

Propagación de Errores en el Péndulo Simple y el Plano Inclinado

Prof. José Andrés Hernández
Universidad de Investigación y Desarrollo

marzo 2025

1. Introducción a la Propagación de Errores

En cualquier experimento físico, las mediciones están sujetas a errores experimentales. La propagación de errores es un método matemático que permite estimar la incertidumbre en los resultados calculados a partir de magnitudes medidas experimentalmente.

1.1. Ecuaciones Generales de Propagación de Errores

Si una cantidad Q depende de varias variables medidas x_1, x_2, \dots, x_n con errores asociados $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots, \sigma_{x_n}$, la incertidumbre en Q se estima como:

$$\sigma_Q = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_2} \sigma_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_n} \sigma_{x_n}\right)^2}.$$

1.2. Reglas de Propagación de Errores

- **Suma o Resta:** Si $Q = A \pm B$, entonces

$$\sigma_Q = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

- **Multiplicación o División:** Si $Q = AB$ o $Q = A/B$, entonces

$$\left(\frac{\sigma_Q}{Q}\right) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}.$$

Observe, que en este caso el error de $Q(\sigma_Q)$ está dado en términos del error relativo. Si se multiplica por 100, puede obtener un porcentaje, %, del error.

2. Error de la Media

Cuando realizamos varias mediciones de una misma magnitud, podemos calcular el valor medio y su error asociado. La media o promedio está dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

El error estándar de la media se obtiene mediante:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2)$$

donde σ es la desviación estándar de las mediciones:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Este concepto es crucial para calcular la incertidumbre en la determinación de la aceleración gravitacional.

3. Propagación de Errores en el Péndulo Simple

El experimento del péndulo simple permite determinar la aceleración de la gravedad g localmente a partir de la relación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde: - T es el período del péndulo. - L es la longitud del péndulo.

Despejando g :

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Para calcular el valor g local, use en esta ecuación para T el valor promedio del tiempo medido (usar las 10 medidas y Ec. 1), y L medido con el metro.

Para calcular la incertidumbre en la medida de la gravedad local g , σ_g , usamos la propagación de errores:

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}.$$

Aquí de nuevo use T promedio. El σ_T , que es el error del periodo, se calcula usando la Ec. 2. Compare ese valor con tiempo de reacción de un observador: Aproximadamente $\sigma_T = 0,2$ s, ¿es mayor o menor, explique? El error de L , σ_L , es la resolución mínima de la regla: $\sigma_L = 0,001$ m.

Recuerde, cuando cite la masa de los pesos diferentes usados en el péndulo, adicione el valor de incertidumbre debido a la precisión de la balanza: $\sigma_m = 0,001$ kg. También cuando mencione la longitud, L , de la cuerda del pendulo adicione el \pm de la resolución mínima de la regla: $\sigma_L = 0,001$ m.

4. Propagación de Errores en el Plano Inclinado

En esta experiencia se calculo el tiempo de rodamiento de esferas de masas diferentes en el plano inclinado. La aceleración, a , de ese rodamiento puede ser calculada usando la ecuación del movimiento:

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad (3)$$

donde s es la distancia recorrida del plano inclinado y t es el tiempo de rodamiento. Para t use el valor promedio de las 20 medidas hechas (Ec. 1). Calcule la a para cada esfera.

La propagación de errores para la aceleración es:

$$\frac{\sigma_a}{a} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{s}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2}. \quad (4)$$

Observe que está dada como error relativo. El error de t , σ_t , se calcula usando la Ec. 2. Compare ese valor con tiempo de reacción de un observador: Aproximadamente $\sigma_T = 0,2$ s, ¿es mayor o menor, explique?. El error de s , σ_s , es la resolución mínima de la regla: $\sigma_L = 0,001$ m.

Finalmente, podemos determinar el valor de gravedad local (despejando g de la ecuación $a = g \sin \theta$), usando:

$$g = \frac{a}{\sin \theta}$$

y su propagación de errores se expresa como:

$$\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos \theta \sigma_\theta}{\sin \theta \theta}\right)^2.$$

donde θ es el ángulo de inclinación del plano, y σ_θ es el error en la medición del ángulo. Tomé σ_θ el error de medida del transportador: $\sigma_\theta = 1^\circ$. El valor a es el calculado en la Ec. 3, y el de σ_a en la Ec. 4.

Recuerde, cuando cite la masa de los pesos diferentes usados para cada esfera, adicione el valor de incertidumbre debido a la precisión de la balanza: $\sigma_m = 0,001$ kg.

5. Conclusión

La propagación de errores es una herramienta esencial para evaluar la incertidumbre en experimentos físicos. En el péndulo simple y el plano inclinado, la correcta estimación de los errores en las magnitudes medidas permite obtener una determinación precisa de la aceleración de la gravedad local.