$
 51. $y^2 - 5x^2 = 20$ 52. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$
 53. $\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$ 54. $\frac{(x+2)^2}{10} - \frac{(y+4)^2}{25} = 1$
 55. $\frac{(y-4)^2}{36} - x^2 = 1$ 56. $\frac{(y-\frac{1}{4})^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$
 57. $25(x-3)^2 - 5(y-1)^2 = 125$
 58. $10(x+1)^2 - 2(y-\frac{1}{2})^2 = 100$
 59. $5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$
 60. $16x^2 - 25y^2 - 256x - 150y + 399 = 0$
 61. $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$
 62. $2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$

En los problemas 63-70, encuentre una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

63. Focos $(0, \pm 4)$, un vértice $(0, -2)$
 64. Focos $(0, \pm 3)$, un vértice $(0, -\frac{3}{2})$
 65. Centro $(1, -3)$, un foco $(1, -6)$, un vértice $(1, -5)$
 66. Vértices $(2, 5), (2, -1)$, un foco $(2, 7)$

67. Centro $(-1, 3)$, un vértice $(1, -4)$ que pasa por $(-5, 3 + \sqrt{5})$
 68. Centro $(3, -5)$, un vértice $(3, -2)$ que pasa por $(1, -1)$
 69. Centro (24) , un vértice (25) , una asíntota $2y - x - 6 = 0$
 70. Excentricidad $\sqrt{10}$, puntos frontera del eje conjugado $(-5, 4), (-5, 10)$

Aplicaciones

71. Un gran reflector se diseña de manera que una sección transversal a través de su eje es una parábola y la fuente luminosa se encuentra en el foco. Determine la posición de la fuente luminosa si el reflector mide 4 pies de lado a lado en la abertura y 2 pies de profundidad.
 72. Un telescopio reflector tiene un espejo parabólico que mide 20 pies de lado a lado en la parte superior y 4 pies de profundidad en el centro. ¿Dónde debe ubicarse el ocular?
 73. Suponga que dos torres de un puente de suspensión están a 350 pies de distancia y que el vértice del cable parabólico es tangente al punto medio de la carretera entre las torres. Si el cable se encuentra a 1 pie por arriba de la carretera en un punto a 20 pies de los vértices, encuentre la altura de las torres sobre la carretera.
 74. Dos torres de 75 pies de un puente de suspensión con un cable parabólico están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al punto medio de la carretera entre las torres. Determine la altura del cable sobre la carretera en cualquier punto a 50 pies de una de las torres.
 75. Suponga que el brote de agua desde el extremo de un tubo horizontal sigue un arco parabólico con vértice en el extremo del tubo. El tubo está 20 metros por arriba del suelo. En un punto a 2 metros por debajo del extremo del tubo, la distancia horizontal desde el agua hasta una línea vertical que pasa por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la FIGURA A.1.25. ¿En qué punto el agua golpea el suelo?

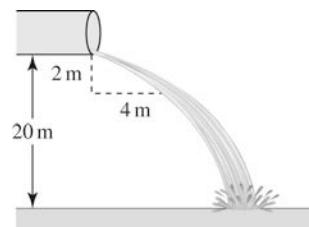


FIGURA A.1.25 Tubo del problema 75

76. Un lanzador de dardos arroja uno a 5 pies por arriba del suelo. El dardo se lanza horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Pega en el suelo a $10\sqrt{10}$ pies desde el lanzador de dardos. A la distancia de 10 pies desde el lanzador de dardos, ¿a qué altura debe estar el blanco para que el dardo impacte en él?
 77. La órbita del planeta Mercurio es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La longitud del eje mayor de esta órbita es de 72 millones de millas y la longitud del eje menor corresponde a 70.4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol? ¿Cuál es la distancia más grande (afelio)?

78. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de Mercurio en el problema 77?
79. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor mide 3.34×10^9 millas de largo y cuyo eje menor es de 8.5×10^8 millas de largo. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del cometa?
80. Un satélite orbita la Tierra en una trayectoria parabólica con el centro de la Tierra en un foco. Tiene una altitud mínima de 200 millas y una altitud máxima de 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra. Si el radio terrestre es de 4 000 mi, ¿cuál es una ecuación de la órbita del satélite?
81. Un arco semielíptico tiene un eje mayor vertical. La base del arco es de 10 pies de lado a lado y la parte más alta del arco mide 15 pies. Encuentre la altura del arco sobre el punto en la base del arco a 3 pies del centro.
82. Suponga que un cuarto se construye sobre una base elíptica plana rotando una semielipse 180° alrededor de su eje mayor. Después, por la propiedad de reflexión de la elipse, cualquier susurro en un foco se escuchará claramente en el otro foco. Si la altura de la sala es de 16 pies y la longitud corresponde a 40 pies, encuentre la ubicación del susurro y de los puestos de escucha.

Piense en ello

83. La gráfica de la elipse $x^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1$ se desplaza 4 unidades a la derecha. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?
84. La gráfica de la elipse $(x - 1)^2/9 + (y - 4)^2/1 = 1$ se desplaza 5 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?
85. Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

se dice que son **conjugadas** entre sí.

- a) Encuentre la ecuación de la hipérbola que es la conjugada de

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

- b) Analice cómo se relacionan las gráficas de las hipérbolas conjugadas.

86. Una **hipérbola rectangular** es aquella para la cual las asíntotas son perpendiculares.

- a) Demuestre que $y^2 - x^2 + 5y + 3x = 1$ es una hipérbola rectangular.
 b) ¿Cuáles de las hipérbolas dadas en los problemas 49-62 son rectangulares?

87. Puede demostrarse que un rayo luminoso que emana de un foco de una hipérbola será reflejado a lo largo de la línea desde el foco opuesto. Vea la FIGURA A.1.26. Un rayo luminoso desde el foco izquierdo de la hipérbola $x^2/16 - y^2/20 = 1$ incide en la hipérbola $(-6, -5)$. Determine una ecuación del rayo reflejado.

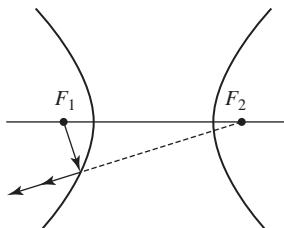


FIGURA A.1.26 Propiedad reflectora del problema 87

88. Un **óvalo** es una aproximación a una elipse consistente en arcos que surgen de pares de círculos de diferentes radios ubicados simétricamente, siendo cada círculo pequeño tangente a un círculo grande en dos puntos de transición como se indica en la FIGURA A.1.27. Los arquitectos en los períodos del Renacimiento y barroco usaban óvalos porque son más simples de construir que las elipses. En este problema, considere que los círculos pequeños están centrados en $(\pm a, 0)$, $a > 0$, con radio r , y deje que los círculos grandes se centren en $(0, \pm b)$, $b > 0$, con radio R . Además, considere que $(\pm A, 0)$, $A > 0$, y $(0, \pm B)$, $B > 0$, son los puntos de intersección del óvalo con los ejes x y y .

- a) Exprese R en términos de a , b y r .
 b) Demuestre que $A > B$. Esto muestra que el “eje mayor” del óvalo está siempre alineado con los centros de los círculos pequeños, y que el “eje menor” del óvalo está siempre en línea con los centros de los círculos grandes. [Sugerencia: Demuestre que $A - B = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$.]

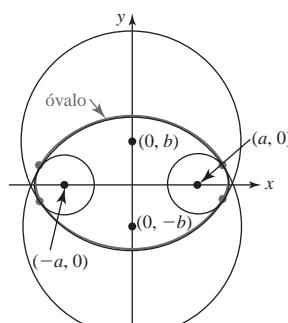


FIGURA A.1.27 Óvalo en el problema 88

Repaso de álgebra

Enteros

$$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Enteros positivos (números naturales)

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Enteros no negativos (números enteros)

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Números racionales

Un número racional es un número en la forma p/q , donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede escribirse en la forma p/q , donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números reales

El conjunto R de números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n > 0$$

Radical

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad n > 0 \text{ un entero}$$

Exponentes racionales y radicales

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Fórmula cuadrática

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Expansiones binomiales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triángulo de Pascal

Los coeficientes en la expansión de $(a + b)^n$ siguen el patrón:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & & \vdots & \\ \end{array}$$

Cada número en el interior de este arreglo es la suma de los dos números directamente arriba del mismo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

El último renglón son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$.

Fórmulas de factorización

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Definición del valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

Propiedades de desigualdades

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

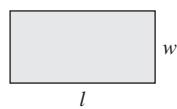
Si $a < b$, entonces $ac < bc$ para $c > 0$.

Si $a < b$, entonces $ac > bc$ para $c < 0$.

Fórmulas de geometría

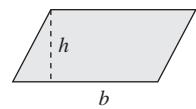
Área A , circunferencia C , volumen V , área superficial S

RECTÁNGULO



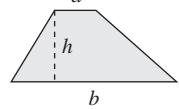
$$A = lw, \quad C = 2l + 2w$$

PARALELOGRAMO



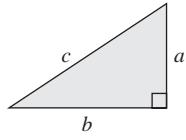
$$A = bh$$

TRAPEZOIDE



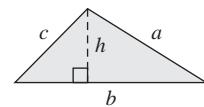
$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



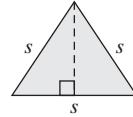
Teorema de Pitágoras:
 $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



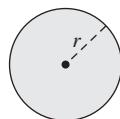
$$A = \frac{1}{2}bh, \quad C = a + b + c$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



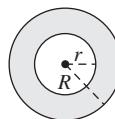
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s, \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

CÍRCULO



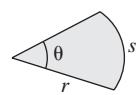
$$A = \pi r^2, \quad C = 2\pi r$$

ANILLO CIRCULAR



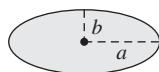
$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

SECTOR CIRCULAR



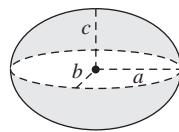
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta, \quad s = r\theta$$

ELIPSE



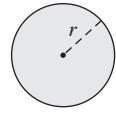
$$A = \pi ab$$

ELIPSOIDE



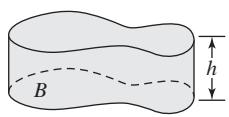
$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

ESFERA



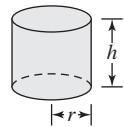
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2$$

CILINDRO RECTO



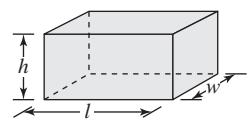
$$V = Bh, \text{ } B, \text{ área de la base}$$

CILINDRO CIRCULAR RECTO



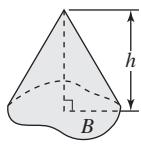
$$V = \pi r^2 h, \text{ } S = 2\pi rh \text{ (lado lateral)}$$

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR



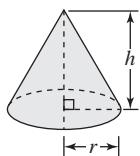
$$V = lwh, \text{ } S = 2(hl + lw + hw)$$

CONO



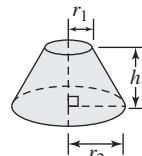
$$V = \frac{1}{3}Bh, \text{ } B, \text{ área de la base}$$

CONO CIRCULAR RECTO



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \text{ } S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

FRUSTO DE UN CONO



$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Gráficas y funciones

Para encontrar intersecciones

Intersecciones y : sea $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para y

Intersecciones x : sea $y = 0$ en la ecuación y resolvemos para x

Funciones de polinomios

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo.

Función lineal

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta.

Formas de ecuaciones de rectas:

Punto pendiente: $y - x_0 = m(x - x_0)$,

Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$,

donde m es la pendiente.

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Vértice (h, k) de una parábola

Complete el cuadrado en x para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. De manera alterna, calcule las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Funciones par e impar

Par: $f(-x) = f(x)$; simetría de la gráfica: el eje y

Impar: $f(-x) = -f(x)$; simetría de la gráfica: el origen

Transformaciones rígidas

La gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:

$y = f(x) + c$, desplazada hacia arriba c unidades

$y = f(x) - c$, desplazada hacia abajo c unidades

$y = f(x + c)$, desplazada hacia la izquierda c unidades

$y = f(x - c)$, desplazada hacia la derecha c unidades

$y = f(-x)$, reflexión sobre el eje y

$y = -f(x)$, reflexión sobre el eje x

Función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

Asíntotas

Si las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ningún factor en común, entonces la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0}$$

tiene una

asíntota vertical:

$x = a$ cuando $q(a) = 0$,

asíntota horizontal:

$y = a_n/b_m$ cuando $n = m$ y $y = 0$ cuando $n < m$,

asíntota oblicua:

$y = ax + b$ cuando $n = m + 1$.

La gráfica no tiene una asíntota horizontal cuando $n > m$.

Una asíntota oblicua se encuentra mediante una división.

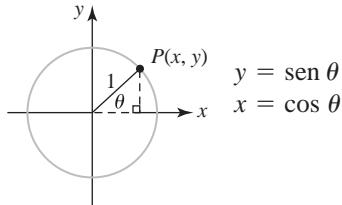
Función potencia

$$f(x) = x^n,$$

donde n es cualquier número real.

Revisión de trigonometría

Definición de seno y coseno de acuerdo con el círculo unitario



Otras funciones trigonométricas

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

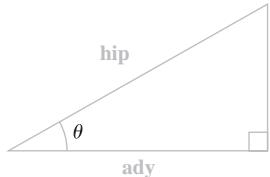
$$\sec \theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

Fórmulas de conversión

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Definición de seno y coseno de acuerdo con el triángulo recto



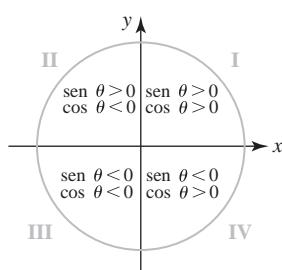
$$\begin{aligned}\text{sen } \theta &= \frac{\text{opu}}{\text{hip}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}}\end{aligned}$$

Otras funciones trigonométricas

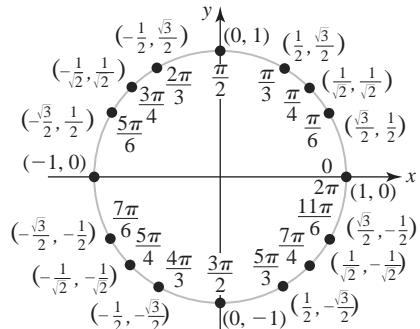
$$\tan \theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}, \quad \cot \theta = \frac{\text{ady}}{\text{opu}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}, \quad \csc \theta = \frac{\text{hip}}{\text{opu}}$$

Signos de seno y coseno



Valores de seno y coseno para ángulos especiales



Límites para las funciones seno y coseno

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad y \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Identidades de cofunción

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades par/ímpar

Par

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sec(-x) = \sec x$$

Impar

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$

$$\csc(-x) = -\csc x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

FM-6 Fórmulas matemáticas

Fórmulas de suma

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas de diferencia

$$\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Fórmulas alternas del ángulo doble para coseno

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Fórmulas del medio ángulo como se usa en cálculo

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Leyes de los senos

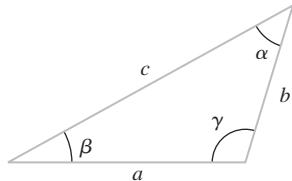
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Leyes de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



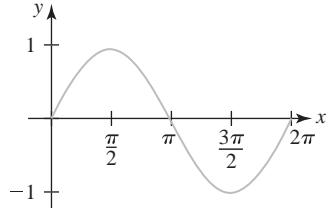
Funciones trigonométricas inversas

$$y = \sin^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \sin y, \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

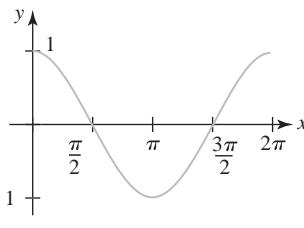
$$y = \cos^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$y = \tan^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \tan y, \quad -\pi/2 < y < \pi/2$$

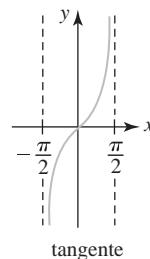
Ciclos para seno, coseno y tangente



seno



coseno



tangente

Funciones exponencial y logarítmica

El número e

$$e = 2.718281828459\dots$$

Definiciones del número e

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$$

Función exponencial

$$f(x) = b^x, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

Función exponencial natural

$$f(x) = e^x$$

Función logarítmica

$$f(x) = \log_b x, \quad x > 0$$

donde $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$

Función logarítmica natural

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$$

donde $y = \ln x$ es equivalente a $x = e^y$

Leyes de logaritmos

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b M^c = c \log_b M$$

Propiedades de logaritmos

$$\log_b b = 1, \quad \log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^x = x, \quad b^{\log_b x} = x$$

Cambio de la base b a la base e

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \quad x \neq 0$$

Identidades par/ímpar

Par

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

Impar

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$$

Identidades adicionales

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{senh} x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \operatorname{senh} x_2$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \operatorname{senh} x_1 \operatorname{senh} x_2$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$$

Diferenciación

Reglas

1. Constante: $\frac{d}{dx}c = 0$

2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$

3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Funciones

Trigonométricas:

9. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas:

15. $\frac{d}{dx}\sen^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}$

19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Hiperbólicas:

21. $\frac{d}{dx}\senh x = \cosh x$

22. $\frac{d}{dx}\cosh x = \senh x$

23. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

24. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

25. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

26. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\frac{d}{dx}\senh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

28. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

29. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

30. $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

31. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

32. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

Exponenciales:

33. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

34. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmicas:

35. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$

36. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}$

Fórmulas de integración

Formas básicas

$$1. \int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$2. \int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$3. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4. \int e^u \, du = e^u + C$$

$$5. \int a^u \, du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

$$6. \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

$$7. \int \cos u \, du = \sin u + C$$

$$8. \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$9. \int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$10. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$11. \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$12. \int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C$$

$$13. \int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$$

$$14. \int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$15. \int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$17. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$18. \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$$

$$19. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

$$20. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

Formas que implican $\sqrt{a^2 + u^2}$

$$21. \int \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$22. \int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{8} (a^2 + 2u^2) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$23. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} \, du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

$$24. \int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} \, du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$25. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$26. \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$27. \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$$

$$28. \int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

$$29. \int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

Formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$

$$30. \int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$31. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$32. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} \, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$33. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} \, du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$34. \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$35. \int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

36. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

37. $\int (a^2-u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formas que implican $\sqrt{u^2-a^2}$

39. $\int \sqrt{u^2-a^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

40. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2} du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

41. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u} + C$

42. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

43. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

44. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

45. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$

46. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

Formas que implican $a+bu$

47. $\int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|) + C$

48. $\int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}[(a+bu)^2-4a(a+bu)+2a^2\ln|a+bu|] + C$

49. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

50. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

51. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

52. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

53. $\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right) + C$

54. $\int u\sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$

55. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$

56. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$

57. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \text{ si } a > 0$
 $= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \text{ si } a < 0$

58. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\int u^2\sqrt{a+bu} du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)}$
 $- \frac{2na}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu} du$

61. $\int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}}$
 $- \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

Formas trigonométricas

63. $\int \operatorname{sen}^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$

66. $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$

67. $\int \operatorname{sen}^3 u du = -\frac{1}{3}(2+\operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 u du = \frac{1}{3}(2+\cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\int \tan^3 u du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \cot^2 u du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln|\csc u - \cot u| + C$
73. $\int \sen^n u du = -\frac{1}{n} \sen^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sen^{n-2} u du$
74. $\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sen u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$
75. $\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$
76. $\int \cot^n u du = \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$
77. $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$
78. $\int \csc^n u du = \frac{-1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du$
79. $\int \sen au \sen bu du = \frac{\sen(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sen(a+b)u}{2(a+b)} + C$
80. $\int \cos au \cos bu du = \frac{\sen(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sen(a+b)u}{2(a+b)} + C$
81. $\int \sen au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$
82. $\int u \sen u du = \sen u - u \cos u + C$
83. $\int u \cos u du = \cos u + u \sen u + C$
84. $\int u^n \sen u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du$
85. $\int u^n \cos u du = u^n \sen u - n \int u^{n-1} \sen u du$
86.
$$\begin{aligned} \int \sen^n u \cos^m u du &= -\frac{\sen^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} \\ &\quad + \frac{n-1}{n+m} \int \sen^{n-1} u \cos^m u du \\ &= \frac{\sen^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} \\ &\quad + \frac{m-1}{n+m} \int \sen^n u \cos^{m-2} u du \end{aligned}$$
87. $\int \frac{du}{1 - \sen au} = \frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C$
88. $\int \frac{du}{1 + \sen au} = -\frac{1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C$
89.
$$\begin{aligned} \int \frac{udu}{1 - \sen au} &= \frac{u}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) \right| + C \end{aligned}$$

Formas trigonométricas inversas

90. $\int \sen^{-1} u du = u \sen^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
91. $\int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
92. $\int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$
93. $\int u \sen^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4} \sen^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
94. $\int u \cos^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
95. $\int u \tan^{-1} u du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
96.
$$\begin{aligned} \int u^n \sen^{-1} u du &= \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \sen^{-1} u \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1 \end{aligned}$$
97.
$$\begin{aligned} \int u^n \cos^{-1} u du &= \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \cos^{-1} u \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1 \end{aligned}$$
98.
$$\begin{aligned} \int u^n \tan^{-1} u du &= \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \tan^{-1} u \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right], \quad n \neq -1 \end{aligned}$$

Formas exponenciales y logarítmicas

99. $\int ue^{au} du = \frac{1}{a^2} (au - 1)e^{au} + C$
100. $\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} du$
101. $\int e^{au} \sen bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sen bu - b \cos bu) + C$
102. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sen bu) + C$
103. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
104. $\int \frac{1}{u \ln u} du = \ln|\ln u| + C$
105. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1)\ln u - 1] + C$
106.
$$\begin{aligned} \int u^m \ln^n u du &= \frac{u^{m+1} \ln^n u}{m+1} \\ &\quad - \frac{n}{m+1} \int u^m \ln^{n-1} u du, \quad m \neq -1 \end{aligned}$$

FM-12 Fórmulas matemáticas

- 107.** $\int \ln(u^2 + a^2) du = u \ln(u^2 + a^2) - 2u + 2a \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$
- 108.** $\int \ln|u^2 - a^2| du = u \ln|u^2 - a^2| - 2u + a \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$
- 109.** $\int \frac{du}{a+be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a} \ln|a+be^u| + C$
- Formas hiperbólicas**
- 110.** $\int \operatorname{senh} u du = \cosh u + C$
- 111.** $\int \cosh u du = \operatorname{senh} u + C$
- 112.** $\int \tanh u du = \ln(\cosh u) + C$
- 113.** $\int \coth u du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$
- 114.** $\int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$
- 115.** $\int \operatorname{csch} u du = \ln|\tanh^{\frac{1}{2}} u| + C$
- 116.** $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
- 117.** $\int \operatorname{csch}^2 u du = -\coth u + C$
- 118.** $\int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
- 119.** $\int \operatorname{csch} u \coth u du = -\operatorname{csch} u + C$
- 121.** $\int u \sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
- 122.** $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
- 123.** $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
- 124.** $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
- 125.** $\int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
- 126.** $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$
- 127.** $\int \frac{du}{u \sqrt{2ua - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

Algunas integrales definidas

128. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

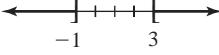
129. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

Formas que implican $\sqrt{2au - u^2}$

120. $\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$

Respuestas a la evaluación diagnóstica

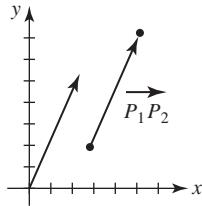
Evaluación diagnóstica, página xv

- | | | |
|---|--|---|
| 1. falso | 2. verdadero | 31. $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$ |
| 3. falso | 4. verdadero | 32. c) falso |
| 5. 12 | 6. -243 | 33. 8 |
| 7. $\frac{3x^3 + 8x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ | 8. $2(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}$ | 34. -27 |
| 9. a) 0, 7
c) 1 | b) $-1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}$
d) 1 | 35. $\frac{2}{3}; (-9, 0); (0, 6)$ |
| 10. a) $(5x + 1)(2x - 3)$
c) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ | b) $x^2(x + 3)(x - 5)$
d) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$ | 36. $y = -5x + 3$ |
| 11. falso | 12. falso | 37. $y = 2x - 14$ |
| 13. verdadero | 14. 6; -6 | 38. $y = -\frac{1}{3}x + 3$ |
| 15. $-a + 5$ | | 39. $y = -\frac{5}{8}x$ |
| 16. a), b), d), e), g), h), i), l) | | 40. $x - \sqrt{3}y + 4\sqrt{3} - 7 = 0$ |
| 17. i) d); ii) c); iii) a); iv) b) | | 41. $i) g); ii) e); iii) h); iv) a); v) b); vi) f);$
$vii) d); viii) c)$ |
| 18. a) $-2 < x < 2$; b) $ x < 2$ | | 42. falso |
| 19.  | 20. $(-\infty, -2) \cup (\frac{8}{3}, \infty)$ | 43. falso |
| 21. $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ | 22. $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$ | 44. falso |
| 23. cuarto | 24. (5, -7) | 45. $4\pi/3$ |
| 25. -12; 9 | | 46. 15 |
| 26. a) (1, -5) b) (-1, 5) c) (-1, -5) | | 47. 0.23 |
| 27. (-2, 0), (0, -4), (0, 4) | 28. segundo y cuarto | 48. $\cos t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ |
| 29. $x = 6$ o $x = -4$ | 30. $x^2 + y^2 = 25$ | 49. $\sin \theta = \frac{3}{5}; \cos \theta = \frac{4}{5}; \tan \theta = \frac{3}{4}; \cot \theta = \frac{4}{3}; \sec \theta = \frac{5}{4};$
$\csc \theta = \frac{5}{3}$ |
| | | 50. $b = 10 \tan \theta, c = 10 \sec \theta$ |
| | | 51. $k = 10 \ln 5$ |
| | | 52. $4 = 64^{1/3}$ |
| | | 53. $\log_b 125$ |
| | | 54. aproximadamente 2.3347 |
| | | 55. 1 000 |
| | | 56. verdadero |

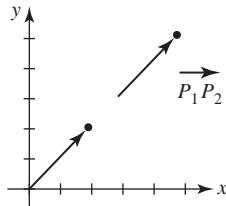
Respuestas de los problemas impares

Problemas 1.1

1. a) $6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ b) $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ c) $3\mathbf{i}$ d) $\sqrt{65}$ e) 3
3. a) $\langle 12, 0 \rangle$ b) $\langle 4, -5 \rangle$ c) $\langle 4, 5 \rangle$ d) $\sqrt{41}$ e) $\sqrt{41}$
5. a) $-9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ b) $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ c) $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
d) $3\sqrt{10}$ e) $\sqrt{34}$
7. a) $-6\mathbf{i} + 27\mathbf{j}$ b) 0 c) $-4\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$ d) 0 e) $2\sqrt{85}$
9. a) $\langle 6, -14 \rangle$ b) $\langle 2, 4 \rangle$
11. a) $10\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ b) $12\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$
13. a) $\langle 20, 52 \rangle$ b) $\langle -2, 0 \rangle$
15. $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$



17. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



19. (1, 18)
21. a), b), c), e), f)

23. $\langle 6, 15 \rangle$

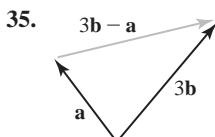
25. a) $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ b) $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

27. a) $\langle 0, -1 \rangle$ b) $\langle 0, 1 \rangle$

29. $\left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$

31. $\frac{6}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \frac{14}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$

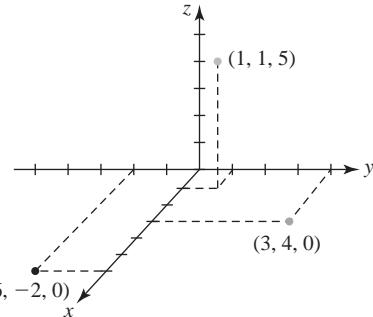
33. $\left\langle -3, -\frac{15}{2} \right\rangle$



37. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
41. $\mathbf{a} = \frac{5}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
43. $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
45. a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
b) cuando P_1, P_2 y P_3 son colineales y P_2 yace entre P_1 y P_3
47. b) 31° aproximadamente
49. 153 libras, aproximadamente

Problemas 1.2

- 1, 3, 5.



7. El conjunto $\{(x, y, 5) | x, y \text{ números reales}\}$ es un plano perpendicular al eje z , 5 unidades arriba del plano xy .
9. El conjunto $\{(2, 3, z) | z \text{ un número real}\}$ es la recta perpendicular al plano xy en $(2, 3, 0)$.
11. (2, 0, 0), (2, 5, 0), (2, 0, 8), (2, 5, 8), (0, 5, 0), (0, 5, 8), (0, 0, 8), (0, 0, 0)
13. a) $(-2, 5, 0), (-2, 0, 4), (0, 5, 4)$
b) $(-2, 5, -2)$ c) $(3, 5, 4)$
15. la unión de los planos de coordenadas
17. el punto $(-1, 2, -3)$
19. la unión de los planos $z = 5$ y $z = -5$
21. $\sqrt{70}$
23. a) 7 b) 5
25. triángulo recto
27. triángulo isósceles
29. colineal
31. no colineal

33. $6 \text{ o } -2$

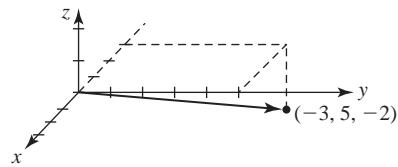
35. $(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

37. $(-4, -11, 10)$

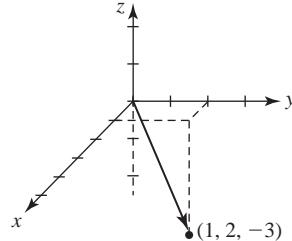
39. $\langle -3, -6, 1 \rangle$

41. $\langle 2, 1, 1 \rangle$

43.



45.

47. plano xy

51. $\langle 2, 4, 12 \rangle$

55. $\sqrt{139}$

59. $\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle$

49. eje z positivo, plano xz , plano yz

53. $\langle -11, -41, -49 \rangle$

57. 6

61. $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Problemas 1.3

1. 12

5. 48

9. 25

13. $25\sqrt{2}$

17. 1.11 radianes o 63.43°

21. a) yf , c) $y d$, b) $y e$

23. $\left\langle \frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, 1 \right\rangle$

27. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$;

$\alpha = 74.5^\circ$, $\beta = 57.69^\circ$, $\gamma = 36.7^\circ$

29. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 150^\circ$

31. 0.9553 radián o 57.74° ; 0.6155 radián o 35.26°

33. $\frac{5}{7}$ 35. $-\frac{6}{\sqrt{11}}$

37. $\frac{72}{\sqrt{109}}$

39. a) $-\frac{21}{5}\mathbf{i} + \frac{28}{5}\mathbf{j}$ b) $-\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

41. a) $\left\langle -\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{5}{7}, -\frac{20}{7}, \frac{45}{7} \right\rangle$

43. $\frac{72}{25}\mathbf{i} + \frac{96}{25}\mathbf{j}$

47. 45 N-m

Problemas 1.4

1. $-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

5. $-5\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

9. 0

13. $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, o cualquier múltiplo distinto de cero de este vector

17. a) $\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $2\mathbf{k}$

23. $-24\mathbf{k}$

27. 0

31. $-\mathbf{j}$

35. 6

39. $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

43. -10

47. $\frac{1}{2}$

51. 10

55. Los puntos son coplanares.

57. a) 32 b) 30° del eje x positivo en la dirección del eje y negativo c) $16\sqrt{3}\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$ **Problemas 1.5**

1. $\langle x, y, z \rangle = \langle 4, 6, -7 \rangle + t\langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

3. $\langle x, y, z \rangle = t\langle 5, 9, 4 \rangle$

5. $\langle x, y, z \rangle = \langle 1, 2, 1 \rangle + t\langle 2, 3, -3 \rangle$

7. $\langle x, y, z \rangle = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle + t\langle -2, 3, -\frac{3}{2} \rangle$

9. $\langle x, y, z \rangle = \langle 1, 1, -1 \rangle + t\langle 5, 0, 0 \rangle$

11. $x = 2 + 4t, y = 3 - 4t, z = 5 + 3t$

13. $x = 1 + 2t, y = -2t, z = -7t$

15. $x = 4 + 10t, y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t, z = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}t$

17. $\frac{x-1}{9} = \frac{y-4}{10} = \frac{z+9}{7}$

19. $\frac{x+7}{11} = \frac{z-5}{-4}, y = 2$ 21. $x = 5, \frac{y-10}{9} = \frac{z+2}{12}$

23. $x = 6 + 2t, y = 4 - 3t, z = -2 + 6t$

25. $x = 2 + t, y = -2, z = 15$

27. Las dos rectas pasan por el origen y tienen vectores direccionales paralelos.

29. a) $t = -5$ b) $s = 12$

31. $(0, 5, 15), (5, 0, \frac{15}{2}), (10, -5, 0)$

33. $(2, 3, -5)$

35. Las rectas no se intersectan.

37. sí

39. $x = 2 + 4t, y = 5 - 6t, z = 9 - 6t, 0 \leq t \leq 1$

41. 40.37°

43. $x = 4 - 6t, y = 1 + 3t, z = 6 + 3t$

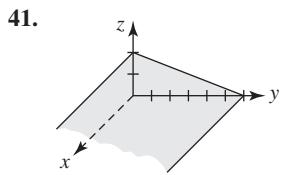
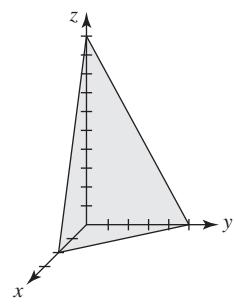
45. Las rectas no son paralelas y no se intersectan.

RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES, UNIDAD 1

RES-4 Resuestas de los problemas impares

Problemas 1.6

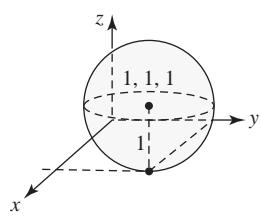
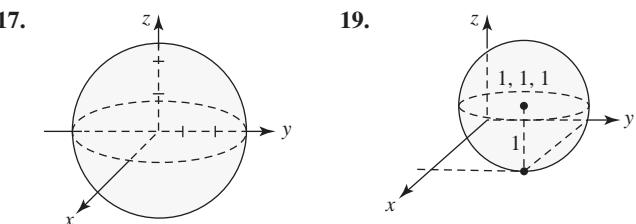
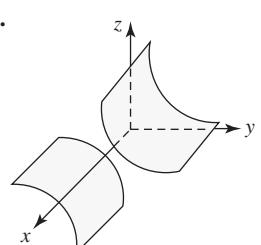
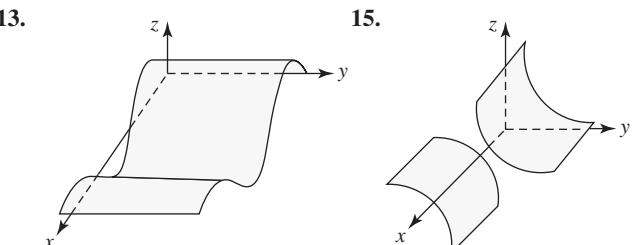
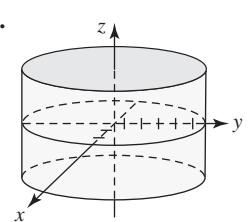
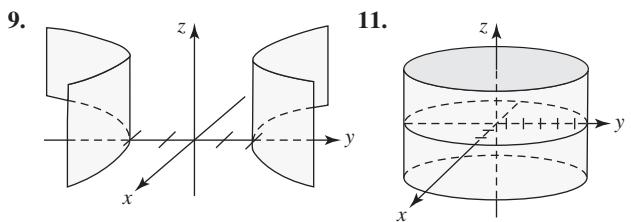
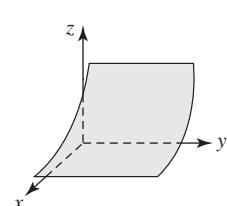
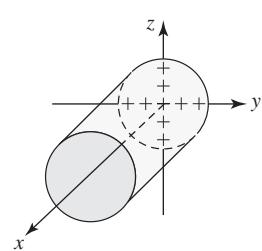
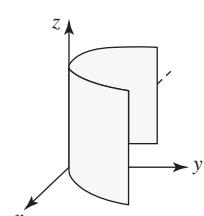
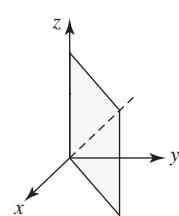
1. $2x - 3y + 4z = 19$
3. $5x - 3z = 51$
5. $6x + 8y - 4z = 11$
7. $5x - 3y + z = 2$
9. $3x - 4y + z = 0$
11. Los puntos son colineales.
13. $x + y - 4z = 25$
15. $z = 12$
17. $-3x + y + 10z = 18$
19. $9x - 7y + 5z = 17$
21. $6x - 2y + z = 12$
23. perpendicular: a) y d), b) y c), d) y f), b) y e); paralelo: a) y f), c) y e)
25. c), d)
27. $x = 2 + t, y = \frac{1}{2} - t, z = t$
29. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, z = t$
31. $(-5, 5, 9)$
33. $(1, 2, -5)$
35. $x = 5 + t, y = 6 + 3t, z = -12 + t$
37. $3x - y - 2z = 10$
- 39.



47. $\frac{3}{\sqrt{11}}$

Problemas 1.7

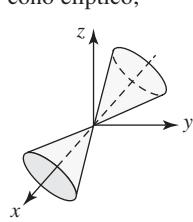
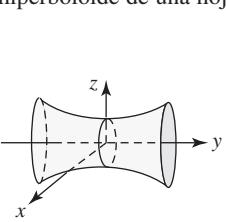
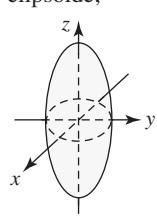
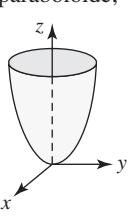
- 1.
- 3.
- 5.
- 7.



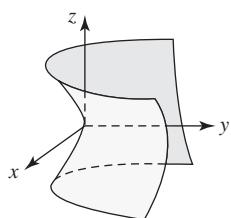
21. centro $(-4, 3, 2)$; radio 6
23. centro $(0, 0, 8)$; radio 8
25. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 3$
27. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$
29. $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 4$ o $x^2 + (y - 8)^2 + z^2 = 4$
31. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 90$
33. todos los puntos en la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ (hemisferio superior)
35. todos los puntos sobre o en el exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
37. todos los puntos sobre y entre esferas concéntricas de radio 1 y radio 3 centradas en el origen

Problemas 1.8

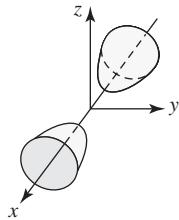
1. paraboloid;
3. elipsoide;
5. hiperboloid de una hoja;
7. cono elíptico;



9. parabolóide hiperbólico;



11. hiperbolóide de dos hojas;

B. 1. $9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 3. $5\mathbf{i}$

5. 14

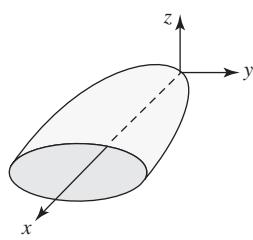
7. 26

9. $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ 11. $(4, 7, 5)$ 13. $(5, 6, 3)$ 15. $-36\sqrt{2}$ 17. $(12, 0, 0), (0, -8, 0), (0, 0, 6)$ 19. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

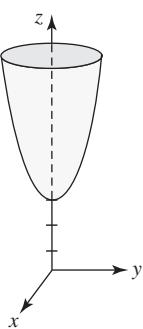
21. 2

23. elipsoide

13. parabolóide elíptico;



15.

C. 1. $\frac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

3. 2

5. $\left\langle \frac{16}{5}, \frac{12}{5}, 0 \right\rangle$

7. cilindro elíptico

9. hiperbolóide de dos hojas

11. parabolóide hiperbólico

13. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, hiperbolóide de una hoja;
 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, hiperbolóide de dos hojas

15. a) esfera b) plano

$$17. \frac{x-7}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{6}$$

19. Los vectores direccionales son ortogonales y el punto de intersección es $(3, -3, 0)$.

21. $14x - 5y - 3z = 0$

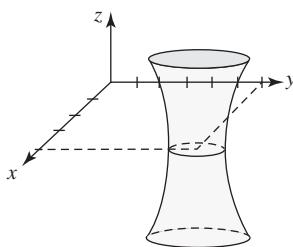
23. $-6x - 3y + 4z = 5$

27. a) $-qvB\mathbf{k}$

b) $\mathbf{v} = \frac{1}{m|\mathbf{r}|^2}(\mathbf{L} \times \mathbf{r})$

29. 192.4 N-m aproximadamente

17.

19. una posibilidad es $y^2 + z^2 = 1$; eje z 21. una posibilidad es $y = e^{x^2}$; eje y

23. $y^2 = 4(x^2 + z^2)$

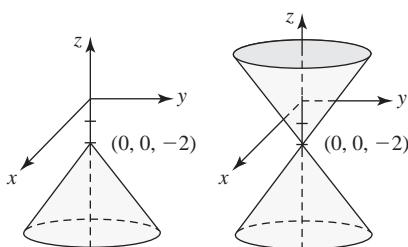
25. $y^2 + z^2 = (9 - x^2)^2, x \geq 0$

27. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

29. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

31. Las superficies en los problemas 1, 4, 6, 10 y 14 son superficies de revolución alrededor del eje z . La superficie en el problema 2 es la superficie de revolución alrededor del eje y . La superficie en el problema 11 es la superficie de revolución alrededor del eje x .

33.

35. a) área de una sección transversal es $\pi ab(c - z)$ b) $\frac{1}{2}\pi abc^2$

37. $(2, -2, 6), (-2, 4, 3)$

Competencia final de la unidad 1

A. 1. verdadero

3. falso

5. verdadero

7. verdadero

9. verdadero

11. verdadero

13. verdadero

15. falso

17. falso

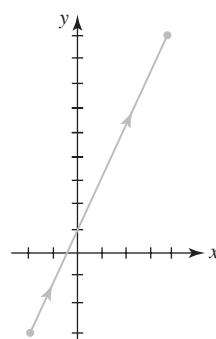
19. verdadero

Problemas 2.1

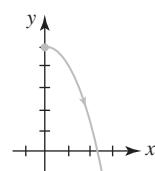
1.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	6	2	0	0	2	6	12

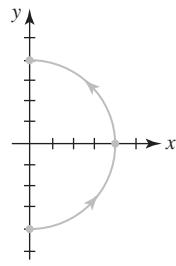
3.



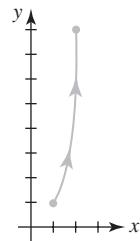
5.



7.



9.



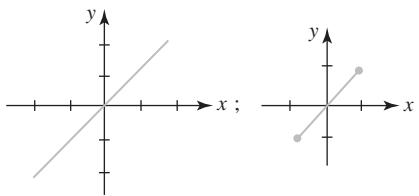
11. $y = x^2 + 3x - 1, x \geq 0$

13. $x = -1 + 2y^2, -1 \leq x \leq 0$ 15. $y = \ln x, x > 0$

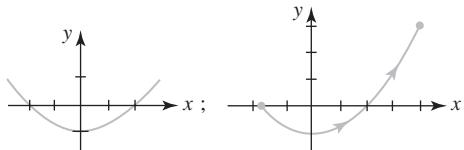
RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES, UNIDAD 2

RES-6 Respuestas de los problemas impares

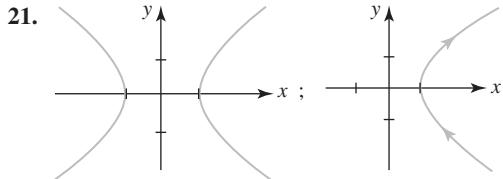
17.



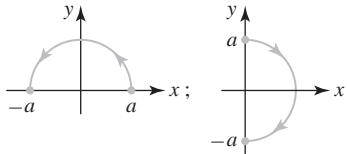
19.



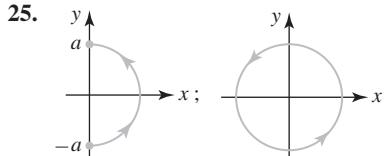
21.



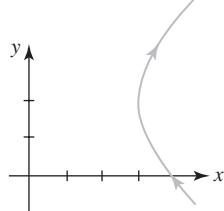
23.



25.



27.



29. sí

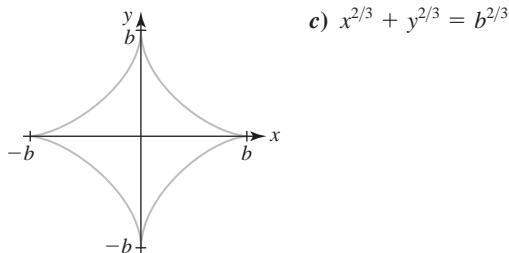
31. no

33. no

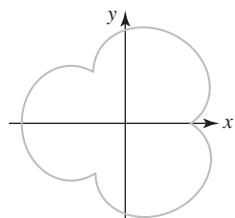
35. $x = \pm \sqrt{r^2 - L^2 \sin^2 \phi}$, $y = L \sin \phi$

37. $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$, $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$

39. b)



41. b)



Problemas 2.2

1. $\frac{3}{5}$

3. 24

5. -1

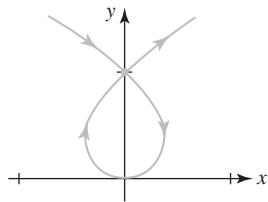
7. $y = -2x - 1$

9. $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

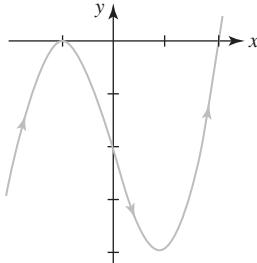
11. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

13. $y = 3x - 7$

15. tangente horizontal en $(0, 0)$, tangente vertical en $(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3})$ y en $(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3})$;



17. tangentes horizontales en $(-1, 0)$ y $(1, -4)$, no hay tangentes verticales;



19. $3t$; $1/(2t)$; $-1/(12t^3)$

21. $-2e^{3t} - 3e^{4t}$; $6e^{4t} + 12e^{5t}$; $-24e^{5t} - 60e^{6t}$

23. cóncava hacia arriba para $0 < t < 2$, cóncava hacia abajo para $t < 0$ y $t > 2$

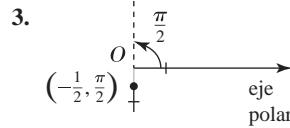
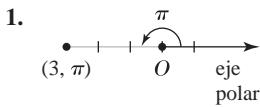
25. $\frac{104}{3}$

27. $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

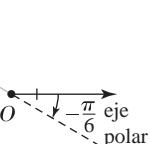
29. $\frac{3}{2}|b|$

31. a) -0.6551 b) -5.9991, 1.0446, 9.7361

Problemas 2.3



5. $(-4, -\frac{\pi}{6})$



7. a) $(2, -5\pi/4)$
c) $(-2, 7\pi/4)$

b) $(2, 11\pi/4)$
d) $(-2, -\pi/4)$

9. a) $(4, -5\pi/3)$
c) $(-4, 4\pi/3)$

11. a) $(1, -11\pi/6)$
c) $(-1, 7\pi/6)$

13. $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

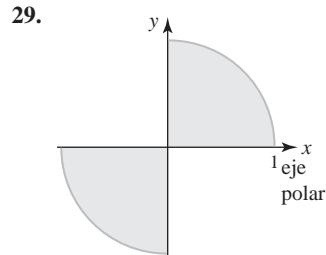
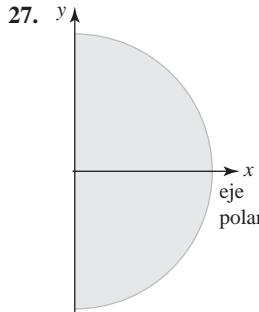
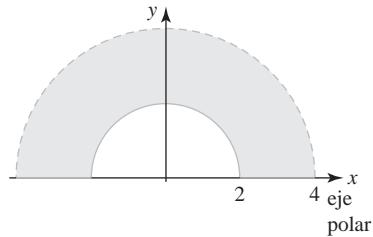
17. $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

19. a) $(2\sqrt{2}, -3\pi/4)$

21. a) $(2, -\pi/3)$

23. a) $(7, 0)$

25.



31. $r = 5 \csc \theta$

35. $r = 2/(1 + \cos \theta)$

39. $r = 1 - \cos \theta$

43. $(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$

47. $x^2 + y^2 + 5y = 0$

51. $3x + 8y = 5$

b) $(4, 7\pi/3)$
d) $(-4, -2\pi/3)$

b) $(1, 13\pi/6)$
d) $(-1, -5\pi/6)$

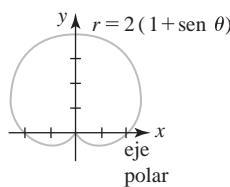
15. $(-3, 3\sqrt{3})$

b) $(-2\sqrt{2}, \pi/4)$

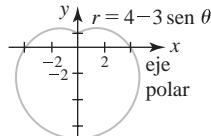
b) $(-2, 2\pi/3)$

b) $(-7, \pi)$

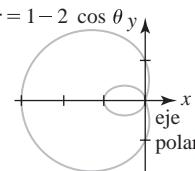
9. cardioide;



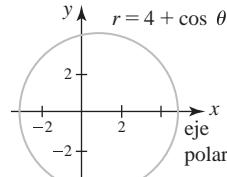
13. limacón;



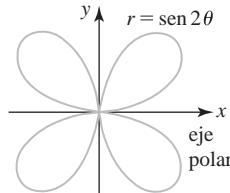
11. limacón con un lazo interior;
 $r = 1 - 2 \cos \theta$



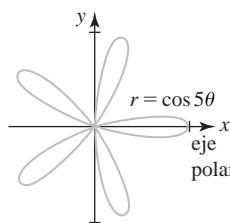
15. limacón convexa;



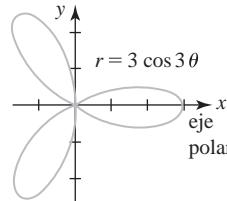
17. curva de la rosa;



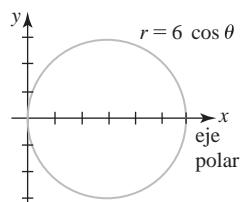
21. curva de la rosa;



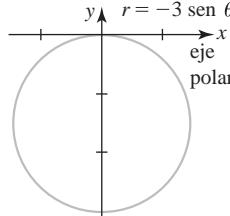
19. curva de la rosa;



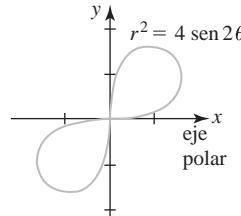
23. círculo con centro sobre el eje x;



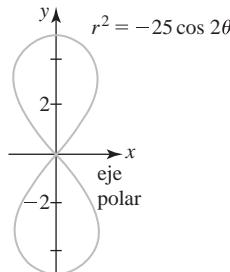
25. círculo con centro sobre el eje y;



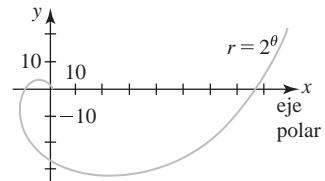
27. lemniscata;



29. lemniscata;

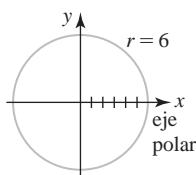


31.

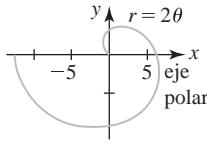


Problemas 2.4

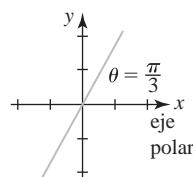
1. círculo;



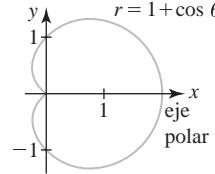
5. espiral;



3. recta por el origen;



7. cardioide;



33. $r = \frac{5}{2}$

37. $r = 2 \cos 4\theta$

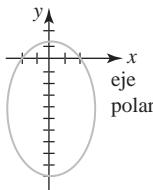
41. $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2)$, origen

35. $r = 4 - 3 \cos \theta$

39. $(2, \pi/6), (2, 5\pi/6)$

RES-8 Respuestas de los problemas impares

43. $(3, \pi/12), (3, 5\pi/12), (3, 13\pi/12), (3, 17\pi/12), (3, -\pi/12), (3, -5\pi/12), (3, -13\pi/12), (3, -17\pi/12)$ 49. $e = \frac{4}{5}$; ellipse
 45. $(0, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi/3), (\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\pi/3)$ 49. d)
 51. b)



Problemas 2.5

1. $-2/\pi$

3. $\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}-1}$

5. $\sqrt{3}$

7. tangente horizontal en $(3, \pi/3)$ y $(3, 5\pi/3)$, tangente vertical en $(4, 0)$, $(1, 2\pi/3)$ y $(1, 4\pi/3)$

9. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{8}{\sqrt{3}}$

11. $\theta = 0$

13. $\theta = 5\pi/4, \theta = 7\pi/4$

15. $\theta = \pi/10, \theta = 3\pi/10, \theta = \pi/2, \theta = 7\pi/10, \theta = 9\pi/10$

17. π

19. 24π

21. 11π

23. $\frac{9}{2}\pi$

25. $\frac{9}{4}\pi^3$

27. $\frac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)$

29. $\frac{1}{8}(4 - \pi)$

31. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

33. $\frac{1}{6}(2\pi + 3\sqrt{3})$

35. $\pi + 6\sqrt{3}$

37. $18\sqrt{3} - 4\pi$

39. 6π

41. $\sqrt{5}(e^2 - 1)$

43. 24

11. $e = 2$; $\frac{(y - 4)^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

$$13. \quad e = \frac{2}{3}; \quad \frac{\left(x - \frac{24}{5}\right)^2}{1296} + \frac{y^2}{\frac{144}{25}} = 1$$

15. $r = \frac{3}{1 + \cos \theta}$

$$17. \ r = \frac{4}{3 - 2 \sin \theta}$$

19. $r = \frac{12}{1 + 2 \cos \theta}$

21. $r = \frac{3}{1 + \cos(\theta + 2\pi/3)}$

23. $r = \frac{3}{1 - \sin \theta}$

25. $r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$

27. $r = \frac{1}{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

29. vértice: $(2, \pi/4)$

31. vértices: $(10, \pi/3)$

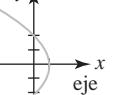
33. $r_p = 8\,000 \text{ km}$

$$35 - n = 1.495 \times$$

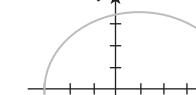
$$1 - 0.016/\cos \theta$$

Problemas 2.6

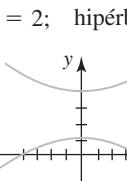
1. $e = 1$; parábola;



3. $e = \frac{1}{4}$; elipse;

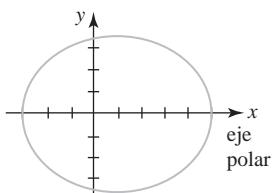


5. $e = 2$; hipérbola



7. $e = 2$; hipérbola





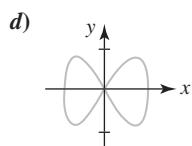
Competencia final de la unidad 2

- | | | |
|----|-------------------------------------|---|
| A. | 1. verdadero | 3. verdadero |
| | 5. verdadero | 7. falso |
| | 9. verdadero | 11. verdadero |
| | 13. falso | 15. verdadero |
| | 17. verdadero | 19. falso |
| | 21. verdadero | 23. verdadero |
| | 25. falso | |
| B. | 1. $(0, \frac{1}{8})$ | 3. $(0, -3)$ |
| | 5. $y = -5$ | 7. $(-10, -2)$ |
| | 9. $(2, -1), (6, -1)$ | 11. $(4, -3)$ |
| | 13. $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$ | 15. recta que pasa por el origen |
| | 17. círculo que pasa por el origen | 19. $\theta = 0, \theta = \pi/3, \theta = 2\pi/3$ |
| | 21. $(0, 0), (5, 3\pi/2)$ | |

C. 1. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ 3. $(8, -26)$

5. b) $x = \sin t, y = \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$

c) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -1), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$



7. $5\pi/4$

9. a) $x + y = 2\sqrt{2}$

b) $r = 2\sqrt{2}/(\cos \theta + \sin \theta)$

11. $x^2 + y^2 = x + y$

13. $r^2 = 5 \csc 2\theta$

15. $r = 1/(1 - \cos \theta)$

17. $r = 3 \sin 10\theta$

19. $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{36} = 1$

21. $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

23. a) $r = \frac{3a \cos \theta \sin \theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}$

b) $\frac{3}{2}a^2$

25. $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

27. a) $r = 2 \cos(\theta - \pi/4)$

b) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$

29. $10^8 \text{ m}; 9 \times 10^8 \text{ m}$

Problemas 3.1

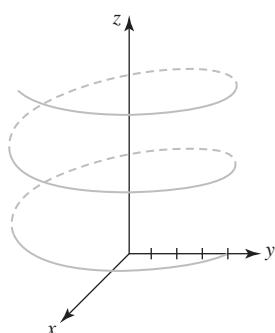
1. $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ 3. $[-1, 1]$

5. $\mathbf{r}(t) = \sin \pi t \mathbf{i} + \cos \pi t \mathbf{j} - \cos^2 \pi t \mathbf{k}$

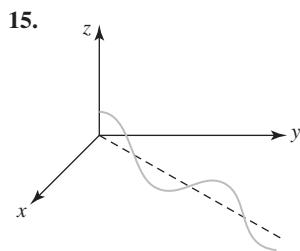
7. $\mathbf{r}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^{2t} \mathbf{j} + e^{3t} \mathbf{k}$ 9. $x = t^2, y = \sin t, z = \cos t$

11. $x = \ln t, y = 1 + t, z = t^3$

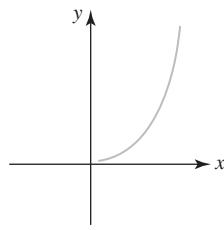
13.



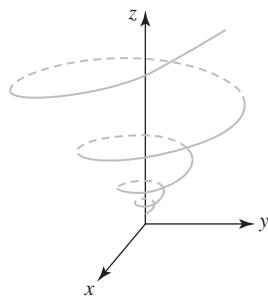
15.



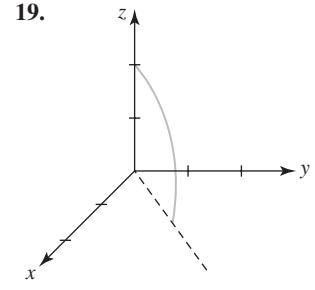
17.



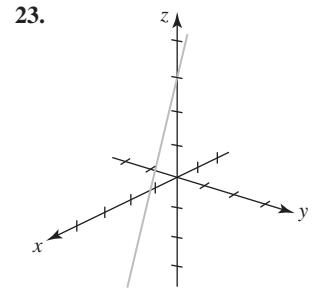
21.



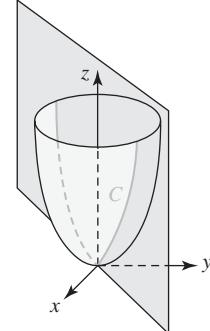
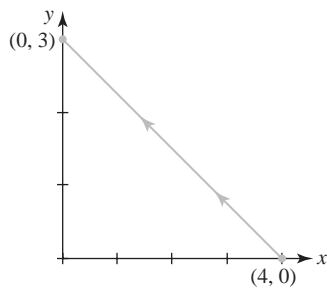
19.



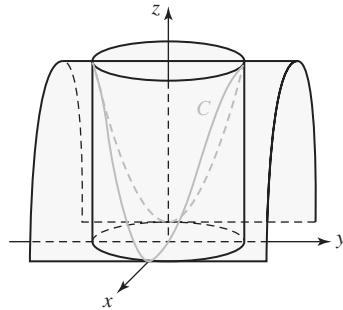
23.



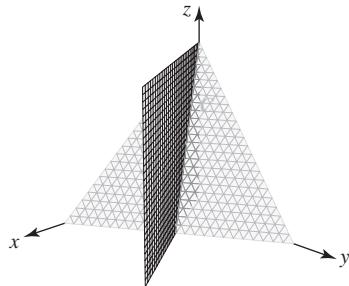
25. $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 4, 0 \rangle + t\langle 0, 3 \rangle$, 27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$; $0 \leq t \leq 1$;



29. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 9 \sin^2 t \mathbf{k}$;



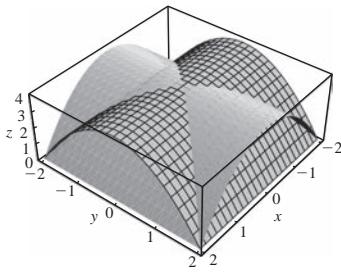
31. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$;



RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES, UNIDAD 3

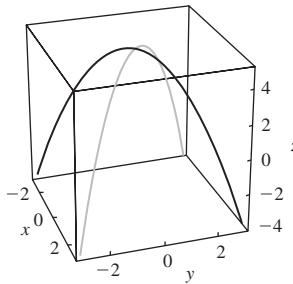
RES-10 Respuestas de los problemas impares

33. b)



b) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$

c)



35. d)

43. a)

Problemas 3.2

1. $8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 32\mathbf{k}$

3. $\langle 2, 2, 2 \rangle$

5. $2\mathbf{i} + 23\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$

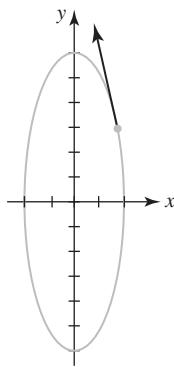
7. discontinua

9. $3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $3\mathbf{i} + 8.4\mathbf{j} + 9.5\mathbf{k}$

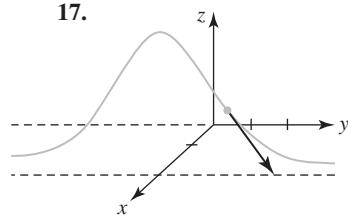
11. $(1/t)\mathbf{i} - (1/t^2)\mathbf{j}$; $-(1/t^2)\mathbf{i} + (2/t^3)\mathbf{j}$

13. $\langle 2te^{2t} + e^{2t}, 3t^2, 8t - 1 \rangle$; $\langle 4te^{2t} + 4e^{2t}, 6t, 8 \rangle$

15.



17.



19. $x = 2 + t$, $y = 2 + 2t$, $z = \frac{8}{3} + 4t$

21. $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$; $x = \frac{1}{\sqrt{6}}t$, $y = \frac{2}{\sqrt{6}}t$, $z = -\frac{1}{\sqrt{6}}t$

23. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t, \pi/3 + t \right\rangle$

25. $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$ 27. $\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t))$

29. $2\mathbf{r}_1'(2t) - (1/t^2)\mathbf{r}_2'(1/t)$ 31. $\frac{3}{2}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$

33. $(te^t - e^t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{-2t}\mathbf{j} + \frac{1}{2}e^{t^2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

35. $(6t + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 2)\mathbf{j} + (t^3 + 1)\mathbf{k}$

37. $(2t^3 - 6t + 6)\mathbf{i} + (7t - 4t^{3/2} - 3)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$

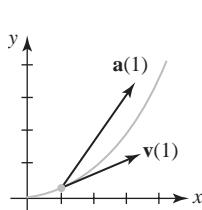
39. $2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$ 41. $\sqrt{6}(e^{3\pi} - 1)$

43. $\mathbf{r}(s) = 9 \cos(s/9)\mathbf{i} + 9 \sin(s/9)\mathbf{j}$

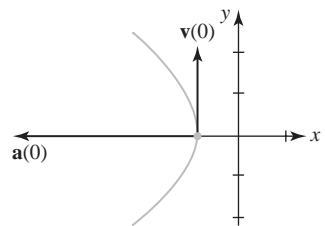
45. $\mathbf{r}(s) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{i} + \left(5 - \frac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

Problemas 3.3

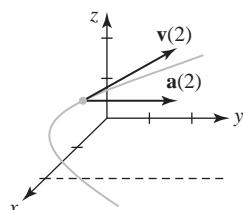
1. La rapidez es $\sqrt{5}$;



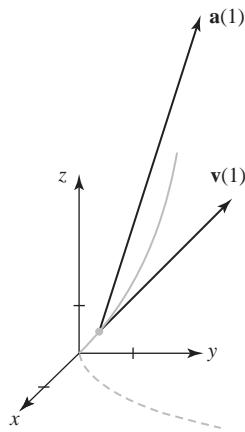
3. La rapidez es 2;



5. La rapidez es $\sqrt{5}$;



7. La rapidez es $\sqrt{14}$;



9. a) $(0, 0, 0)$ y $(25, 115, 0)$

b) $\mathbf{v}(0) = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$;

$\mathbf{v}(5) = 10\mathbf{i} + 73\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(5) = 2\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

11. a) $\mathbf{r}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (-16t^2 + 240t)\mathbf{j}$;
 $x(t) = 240\sqrt{3}t$, $y(t) = -16t^2 + 240t$

b) 900 pies

c) aproximadamente 6 235 pies

d) 480 pies/s

13. 72.11 pies/s

15. 97.98 pies/s

19. Suponga que (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del blanco en el tiempo $t = 0$. Entonces $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$ cuando $t = x_0/(v_0 \cos \theta) = y_0/(v_0 \sen \theta)$. Lo que implica que $\tan \theta = y_0/x_0$. En otras palabras, apunte directamente al blanco en $t = 0$.

21. 191.33 libras aproximadamente

25. $\mathbf{r}(t) = k_1 e^{2t^3} \mathbf{i} + \frac{1}{2t^2 + k_2} \mathbf{j} + (k_3 e^{t^2} - 1) \mathbf{k}$

27. Puesto que \mathbf{F} está dirigido a lo largo de \mathbf{r} , es necesario tener $\mathbf{F} = c\mathbf{r}$ para alguna constante c . En consecuencia, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (c\mathbf{r}) = c(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Si $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$. Lo anterior implica que \mathbf{L} es una constante.

Problemas 3.4

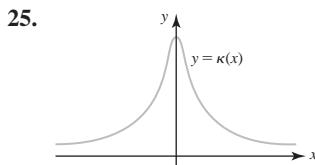
1. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sen t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

3. $\mathbf{T} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a \sen t\mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k})$;
 $\mathbf{N} = -\cos t\mathbf{i} - \sen t\mathbf{j}$;

$\mathbf{B} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(c \sen t\mathbf{i} - c \cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$; $\kappa = a/(a^2 + c^2)$

5. a) $3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 4z = 3\pi$
 b) $-4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 12z = 9\pi$
 c) $x + y = 2\sqrt{2}$
 7. $a_T = 4t/\sqrt{1+4t^2}; a_N = 2/\sqrt{1+4t^2}$
 9. $a_T = 2\sqrt{6}; a_N = 0, t > 0$
 11. $a_T = 2t/\sqrt{1+t^2}; a_N = 2/\sqrt{1+t^2}$
 13. $a_T = 0; a_N = 5$
 15. $a_T = -\sqrt{3}e^{-t}; a_N = 0$
 17. $\kappa = \frac{\sqrt{b^2c^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2c^2 \cos^2 t + a^2b^2}}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2)^{3/2}}$

23. $\kappa = 2, \rho = \frac{1}{2}; \kappa = 2/\sqrt{125} \approx 0.18, \rho = \sqrt{125}/2 \approx 5.59$; la curva es más pronunciada en $(0, 0)$



; para valores grandes de $|x|$ la gráfica de $y = x^2$ se comporta como una recta puesto que $k(x) \rightarrow 0$.

Competencia final de la unidad 3

A. 1. verdadero 3. verdadero 5. verdadero 7. verdadero 9. falso

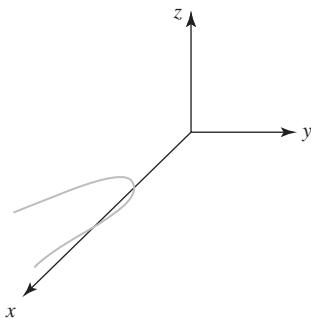
- B. 1. $y = 4$ 3. $\langle 1, 2, 1 \rangle$
 5. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ 7. $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$

9. $3x + 6y + 3z = 10$

C. 1. $\sqrt{2}\pi$

3. $x = -27 - 18t, y = 8 + t, z = 1 + t$

5.



7. $-t^2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t - 2 \operatorname{sen} t \cos t + 8t^3 e^{2t} + 12t^2 e^{2t}$

9. $(t+1)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{m}t^2 + t + 1\right)\mathbf{j} + t\mathbf{k};$

$x = t + 1, y = \frac{1}{m}t^2 + t + 1, z = t$

11. $\mathbf{v}(1) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{v}(4) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k},$
 $\mathbf{a}(1) = 2\mathbf{k}, \mathbf{a}(4) = 2\mathbf{k}$

13. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (3\pi/4)\mathbf{k}$

15. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} + \operatorname{sech} 1\mathbf{k});$

$\mathbf{N} = \operatorname{sech} 1\mathbf{i} - \tanh 1\mathbf{k};$

$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} - \operatorname{sech} 1\mathbf{k});$

$\kappa = \frac{1}{2}\operatorname{sech}^2 1$

Problemas 4.1

1. $\{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$ 3. $\{(x, y) | y \neq -x^2\}$
 5. $\{(s, t) | s, t \text{ cualesquiera números reales}\}$
 7. $\{(r, s) | r \text{ cualquier número real, } |s| \geq 1\}$
 9. $\{(u, v, w) | u^2 + v^2 + w^2 \geq 16\}$

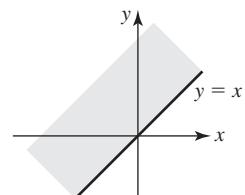
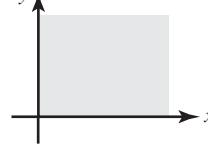
11. c)

13. b)

15. d)

17. f)

19.



23. $\{z | z \geq 10\}$

25. $\{w | -1 \leq w \leq 1\}$

27. $10, -2$

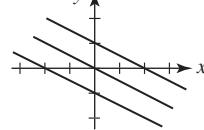
29. $4, 4$

31. plano por el origen perpendicular al plano xz

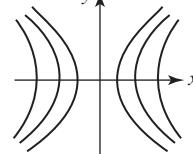
33. manto superior de un cono circular

35. mitad superior de un elipsoide

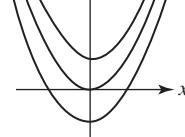
37.



39.



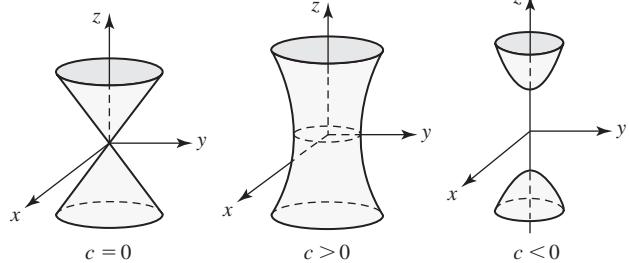
41.



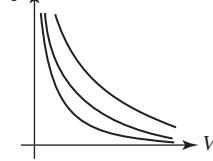
43. cilindro elíptico

45. elipsoïdes

47.



49.



51. $C(r, h) = 2.8\pi r^2 + 4.6\pi rh$

53. $V = \frac{11}{9}\pi r^2 h$

55. $15\ 600 \text{ cm}^2$

RES-12 Respuestas de los problemas impares

Problemas 4.2

1. 26
3. no existe
5. 1
7. no existe
9. 108
11. 1
13. $\frac{1}{3}$
15. $-\frac{1}{3}$
17. 360
19. no existe
21. -3
23. 0
25. 0
27. 0
29. 0
31. $\{(x, y) | x \geq 0 \text{ y } y \geq -x\}$
33. $\{(x, y) | y \neq 0 \text{ y } x/y \neq (2n+1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
35. a) continua b) no continua c) no continua
37. f es continua en $(0, 0)$.

Problemas 4.3

1. $\partial z/\partial x = 7, \partial z/\partial y = 16y$
3. $\partial z/\partial x = 6xy + 4y^2, \partial z/\partial y = 3x^2 + 8xy$
5. $\partial z/\partial x = 2x - y^2, \partial z/\partial y = -2xy + 20y^4$
7. $\partial z/\partial x = 20x^3y^3 - 2xy^6 + 30x^4, \partial z/\partial y = 15x^4y^2 - 6x^2y^5 - 4$
9. $\partial z/\partial x = 2x^{-1/2}/(3y^2 + 1), \partial z/\partial y = -24y\sqrt{x}/(3y^2 + 1)^2$
11. $\partial z/\partial x = -3x^2(x^3 - y^2)^{-2}, \partial z/\partial y = 2y(x^3 - y^2)^{-2}$
13. $\partial z/\partial x = -10 \cos 5x \sen 5x, \partial z/\partial y = 10 \sen 5y \cos 5y$
15. $f_x = (3x^3y + 1)e^{x^3y}, f_y = x^4e^{x^3y}$
17. $f_x = 7y/(x + 2y)^2, f_y = -7x/(x + 2y)^2$
19. $g_u = 8u/(4u^2 + 5v^3), g_v = 15v^2/(4u^2 + 5v^3)$
21. $w_x = x^{-1/2}y, w_y = 2\sqrt{x} - (y/z)e^{y/z} - e^{y/z}, w_z = (y^2/z^2)e^{y/z}$
23. $F_u = 2uw^2 - v^3 - uvw^2 \sen(uv^2), F_v = -3uv^2 + w \cos(uv^2), F_x = 128x^7t^4, F_t = -2uvw^2 \sen(uv^2) + 64x^8t^3$
25. -16
27. $x = -1, y = 4 + t, z = -24 + 2t$
29. -2
31. $\partial^2 z/\partial x^2 = y^2e^{xy}$
33. $f_{xy} = 20xy - 6y^2$
35. $w_{tuv} = 18uv^2t^2$
37. $F_{r\theta r} = -2e^{r^2}(2r^2 + 1) \sen \theta$
39. $-60x^3y^2 + 8y$
41. $-48uvt^2$
43. $\partial z/\partial x = -x/z, \partial z/\partial y = -y/z$
45. $\partial z/\partial u = (vz - 2uv^3)/(2z - uv), \partial z/\partial v = (uz - 3u^2v^2)/(2z - uv)$
47. $A_x = y \sen \theta, A_y = x \sen \theta, A_\theta = xy \cos \theta$

59. a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} -gx/a, & 0 \leq x \leq at \\ -gt, & x > at \end{cases}; \text{ para } x > at \text{ el movimiento es de caída libre}$
- b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} (-g/a^2)(at - x), & 0 \leq x \leq at \\ 0, & x > at \end{cases}; \text{ para } x > at \text{ el movimiento es horizontal}$

Problemas 4.4

1. $L(x, y) = 2 - 2(x - 1) + 6(y - 1)$
3. $L(x, y) = 136 + \frac{353}{17}(x - 8) + \frac{120}{17}(y - 15)$
5. $L(x, y) = \ln 2 - (x + 1) + \frac{3}{2}(y - 1)$

7. 13.0907
9. 61.44

11. $dz = 2x \sen 4y dx + 4x^2 \cos 4y dy$
13. $dz = 2x(2x^2 - 4y^3)^{-1/2} dx - 6y^2(2x^2 - 4y^3)^{-1/2} dy$
15. $df = 7t(s + 3t)^{-2} ds - 7s(s + 3t)^{-2} dt$
17. $dw = 2xy^4z^{-5} dx + 4x^2y^3z^{-5} dy - 5x^2y^4z^{-6} dz$
19. $dF = 3r^2 dr - 2s^{-3} ds - 2t^{-1/2} dt$
21. $dw = du/u + dv/v - ds/s - dt/t$
23. $\Delta z = 0.2, dz = 0.2$
25. $\Delta z = -0.79, dz = -0.8$
27. $\varepsilon_1 = 5\Delta x, \varepsilon_2 = -\Delta x$
29. $\varepsilon_1 = y^2\Delta x + 4xy\Delta y + 2y\Delta x\Delta y, \varepsilon_2 = x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\Delta y$
31. 0.9%
33. $-mg(0.009); \text{ decrece}$
35. 15%
37. 4.9%

Problemas 4.5

1. $\frac{dz}{dt} = \frac{4xt - 4yt^{-3}}{x^2 + y^2}$
3. $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=\pi} = -2$
5. $\frac{dp}{du} = \frac{2u}{2s+t} + \frac{4r}{u^3(2s+t)^2} - \frac{r}{2\sqrt{u}(2s+t)^2}$
7. $\partial z/\partial u = 3u^2y^2e^{xy^2} + 2xye^{xy^2}, \partial z/\partial v = -4vxye^{xy^2}$
9. $\partial z/\partial u = 16u^3 - 40y(2u - v), \partial z/\partial v = -96v^2 + 20y(2u - v)$
11. $\partial w/\partial t = -3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \sen \theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \cos \theta, \partial w/\partial \theta = 3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \cos \theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \sen \theta$
13. $\partial R/\partial u = s^2t^4e^{v^2} - 4rst^4uve^{-u^2} + 8rs^2t^3uv^2e^{u^2v^2}, \partial R/\partial v = 2s^2t^4uve^{v^2} + 2rst^4e^{-u^2} + 8rs^2t^3u^2ve^{u^2v^2}$
15. $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{xu}{\sqrt{x^2 + y^2}(rs + tu)} + \frac{y \cosh rs}{u\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{xs}{\sqrt{x^2 + y^2}(rs + tu)} + \frac{sty \senh rs}{u\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{xt}{\sqrt{x^2 + y^2}(rs + tu)} - \frac{ty \cosh rs}{u^2\sqrt{x^2 + y^2}}$
17. $dy/dx = (4xy^2 - 3x^2)/(1 - 4x^2y)$
19. $dy/dx = y \cos x y/(1 - x \cos xy)$
21. $\partial z/\partial x = x/z, \partial z/\partial y = y/z$
23. $\partial z/\partial x = (2x + y^2z^3)/(10z - 3xy^2z^2), \partial z/\partial y = (2xyz^3 - 2y)/(10z - 3xy^2z^2)$
33. 5.31 cm²/s
35. 0.5976 pulg²/año
39. a) aproximadamente 380 ciclos por segundo b) decreciente

Problemas 4.6

1. $(2x - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (-2x^3y + 4y^3)\mathbf{j}$
3. $(y^2/z^3)\mathbf{i} + (2xy/z^3)\mathbf{j} - (3xy^2/z^4)\mathbf{k}$
5. $4\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$
7. $2\sqrt{3}\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\sqrt{3}\mathbf{k}$
9. $\sqrt{3}x + y$
11. $\frac{15}{2}(\sqrt{3} - 2)$
13. $-\frac{1}{2\sqrt{10}}$
15. $\frac{98}{\sqrt{5}}$
17. $-3\sqrt{2}$
19. -1

21. $-\frac{12}{\sqrt{17}}$

25. $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}; \quad 2\sqrt{6}$

27. $-8\sqrt{\pi/6}\mathbf{i} - 8\sqrt{\pi/6}\mathbf{j}; \quad -8\sqrt{\pi/3}$

29. $-\frac{3}{8}\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}; \quad -\frac{\sqrt{83}}{24}, \frac{281}{24}$

31. $\pm \frac{31}{\sqrt{17}}$

33. a) $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ b) $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ c) $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

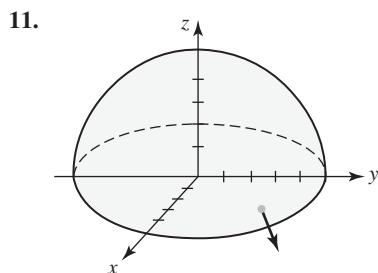
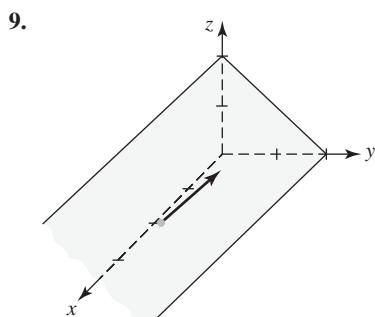
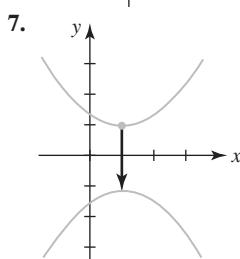
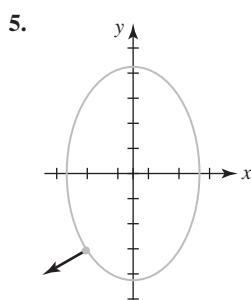
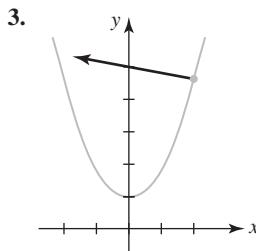
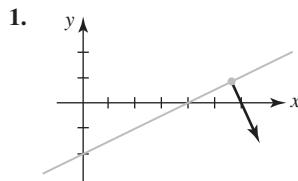
35. a) $D_{\mathbf{u}}f = \frac{1}{\sqrt{10}}(9x^2 + 3y^2 - 18xy^2 - 6x^2y)$

b) $D_{\mathbf{u}}F = \frac{1}{5}(-3x^2 - 27y^2 + 27x + 3y - 36xy)$

37. $(2, 5), (-2, 5)$

39. $-16\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

41. $x = 3e^{-4t}, y = 4e^{-2t}$ o $16x = 3y^2, y \geq 0$

Problemas 4.7

13. $(-4, -1, 17)$

17. $6x - 2y - 9z = 5$

21. $2x + y - \sqrt{2}z = 1 + \frac{5}{4}\pi$ 23. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$

25. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}),$

27. $(-2, 0, 5), (-2, 0, -3)$

31. $x = 1 + 2t, y = -1 - 4t, z = 1 + 2t$

33. $\frac{x - \frac{1}{2}}{4} = \frac{y - \frac{1}{3}}{6} = \frac{z - 3}{-1}$

Problemas 4.8

1. m\'in. rel. $f(0, 0) = 5$

3. m\'ax. rel. $f(4, 3) = 25$

5. m\'in. rel. $f(-2, 1) = 15$

7. m\'ax. rel. $f(-1, -1) = 10$; m\'in. rel. $f(1, 1) = -10$

9. m\'in. rel. $f(3, 1) = -14$

11. no extrema

13. m\'ax. rel. $f(1, 1) = 12$

15. m\'in. rel. $f(-1, -2) = 14$

17. m\'ax. rel. $f(-1, (2n+1)\pi/2) = e^{-1}, n \text{ impar};$
m\'in. rel. $f(-1, (2n+1)\pi/2) = -e^{-1}, n \text{ par}$

19. m\'ax. rel. $f((2m+1)\pi/2, (2n+1)\pi/2) = 2, m \text{ y } n \text{ pares};$
m\'in. rel. $f((2m+1)\pi/2, (2n+1)\pi/2) = -2, m \text{ y } n \text{ impares}$

21. $x = 7, y = 7, z = 7$

23. $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

25. $(2, 2, 2), (2, -2, -2), (-2, 2, -2), (-2, -2, 2)$; en estos puntos la distancia m\'inima es $2\sqrt{3}$

27. $\frac{8}{9}\sqrt{3}abc$

29. $x = P/(4 + 2\sqrt{3}), y = P(\sqrt{3} - 1)/(2\sqrt{3}), \theta = 30^\circ$

31. m\'ax. abs. $f(0, 0) = 16$ 33. m\'in. abs. $f(0, 0) = -8$

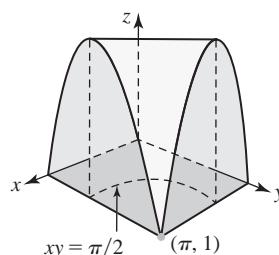
35. m\'ax. abs. $f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2$; m\'in. abs. $f(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -2$

37. m\'ax. abs. $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{2}$;
m\'in. abs. $f(0, 0) = 0$

39. m\'ax. abs. $f(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}) = 10$; m\'in. abs. $f(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}) = -10$

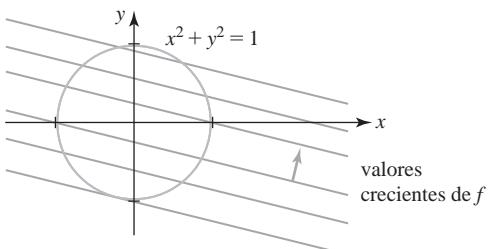
41. a) $(0, 0)$ y todos los puntos $(x, 2\pi/x)$ para $0 < x \leq \pi$
b) m\'ax. abs. $f(x, \pi/2x) = 1, 0 < x \leq \pi$;
m\'in. abs. $f(0, 0) = f(0, y) = f(x, 0) = f(\pi, 1) = 0$

c)



43. $x = 2, y = 2, z = 15$

RES-14 Respuestas de los problemas impares

Problemas 4.9
1.


f parece tener un máximo restringido y un mínimo restringido

3. máx. $f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}$;

mín. $f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{10}$

5. máx. $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$;
mín. $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$

7. mán. $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$

mán. $f(0, 1) = f(0, -1) = f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$

9. máx. $f(1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = f(-1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2}) = f(1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2}) = f(-1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = \sqrt{2}$;
mán. $f(0, 1) = f(0, -1) = f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$

11. máx. $f\left(\frac{9}{16}, \frac{1}{16}\right) = \frac{729}{65536}$; mán. $f(0, 1) = f(1, 0) = 0$

13. máx. $f(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$;
mán. $f(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = -6\sqrt{5}$

15. máx. $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

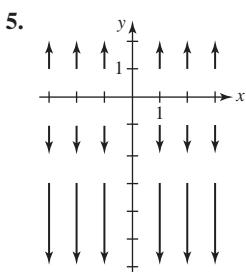
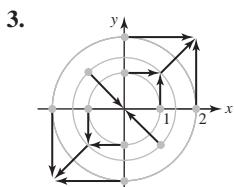
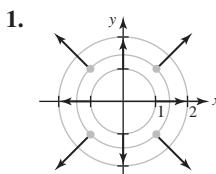
17. mán. $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

19. mán. $f\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15}\right) = \frac{134}{75}$

21. máx. $A\left(\frac{4}{2+\sqrt{2}}, \frac{4}{2+\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3+2\sqrt{2}}$

23. $x = 12 - \frac{9}{2\sqrt{5}}$ pulg, $y = \frac{6}{\sqrt{5}}$ pulg

25. $z = P + \frac{4}{\sqrt{27k}}(2 - \sqrt{4 + P\sqrt{27k}})$

Problemas 4.10

7. b)
9. d)
11. d)
13. a)

15. $\nabla f = (3x - 6y)\mathbf{i} + (12y - 6x)\mathbf{j}$

17. $\nabla f = \tan^{-1}yz\mathbf{i} + \frac{xz}{1+y^2z^2}\mathbf{j} + \frac{xy}{1+y^2z^2}\mathbf{k}$

19. $\nabla f = -e^{-y^2}\mathbf{i} + (1+2xye^{-y^2})\mathbf{j} + \mathbf{k}$

21. b)
23. d)

25. $\phi(x, y) = y + \cos y + \sin x$ **27.** $\phi(x, y, z) = x + y^2 - 4z^3$

29. $\phi = x^4y^3 + 3x + y + K$

31. no es un campo conservativo **33.** $\phi = \frac{1}{4}x^4 + xy + \frac{1}{4}y^4 + K$

35. $\phi(x, y, z) = x^2 + y^3 - yz + K$

Problemas 4.11

1. $(x-y)\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}; \quad 2z \quad \mathbf{3. 0}; \quad 4y + 8z$

5. $(4y^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2z^3 - 3x^2)\mathbf{k}; \quad 6xy$

7. $(3e^{-z} - 8yz)\mathbf{i} - xe^{-z}\mathbf{j}; \quad e^{-z} + 4z^2 - 3ye^{-z}$

9. $(xy^2e^y + 2xye^y + x^3yze^z + x^3ye^z)\mathbf{i} - y^2e^y\mathbf{j} + (-3x^2yze^z - xe^y)\mathbf{k}; \quad xye^x + ye^x - x^3ze^z$

27. $2\mathbf{i} + (1 - 8y)\mathbf{j} + 8z\mathbf{k} \quad \mathbf{37. 6}$

Competencia final de la unidad 4
A. 1. falso

3. verdadero

5. falso

7. falso

9. verdadero

B. 1. $-\frac{1}{4}$

3. $3x^2 + y^2 = 28$

5. $\frac{\partial F}{\partial r}g'(w) + \frac{\partial F}{\partial s}h'(w)$

7. f_{yyzx}

9. $F(y); -F(x)$

11. $f_x(x, y)g'(y)h'(z) + f_{xy}(x, y)g(y)h'(z)$

C. 1. $e^{-x^3y}(-x^3y + 1)$

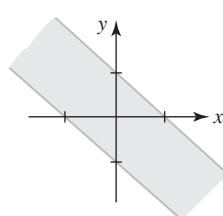
3. $-\frac{3}{2}r^2\theta(r^3 + \theta^2)^{-3/2}$

5. $6x^2y \operatorname{senh}(x^2y^3) + 9x^4y^4 \cosh(x^2y^3)$

7. $-60s^2t^4v^{-5}$

9. $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

11. $\frac{1}{\sqrt{10}}(3x^2 - y^2 - 4xy)$

13.


15. $2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y - 2y\Delta y - (\Delta y)^2$

17. $dz = 11y \frac{dx}{(4x+3y)^2} - 11x \frac{dy}{(4x+3y)^2}$

19. $x = -\sqrt{5}, \frac{z-3}{4} = \frac{y-1}{3}$

21. a) 2 b) $-\sqrt{2}$ c) 4

23. $4\pi x + 3y - 12z = 4\pi - 6\sqrt{3}$

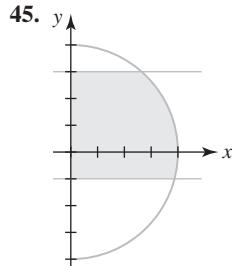
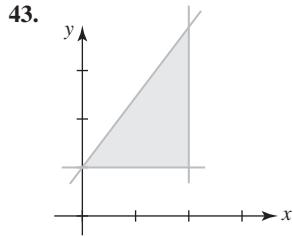
25. $3x + 4y = 25$ 27. $x = 2, y = 1, z = 2$ 9. $\frac{14}{3}$ 11. 40
 29. aproximadamente -8.77 cm/s 33. no un extremo 13. $\frac{9}{2}$ 15. $e^4 - e + 3 - 4 \ln 4$
 35. máximo relativo 37. $A = \frac{1}{2}L^2 \cos \theta \sen \theta$ 17. $\frac{63}{4}$ 19. el volumen es 16π
 39. $A = 2xz + 2yz - 5z^2$ 41. $V = 16xy - 4xy\sqrt{x^2 + y^2}$ 21. 18 23. 2π
 29. 33. $\frac{35}{6}$ 37. $\int_1^{e^3} \int_{\ln y}^3 f(x, y) dx dy$ 27. $30 \ln 6$
 35. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy dx$

Problemas 5.1

1. 52 3. a) 8 b) 8 25. 4 21. 18 23. 2π
 5. 60 7. 10π 29. $\frac{15\pi}{4}$ 27. $30 \ln 6$
 9. No. El integrando $f(x, y) = x + 5y$ no es no negativo sobre la región R . 33. $\frac{35}{6}$ 35. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy dx$
 11. 80 13. 34 17. 18 37. $\int_1^{e^3} \int_{\ln y}^3 f(x, y) dx dy$ 39. $\int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} f(x, y) dx dy$
 15. 66

Problemas 5.2

1. $y + c_1(x)$ 3. $2x^3y - \frac{3}{2}x^2\sqrt{y} + c_2(y)$ 41. $\frac{1}{18}(2\sqrt{2} - 1)$ 43. $\frac{2}{3} \sen 8$
 5. $\frac{\ln|y+1|}{x} + c_1(x)$ 7. $3y \sen 4x - 3x \sen y + c_2(y)$ 45. $\frac{\pi}{8}$ 47. $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$
 9. $y(2x + 3y)^{1/2} + c_2(y)$ 11. $24y - 20e^y$ Problemas 5.4
 13. $x^2e^{3x^2} - x^2e^x$ 15. $\frac{1}{2}x \ln 5$ 1. $\bar{x} = \frac{8}{3}, \bar{y} = 2$ 3. $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{3}{2}$
 17. $2 - \sen y$ 19. $\cos^2 x - \frac{1}{3} \cos^4 x$ 5. $\bar{x} = \frac{17}{21}, \bar{y} = \frac{55}{147}$ 7. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{7}$
 21. 37 23. $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 9. $\bar{x} = \frac{3e^4 + 1}{4(e^4 - 1)}, \bar{y} = \frac{16(e^5 - 1)}{25(e^4 - 1)}$ 11. $\frac{1}{105}$
 25. $-\frac{4}{21}$ 27. $18 - e^3 + 3e$ 13. $\frac{4}{9}k$ 15. $\frac{256}{21}$
 29. $\frac{10}{3}$ 31. $\frac{\pi}{4} \ln 9$ 17. $\frac{941}{10}$ 19. $\frac{\sqrt{10}}{5}a$
 33. $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$ 35. π 21. a) $\frac{1}{4}ab^3\pi$ b) $\frac{1}{4}a^3b\pi$ c) $\frac{1}{2}b$ d) $\frac{1}{2}a$
 37. e^{-1} 39. $2 - \pi$ 23. $\frac{1}{6}ka^4$ 25. $\frac{16\sqrt{2}}{3}k$
 41. $\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$ 27. $\frac{1}{\sqrt{3}}a$



43. Ambas integrales iguales $\frac{32}{5}$. 45. Ambas integrales iguales 9. 13. $\bar{x} = \frac{12}{5}, \bar{y} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 15. $\bar{x} = \frac{1}{6}(4 + 3\pi), \bar{y} = \frac{4}{3}$
 47. Ambas integrales iguales $13\pi^2 - 16$. 17. $\frac{1}{4}\pi a^4 k$ 19. $\frac{1}{12}ak(15\sqrt{3} - 4\pi)$

Problemas 5.3

1. $\frac{1}{21}$ 3. $\frac{25}{84}$ 25. 9π 27. $\frac{1}{4}\pi(e - 1)$
 5. 96 7. $2 \ln 2 - 1$ 29. $\frac{3}{8}\pi$ 31. 250

RES-16 Respuestas de los problemas impares

33. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ 35. aproximadamente $1\,450 \text{ m}^3$ 29. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2y+2}^{8-y} (x+y+4) dz dy dx$
 37. a) $2\pi d D_0 [d - (R+d)e^{-R/d}]$ 31. $\frac{2560}{3}k, \frac{4}{3}\sqrt{5}$ 33. $\frac{1}{30}k$
 b) $\frac{2d^2 - (R^2 + 2dR + 2d^2)e^{-R/d}}{d - (R+d)e^{-R/d}}$ 35. $k \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^5 (x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx$
 c) $2\pi d^2 D_0, 2d$

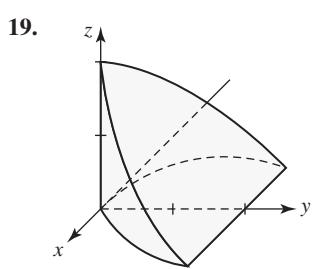
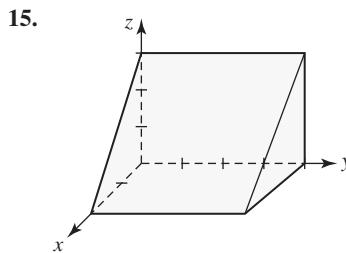
Problemas 5.6

1. $3\sqrt{29}$ 3. $\frac{10}{3}\pi$ 5. $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$ 7. $\frac{25}{6}\pi$
 9. $2a^2(\pi - 2)$ 11. $8a^2$ 13. $2\pi a(c_2 - c_1)$

Problemas 5.7

1. 48 3. 36 5. $\pi - 2$ 7. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}e$
 9. 50

11. $\int_0^4 \int_0^{2-(x/2)} \int_{x+2y}^4 f(x, y, z) dz dy dx, \int_0^2 \int_{2y}^4 \int_0^{z-2y} f(x, y, z) dx dz dy,$
 $\int_0^4 \int_0^{z/2} \int_0^{z-2y} f(x, y, z) dx dy dz, \int_0^4 \int_x^4 \int_0^{(z-x)/2} f(x, y, z) dy dz dx,$
 $\int_0^4 \int_0^z \int_0^{(z-x)/2} f(x, y, z) dy dx dz$
 13. a) $\int_0^2 \int_{x^3}^8 \int_0^4 dz dy dx$ b) $\int_0^8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt[3]{y}} dx dz dy$
 c) $\int_0^4 \int_0^2 \int_{x^3}^8 dy dx dz$



Problemas 5.8

1. $(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 5)$ 3. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -4)$
 5. $(0, 5, 1)$ 7. $(\sqrt{2}, -\pi/4, -9)$
 9. $(2\sqrt{2}, 2\pi/3, 2)$ 11. $(4, -\pi/2, 0)$
 13. $r^2 + z^2 = 25$ 15. $r^2 - z^2 = 1$
 17. $z = x^2 + y^2$ 19. $x = 5$
 21. $\frac{2}{3}\pi(64 - 24\sqrt{3})$ 23. $\frac{625}{2}\pi$
 25. $(0, 0, \frac{3}{8}a)$ 27. $\frac{8}{3}\pi k$
 29. a) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ b) $(\frac{2}{3}, \pi/6, 0)$
 31. a) $(-4, 4, 4\sqrt{2})$ b) $(4\sqrt{2}, 3\pi/4, 4\sqrt{2})$
 33. a) $(2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$ b) $(2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$
 35. $(5\sqrt{2}, \pi/2, 5\pi/4)$ 37. $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/6)$
 39. $(6, \pi/4, -\pi/4)$ 41. $\rho = 8$
 43. $\phi = \pi/6, \theta = 5\pi/6$ 45. $x^2 + y^2 + z^2 = 100$
 47. $z = 2$ 49. $9\pi(2 - \sqrt{2})$
 51. $\frac{2}{9}\pi$ 53. $(0, 0, \frac{7}{6})$
 55. πk

Problemas 5.9

1. $-\frac{125\sqrt{2}}{6}; \frac{125}{6}(4 - \sqrt{2}); \frac{125}{2}$
 3. 3; 6; $3\sqrt{5}$ 5. 0
 7. -1; $\frac{1}{2}(\pi - 2); \frac{1}{8}\pi^2; \frac{1}{8}\pi^2\sqrt{2}$
 9. 21 11. 30
 13. 1 15. 1
 17. 460 19. $\frac{26}{9}$
 21. $-\frac{64}{3}$ 23. $-\frac{8}{3}$
 25. 6π 27. $\frac{123}{2}$
 29. 70 31. 7
 33. Sobre cada curva la integral de línea tiene el valor $\frac{208}{3}$.
 35. $k\pi$

Competencia final de la unidad 5

- A. 1. verdadero 3. verdadero
 5. falso

B. 1. $32y^3 - 8y^5 + 5y \ln(y^2 + 1) - 5y \ln 5$

3. región cuadrada

5. $f(x, 4) - f(x, 2)$

7. $\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$

9. $(\sqrt{2}, 2\pi/3, \sqrt{2})$

11. $z = r^2; \rho = \csc \phi \cot \phi$

C. 1. $-3xe^{-4xy} - 5xy + y + c_1(x)$

3. $-y \cos y^2 + y \cos y^4$

5. $e^2 - e^{-2} + 4$

7. $1 - \sin 1$

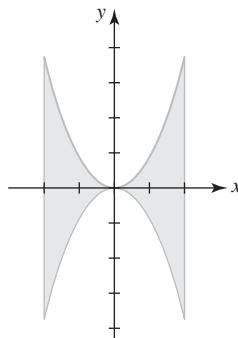
9. $\frac{10}{3}$

11. 320π

13. $\frac{37}{60}$

15. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{x^2 + y^2} dy dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{x^2 + y^2} dy dx$

17.



19. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$

21. $\frac{5}{8}\pi$

23. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$

25. a) $\int_0^1 \int_x^{2x} \sqrt{1-x^2} dy dx$

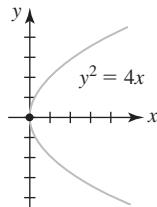
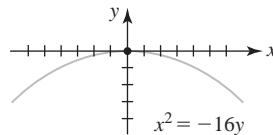
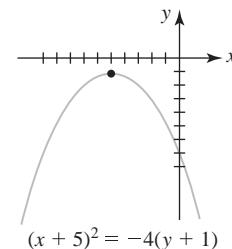
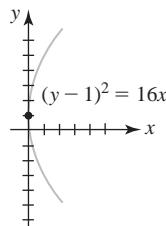
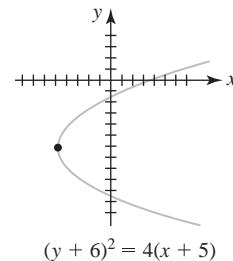
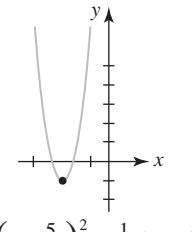
b) $\int_0^1 \int_{y/2}^y \sqrt{1-x^2} dx dy + \int_1^2 \int_{y/2}^1 \sqrt{1-x^2} dx dy$

c) $\frac{1}{3}$

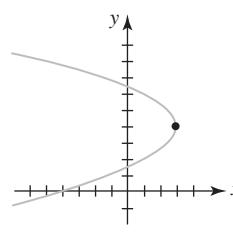
27. $\frac{41}{1512}k$

29. 8π

31. 0

Problemas A.11. vértice: $(0, 0)$; foco: $(1, 0)$; directriz: $x = -1$; eje: $y = 0$;3. vértice: $(0, 0)$; foco: $(0, -4)$; directriz: $y = 4$; eje: $x = 0$;5. vértice: $(0, 1)$; foco: $(4, 1)$; directriz: $x = -4$; eje: $y = 1$;7. vértice: $(-5, -1)$; foco: $(-5, -2)$; directriz: $y = 0$; eje: $x = -5$;9. vértice: $(-5, -6)$; foco: $(-4, -6)$; directriz: $x = -6$; eje: $y = -6$ 11. vértice: $(-\frac{5}{2}, -1)$; foco: $(-\frac{5}{2}, -\frac{15}{16})$; directriz: $y = -\frac{17}{16}$; eje: $x = -\frac{5}{2}$ 

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(y + 1)$$

13. vértice: $(3, 4)$; foco: $(\frac{5}{2}, 4)$; directriz: $x = \frac{7}{2}$; eje: $y = 4$;

$$(y - 4)^2 = -2(x - 3)$$

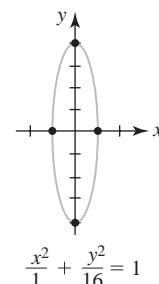
15. $x^2 = 28y$

17. $y^2 = 10x$

19. $(y + 7)^2 = 12(x + 2)$

21. $x^2 = \frac{1}{2}y$

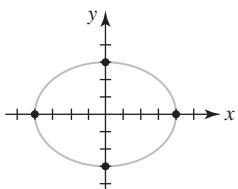
23. $(3, 0), (0, -2), (0, -6)$

25. centro: $(0, 0)$; focos: $(0, \pm\sqrt{15})$; vértices: $(0, \pm 4)$; puntos terminales del eje menor: $(\pm 1, 0)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$$

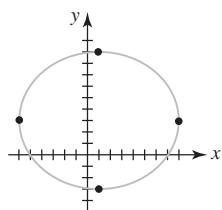
RES-18 Respuestas de los problemas impares

27. centro: $(0, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{7}, 0)$; vértices: $(\pm 4, 0)$; puntos terminales del eje menor: $(0, \pm 3)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{7}}{4}$



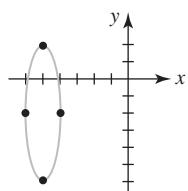
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

29. centro: $(1, 3)$; focos: $(1 \pm \sqrt{13}, 3)$; vértices: $(-6, 3), (8, 3)$; puntos terminales del eje menor: $(1, -3), (1, 9)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{7}$;



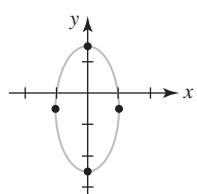
$$\frac{(x - 1)^2}{49} + \frac{(y - 3)^2}{36} = 1$$

31. centro: $(-5, -2)$; focos: $(-5, -2 \pm \sqrt{15})$; vértices: $(-5, -6), (-5, 2)$; puntos terminales del eje menor: $(-6, -2), (-4, -2)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{15}}{4}$;



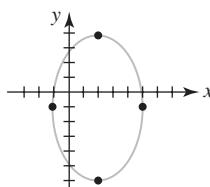
$$\frac{(x + 5)^2}{1} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$$

33. centro: $(0, -\frac{1}{2})$; focos: $(0, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3})$; vértices: $(0, -\frac{5}{2}), (0, \frac{3}{2})$; puntos terminales del eje menor: $(-1, -\frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})$; excentricidad: $\frac{\sqrt{3}}{2}$;



$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y + \frac{1}{2})^2}{4} = 1$$

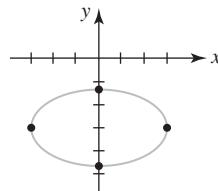
35. centro: $(2, -1)$; focos: $(2, -5), (2, 3)$; vértices: $(2, -6), (2, 4)$; puntos terminales del eje menor: $(-1, -1), (5, -1)$; excentricidad: $\frac{4}{5}$;



$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{25} = 1$$

37. centro: $(0, -3)$; focos: $(\pm\sqrt{6}, -3)$; vértices: $(-3, -3), (3, -3)$;

puntos terminales del eje menor: $(0, -3 \pm \sqrt{3})$; excentricidad: $\frac{\sqrt{6}}{3}$;



$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{3} = 1$$

$$39. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

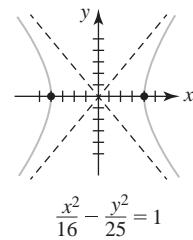
$$41. \frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$$

$$43. \frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$45. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$47. \frac{(x - 1)^2}{7} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$$

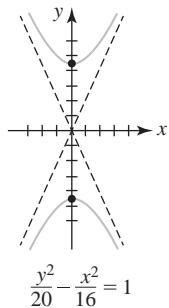
49. centro: $(0, 0)$; focos: $(\pm\sqrt{41}, 0)$; vértices: $(\pm 4, 0)$; asíntotas: $y = \pm\frac{5}{4}x$; excentricidad: $\frac{\sqrt{41}}{4}$;



$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

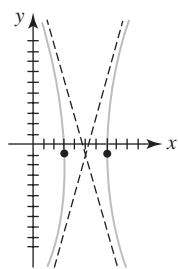
51. centro: $(0, 0)$; focos: $(0, \pm 2\sqrt{6})$; vértices: $(0, \pm 2\sqrt{5})$;

asíntotas: $y = \pm\sqrt{5}x$; excentricidad: $\sqrt{\frac{6}{5}}$;



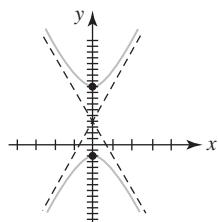
$$\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{16} = 1$$

- 53.** centro: $(5, -1)$; focos: $(5 \pm \sqrt{53}, -1)$; vértices: $(3, -1)$ $(7, -1)$;
asíntotas: $y = -1 \pm \frac{7}{2}(x - 5)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{53}}{2}$;



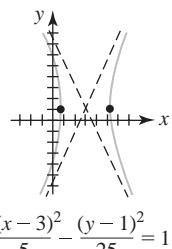
$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$$

- 55.** centro: $(0, 4)$; focos: $(0, 4 \pm \sqrt{37})$; vértices: $(0, -2)$, $(0, 10)$;
asíntotas: $y = 4 \pm 6x$; excentricidad: $\frac{\sqrt{37}}{6}$;



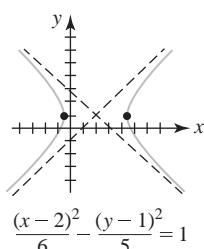
$$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{x^2}{1} = 1$$

- 57.** centro: $(3, 1)$; focos: $(3 \pm \sqrt{30}, 1)$; vértices: $(3 \pm \sqrt{5}, 1)$;
asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{5}(x - 3)$; excentricidad: $\sqrt{6}$;



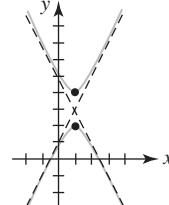
$$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

- 59.** centro: $(2, 1)$; focos: $(2 \pm \sqrt{11}, 1)$; vértices: $(2 \pm \sqrt{6}, 1)$;
asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{6}}(x - 2)$; excentricidad: $\sqrt{\frac{11}{6}}$;



$$\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$$

- 61.** centro: $(1, 3)$; focos: $(1, 3 \pm \frac{\sqrt{5}}{2})$; vértices: $(1, 2)$, $(1, 4)$;
asíntotas: $y = 3 \pm 2(x - 1)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{5}}{2}$;



$$\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

- 63.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$ **65.** $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$
67. $(y-3)^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ **69.** $(y-4)^2 - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

71. en el foco a 6 pulg del vértice

73. 76.5625 pies

75. 12.65 m del punto en el suelo directamente abajo del final del tubo

77. la distancia mínima es 28.5 millones de millas; la máxima es 43.5 millones de millas

79. 0.97 aproximadamente **81.** 12 pies

ÍNDICE ANALÍTICO

A

Aceleración, 110
 centrípeta, 112
 componente normal de la, 117
 componente tangencial de la, 117
 normal de la, 117

Agnesi, Maria Gaetana, 62

Ángulo entre dos planos, 39

Ángulos directores, 17

Apolonio, 254

Aproximación lineal local, 148

Arco

 longitud de, 67

Área, 203, 223

A

 de la región, 203
 de un paralelogramo, 26
 bajo la gráfica, 68
 de una superficie, 225-228
 de un triángulo, 26
 de una región, 82
 en coordenadas polares, 83

Aritmética de vectores

 propiedades de la, 5

B

Balanceo, 14

Base estándar, 6, 12

Bicilindro, 214

Bifolium, 79

Binormal, 117-118

Bola abierta, 131

Bosch, Carl, 183

Braquistócrono, 59

Bruja de Agnesi, 62. Véase también Maria Gaetana Agnesi

C

Campo

 conservativo, 186
 prueba para un, 186
 de velocidades, 114, 184
 gradiente, 185
 vectorial, 184
 conservativo, 186
 rotacional de un, 189
 solenoidal, 192

Campos vectoriales, 184-189

 conservativos, 186
 gradiente, 185-186

Cardioïdes, 75
Centro de masa, 216, 230
Centroide, 216, 230
Cilindro, 40-41
Círculo, 254
 centro del, 254
 forma estándar de un, 254
 involuta de un, 61
 radio de un, 254
Círculos
 centrados en el origen, 73
 con centros sobre un eje, 77
 grandes, 240
Cociente, 134
Cofactor, 22
Cofactores
 expansión de determinantes por, 22
Combinación lineal, 5
Componente
 de un vector **a** sobre un vector **b**, 18
 horizontal de **a**, 6
 vertical de **a**, 6
Componentes, 3-4, 11
 aritmética de, 4, 11
 de **a** sobre **b**, 17-18
Composición, 134
Conceptos equivalentes, 190
Condición
 de ortogonalidad, 16
 de paralelismo, 25
Cónicas rotadas, 91
Conjunto *R* cerrado y acotado
 guías para encontrar los extremos en un, 174
Conjuntos acotados cerrados
 extremos en, 174
Cono
 con dos mantos, 48
 de un manto, 48
 elíptico, 43
Continuidad, 104, 134
Conversión de coordenadas
 polares en rectangulares, 70
 rectangulares en polares, 70
Coordenadas
 cilíndricas, 235
 a coordenadas rectangulares, 236
 esféricas, 238
 a coordenadas rectangulares y cilíndricas, 238
 polares, 69-72
 uso de, 133
 área en, 83

ÍNDICE ANALÍTICO

ÍND-2 Índice analítico

- cálculo en, 81-88
 - convenciones en, 69
 - sistema de, 69-72
 - rectangulares o cartesianas, 9
 - a polares, 222-223
 - a coordenadas cilíndricas, 236
 - a coordenadas esféricas, 239
 - Cosenos directores, 17
 - Cuerda focal, 255
 - Curva
 - cerrada, 242
 - simple, 242
 - cúbica trenzada, 101
 - de la rosa de cuatro pétalos, 76
 - de mariposa, 63
 - espacial, 60, 98
 - longitud de una, 107
 - involuta, 61
 - longitud de una, 66
 - movimiento sobre una, 110-115
 - paramétrica, 56
 - gráfica de una, 56
 - parametrizada, 56
 - plana, 56
 - suave, 60, 105, 242
 - por partes, 242
 - por secciones, 60
 - Curvas
 - de Bézier, 63
 - de las rosas, 76-77
 - de nivel, 126, 186
 - helicoidales, 99
 - planas, 60
 - rectangulares
 - parametrización de, 60
 - suaves, 60, 105
 - Curvatura, 115-116
 - centro de, 119
 - círculo de, 119
 - radio de, 119
 - D
 - Declive, 14
 - Definición ϵ - δ , 135
 - Derivada
 - direccional, 162-163
 - cálculo de una, 162-163
 - valor máximo de la, 164
 - parcial
 - cálculo de una, 138
 - con respecto a x , 137
 - con respecto a y , 137
 - valor de una, 138
 - segunda, 106
 - Derivadas
 - de orden superior, 66, 106, 141
 - parciales, 132-145
 - de primer orden, 137
 - de segundo orden, 141
 - mixtas, 141
 - interpretación geométrica de, 139-140
 - Desigualdad
 - de Cauchy-Schwarz, 21
 - del triángulo, 21
 - Desvío del eje, 14
 - Determinante
 - de segundo orden, 22
 - de tercer orden, 22
 - Determinantes
 - repaso de, 22
 - tres propiedades de, 23
 - 2×3 y 3×3 , 22
 - Diagramas de árbol, 155-157
 - Diferenciabilidad, 147-148
 - condición suficiente
 - para la, 147
 - implica continuidad, 147
 - Diferenciación, 104
 - implícita, 157-158
 - ordinaria
 - reglas de la, 138
 - parcial
 - generalización de la, 161-162
 - guías para la, 138
 - implícita, 143
 - total, 149
 - de z , 149
 - Diferenciales, 149-150
 - de x y y , 149
 - Directriz, 40, 88, 254
 - Disco
 - abierto, 131
 - cerrado, 131, 174
 - Distancia, 10
 - D desde un punto a un plano, 39
 - fórmula de la, 10
 - Divergencia, 191-192
 - Dominio, 124
- ## E
- Ecuación
 - cartesiana. Véase Ecuación rectangular
 - de difusión unidimensional, 144
 - de estado de Van der Waals, 159
 - de la curva C , 48
 - de la superficie S , 48
 - de Laplace, 144, 158, 193
 - en dos dimensiones, 144
 - en tres dimensiones, 144
 - de onda, 158
 - unidimensional, 144
 - de un plano tangente, 168
 - lineal, 35
 - polar
 - prueba de simetría de la gráfica
 - de una, 74
 - rectangular, 35
 - vectorial, 29, 34
 - Ecuaciones
 - paramétricas, 30, 56-64
 - aplicaciones de, 59
 - cálculo y, 64-68

polares
de cónicas, 89
gráficas de, 72-80
simétricas, 31-32
variación de las, 46-47

Eje
conjugado, 260
de revolución, 48
polar, 69
transversal, 260

Ejes
intersección con los, 59

Elipse, 89-90, 254, 256
centro de la, 256-257
ecuación de una, 257

forma estándar de la, 257
centro trasladado a (h, k) , 258

eje mayor de una, 257

eje menor de una, 257
longitud del, 257

excentricidad de una, 262

focos de la, 256-257

vértice de la, 257

Elipsoide, 43

de revolución, 48

Epicicloide, 62

de tres cúspides, 62

Epitrocoide, 61

Equipotencial, 125

Escalar, 2

Escalares, 2

Esfera, 41

centro de la, 41

radio de la, 41

Esferoide

achatado, 50

prolato, 50

Espacio

bidimensional, 3

tridimensional, 8-9

sistema de coordenadas rectangulares
en el, 9

y vectores, 8-14

Espiral

de Arquímedes, 73

esférica, 103

logarítmica, 73

toroidal, 103

Excentricidad, 88, 262

Extremos

con restricciones, 177

de funciones

multivariadas, 170-177

frontera, 174

locales. Véase Extremos relativos

relativos, 170-171

máximo, 171-172

mínimo, 171-172

f integrable

sobre D , 229

sobre R , 202

F

Factor de enfriamiento, 130

Flecha

cola de la, 2
punta de la, 2
incompresible, 192

Flujo

de agua, 130
irrotacional, 192
rotacional, 192

Foco, 88, 254

Fórmula

de la distancia, 10
de la integral de Poisson, 197
del punto medio, 10

Fórmulas

para a_T, a_N , 118-119
para la curvatura, 118-119

Fubini, Guido, 209

Fuente, 192

Fuerza

central, 115
resultante, 3

Función

armónica, 193
continua, 134
sobre una región R , 134

de producción Cobb-Douglas, 198

de tres variables, 127

diferenciable, 147, 150

en R , 147

en todas partes, 147

discontinua, 134

error, 159

gradiente de una, 160-161

homogénea de grado n , 160

polinomial, 124, 127, 135

potencial de \mathbf{F} , 186

racional, 124, 127, 135

suave, 105

vectorial, 98

continua, 104

derivada de una, 104

límite de una, 103-104

Funciones

de dos variables, 124, 178

de tres o más variables, 135, 140-141, 150-151, 163-164, 181

de valores vectoriales, 98

de varias variables, 124-130

vectoriales, 98-103

cálculo de, 103-110

integrales de, 107

G

Galileo Galilei, 80, 254

Generatrices, 41

Gradiente

interpretación geométrica del, 166-167

Gradientes, 160

ÍND-4 Índice analítico

- Gráfica, 125
 longitud de una, 85-86
 polar
 pendiente de una tangente a una, 81
 simétrica con respecto al eje x , 74
 simétrica con respecto al origen, 74
- Gráficas, 90
 polares
 longitud de arco para, 85
 rotación de, 78
- H**
- Haber, Fritz, 183
- Hélice
 circular, 60, 99
 cónica, 99
 elíptica, 99
 esférica, 99
 horquilla de una, 99
- Helicoide circular, 60
- Hipatia, 254
- Hipérbola, 89-90, 254
 asíntotas de la, 260-261
 centro de la, 259
 trasladado a (h, k) , 260
 con centro $(0, 0)$, 259
 eje transversal de la, 259
 longitud del, 259
 excentricidad de una, 262
 focos de la, 259
 forma estándar de la ecuación de una, 259
 ramas de la gráfica de una, 259
 rectangular, 266
 vértices de la, 259
- Hipérbolas
 aplicaciones de, 264-266
 conjugadas, 266
- Hiperboloide
 de dos hojas, 43, 45-46
 de una hoja, 43, 45-46
- Hipocicloide, 61
 de cuatro cúspides, 62
- I**
- Incremento, 146, 150
 fundamental
 fórmula del, 146
- Índice de amplitud, 183
- Integración
 límites de, 206
 orden de, 234
 parcial, 205
 definida, 205-206
 primera, 234
 región de, 202, 207
 segunda, 234
 tercera, 234
- Integraciones
 repetidas, 207
 sucesivas. Véase Integraciones repetidas
- de línea, 242
 C definida paramétricamente, 243
 C definida por $y = g(x)$, 244
 de f con respecto a la longitud de arco, 243
 de f con respecto a x , 242
 de f con respecto a y , 243
 de f con respecto a z , 246
 interpretación geométrica, 243
 notación, 244-245
 parcial
 de f con respecto a x , 205
 de f con respecto a y , 205
 propiedades, 245-246
- definida
 bidimensional. Véase Integral doble
 tridimensional. Véase Integral triple
 doble, 202-205
 de f sobre R , 202
 propiedades de la, 203
 iterada de f , 207
 parcial
 definida con respecto a x , 206
 definida con respecto a y , 205
 triple, 228-235
 de f sobre D , 229
- Integrales
 de línea, 242-248
 en el plano, 242-243
 método de evaluación, 246
 dobles, 209
 en coordenadas polares, 220-225
 evaluación de, 209-216
 iteradas, 205-209
 evaluación mediante, 229
 triples, 794
 en coordenadas cilíndricas, 236
 en coordenadas esféricas, 239
 en otros sistemas de coordenadas, 235-241
- Interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$, 105
- Interpretaciones físicas, 192-193
- Isobárico, 125
- Isotérmico, 125
- K**
- Kepler, Johannes, 254
 primera ley del movimiento planetario
 de, 263
 segunda ley de, 87
- L**
- Lagrange, Joseph Louis, 182
- Lámina
 centro de masa de la, 216
- Láminas con densidad variable, 216
- Laplace, Pierre-Simon Marquis de, 193
- Laplaciano tridimensional, 192
- Latitud, 240
- Lemniscatas, 77
- Limacón
 con un lazo interior, 75

- con un orificio, 75
convexa, 75
Límite, 135
de una suma, producto, cociente, 133
definición de, 135-136
Límites
de funciones de dos variables, 131
fundamentales, 133
propiedad de los, 104, 131
Linealización, 148-150
Líneas de contorno, 127
Longitud, 2, 5, 85, 108, 240
de arco, 85-86
función de la, 106
para gráficas polares, 85-86
parametrización de, 108
- M**
- Magnitud, 2, 5
Mano
derecha
regla de la, 9
izquierda, 9
Mantos, 48
Mapas de contorno, 127
Masa, 216
centro de, 216
Máximo
absoluto, 174
relativo, 172
Maxwell, James Clerk, 192
Meridiano, 240
primo, 240
Método de multiplicadores
de Lagrange, 178
Mínimo
absoluto, 174
relativo, 172
Momento
angular, 87, 114
de inercia, 218
polar, 220, 224
lineal, 114
Momentos, 216
de inercia, 218, 230
primeros, 218, 230
segundos, 218, 230
Movimiento
curvilíneo, 56-57
en el plano, 112
Multiplicadores de Lagrange, 177-183
método de, 178-180
guías para el, 179
- N**
- Norma, 2, 5
Newton, Isaac, 254, 263
Normal
de la aceleración, 117
n, 34
perpendicular. Véase Normal **n**
unitaria, 117 Véase también Vector normal principal
Normalización, 5
Números direccionales, 30
- O**
- Octante
primer, 9
Octantes, 9
Operadores de diferenciación parcial, 138
Orientación, 57, 98, 242
Origen, 9
círculos centrados en el, 73
en (h, k, l) , 47
rectas que pasan por el, 73
tangentes a la gráfica en el, 82
Ortogonal, 16
Ortogonalidad
condición de, 16
Óvalo, 266
- P**
- Par ordenado, 8
Parábola, 90, 254
aplicaciones, 262-264
ecuación de una, 255-256
eje de la, 255
forma estándar de la ecuación de una, 255-256
vértice de la, 255
Paraboloides
de revolución, 48
elíptico, 44
hiperbólico, 44-45
Paraboloides, 262-264
Paralela, 240
Paralelismo
condición de, 25
Parametrización, 56
Parámetro, 30, 56
eliminación del, 57-59
Parciales mixtas
igualdad de, 141-142
Partición
interior, 202, 228
Pendiente, 64
de una recta tangente, 64, 81
Pendientes de la superficie, 140
Perpendicular, 16
Peso efectivo, 114
Pétalos o lazos, 76
Plano
de coordenadas, 9
de rectificación, 117-118
guías para graficar un, 37
normal, 117-118
osculante, 117-118
paralelo, 36
perpendicular, 36
tangente, 149, 167-168
ecuación de un, 168

ÍNDICE ANALÍTICO

ÍND-6 Índice analítico

- traza de un, 37
- y vector normal, 35
- Polo, 69
- Primera ley de Kepler del movimiento planetario, 115
- Proceso de Haber-Bosch, 183
- Producto, 134
 - cruz, 22-29
 - de dos vectores, 23
 - forma alterna del, 25
 - forma de componentes del, 23-24
 - interpretación física del, 27
 - propiedades del, 24
 - escalar. Véase Producto punto
 - interior. Véase Producto punto
 - punto, 14-22
 - de dos vectores, 15
 - en el espacio
 - bidimensional, 15
 - tridimensional, 15
 - forma alterna del, 15-16
 - forma de componentes del, 14-15
 - interpretación física del, 19
 - propiedades del, 15
- Productos especiales, 26
- Propiedades, 4-5
- Proyección
 - de **a** orthogonal sobre **b**, 19
 - de **a** sobre **b**, 18
 - de las segundas derivadas parciales, 172
- Punto
 - crítico, 171
 - final, 2, 57
 - frontera, 131
 - inicial, 2, 57
 - interior, 131
 - medio
 - del segmento de recta, 10
 - fórmula del, 10
 - silla, 173
- Punto-normal, 35
- Puntos
 - críticos, 171-172
 - de intersección, 77
 - estacionarios, 172. Véase también Puntos críticos
 - gradientes en la dirección del incremento
 - más rápido de f , 164-165
- R
 - Radio, 254
 - de giro, 231
 - Rango, 124
 - Rapídez, 110
- Recta
 - normal, 169
 - segmento de, 30, 99
 - tangente, 105
- Rectas, 98-99
 - en el espacio tridimensional, 29-34
 - oblicuas, 33
 - paralelas, 32
- perpendiculares, 32
- que pasan por el origen, 73
- Región
 - abierta, 131
 - acotada, 131
 - cerrada, 131
 - de integración, 202, 207
 - no acotada, 131
 - tipo I, 206
 - tipo II, 206
- Regla
 - de la cadena, 153-160
 - para derivadas ordinarias, 153-154
 - para derivadas parciales, 154-155
 - de la mano derecha, 9, 25
- Reglas
 - de diferenciación, 106
- Resonador de Helmholtz, 159
- Resta, 2-5
- Restas, 4
- Resultado laplaciano, 192
- Rotacional, 189
 - de \mathbf{F} , 189
 - de un campo vectorial, 189
- S
 - Sección cónica, 88-93
 - Secciones cónicas, 50
 - en coordenadas polares, 88-93
 - Segmento de recta, 30
 - Símbolos alternos, 138
 - Simetría, 74
 - Siple, Paul A., 130
 - Sistema
 - de coordenadas
 - polares, 69-72
 - de vectores tridimensionales
 - base estándar del, 12
 - Suma, 134
 - de Riemann, 202, 228
 - Sumidero, 192
 - Superficie, 40
 - área de una, 225-228
 - diferencia del, 227
 - traza de una, 42
 - Superficies
 - cuadráticas, 43-50
 - origen en (h, k, l) , 47
 - dadas por $z = f(x, y)$, 168-169
 - de nivel, 128
 - de revolución, 47-48
 - ortogonales, 170
 - T
 - Tangente, 65
 - horizontal, 65
 - unitaria, 116
 - vertical, 65
 - Tangentes a la gráfica en el origen, 76, 82
 - Tautócrono, 59

Teorema

- de Fubini, 209
- de Lagrange, 178
- del valor extremo, 174

Torsión τ , 27

Transferencia de Hohmann, 92

Trayectoria, 131

Trazas, 126

Tres límites fundamentales, 133

Triada ordenada, 9

Triedro móvil, 117

Triple producto

- escalar, 26
- vectorial, 26

V

Valor promedio, 215

Variable dependiente, 124

- incremento de la, 146

Variables independientes, 124

Vector, 2

- a**, 11
- binormal, 117
- cero **0**, 2
- componentes del, 11
- de desplazamiento, 2
- direccional, 30
- longitud del, 2, 5
- magnitud del, 2, 5
- múltiplo escalar de un, 2
- negativo de un, 2, 4
- norma del, 2, 5

normal principal, 117. *Véase también* Normal unitaria

- posición, 3, 11

resultante **U**, 114

tangente, 105

unitario, 5

Vectores

- ángulo entre, 16

aritmética de

- propiedades de la, 5

coplanares, 27

diferencia de dos, 3

en el espacio

- bidimensional, 2-8

- tridimensional, 11

en un plano de coordenadas, 3

espacio tridimensional y, 8-14

geométricos, 2

iguales, 2

i, j, 6**i, j, k, 12**

ortogonales, 16

- criterio para, 16

perpendiculares, 16

propiedades de la aritmética de, 5

paralelos, 2, 25

- criterio para, 25

suma de, 2

unitarios, 5

Velocidad, 110

Vértice trasladado a (h, k) , 256

Volumen, 202, 230

- de un paralelepípedo, 27

neto, 203-204

