

Controle de Estabilização de um Pêndulo Invertido Rotacional

JOSÉ A. DA SILVA^{a,1}, KAUÁ LESSA L. DOS SANTOS^{b,2}, PABLO MUNIH S. DE CARVALHO^{c,3} and PLÁCIDO AUGUSTUS DE O. CORDEIRO^{d,4}

^aEngenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

^bEngenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

^cEngenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

Prof. ICARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAUJO

Resumo—Este relatório trata da segunda etapa do projeto da disciplina de sistemas de controle 1, de um pêndulo invertido rotacional. É apresentado, em primeira instância, as equações diferenciais de movimento do pêndulo obtidas através do método Euler-Lagrange, linearização do modelo e obtenção da função de transferência. Em seguida, a estabilidade do sistema é analisada, assim como a resposta do modelo a diferentes entradas, a fim de prever seu comportamento. Por fim, o software MATLAB/Simulink é utilizado para simular o sistema em malha aberta e os resultados são discutidos.

Keywords—pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares

1. Introdução

Anteriormente, foi discutido a importância do pêndulo invertido no estudo prático de sistemas de controle, as diferenças entre os dois principais modelos presentes na literatura e a escolha do pêndulo invertido rotacional como interesse deste estudo.

1.1. Descrição do Sistema

Recapitulando, o pêndulo invertido rotacional, também chamado de Pêndulo de Furuta, é composto por um pêndulo acoplado a um braço horizontal giratório, que é acionado por um motor. O movimento do sistema ocorre no plano horizontal, através do movimento do braço giratório e no plano vertical, através do movimento do pêndulo. A relação de apenas um atuador para dois graus de liberdade caracteriza este sistema como subatuado. A Figura 1 apresenta o modelo de referência para a modelagem matemática e implementação do controlador.

1.2. Variáveis do Sistema

O sistema físico possui o torque do motor como única entrada. Para este estudo, apenas a ângulo do pêndulo será considerado como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input single output* (SISO). É importante destacar que é possível considerar também o ângulo do braço como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input multiple output* (SIMO), porém, esse não é o foco deste estudo. As variáveis físicas são apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 1. Símbolos para descrever os parâmetros das equações

Símbolo	Descrição
L	Distância até o centro de massa do pêndulo
m	Massa do braço do pêndulo
r	Comprimento do braço rotativo
θ	Ângulo do braço do pêndulo (rad)
α	Ângulo do pêndulo (rad)
h	Distância do centro de massa do pêndulo até o solo
J_{cm}	Inércia do pêndulo em relação ao seu centro de massa
V_x	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção x
V_y	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção y

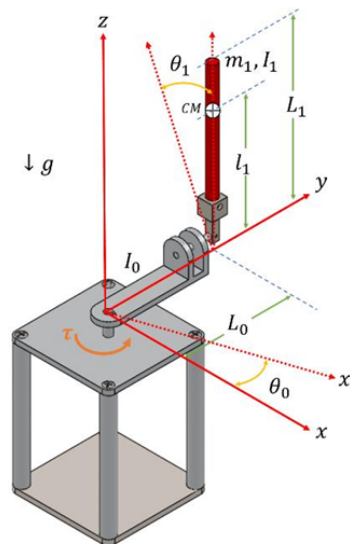


Figura 1. Representação tridimensional do pêndulo invertido rotacional com seus parâmetros físicos e coordenadas. Fonte: (Duart *et al.*, 2017)

1.3. Objetivo

O objetivo desta etapa é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema, analisar o modelo obtido e simular através do software MATLAB/Simulink.

2. Modelagem Matemática

A modelagem matemática do pêndulo invertido rotacional é obtida aplicando o método de Euler-Lagrange. Inicialmente, consideram-se as velocidades do centro de massa do pêndulo e do braço rotativo:

$$V_{Pen.cm} = -L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \hat{x} - L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \hat{y} \quad (1)$$

$$V_{arm} = r \dot{\theta} \quad (2)$$

Assim, as componentes de velocidade do centro de massa do pêndulo podem ser escritas como:

$$V_x = r \dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3)$$

$$V_y = -L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (4)$$

2.1. Energia Potencial

A única energia potencial no sistema é a gravitacional:

$$V = mgh = mgL \cos(\alpha) \quad (5)$$

2.2. Energia Cinética

As energias cinéticas são devidas ao movimento do braço, ao movimento do centro de massa do pêndulo e à rotação do pêndulo em torno do seu próprio centro de massa:

$$T = KE_{hub} + KE_{V_x} + KE_{V_y} + KE_{pendulo} \quad (6)$$

Momento de Inércia

O momento de inércia de uma barra homogênea em torno do centro de massa é:

$$J_{cm} = \frac{1}{12}MR^2 \quad (7)$$

Como o comprimento do pêndulo é $2L$, temos:

$$J_{cm} = \frac{1}{12}M(2L)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \quad (8)$$

Energia Cinética do Braço (Hub)

$$T_{hub} = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 \quad (9)$$

Energia Cinética de Translação do Pêndulo

$$T_{trans} = \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2) \quad (10)$$

Substituindo as velocidades:

$$T_{trans} = \frac{1}{2}m[(r\dot{\theta} - L\cos(\alpha)\dot{\alpha})^2 + (-L\sin(\alpha)\dot{\alpha})^2] \quad (11)$$

Energia Cinética de Rotação do Pêndulo em torno do CM

$$T_{rot} = \frac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \quad (12)$$

Energia Cinética Total

Somando todas as parcelas de energia cinética, temos:

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta} - L\cos(\alpha)\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}m(-L\sin(\alpha)\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

Expandindo os quadrados:

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 - 2rL\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + L^2\cos^2(\alpha)\dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2}m(L^2\sin^2(\alpha)\dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \quad (14)$$

Reagrupando os termos:

$$T = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}mL^2(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\alpha}^2 \quad (15)$$

Como $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, temos:

$$T = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 \quad (16)$$

2.3. Lagrangiana

A energia potencial e a energia cinética total foram obtidas como:

$$V = mgL\cos(\alpha) \quad (17)$$

$$T = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 \quad (18)$$

Portanto, a Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (19)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 - mgL\cos(\alpha) \quad (20)$$

2.4. Equações de Lagrange

A equação de Lagrange geral para uma coordenada generalizada q_i é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (21)$$

No sistema, temos as duas coordenadas generalizadas:

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \alpha$$

Para θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad (22)$$

- A coordenada θ recebe o torque do motor.

- Esse torque possui duas partes:

1. T_{output} : torque útil gerado pelo motor.
2. $-B_{eq}\dot{\theta}$: torque dissipativo devido ao atrito viscoso.

Aplicando a α

Para a coordenada α , a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \quad (23)$$

Observações importantes:

- A coordenada α não recebe torque aplicado diretamente.
- O único efeito externo é a gravidade (já incluída na energia potencial).
- Por isso, o lado direito da equação é nulo.

Equações diferenciais finais

Após aplicar as equações de Lagrange para θ e α , e linearizar em torno de $\alpha \approx 0$, obtemos:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad (\text{Braço}) \quad (24)$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \quad (\text{Pêndulo}) \quad (25)$$

2.5. Modelo em Espaço de Estados

O torque de saída do motor aplicado ao sistema é dado por:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m} (V_m - K_g K_m \dot{\theta}) \quad (26)$$

Combinando as equações de movimento obtidas, a representação em espaço de estados pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{bd}{E} & -\frac{cG}{E} & 0 \\ 0 & \frac{qd}{E} & -\frac{bG}{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \\ \frac{b\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \end{bmatrix} V_m \quad (27)$$

onde os parâmetros são definidos como:

$$\begin{aligned} a &= J_{eq} + mr^2, & b &= mLr, \\ c &= \frac{4}{3}mL^2, & d &= mgL, \\ E &= ac - b^2, & G &= \frac{\eta_m\eta_gK_tK_mK_g^2}{R_m} - B_{eq} \end{aligned}$$

A Tabela 2 apresenta os parâmetros utilizados para o sistema SRV02.

Tabela 2. Parâmetros típicos do sistema SRV02 e do pêndulo

Símbolo	Descrição	Valor
K_t	Constante de torque do motor	0.00767
K_m	Constante de FEM inversa	0.00767
R_m	Resistência de armadura	2.6
K_g	Relação de engrenagem (motor \rightarrow carga)	14 (14:1)
η_m	Eficiência do motor	0.69
η_g	Eficiência da caixa de engrenagem	0.9
B_{eq}	Coef. de atrito viscoso equivalente	1.5×10^{-3}
J_{eq}	Momento de inércia equivalente na carga	9.31×10^{-4}

2.6. Modelo Numérico em Espaço de Estados

Substituindo os valores da Tabela 2, obtemos o modelo em espaço de estados numérico:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (28)$$

E a saída é dada por:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \quad (29)$$

2.7. Obtenção da Função de Transferência

A partir do modelo em espaço de estados (Eq. 28), pode-se obter a função de transferência que relaciona a entrada do sistema (tensão no motor V_m) com a saída escolhida (ângulo do pêndulo α). Para isso, foi utilizada a função `tf()` do *MATLAB*, que converte a representação em espaço de estados para a forma de função de transferência.

As matrizes do sistema são definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0$$

O código em *MATLAB* para a conversão é o seguinte:

```
A = [0 0 1 0;
     0 0 0 1;
     0 39.32 -14.52 0;
     0 81.78 -13.98 0];

B = [0; 0; 25.54; 24.59];

C = [0 1 0 0]; % Saída = ângulo do pêndulo
D = 0;

sys_ss = ss(A, B, C, D); % Espaço de estados
sys_tf = tf(sys_ss); % Função de transferência
```

Assim, obtém-se diretamente a função de transferência $G(s)$, que expressa a dinâmica do sistema:

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{24.59s - 0.0024}{s^3 + 14.52s^2 - 81.78s - 637.8} \quad (31)$$

onde $\alpha(s)$ é a transformada de Laplace do ângulo do pêndulo e $V_m(s)$ é a transformada de Laplace da tensão aplicada ao motor.

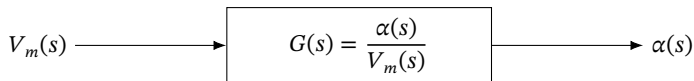


Figura 2. Diagrama de blocos representando a função de transferência entre a entrada $V_m(s)$ e a saída $\alpha(s)$.

3. Análise do Modelo

Após a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica entre a entrada $V_m(s)$ (tensão aplicada ao motor) e a saída $\alpha(s)$ (ângulo do pêndulo), procede-se à análise matemática do sistema em malha aberta. Essa análise permite caracterizar propriedades fundamentais, como ordem e grau relativo, localização dos polos e zeros, estabilidade intrínseca e comportamento esperado diante de diferentes entradas.

Embora ainda não haja controle implementado, esta etapa é essencial para compreender as limitações naturais do sistema e justificar a necessidade de técnicas de estabilização.

3.1. Ordem e grau relativo

- **Ordem do sistema:** 3 (denominador de grau 3) — sistema de 3ª ordem.
- **Grau do numerador:** 1.

3.2. Polos e estabilidade

As raízes do denominador (polos) obtidos numericamente são aproximadamente:

$$p_1 \approx -17.12, \quad p_2 \approx -4.94, \quad p_3 \approx +7.54.$$

Como existe um polo em $p_3 \approx +7.54$ (semiplano direito), o sistema é **instável em malha aberta**. Em termos práticos, qualquer pequena perturbação tenderá a crescer exponencialmente se não houver controle. A raiz do numerador (zero) é aproximadamente:

$$z \approx +9.76 \times 10^{-5}.$$

O sistema possui, portanto, um zero no semiplano direito (RHP), caracterizando-o como **não mínimo-fase**, a principal consequência disso é a tendência do sistema de apresentar uma resposta inversa (undershoot). Se o sistema fosse estável e recebesse um comando em degrau para ir a um valor positivo, a saída primeiro se moveria ligeiramente na direção negativa antes de se corrigir.

No entanto, como o sistema é instável, essa resposta inversa inicial seria rapidamente dominada e mascarada pelo crescimento exponencial causado pelo polo instável.

3.3. Ganho DC

O ganho estático do sistema é:

$$G(0) = \frac{-0.0024}{-637.752} \approx 3.76 \times 10^{-6}.$$

O valor é muito pequeno, mas na prática a dinâmica é dominada pelo polo instável.

3.4. Tipo do sistema

Não há polos em $s = 0$, logo o sistema é do **tipo 0**. Em teoria isso significa erro finito para entrada em degrau, mas devido à instabilidade, em malha aberta a saída tende a divergir.

3.5. Observações finais

- O polo no semiplano direito torna o sistema instável em malha aberta.
- O zero no semiplano direito impõe dificuldades na modelagem de um controlador.

4. Simulação Computacional

- Implementação do modelo matemático em software (*MATLAB*/*Simulink* ou similar).
- Apresentação dos resultados da simulação da resposta do sistema em malha aberta a diferentes sinais de entrada (degrau, impulso).
- Discussão e análise crítica dos resultados da simulação.

5. Conclusão Parcial

- Resumo dos resultados obtidos na modelagem e simulação.
- Perspectivas para a próxima etapa de montagem e validação.

Referências

DUART, J L *et al.* Dynamic Modeling and Simulation of a Rotational Inverted Pendulum. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 792, n. 1, p. 012081, jan. 2017. DOI: 10.1088/1742-6596/792/1/012081. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081>.