Controle de Estabilização de um Pêndulo Invertido Rotacional

JOSÉ A. DA SILVA[a,1], **KAUA LESSA L. DOS SANTOS** [b,2], **PABLO MUNIH S. DE CARVALHO**[c,3] **and PLÁCIDO AUGUSTUS DE O. CORDEIRO**[d,4]

[a]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*
[b]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*
[c]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*

Prof. ICARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAUJO

Resumo—Este relatório trata da segunda etapa do projeto da disciplina de sistemas de controle 1, de um pêndulo invertido rotacional. É apresentado, em primeira instância, as equações diferenciais de movimento do pêndulo obtidas através do método Euler-Lagrange, linearização do modelo e obtenção da função de transferência. Em seguida, a estabilidade do sistema é analisada, assim como a resposta do modelo a diferentes entradas, a fim de prever seu comportamento. Por fim, o software MATLAB/Simulink é utilizado para simular o sistema em malha aberta e os resultados são discutidos.

Keywords—*pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares*

1. Introdução

Anteriormente, foi discutido a importância do pêndulo invertido no estudo prático de sistemas de controle, as diferenças entre os dois principais modelos presentes na literatura e a escolha do pêndulo invertido rotacional como interesse deste estudo.

1.1. Descrição do Sistema

Recapitulando, o pêndulo invertido rotacional, também chamado de Pêndulo de Furuta, é composto por um pêndulo acoplado a um braço horizontal giratório, que é acionado por um motor. O movimento do sistema ocorre no plano horizontal, através do movimento do braço giratório e no plano vertical, através do movimento do pêndulo. A relação de apenas um atuador para dois graus de liberdade caracteriza este sistema como subatuado. A Figura 1 apresenta o modelo de referência para a modelagem matemática e implementação do controlador.

1.2. Variávies do Sistema

O sistema físico possui o torque do motor como única entrada. Para este estudo, apenas a ângulo do pêndulo será considerado como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input single output* (SISO). É importante destacar que é possível considerar também o ângulo do braço como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input multiple output* (SIMO), porém, esse não é o foco deste estudo. As variáveis físicas são apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 1. Símbolos para descrever os parâmetros das equações

Símbolo	Descrição
L	Distância até o centro de massa do pêndulo
m	Massa do braço do pêndulo
r	Comprimento do braço rotativo
θ	Ângulo do braço do pêndulo (rad)
α	Ângulo do pêndulo (rad)
h	Distância do centro de massa do pêndulo até o solo
J_{cm}	Inércia do pêndulo em relação ao seu centro de massa
V_x	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção x
V_y	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção y

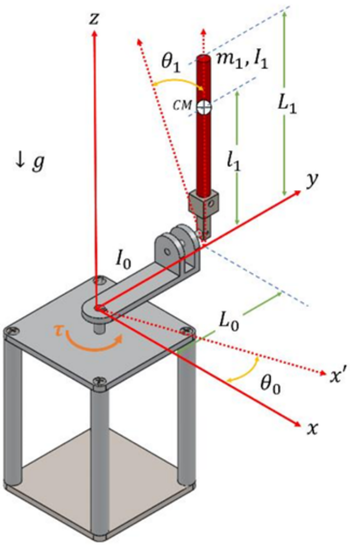

Figura 1. Representação tridimensional do pêndulo invertido rotacional com seus parâmetros físicos e coordenadas. Fonte: (DUART et al., 2017)

1.3. Objetivo

O objetivo desta etapa é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema, análisar o modelo obtido e simular através do software MATLAB/Simulink.

2. Modelagem Matemática

A compreensão precisa da dinâmica do Pêndulo de Furuta exige uma formulação matemática rigorosa. Antes de prosseguir com a derivação das equações de movimento, é fundamental estabelecer a convenção de coordenadas adotada. Conforme ilustrado na Figura 2, o ângulo de rotação do braço horizontal é denotado por θ. O ponto crucial para a estabilização é a definição do ângulo α do pêndulo em relação à vertical: o estado de interesse, onde o pêndulo se encontra na posição invertida (verticalmente para cima), corresponde explicitamente a $\alpha = 0$. Essa definição é vital para a interpretação dos resultados de controle e para a linearização do sistema em torno deste ponto de equilíbrio instável.

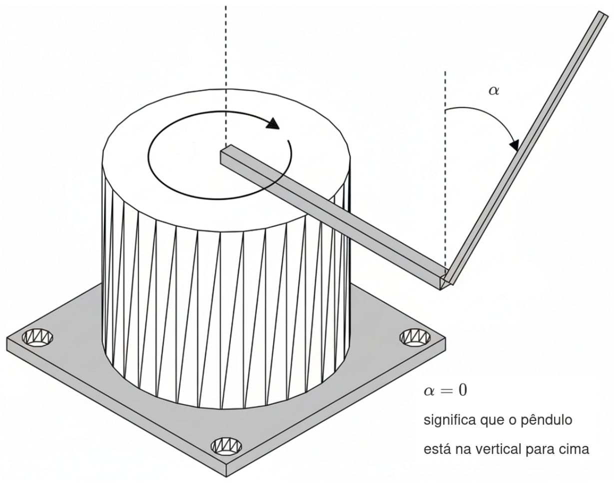

Figura 2. Definição das variáveis angulares do Pêndulo de Furuta, com o ângulo do braço θ e o ângulo do pêndulo α. A posição de equilíbrio instável ($\alpha = 0$) é indicada.

A modelagem matemática do pêndulo invertido rotacional é obtida aplicando o método de Euler-Lagrange. Inicialmente, consideram-se as velocidades do centro de massa do pêndulo e do braço rotativo:

$$V_{Pen.cm} = -L\cos(\alpha)\,\dot{\alpha}\,\hat{x} - L\sin(\alpha)\,\dot{\alpha}\,\hat{y} \tag{1}$$

$$V_{arm} = r\dot{\theta} \tag{2}$$

Assim, as componentes de velocidade do centro de massa do pêndulo podem ser escritas como:

$$V_x = r\dot{\theta} - L\cos(\alpha)\,\dot{\alpha} \tag{3}$$
$$V_y = -L\sin(\alpha)\,\dot{\alpha} \tag{4}$$

2.1. Energia Potencial

A única energia potencial no sistema é a gravitacional:

$$V = mgh = mgL\cos(\alpha) \tag{5}$$

2.2. Energia Cinética

As energias cinéticas são devidas ao movimento do braço, ao movimento do centro de massa do pêndulo e à rotação do pêndulo em torno do seu próprio centro de massa:

$$T = KE_{hub} + KE_{V_x} + KE_{V_y} + KE_{pendulo} \tag{6}$$

Momento de Inércia

O momento de inércia de uma barra homogênea em torno do centro de massa é:

$$J_{cm} = \frac{1}{12}MR^2 \tag{7}$$

Como o comprimento do pêndulo é $2L$, temos:

$$J_{cm} = \frac{1}{12}M(2L)^2 = \frac{1}{3}ML^2 \tag{8}$$

Energia Cinética do Braço (Hub)

$$T_{hub} = \tfrac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

Energia Cinética de Translação do Pêndulo

$$T_{trans} = \tfrac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2) \tag{10}$$

Substituindo as velocidades:

$$T_{trans} = \tfrac{1}{2}m\Big[(r\dot{\theta} - L\cos(\alpha)\,\dot{\alpha})^2 + (-L\sin(\alpha)\,\dot{\alpha})^2\Big] \tag{11}$$

Energia Cinética de Rotação do Pêndulo em torno do CM

$$T_{rot} = \tfrac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \tag{12}$$

Energia Cinética Total

Somando todas as parcelas de energia cinética, temos:

$$T = \tfrac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m(r\dot{\theta} - L\cos(\alpha)\dot{\alpha})^2 + \tfrac{1}{2}m(-L\sin(\alpha)\dot{\alpha})^2 + \tfrac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \tag{13}$$

Expandindo os quadrados:

$$\begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m\big(r^2\dot{\theta}^2 - 2rL\cos(\alpha)\,\dot{\theta}\dot{\alpha} + L^2\cos^2(\alpha)\,\dot{\alpha}^2\big) \\ & + \tfrac{1}{2}m\big(L^2\sin^2(\alpha)\,\dot{\alpha}^2\big) + \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{3}mL^2\Big)\dot{\alpha}^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Reagrupando os termos:

$$\begin{aligned} T = {} & \tfrac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\,\dot{\theta}\dot{\alpha} \\ & + \tfrac{1}{2}mL^2(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{6}mL^2\dot{\alpha}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Como $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, temos:

$$T = \tfrac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\,\dot{\theta}\dot{\alpha} + \tfrac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 \tag{16}$$

2.3. Lagrangiana

A energia potencial e a energia cinética total foram obtidas como:

$$V = mgL\cos(\alpha) \tag{17}$$
$$T = \tfrac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\,\dot{\theta}\dot{\alpha} + \tfrac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 \tag{18}$$

Portanto, a Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = T - V \tag{19}$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\,\dot{\theta}\dot{\alpha} + \tfrac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 - mgL\cos(\alpha) \tag{20}$$

2.4. Equações de Lagrange

A equação de Lagrange geral para uma coordenada generalizada q_i é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \tag{21}$$

No sistema, temos as duas coordenadas generalizadas:

$$q_1 = \theta, \qquad q_2 = \alpha$$

Para θ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \tag{22}$$

- A coordenada θ recebe o torque do motor.
- Esse torque possui duas partes:
1. T_{output}: torque útil gerado pelo motor.
2. $-B_{eq}\dot{\theta}$: torque dissipativo devido ao atrito viscoso.

Aplicando a α

Para a coordenada α, a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \tag{23}$$

Observações importantes:

- A coordenada α não recebe torque aplicado diretamente.
- O único efeito externo é a gravidade (já incluída na energia potencial).
- Por isso, o lado direito da equação é nulo.

Equações diferenciais finais

Após aplicar as equações de Lagrange para θ e α, e linearizar em torno de $\alpha \approx 0$, obtemos:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad \text{(Braço)} \quad (24)$$

$$\tfrac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \quad \text{(Pêndulo)} \quad (25)$$

2.5. Modelo em Espaço de Estados

O torque de saída do motor aplicado ao sistema é dado por:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m}\left(V_m - K_G K_m \dot{\theta}\right) \quad (26)$$

Combinando as equações de movimento obtidas, a representação em espaço de estados pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{bd}{E} & -\frac{cG}{E} & 0 \\ 0 & \frac{qd}{E} & -\frac{bG}{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c\,\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m E} \\ \frac{b\,\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m E} \end{bmatrix} V_m \quad (27)$$

onde os parâmetros são definidos como:

$$a = J_{eq} + mr^2, \qquad b = mLr,$$
$$c = \tfrac{4}{3}mL^2, \qquad d = mgL,$$
$$E = ac - b^2, \qquad G = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_m K_g^2}{R_m} - B_{eq}$$

A Tabela 2 apresenta os parâmetros utilizados para o sistema SRV02.

Tabela 2. Parâmetros típicos do sistema SRV02 e do pêndulo

Símbolo	Descrição	Valor
K_t	Constante de torque do motor	0.00767
K_m	Constante de FEM inversa	0.00767
R_m	Resistência de armadura	2.6
K_g	Relação de engrenagem (motor → carga)	14 (14:1)
η_m	Eficiência do motor	0.69
η_g	Eficiência da caixa de engrenagem	0.9
B_{eq}	Coef. de atrito viscoso equivalente	1.5×10^{-3}
J_{eq}	Momento de inércia equivalente na carga	9.31×10^{-4}

2.6. Modelo Numérico em Espaço de Estados

Substituindo os valores da Tabela 2, obtemos o modelo em espaço de estados numérico:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (28)$$

E a saída é dada por:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \quad (29)$$

2.7. Obtenção da Função de Transferência

A partir do modelo em espaço de estados (Eq. 28), pode-se obter a função de transferência que relaciona a entrada do sistema (tensão no motor V_m) com a saída escolhida (ângulo do pêndulo α). Para isso, foi utilizada a função `tf()` do *MATLAB*, que converte a representação em espaço de estados para a forma de função de transferência.

As matrizes do sistema são definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix}, \quad (30)$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

O código em *MATLAB* para a conversão é o seguinte:

```
A = [0 0 1 0;
     0 0 0 1;
     0 39.32 -14.52 0;
     0 81.78 -13.98 0];

B = [0; 0; 25.54; 24.59];

C = [0 1 0 0];   % Saída = ângulo do pêndulo
D = 0;

sys_ss = ss(A, B, C, D);  % Espaço de estados
sys_tf = tf(sys_ss);      % Função de transferência
```

Assim, obtém-se diretamente a função de transferência $G(s)$, que expressa a dinâmica do sistema:

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{24.59\,s - 0.0024}{s^3 + 14.52\,s^2 - 81.78\,s - 637.8} \quad (31)$$

onde $\alpha(s)$ é a transformada de Laplace do ângulo do pêndulo e $V_m(s)$ é a transformada de Laplace da tensão aplicada ao motor.

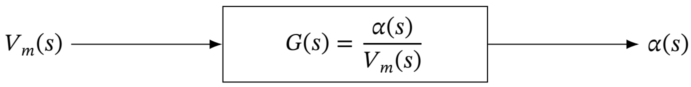

Figura 3. Diagrama de blocos representando a função de transferência entre a entrada $V_m(s)$ e a saída $\alpha(s)$.

3. Análise do Modelo

Após a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica entre a entrada $V_m(s)$ (tensão aplicada ao motor) e a saída $\alpha(s)$ (ângulo do pêndulo), procede-se à análise matemática do sistema em malha aberta. Essa análise permite caracterizar propriedades fundamentais, como ordem e grau relativo, localização dos polos e zeros, estabilidade intrínseca e comportamento esperado diante de diferentes entradas. Embora ainda não haja controle implementado, esta etapa é essencial para compreender as limitações naturais do sistema e justificar a necessidade de técnicas de estabilização.

3.1. Ordem e grau relativo

- **Ordem do sistema:** 3 (denominador de grau 3) — sistema de 3ª ordem.
- **Grau do numerador:** 1.

3.2. Polos e estabilidade

As raízes do denominador (polos) obtidos numericamente são aproximadamente:

$$p_1 \approx -17.12, \qquad p_2 \approx -4.94, \qquad p_3 \approx +7.54.$$

Como existe um polo em $p_3 \approx +7.54$ (semiplano direito), o sistema é **instável em malha aberta**. Em termos práticos, qualquer pequena perturbação tenderá a crescer exponencialmente se não houver controle. A raiz do numerador (zero) é aproximadamente:

$$z \approx +9.76 \times 10^{-5}.$$

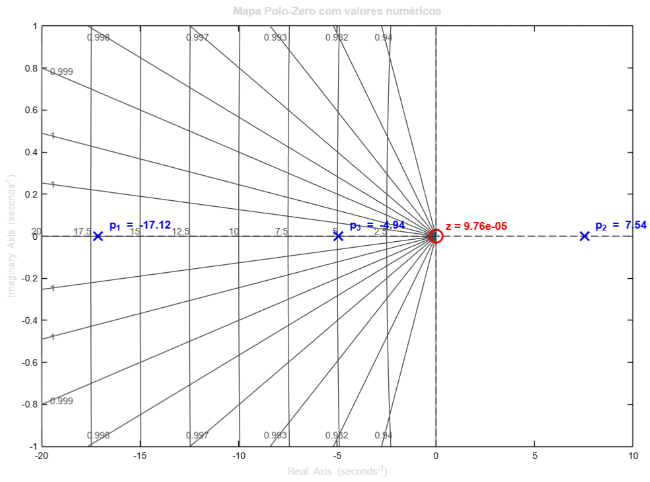

Figura 4. Mapa polo-zero do sistema, com polos (X) e zeros (O) destacados numericamente.

O sistema possui, portanto, um zero no semiplano direito (RHP), caracterizando-o como **não mínimo-fase**, a principal consequência disso é a tendência do sistema de apresentar uma resposta inversa (*undershoot*). Se o sistema fosse estável e recebesse um comando em degrau para ir a um valor positivo, a saída primeiro se moveria ligeiramente na direção negativa antes de se corrigir.

3.3. Ganho DC

O ganho estático do sistema é:

$$G(0) = \frac{-0.0024}{-637.752} \approx 3.76 \times 10^{-6}.$$

O valor é muito pequeno, mas na prática a dinâmica é dominada pelo polo instável.

3.4. Tipo do sistema

Não há polos em $s = 0$, logo o sistema é do **tipo 0**. Em teoria isso significa erro finito para entrada em degrau, mas devido à instabilidade, em malha aberta a saída tende a divergir.

3.5. Observações finais

- O polo no semiplano direito torna o sistema instável em malha aberta.
- O zero no semiplano direito impõe dificuldades na modelagem de um controlador

4. Simulação Computacional

Para validar e visualizar o comportamento dinâmico previsto pela análise matemática, o sistema foi simulado no ambiente *MATLAB/-Simulink*. Utilizando a função de transferência $G(s)$ obtida, foram analisadas as respostas do sistema em malha aberta a três sinais de entrada canônicos: impulso, degrau e rampa. Essas simulações são fundamentais para confirmar a instabilidade inerente do pêndulo e compreender a natureza da sua resposta antes da implementação de qualquer estratégia de controle. O comportamento observado em todas as simulações reflete diretamente a presença do polo instável em $s \approx +7.54$.

4.1. Resposta ao Impulso

A resposta a um impulso unitário, que representa a reação do sistema a uma perturbação instantânea de energia, é apresentada na Figura 5. Como se pode observar, a saída (ângulo do pêndulo) diverge exponencialmente, confirmando a instabilidade do sistema em malha aberta. Uma perturbação mínima é suficiente para que o pêndulo inicie um movimento de queda do qual ele não consegue se recuperar autonomamente. Esse comportamento é totalmente consistente com o polo no semiplano direito, que domina a dinâmica do sistema.

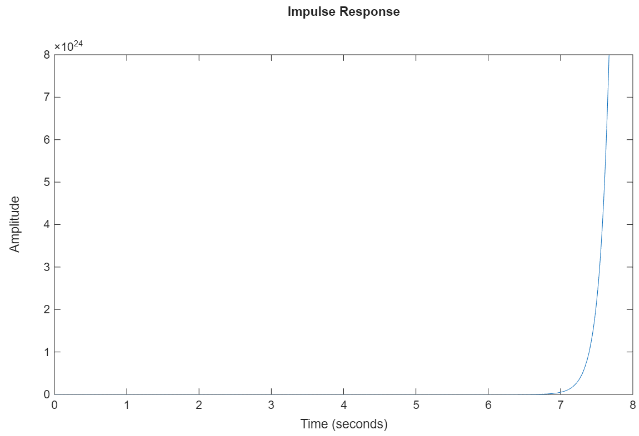

Figura 5. Resposta ao impulso do sistema em malha aberta.

4.2. Resposta ao Degrau

A aplicação de uma entrada em degrau, que equivale a fornecer uma tensão constante ao motor, também resulta em uma resposta instável, como ilustrado na Figura 6. A saída cresce de forma ilimitada, o que, fisicamente, corresponde à queda do pêndulo de forma acelerada. O resultado reforça que uma ação de controle constante é incapaz de estabilizar o sistema, evidenciando a necessidade de uma malha de realimentação que ajuste a entrada dinamicamente com base no estado do pêndulo.

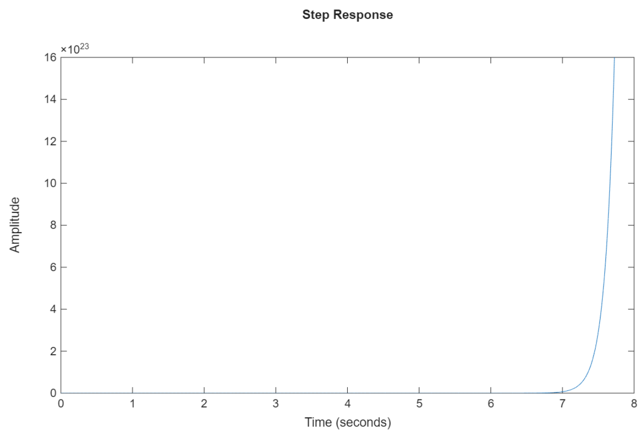

Figura 6. Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.

4.3. Resposta à Rampa

A resposta a uma entrada do tipo rampa, mostrada na Figura 7, exibe uma divergência ainda mais acentuada. Este teste submete o sistema a uma solicitação de energia continuamente crescente, e a resposta instável se manifesta de forma mais rápida e agressiva. Embora seja um cenário menos comum na prática, a simulação confirma que o sistema em malha aberta é incapaz de seguir qualquer trajetória de referência, por mais simples que seja, reforçando a necessidade crítica de um controlador para a estabilização.

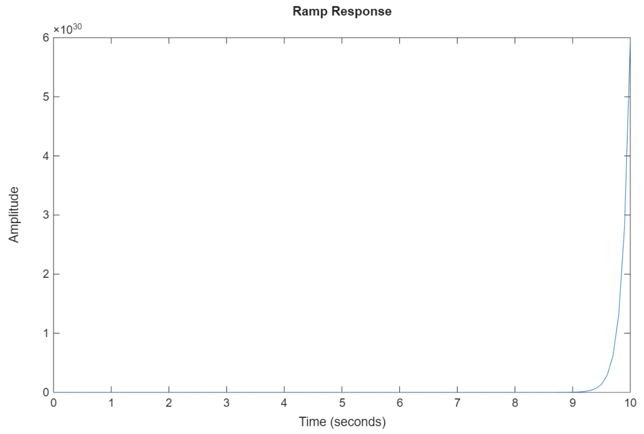

Figura 7. Resposta à rampa do sistema em malha aberta.

5. Conclusão

Nesta etapa do projeto, o modelo matemático para o pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta) foi obtido com sucesso. Partindo dos princípios da mecânica clássica e utilizando o método de Euler-Lagrange, foram derivadas as equações diferenciais não lineares que descrevem a dinâmica do sistema. Subsequentemente, o modelo foi linearizado em torno do ponto de equilíbrio instável ($\alpha \approx 0$) para se obter uma representação em espaço de estados e a correspondente função de transferência, relacionando a tensão de entrada do motor (V_m) com o ângulo do pêndulo (α).

A análise da função de transferência revelou características cruciais do sistema em malha aberta. Foi identificado que o sistema é de terceira ordem, do tipo 0, e, mais importante, intrinsecamente instável devido a um polo localizado no semiplano direito ($p_3 \approx +7.54$). Adicionalmente, a presença de um zero também no semiplano direito caracteriza o sistema como de fase não mínima, o que pode impor desafios ao projeto do controlador, como a ocorrência de uma resposta inversa inicial (*undershoot*).

As simulações computacionais do sistema em malha aberta para entradas de impulso, degrau e rampa confirmaram visualmente a instabilidade prevista pela análise teórica, com a saída divergindo exponencialmente em todos os cenários. Os resultados obtidos nesta etapa concluem a modelagem e a análise do sistema, fornecendo uma base sólida e indispensável para a próxima fase do projeto. A próxima etapa consistirá no projeto e implementação de um controlador em malha fechada com o objetivo de superar a instabilidade natural do sistema e manter o pêndulo estabilizado na posição vertical.

Referências

DUART, J L et al. Dynamic Modeling and Simulation of a Rotational Inverted Pendulum. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 792, n. 1, p. 012081, jan. 2017. DOI: 10.1088/1742-6596/792/1/012081. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081>.