UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA
Práctica 01
Alumno: Jose Luis Huarcaya

1. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una σ - álgebra de subconjuntos de si, y solo si,satisface las siguientes propiedades:

   a) $\phi \in \mathcal{F}$

      Demostración

      Si $\Omega \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ colección cerrada

      $\Omega^c = \phi \in \mathcal{F}$

   b) A $\in \mathcal{F} \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

      Demostración

      $A_1 \in \mathcal{F} \longrightarrow A_1^c \in \mathcal{F}$

      $A_2 \in \mathcal{F} \longrightarrow A_2^c \in \mathcal{F}$

   c) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in N$

      Demostración:

      Por definición: $\{A_n\}_{n \in N} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{A_n\}_{n \in N}^c \in \mathcal{F}$

      Entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ y a su vez $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \in \mathcal{F}$

Luego $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in N$

2. Sea $\mathcal{F}$ una σ - álgebra; demuestre que $\mathcal{F}^c$ es una σ - álgebra definida por: $\mathcal{F}^c = \{A^c$: A $\in \mathcal{F}$ $\}$

   Demostración

   Como $\mathcal{F}$ es una σ - álgebra entonces cumple las siguientes propiedades:

   1. $\Omega \in \mathcal{F}$
   2. A $\in \mathcal{F} \longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
   3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

   Supongamos que $\mathcal{F}^c$ es un σ - álgebra $\Omega \in \mathcal{F}^c$ que verifica la primera propiedad.

   Luego como $\{A_n\}_{n\in N}$ es una sucesión esta definida:

   $\{A_n\} \in \mathcal{F}^c \Rightarrow \{A_n\}^c \in \mathcal{F}^c$ se verifica por la tercera propiedad

   Ahora por la tercera propiedad verificamos que:

   $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}^c \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}^c = \{A^c/A \in \mathcal{F}\}$

3. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } n = 1, 3, 5, ... \\ \\ A^c & \text{si } n = 2, 4, 6, ... \end{cases}$$

   Determine el: $\lim_{x\to\infty} A_n$

   Solución

   $\lim_{n\to\infty} infA_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi = \phi$

   $\lim_{n\to\infty} supA_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap A^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega = \Omega$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} inf A_n \neq \lim_{n\to\infty} sup A_n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} A_n \nexists$

4. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de eventos, definida por:

$$A_n = \begin{cases} A & \text{si } [-1/n, 0] \\ \\ A^c & \text{si } [0, 1/n] \end{cases}$$

Determine el: $\lim_{x\to\infty} A_n$

5. Sean $A_1, A_2, ...$ eventos aleatorios, demuestre :

a) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)^c$

Demostración

Si: $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)^c$

$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)$

Recuerde: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)^c$

b) Si $P(A_i) \geq 1 - e$ para i=1,2,...,n entonces $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\right) \geq 1 - ne$

Demostración

tenemos: $P(A_i) \geqslant 1 - e$

$\Rightarrow e \geqslant 1 - P(A_i)$

$\prod_{i=1}^{n} e \geqslant \prod_{i=1}^{n} P(A_i)^c$

$$ne \geqslant \prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i)) \Rightarrow ne \geqslant 1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\therefore P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1-ne$$

c) $P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant 1-\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_k^c\right)$

6. Demuestre las desigualdades de Boole

   $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$

   Por inducción para familia finita queremos demostrar que:

   $P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n\right) \leqslant P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+...+P\left(A_n\right)$

   Luego: para n=1

   $P\left(A_1\right) \leqslant P\left(A_1\right)$ se cumple

   para n=h

   $P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_h\right) \leqslant P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+...+P\left(A_h\right)$ Hipótesis Inductivo.

   para n=h+1

   $P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+...+P\left(A_h+1\right)$

   Para ello consideramos que:

   $x=A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n$, luego $P(x) \leqslant P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+...+P\left(A_h\right)$

   Entonces:

   $P\left(x \cup A_{h+1}\right)=P(x)+P\left(A_{h+1}\right)-P\left(x \cap A_{h+1}\right)$

   Luego

   $P(x)+P\left(A_{h+1}\right)-P\left(x \cap A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right)+...+P\left(A_h\right)+P\left(A_{h+1}\right)-P\left(x \cap A_{h+1}\right)$

   Así $P\left(x \cup A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right)+...+P\left(A_h\right)+P\left(A_{h+1}\right)$

   $P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_{h+1}\right) \leqslant P\left(A_1\right)+...+P\left(A_h\right)$

Por tanto:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$$

7. Sea $\{A_n\}n \in N$ una sucesión de eventos. Demuestre que:

   a) $\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} infA_n\right)^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} supA_n^c$

   Demostración

   $$\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} infA_n\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} supA_n^c$$

   b) $\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} supA_n\right)^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} infA_n^c$

   Demostración

   $$\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} supA_n\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \lim_{n \longrightarrow \infty} infA_n^c$$

   c) $P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} infA_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} supA_n^c\right)$

   Demostración

   $$P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} infA_n\right) = \left([P \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n]^c\right)^c = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n\right)^c$$

   $$= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - P\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} supA_n^c\right)$$

8. Encuentre las condiciones sobre los eventos A_1 y A_2 para que la siguiente sucesión sea convergente.

$$A_n = \begin{cases} A_1 & \text{si n es impar} \\ & \\ A_2 & \text{si n es par} \end{cases}$$