

**Relatório do Projeto Computacional**

Matemática Computacional

Grupo 6 – JVS-55

Catarina Lobo 89653

José Neves 89683

Rodrigo Rosa 90355

**Introdução**

Este projeto computacional teve como objetivo a resolução numérica de equações diferenciais de primeira ordem, através dos métodos de Euler progressivo e de Runge-Kutta de 2ª (Heun), 3ª e 4ª ordens. A partir de tal resolução, foi-nos proposto analisar o erro cometido entre a solução exata e a solução aproximada. Como concretização, aplicámos o programa a duas funções específicas e à resolução de um problema de travagem de um avião. Para efeitos de comparação, empregámos o método de Euler progressivo, assim como os métodos de Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem.

Para atingir os objetivos mencionados, organizámos estruturalmente o programa em vários pontos:

1. Resolução numérica, aplicando o método de Runge-Kutta de terceira ordem.

Para tal, verificámos que esta aproximação está dependente de dois critérios fulcrais: o intervalo de resolução, ponto inicial e a abcissa do ponto final; o passo, ou seja, o incremento constante desde a abcissa do ponto inicial até à abcissa do ponto final, que permite delinear o conjunto de pontos que constituirão a solução aproximada. Através de operações em cadeia com constantes previamente definidas, a ordenada do ponto inicial será transformada na ordenada seguinte, e assim sucessivamente, até à obtenção da ordenada do ponto final. Quanto à abscissa, esta é incrementada de um passo definido.

1. Cálculo do erro em função do passo

Observámos que valores diferentes do passo dão origem a soluções numéricas com diferentes precisões, pelo que é convidativo estudar a relação entre estas duas variáveis. Como tal, definimos um passo inicial, sendo que este é sucessivamente subdividido. Após aplicação de uma escala logarítmica, é possível estabelecer o erro como função do passo, com parâmetros determinados para cada função. Daqui será possível escolher o passo mais adequado para obtenção de um erro desprezável na ótica do utilizador.

1. Comparação

Para avaliar consistentemente a eficácia do método, este terá de ser comparado às circunstâncias reais: a solução exata, a fim de constatar a semelhança com o resultado absoluto, e às outras soluções obtidas com métodos diferentes, sendo os usados o de Euler progressivo e os métodos de Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem.

**Fundamentos Teóricos**

**Algoritmos do método e aspetos da sua implementação**

Tendo como missão implementar os objetivos enumerados anteriormente, construímos o nosso programa com as seguintes categorias fulcrais:

1. Algoritmo da resolução numérica

- Pedir Ponto Inicial, extremo direito e função;

- Pedir número de intervalos a utilizar. Pede-se o número de intervalos em vez do passo para obter um número certo de pontos, de modo a que o ponto final coincida com o extremo direito definido pelo utilizador

- Obter Método a utilizar, de entre Runge-Kutta de 2ª,3ª ou 4ª ordem e de Euler progressivo.

- Calcular Solução exata;

- Calcular Solução numérica com o método e dados iniciais escolhidos e mostrar gráfico;

- Calcular e enviar erro absoluto no extremo direito entre a função exata e a aproximada.

1. Algoritmo do erro

- Pedir Ponto Inicial, extremo direito, função, Número de Intervalos inicial, número de passos a utilizar e método;

- Calcular erro absoluto no extremo direito entre a função exata e a aproximada em função do passo e mostrar gráfico do passo iterado;

Algoritmo do Avião

- Pedir função de travagem com condições específicas;

- Pedir instante de tempo inicial e velocidade inicial;

- Pedir extremo direito do intervalo;

- Pedir método a utilizar dentro dos possíveis;

- Pedir número de intervalos;

- Calcular Solução numérica;

- Para cada ponto da solução numérica:

i) Verificar se a ordenada é maior que zero e a ordenada do ponto seguinte é menor que zero. Se tal ocorrer, calcular intervalo de tempo até encontrar o zero e mostrar gráfico. Quebrar ciclo.

ii) Verificar se o ponto seguinte é o extremo direito: Mostrar mensagem de insucesso em relação ao objetivo

**Aplicações do Método e Discussão dos Resultados**

De forma a obter uma implementação computacional generalizada, uma funcionalidade do programa permite ao utilizador escolher a equação que pretende resolver.

Tendo em vista a dinamização do programa, o utilizador pode escolher o intervalo de resolução (definindo um ponto inicial e um extremo direito), o número de intervalos (ao invés do passo, de forma a que o término da solução numérica coincida com o extremo direito definido e como apelo à intuição), o método utilizado. Foram adotadas medidas de verificação dos dados, de modo a que cumpram os critérios pedidos (e.g. extremo direito superior ao ponto inicial).

Com o número de intervalos, o ponto inicial e extremo direito foi calculado o passo, sendo fornecido posteriormente o método. Após obtido o conjunto de pontos, são traçados os gráficos da solução aproximada e da exata, para que o utilizador consiga analisá-los na forma mais intuitiva possível. É também fornecido a este o erro absoluto, calculado no último ponto obtido.

O facto de as condições iniciais serem variáveis provocará um erro diferente, pelo que é crucial saber o erro cometido em função destes critérios. Para tal, é possível analisar o gráfico do erro em função do passo. A implementação desta funcionalidade passou por considerar um passo inicial ditado pelo utilizador e a sua sucessiva subdivisão por 2, num total de passos escolhido pelo utilizador. Além disto, foi traçado um gráfico em escala logarítmica, de modo a comprovar experimentalmente que o erro terá uma dependência do passo ao cubo no caso de Runge-Kutta de 3ª ordem, o que corrobora os resultados teóricos. Através da sua análise, o utilizador pode escolher convenientemente o passo que mais se adequa à precisão que pretende.

Para uma utilização dinâmica do programa, é possível em qualquer altura da sua execução, alterar os seguintes parâmetros: a função utilizada, o número de intervalos, o ponto inicial e o extremo direito.

Para comprovar o bom funcionamento do método, este foi executado com duas funções:

1. f(t,y) = -10\*y

Estando definidos os parâmetros ponto inicial: (0, 0.5), extremo direito: 1, e número de intervalos: 20, o método é dado pelo utilizador. Os erros absolutos com os diferentes métodos foram: 0.000002 (Runge-Kutta de 3ª ordem); 0.000022 (Euler Progressivo); 0.000019 (Runge-Kutta de 2ª ordem); aproximadamente. 0 (Runge-Kutta de 4ªordem). Podemos concluir que o método mais preciso foi o Runge-Kutta de 4ª ordem, sendo precedido pelos de 3ª e 2ª ordem e finalmente pelo método de Euler progressivo (menos preciso). No entanto, tal pode não ser verdade quando considerado outro passo, pelo que é necessário avaliar o gráfico do erro em função do passo (considerou-se 0.1 o passo inicial e um total de 10 passos).

Uma regressão linear para o método de Runge-Kutta de 3ªordem (utilizando escalas logarítmicas), revela Erro = 0.015134 \* h^3.065111 de donde podemos ver que o erro varia com h ao cubo, conforme previsto teoricamente. Para Runge-Kutta de 2ª ordem: Erro = 0.021388 \* h^2.252263; para Runge-Kutta de 4ª ordem: Erro = 0.041049 \* h^4.110255. Todos estes dados comprovam os teóricos. No entanto, Euler progressivo revela-se o método menos preciso, sendo que apresenta a maior instabilidade da solução face ao passo, como podemos observar de modo grosseiro pela curva descendente final no gráfico, e de modo preciso com a regressão Erro = 0.000258 \* h^0.790723: h^0.79 difere significativamente do h^2 teórico.

Com estes dados, o utilizador pode analisar quais os parâmetros e métodos que mais se adequam ao tipo de estudo que pretende.

ii) f(t,y) = -y + sin(t)

Neste caso, definiram-se os parâmetros ponto inicial: (0, 1), extremo direito: 2, e número de intervalos: 20, sendo que, novamente, o método é dado pelo utilizador. Os erros absolutos com os diferentes métodos foram: 0.000005 (Runge-Kutta de 3ª ordem); 0.006648 (Euler Progressivo); 0.000372 (Runge-Kutta de 2ª ordem); aprox. 0 (Runge-Kutta de 4ªordem). Verifica-se a consistência dos resultados: os métodos de Runge-Kutta são tão mais precisos quanto a sua ordem, sendo Euler progressivo significativamente menos preciso. Os mesmos resultados da alínea anterior são obtidos quando se analisa o gráfico do erro em função do passo: Runge-Kutta de 3ªordem com Erro = 0.004056 \* h^2.951732; Runge-Kutta de 2ª ordem com 0.035720 \* h^1.985371. No entanto, obtém-se uma diferença significativa para Runge-Kutta de 4ª ordem: Erro = 0.000015 \* h^3.187697 e para Euler Progressivo: Erro = 0.067143 \* h^1.004757.

Podemos, deste modo, concluir que a variação dos parâmetros utilizados origina uma variação do erro em função do passo.

**Problema do Avião**

Depois de comprovada a eficácia do projeto computacional nestes casos, é claramente importante cumprir a “visão da engenharia”, aplicando-o a um caso concreto do quotidiano: o sistema de travagem de um avião, o qual segue uma equação diferencial que, naturalmente, pode ser resolvida usando um método numérico de entre os estudados.

Para tal, é necessário considerar a variável “y” a velocidade do avião e “t” o intervalo de tempo estudado. Uma das situações de maior relevância é saber quando o avião se imobiliza, ou seja, o instante de tempo em que a velocidade se anula. Na prática, é necessário obter o zero da função que descreve a aceleração (1ª derivada da velocidade) do avião em função do tempo, a qual depende da velocidade do avião. - estamos perante uma equação diferencial.

Como explicitado anteriormente, para resolver a equação segundo um dos métodos numéricos, é crucial definir o passo e o método utilizado. A maior questão destes fatores prende-se com a precisão dos resultados obtidos: conforme as conclusões, é necessário encontrar um passo que não comprometa o equilíbrio estabilidade da função-precisão dos resultados requerida. De facto, no exemplo considerado, com o uso de um passo/método, obtemos uma solução com um certo grau de precisão. No entanto, tal pode não ser suficiente. Em contrapartida, a diminuição do passo/alteração do método provocará um aumento do tempo e capacidade computacional necessários à resolução da equação, tal como uma possível instabilidade na solução aproximada, pelo que é fulcral encontrar o balanço entre ambos.

Para encontrar a solução, foi encontrado o primeiro ponto, obtido com o método, que se anula. Caso tal não aconteça, é alertado ao utilizador que o avião não se imobiliza no intervalo considerado.

De forma a obter uma panóplia de resultados para testar a eficiência do método, foi implementada a funcionalidade de o utilizador poder selecionar um sistema de travagem à sua escolha, mediante um conjunto de sugestões dadas que tornam a resolução do problema mais acessível, como o tipo de coeficientes usados e o extremo direito do intervalo considerado.

Como exemplo, foi utilizada a equação dv/dt=-0.02v^2-0.9, com 50 intervalos. Considerou-se o ponto inicial (0, 300\*10^3/3600) e o extremo direito t=20. Obteve-se a solução aproximada de 11.2 com o método de Runge-Kutta de 3ª ordem. No entanto, obteve-se 10.0 com o método de Euler progressivo. Com um número de intervalos de 75, a solução mantém-se com o método de Runge-Kutta, mas é 10.4 com o método de Euler progressivo. É possível, então, definir o número de intervalos conforme a precisão pretendida.