Controle de Estabilização de um Pêndulo Invertido Rotacional

JOSÉ A. DA SILVA[a,1], **KAUA LESSA L. DOS SANTOS** [b,2], **PABLO MUNIH S. DE CARVALHO**[c,3] **and PLÁCIDO AUGUSTUS DE O. CORDEIRO**[d,4]

[a]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*
[b]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*
[c]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*

Prof. ICARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAUJO

Resumo—Esta etapa final do projeto engloba a montagem experimental do protótipo e o projeto do controlador para o pêndulo invertido rotacional. Inicialmente, o modelo matemático derivado e simulado nas etapas anteriores é submetido a um processo de validação, comparando-se suas respostas com dados experimentais coletados do sistema físico montado. Em seguida, procede-se ao projeto de um controlador em malha fechada, com base em técnicas de análise e síntese de sistemas de controle, com o objetivo de estabilizar o pêndulo na posição vertical invertida. O controlador projetado é então implementado e testado, tanto em simulação quanto no protótipo real, permitindo uma análise crítica do desempenho do sistema controlado e da fidedignidade do modelo matemático adotado.

Keywords—*pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares*

1. Introdução

A etapa anterior focou na modelagem e simulação do sistema. A descrição da dinâmica do sistema foi realizada utilizando a equação de Euler-Lagrange, resultando em equações diferenciais ordinárias não lineares que descrevem o comportamento do braço e do pêndulo. Foi realizada a linearização em torno de ($\alpha = 0$), o que permitiu a obtenção de uma representação em espaço de estados e da respectiva função de transferência $G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)}$, que relaciona a tensão aplicada ao motor com o ângulo do pêndulo. Em seguida, a função de transferência obtida foi analizada, assim como a resposta do sistema em malha aberta, o que revelou um sistema intrinsecamente instável. Esta seção do relatório busca recapitular a etapa anterior e definir os objetivos desta etapa final do projeto.

1.1. Modelagem Matemática

A modelagem apresentada na etapa anterior segue de perto a apresentada em (RAMOS et al., 2011), que descrevem detalhadamente o procedimento de modelagem do pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta). Inicialmente, foi estabelecida a convenção de coordenadas ilustrada na figura 1, onde o ângulo de rotação do braço horizontal é denotado por θ e o ângulo do pêndulo com o plano vertical é definido como α. O estado de interesse corresponde explicitamente a $\alpha = 0$, onde o pêndulo se encontra na vertical.

Lagrangiana e Equação de Euler-Lagrange

Ao estabelecer a convenção de coordenadas, é possível encontrar as energias potenciais e cinéticas do sistema, assim é permitindo expressar a Lagrangiana da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\,\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 - mgL\cos(\alpha) \quad (1)$$

Onde J_{eq} é o momento de inércia equivalente à carga do motor, m é a massa do braço horizontal, r é o comprimento do braço rotativo, L é a distância até o centro de massa do pêndulo e g é a aceleração da gravidade.

No sistema é possível identificar duas coordenadas generalizadas: θ e α. Dessa forma, aplicando a equação de Euler-Lagrange as coordenadas generalizadas e linearizando em torno de $\alpha \approx 0$, obtemos as seguintes equações:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \qquad \text{(Braço)} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \qquad \text{(Pêndulo)} \quad (3)$$

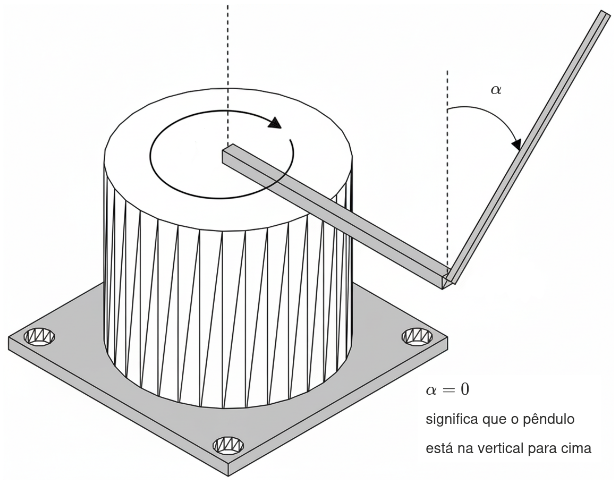

Figura 1. Definição das variáveis angulares do Pêndulo de Furuta, com o ângulo do braço θ e o ângulo do pêndulo α. A posição de equilíbrio instável ($\alpha = 0$) é indicada.

Representação em Espaços de Estados e Função de Transferência

O torque de saída do motor aplicado ao sistema é dado por:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m}\left(V_m - K_G K_m \dot{\theta}\right) \quad (4)$$

Combinando as equações de movimento obtidas, a representação em espaço de estados pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (5)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \quad (6)$$

1.2. Obtenção da Função de Transferência

A partir do modelo em espaço de estados (Eq. 5), pode-se obter a função de transferência que relaciona a entrada do sistema (tensão no motor V_m) com a saída escolhida (ângulo do pêndulo α). Para isso, foi utilizada a função `tf()` do *MATLAB*, que converte a representação em espaço de estados para a forma de função de transferência. Dessa forma, obtemos a relação $G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)}$ a seguir:

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{24.59\,s - 0.0024}{s^3 + 14.52\,s^2 - 81.78\,s - 637.8} \quad (7)$$

1.3. Análise do Modelo

Após a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica entre a tensão aplicada ao motor e o ângulo do pêndulo, procede-se à análise matemática do sistema em malha aberta. Embora ainda não haja controle implementado, esta etapa é essencial para compreender as limitações naturais do sistema e justificar a necessidade de técnicas de estabilização.

Ordem e grau relativo

- **Ordem do sistema:** 3 (denominador de grau 3) — sistema de 3ª ordem.
- **Grau do numerador:** 1.

Polos e estabilidade

As raízes do denominador (polos) obtidos numericamente são aproximadamente:

$$p_1 \approx -17.12, \qquad p_2 \approx -4.94, \qquad p_3 \approx +7.54.$$

Como existe um polo em $p_3 \approx +7.54$ (semiplano direito), o sistema é **instável em malha aberta**. A raiz do numerador (zero) é aproximadamente:

$$z \approx +9.76 \times 10^{-5}.$$

O sistema possui, portanto, um zero no semiplano direito (RHP), caracterizando-o como **não mínimo-fase**, a principal consequência disso é a tendência do sistema de apresentar uma resposta inversa (*undershoot*).

Ganho DC

O ganho estático do sistema é:

$$G(0) = \frac{-0.0024}{-637.752} \approx 3.76 \times 10^{-6}.$$

O valor é muito pequeno, mas na prática a dinâmica é dominada pelo polo instável.

Tipo do sistema

Não há polos em $s = 0$, logo o sistema é do **tipo 0**. Em teoria isso significa erro finito para entrada em degrau, mas devido à instabilidade, em malha aberta a saída tende a divergir.

1.4. Simulação Computacional

Para validar e visualizar o comportamento dinâmico previsto pela análise matemática, o sistema foi simulado no ambiente *MATLAB/-Simulink*. Utilizando a função de transferência $G(s)$ obtida, foram analisadas as respostas do sistema em malha aberta a três sinais de entrada canônicos: impulso, degrau e rampa.

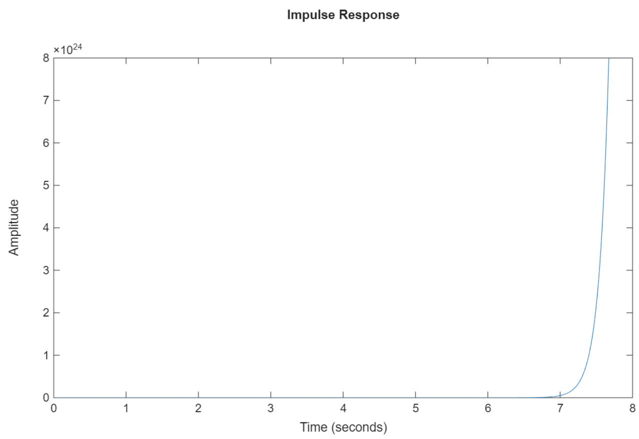

Figura 2. Resposta ao impulso do sistema em malha aberta.

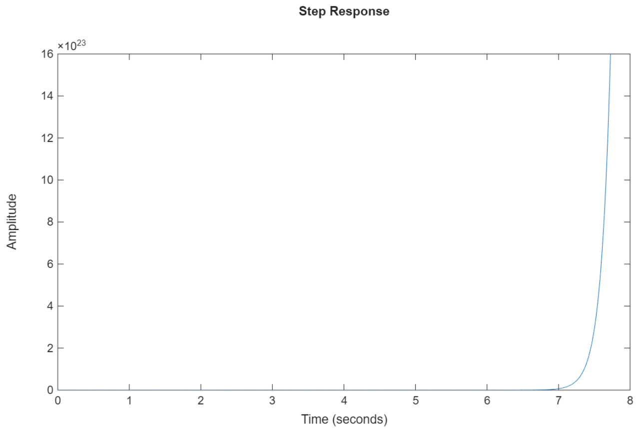

Figura 3. Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.

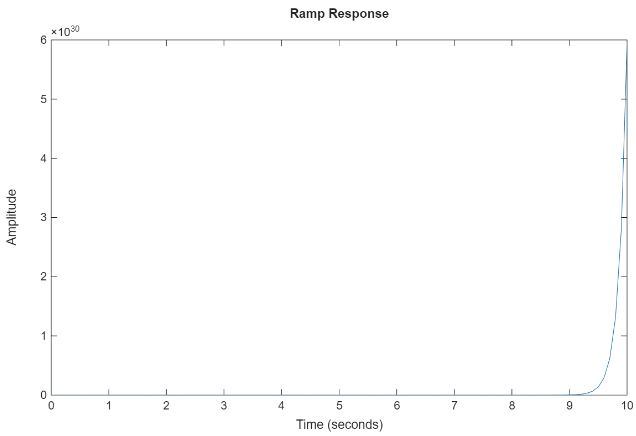

Figura 4. Resposta à rampa do sistema em malha aberta.

As simulações computacionais do sistema em malha aberta para entradas de impulso, degrau e rampa confirmaram visualmente a instabilidade prevista pela análise teórica, com a saída divergindo exponencialmente em todos os cenários.

1.5. Objetivos

As simulações computacionais, assim como a análise do modelo em malha aberta, confirmaram a instabilidade intrínseca do sistema físico e forneceram uma base sólida e indispensável para a fase do final do projeto. Esta última etapa consolida a montagem prática e o controle do sistema, visando validar o modelo matemático e implementar uma estratégia de controle em malha fechada. Os objetivos específicos incluem: (i) montar o protótipo físico e coletar dados experimentais para validação do modelo teórico; (ii) comparar qualitativa e quantitativamente as respostas real e simulada, analisando eventuais discrepâncias; (iii) projetar um controlador PID que atenda a requisitos de desempenho pré-definidos; (iv) implementar e testar o controlador no protótipo real; e (v) avaliar criticamente o desempenho do sistema controlado, comparando os resultados práticos com as simulações.

Referências

RAMOS, J. et al. Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods: comparative assessment and result analysis. In: 2011 Pan American Health Care Exchanges. [S.l.]: IEEE, 2011. P. 1–6. DOI: 10.1109/PAHCE.2011.5871873. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/224178913_Modeling_and_control_of_a_rotary_inverted_pendulum_using_various_methods_comparative_assessment_and_result_analysis>.