

# Controle de Estabilização de um Pêndulo Invertido Rotacional

JOSÉ A. DA SILVA<sup>a,1</sup>, KAUA LESSA L. DOS SANTOS<sup>b,2</sup>, PABLO MUNIH S. DE CARVALHO<sup>c,3</sup> and PLÁCIDO AUGUSTUS DE O. CORDEIRO<sup>d,4</sup>

<sup>a</sup>Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

<sup>b</sup>Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

<sup>c</sup>Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

Prof. ICARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAUJO

**Resumo**—Este relatório trata da segunda etapa do projeto da disciplina de sistemas de controle 1, de um pêndulo invertido rotacional. É apresentado, em primeira instância, as equações diferenciais de movimento do pêndulo obtidas através do método Euler-Lagrange, linearização do modelo e obtenção da função de transferência. Em seguida, a estabilidade do sistema é analisada, assim como a resposta do modelo a diferentes entradas, a fim de prever seu comportamento. Por fim, o software MATLAB/Simulink é utilizado para simular o sistema em malha aberta e os resultados são discutidos.

**Keywords**—pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares

## 1. Introdução

Anteriormente, foi discutido a importância do pêndulo invertido no estudo prático de sistemas de controle, as diferenças entre os dois principais modelos presentes na literatura e a escolha do pêndulo invertido rotacional como interesse deste estudo.

### 1.1. Descrição do Sistema

Recapitulando, o pêndulo invertido rotacional, também chamado de Pêndulo de Furuta, é composto por um pêndulo acoplado a um braço horizontal giratório, que é acionado por um motor. O movimento do sistema ocorre no plano horizontal, através do movimento do braço giratório e no plano vertical, através do movimento do pêndulo. A relação de apenas um atuador para dois graus de liberdade caracteriza este sistema como subatuado. A Figura 1 apresenta o modelo de referência para a modelagem matemática e implementação do controlador.

### 1.2. Variáveis do Sistema

O sistema físico possui o torque do motor como única entrada. Para este estudo, apenas a ângulo do pêndulo será considerado como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input single output* (SISO). É importante destacar que é possível considerar também o ângulo do braço como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input multiple output* (SIMO), porém, esse não é o foco deste estudo. As variáveis físicas são apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 1. Símbolos para descrever os parâmetros das equações

Símbolo	Descrição
$L$	Distância até o centro de massa do pêndulo
$m$	Massa do braço do pêndulo
$r$	Comprimento do braço rotativo
$\theta$	Ângulo do braço do pêndulo (rad)
$\alpha$	Ângulo do pêndulo (rad)
$h$	Distância do centro de massa do pêndulo até o solo
$J_{cm}$	Inércia do pêndulo em relação ao seu centro de massa
$V_x$	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção $x$
$V_y$	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção $y$

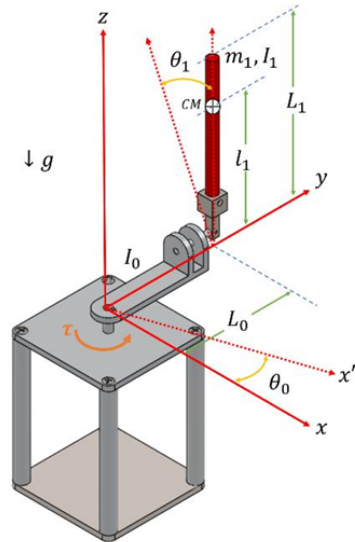


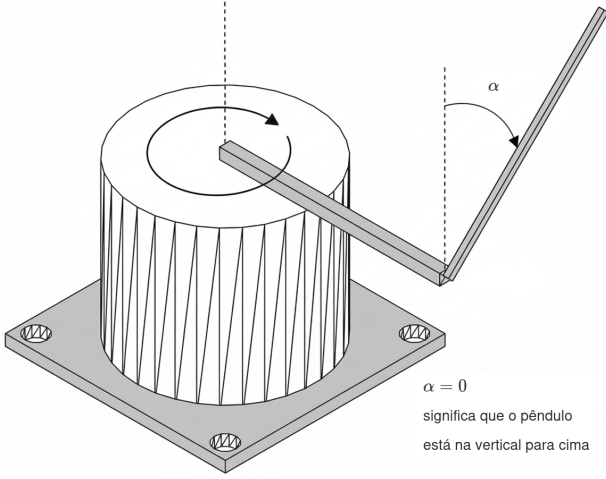
Figura 1. Representação tridimensional do pêndulo invertido rotacional com seus parâmetros físicos e coordenadas. Fonte: (DUART et al., 2017)

### 1.3. Objetivo

O objetivo desta etapa é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema, analisar o modelo obtido e simular através do software MATLAB/Simulink.

## 2. Modelagem Matemática

A compreensão precisa da dinâmica do Pêndulo de Furuta exige uma formulação matemática rigorosa. Antes de prosseguir com a derivação das equações de movimento, é fundamental estabelecer a convenção de coordenadas adotada. Conforme ilustrado na Figura 2, o ângulo de rotação do braço horizontal é denotado por  $\theta$ . O ponto crucial para a estabilização é a definição do ângulo  $\alpha$  do pêndulo em relação à vertical: o estado de interesse, onde o pêndulo se encontra na posição invertida (verticalmente para cima), corresponde explicitamente a  $\alpha = 0$ . Essa definição é vital para a interpretação dos resultados de controle e para a linearização do sistema em torno deste ponto de equilíbrio instável.



**Figura 2.** Definição das variáveis angulares do Pêndulo de Furuta, com o ângulo do braço  $\theta$  e o ângulo do pêndulo  $\alpha$ . A posição de equilíbrio instável ( $\alpha = 0$ ) é indicada.

A modelagem matemática do pêndulo invertido rotacional é obtida aplicando o método de Euler-Lagrange. Inicialmente, consideram-se as velocidades do centro de massa do pêndulo e do braço rotativo:

$$V_{pen.cm} = -L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \hat{x} - L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \hat{y} \quad (1)$$

$$V_{arm} = r \dot{\theta} \quad (2)$$

Assim, as componentes de velocidade do centro de massa do pêndulo podem ser escritas como:

$$V_x = r \dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3)$$

$$V_y = -L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (4)$$

### 2.1. Energia Potencial

A única energia potencial no sistema é a gravitacional:

$$V = mgh = mgL \cos(\alpha) \quad (5)$$

### 2.2. Energia Cinética

As energias cinéticas são devidas ao movimento do braço, ao movimento do centro de massa do pêndulo e à rotação do pêndulo em torno do seu próprio centro de massa:

$$T = KE_{hub} + KE_{V_x} + KE_{V_y} + KE_{pendulo} \quad (6)$$

#### Momento de Inércia

O momento de inércia de uma barra homogênea em torno do centro de massa é:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} MR^2 \quad (7)$$

Como o comprimento do pêndulo é  $2L$ , temos:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} M(2L)^2 = \frac{1}{3} ML^2 \quad (8)$$

#### Energia Cinética do Braço (Hub)

$$T_{hub} = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 \quad (9)$$

#### Energia Cinética de Translação do Pêndulo

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m(V_x^2 + V_y^2) \quad (10)$$

Substituindo as velocidades:

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m[(r\dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha})^2 + (-L \sin(\alpha) \dot{\alpha})^2] \quad (11)$$

#### Energia Cinética de Rotação do Pêndulo em torno do CM

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J_{cm} \dot{\alpha}^2 \quad (12)$$

### Energia Cinética Total

Somando todas as parcelas de energia cinética, temos:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(r\dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m(-L \sin(\alpha) \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J_{cm} \dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

Expandindo os quadrados:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(r^2 \dot{\theta}^2 - 2rL \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + L^2 \cos^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} m(L^2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2\right) \dot{\alpha}^2 \quad (14)$$

Reagrupando os termos:

$$T = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} mL^2 (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\alpha}^2 \quad (15)$$

Como  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , temos:

$$T = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\alpha}^2 \quad (16)$$

### 2.3. Lagrangiana

A energia potencial e a energia cinética total foram obtidas como:

$$V = mgL \cos(\alpha) \quad (17)$$

$$T = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\alpha}^2 \quad (18)$$

Portanto, a Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (19)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\alpha}^2 - mgL \cos(\alpha) \quad (20)$$

### 2.4. Equações de Lagrange

A equação de Lagrange geral para uma coordenada generalizada  $q_i$  é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (21)$$

No sistema, temos as duas coordenadas generalizadas:

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \alpha$$

Para  $\theta$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = T_{output} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (22)$$

- A coordenada  $\theta$  recebe o torque do motor.

- Esse torque possui duas partes:

1.  $T_{output}$ : torque útil gerado pelo motor.
2.  $-B_{eq} \dot{\theta}$ : torque dissipativo devido ao atrito viscoso.

Aplicando a  $\alpha$

Para a coordenada  $\alpha$ , a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \quad (23)$$

Observações importantes:

- A coordenada  $\alpha$  não recebe torque aplicado diretamente.
- O único efeito externo é a gravidade (já incluída na energia potencial).
- Por isso, o lado direito da equação é nulo.

### Equações diferenciais finais

Após aplicar as equações de Lagrange para  $\theta$  e  $\alpha$ , e linearizar em torno de  $\alpha \approx 0$ , obtemos:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - m L r \ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (\text{Braço}) \quad (24)$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - m L r \ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \quad (\text{Pêndulo}) \quad (25)$$

## 2.5. Modelo em Espaço de Estados

O torque de saída do motor aplicado ao sistema é dado por:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m} (V_m - K_G K_m \dot{\theta}) \quad (26)$$

Combinando as equações de movimento obtidas, a representação em espaço de estados pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{bd}{E} & -\frac{cG}{E} & 0 \\ 0 & \frac{qd}{E} & -\frac{bG}{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \\ \frac{b\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \end{bmatrix} V_m \quad (27)$$

onde os parâmetros são definidos como:

$$\begin{aligned} a &= J_{eq} + mr^2, & b &= mLr, \\ c &= \frac{4}{3}mL^2, & d &= mgL, \\ E &= ac - b^2, & G &= \frac{\eta_m\eta_gK_tK_gK_g^2}{R_m} - B_{eq} \end{aligned}$$

A Tabela 2 apresenta os parâmetros utilizados para o sistema SRV02.

**Tabela 2.** Parâmetros típicos do sistema SRV02 e do pêndulo

Símbolo	Descrição	Valor
$K_t$	Constante de torque do motor	0.00767
$K_m$	Constante de FEM inversa	0.00767
$R_m$	Resistência de armadura	2.6
$K_g$	Relação de engrenagem (motor → carga)	14 (14:1)
$\eta_m$	Eficiência do motor	0.69
$\eta_g$	Eficiência da caixa de engrenagem	0.9
$B_{eq}$	Coef. de atrito viscoso equivalente	$1.5 \times 10^{-3}$
$J_{eq}$	Momento de inércia equivalente na carga	$9.31 \times 10^{-4}$

## 2.6. Modelo Numérico em Espaço de Estados

Substituindo os valores da Tabela 2, obtemos o modelo em espaço de estados numérico:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (28)$$

E a saída é dada por:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \quad (29)$$

## 2.7. Obtenção da Função de Transferência

A partir do modelo em espaço de estados (Eq. 28), pode-se obter a função de transferência que relaciona a entrada do sistema (tensão no motor  $V_m$ ) com a saída escolhida (ângulo do pêndulo  $\alpha$ ). Para isso, foi utilizada a função `tf()` do *MATLAB*, que converte a representação em espaço de estados para a forma de função de transferência.

As matrizes do sistema são definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0$$

O código em *MATLAB* para a conversão é o seguinte:

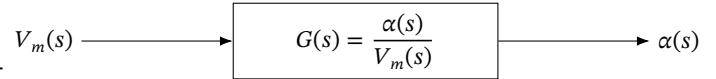
```
A = [0 0 1 0;
      0 0 0 1;
      0 39.32 -14.52 0;
      0 81.78 -13.98 0];
B = [0; 0; 25.54; 24.59];
C = [0 1 0 0]; % Saída = ângulo do pêndulo
D = 0;
```

```
sys_ss = ss(A, B, C, D); % Espaço de estados
sys_tf = tf(sys_ss); % Função de transferência
```

Assim, obtém-se diretamente a função de transferência  $G(s)$ , que expressa a dinâmica do sistema:

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{24.59s - 0.0024}{s^3 + 14.52s^2 - 81.78s - 637.8} \quad (31)$$

onde  $\alpha(s)$  é a transformada de Laplace do ângulo do pêndulo e  $V_m(s)$  é a transformada de Laplace da tensão aplicada ao motor.



**Figura 3.** Diagrama de blocos representando a função de transferência entre a entrada  $V_m(s)$  e a saída  $\alpha(s)$ .

## 3. Análise do Modelo

Após a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica entre a entrada  $V_m(s)$  (tensão aplicada ao motor) e a saída  $\alpha(s)$  (ângulo do pêndulo), procede-se à análise matemática do sistema em malha aberta. Essa análise permite caracterizar propriedades fundamentais, como ordem e grau relativo, localização dos polos e zeros, estabilidade intrínseca e comportamento esperado diante de diferentes entradas. Embora ainda não haja controle implementado, esta etapa é essencial para compreender as limitações naturais do sistema e justificar a necessidade de técnicas de estabilização.

### 3.1. Ordem e grau relativo

- **Ordem do sistema:** 3 (denominador de grau 3) — sistema de 3ª ordem.
- **Grado do numerador:** 1.

### 3.2. Polos e estabilidade

As raízes do denominador (polos) obtidos numericamente são aproximadamente:

$$p_1 \approx -17.12, \quad p_2 \approx -4.94, \quad p_3 \approx +7.54.$$

Como existe um polo em  $p_3 \approx +7.54$  (semiplano direito), o sistema é **instável em malha aberta**. Em termos práticos, qualquer pequena perturbação tenderá a crescer exponencialmente se não houver controle. A raiz do numerador (zero) é aproximadamente:

$$z \approx +9.76 \times 10^{-5}.$$

O sistema possui, portanto, um zero no semiplano direito (RHP), caracterizando-o como **não mínimo-fase**, a principal consequência

disso é a tendência do sistema de apresentar uma resposta inversa (undershoot). Se o sistema fosse estável e recebesse um comando em degrau para ir a um valor positivo, a saída primeiro se moveria ligeiramente na direção negativa antes de se corrigir.

No entanto, como o sistema é instável, essa resposta inversa inicial seria rapidamente dominada e mascarada pelo crescimento exponencial causado pelo polo instável.

### 3.3. Ganho DC

O ganho estático do sistema é:

$$G(0) = \frac{-0.0024}{-637.752} \approx 3.76 \times 10^{-6}.$$

O valor é muito pequeno, mas na prática a dinâmica é dominada pelo polo instável.

### 3.4. Tipo do sistema

Não há polos em  $s = 0$ , logo o sistema é do **tipo 0**. Em teoria isso significa erro finito para entrada em degrau, mas devido à instabilidade, em malha aberta a saída tende a divergir.

### 3.5. Observações finais

- O polo no semiplano direito torna o sistema instável em malha aberta.
- O zero no semiplano direito impõe dificuldades na modelagem de um controlador

## 4. Simulação Computacional

Para validar e visualizar o comportamento dinâmico previsto pela análise matemática, o sistema foi simulado no ambiente *MATLAB/Simulink*. Utilizando a função de transferência  $G(s)$  obtida, foram analisadas as respostas do sistema em malha aberta a três sinais de entrada canônicos: impulso, degrau e rampa. Essas simulações são fundamentais para confirmar a instabilidade inerente do pêndulo e compreender a natureza da sua resposta antes da implementação de qualquer estratégia de controle. O comportamento observado em todas as simulações reflete diretamente a presença do polo instável em  $s \approx +7.54$ .

### 4.1. Resposta ao Impulso

A resposta a um impulso unitário, que representa a reação do sistema a uma perturbação instantânea de energia, é apresentada na Figura 4. Como se pode observar, a saída (ângulo do pêndulo) diverge exponencialmente, confirmando a instabilidade do sistema em malha aberta. Uma perturbação mínima é suficiente para que o pêndulo inicie um movimento de queda do qual ele não consegue se recuperar autonomamente. Esse comportamento é totalmente consistente com o polo no semiplano direito, que domina a dinâmica do sistema.

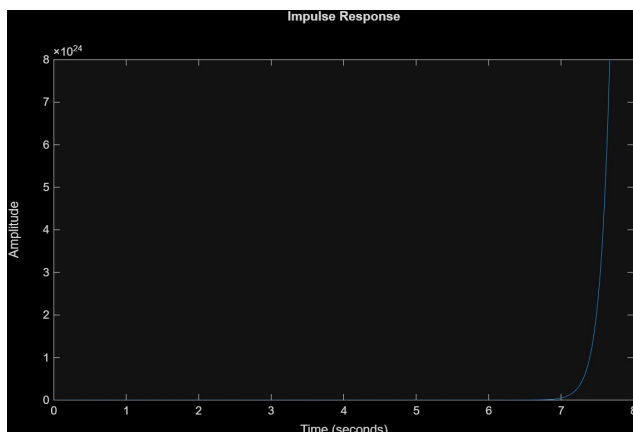


Figura 4. Resposta ao impulso do sistema em malha aberta.

### 4.2. Resposta ao Degrau

A aplicação de uma entrada em degrau, que equivale a fornecer uma tensão constante ao motor, também resulta em uma resposta instável, como ilustrado na Figura 5. A saída cresce de forma ilimitada, o que, fisicamente, corresponde à queda do pêndulo de forma acelerada. O resultado reforça que uma ação de controle constante é incapaz de estabilizar o sistema, evidenciando a necessidade de uma malha de realimentação que ajuste a entrada dinamicamente com base no estado do pêndulo.

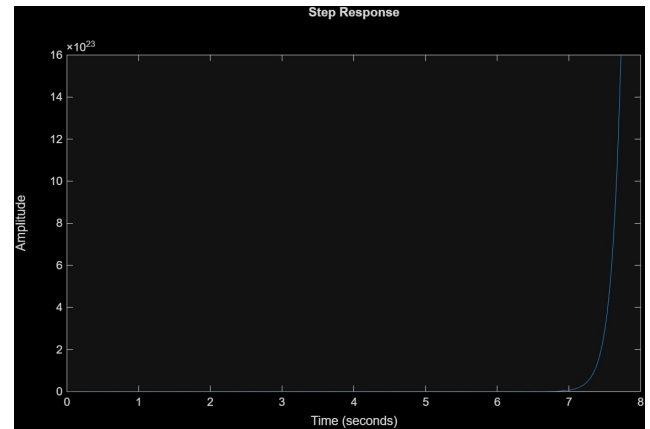


Figura 5. Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.

### 4.3. Resposta à Rampa

A resposta a uma entrada do tipo rampa, mostrada na Figura 6, exibe uma divergência ainda mais acentuada. Este teste submete o sistema a uma solicitação de energia continuamente crescente, e a resposta instável se manifesta de forma mais rápida e agressiva. Embora seja um cenário menos comum na prática, a simulação confirma que o sistema em malha aberta é incapaz de seguir qualquer trajetória de referência, por mais simples que seja, reforçando a necessidade crítica de um controlador para a estabilização.

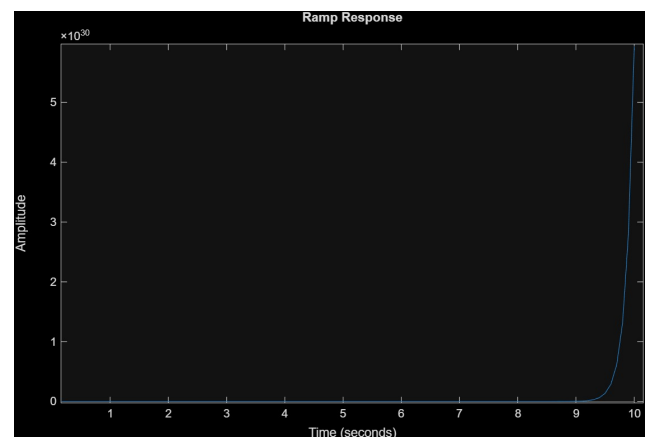


Figura 6. Resposta à rampa do sistema em malha aberta.

## 5. Conclusão

Nesta etapa do projeto, o modelo matemático para o pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta) foi obtido com sucesso. Partindo dos princípios da mecânica clássica e utilizando o método de Euler-Lagrange, foram derivadas as equações diferenciais não lineares que descrevem a dinâmica do sistema. Subsequentemente, o modelo foi linearizado em torno do ponto de equilíbrio instável ( $\alpha \approx 0$ ) para se obter uma representação em espaço de estados e a correspondente função de transferência, relacionando a tensão de entrada do motor ( $V_m$ ) com o ângulo do pêndulo ( $\alpha$ ).

A análise da função de transferência revelou características cruciais do sistema em malha aberta. Foi identificado que o sistema é de terceira ordem, do tipo 0, e, mais importante, intrinsecamente instável devido a um polo localizado no semiplano direito ( $p_3 \approx +7.54$ ). Adicionalmente, a presença de um zero também no semiplano direito caracteriza o sistema como de fase não mínima, o que pode impor desafios ao projeto do controlador, como a ocorrência de uma resposta inversa inicial (*undershoot*).

As simulações computacionais do sistema em malha aberta para entradas de impulso, degrau e rampa confirmaram visualmente a instabilidade prevista pela análise teórica, com a saída divergindo exponencialmente em todos os cenários. Os resultados obtidos nesta etapa concluem a modelagem e a análise do sistema, fornecendo uma base sólida e indispensável para a próxima fase do projeto. A próxima etapa consistirá no projeto e implementação de um controlador em malha fechada com o objetivo de superar a instabilidade natural do sistema e manter o pêndulo estabilizado na posição vertical.

## Referências

DUART, J L et al. Dynamic Modeling and Simulation of a Rotational Inverted Pendulum. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 792, n. 1, p. 012081, jan. 2017. DOI: [10.1088/1742-6596/792/1/012081](https://doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081>.