

# Controle de Estabilização de um Pêndulo Invertido Rotacional

JOSÉ A. DA SILVA<sup>a,1</sup>, KAUÁ LESSA L. DOS SANTOS<sup>b,2</sup>, PABLO MUNIH S. DE CARVALHO<sup>c,3</sup> and PLÁCIDO AUGUSTUS DE O. CORDEIRO<sup>d,4</sup>

<sup>a</sup>Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

<sup>b</sup>Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

<sup>c</sup>Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

Prof. ICARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAUJO

**Resumo**—Esta etapa final do projeto engloba a montagem experimental do protótipo e o projeto do controlador para o pêndulo invertido rotacional. Inicialmente, o modelo matemático derivado e simulado nas etapas anteriores é submetido a um processo de validação, comparando-se suas respostas com dados experimentais coletados do sistema físico montado. Em seguida, procede-se ao projeto de um controlador em malha fechada, com base em técnicas de análise e síntese de sistemas de controle, com o objetivo de estabilizar o pêndulo na posição vertical invertida. O controlador projetado é então implementado e testado, tanto em simulação quanto no protótipo real, permitindo uma análise crítica do desempenho do sistema controlado e da fidedignidade do modelo matemático adotado.

**Keywords**—pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares

## 1. Introdução

A etapa anterior focou na modelagem e simulação do sistema. A descrição da dinâmica do sistema foi realizada utilizando a equação de Euler-Lagrange, resultando em equações diferenciais ordinárias não lineares que descrevem o comportamento do braço e do pêndulo. Foi realizada a linearização em torno de  $(\alpha = 0)$ , o que permitiu a obtenção de uma representação em espaço de estados e da respectiva função de transferência  $G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)}$ , que relaciona a tensão aplicada ao motor com o ângulo do pêndulo. Em seguida, a função de transferência obtida foi analizada, assim como a resposta do sistema em malha aberta, o que revelou um sistema intrinsecamente instável. Esta seção do relatório busca recapitular a etapa anterior e definir os objetivos desta etapa final do projeto.

### 1.1. Modelagem Matemática

A modelagem apresentada na etapa anterior segue de perto a apresentada em (RAMOS et al., 2011), que descrevem detalhadamente o procedimento de modelagem do pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta). Inicialmente, foi estabelecida a convenção de coordenadas ilustrada na figura 1, onde o ângulo de rotação do braço horizontal é denotado por  $\theta$  e o ângulo do pêndulo com o plano vertical é definido como  $\alpha$ . O estado de interesse corresponde explicitamente a  $\alpha = 0$ , onde o pêndulo se encontra na vertical.

#### Lagrangiana e Equação de Euler-Lagrange

Ao estabelecer a convenção de coordenadas, é possível encontrar as energias potenciais e cinéticas do sistema, assim é permitindo expressar a Lagrangiana da seguinte forma:

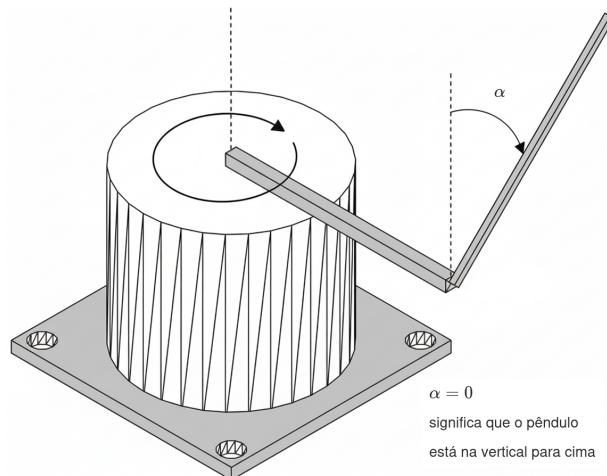
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{1}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 - mgL \cos(\alpha) \quad (1)$$

Onde  $J_{eq}$  é o momento de inércia equivalente à carga do motor,  $m$  é a massa do braço horizontal,  $r$  é o comprimento do braço rotativo,  $L$  é a distância até o centro de massa do pêndulo e  $g$  é a aceleração da gravidade.

No sistema é possível identificar duas coordenadas generalizadas:  $\theta$  e  $\alpha$ . Dessa forma, aplicando a equação de Euler-Lagrange as coordenadas generalizadas e linearizando em torno de  $\alpha \approx 0$ , obtemos as seguintes equações:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad (\text{Braço}) \quad (2)$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \quad (\text{Pêndulo}) \quad (3)$$



**Figura 1.** Definição das variáveis angulares do Pêndulo de Furuta, com o ângulo do braço  $\theta$  e o ângulo do pêndulo  $\alpha$ . A posição de equilíbrio instável ( $\alpha = 0$ ) é indicada.

#### Representação em Espaços de Estados e Função de Transferência

O torque de saída do motor aplicado ao sistema é dado por:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_s K_t K_g}{R_m} (V_m - K_G K_m \dot{\theta}) \quad (4)$$

Combinando as equações de movimento obtidas, a representação em espaço de estados pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (5)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \quad (6)$$

### 1.2. Obtenção da Função de Transferência

A partir do modelo em espaço de estados (Eq. 5), pode-se obter a função de transferência que relaciona a entrada do sistema (tensão no motor  $V_m$ ) com a saída escolhida (ângulo do pêndulo  $\alpha$ ). Para isso, foi utilizada a função `tf()` do MATLAB, que converte a representação em espaço de estados para a forma de função de transferência. Dessa forma, obtemos a relação  $G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)}$  a seguir:

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{24.59 s - 0.0024}{s^3 + 14.52 s^2 - 81.78 s - 637.8} \quad (7)$$

### 1.3. Análise do Modelo

Após a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica entre a tensão aplicada ao motor e o ângulo do pêndulo, procede-se à análise matemática do sistema em malha aberta. Embora ainda não haja controle implementado, esta etapa é essencial para compreender as limitações naturais do sistema e justificar a necessidade de técnicas de estabilização.

#### Ordem e grau relativo

- **Ordem do sistema:** 3 (denominador de grau 3) — sistema de 3ª ordem.
- **Grau do numerador:** 1.

#### Polos e estabilidade

As raízes do denominador (polos) obtidos numericamente são aproximadamente:

$$p_1 \approx -17.12, \quad p_2 \approx -4.94, \quad p_3 \approx +7.54.$$

Como existe um polo em  $p_3 \approx +7.54$  (semiplano direito), o sistema é **instável em malha aberta**. A raiz do numerador (zero) é aproximadamente:

$$z \approx +9.76 \times 10^{-5}.$$

O sistema possui, portanto, um zero no semiplano direito (RHP), caracterizando-o como **não mínimo-fase**, a principal consequência disso é a tendência do sistema de apresentar uma resposta inversa (*undershoot*).

#### Ganho DC

O ganho estático do sistema é:

$$G(0) = \frac{-0.0024}{-637.752} \approx 3.76 \times 10^{-6}.$$

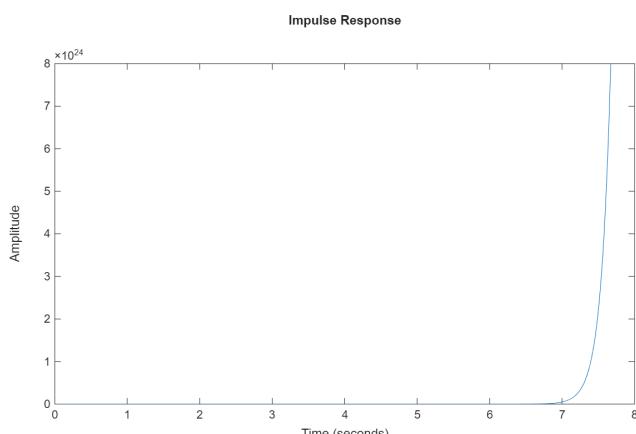
O valor é muito pequeno, mas na prática a dinâmica é dominada pelo polo instável.

#### Tipo do sistema

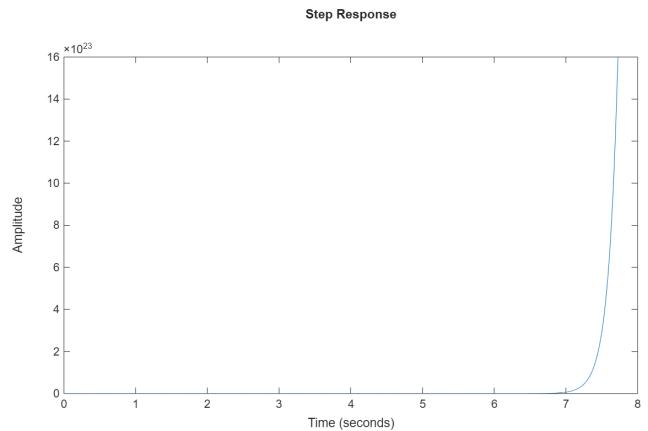
Não há polos em  $s = 0$ , logo o sistema é do **tipo 0**. Em teoria isso significa erro finito para entrada em degrau, mas devido à instabilidade, em malha aberta a saída tende a divergir.

### 1.4. Simulação Computacional

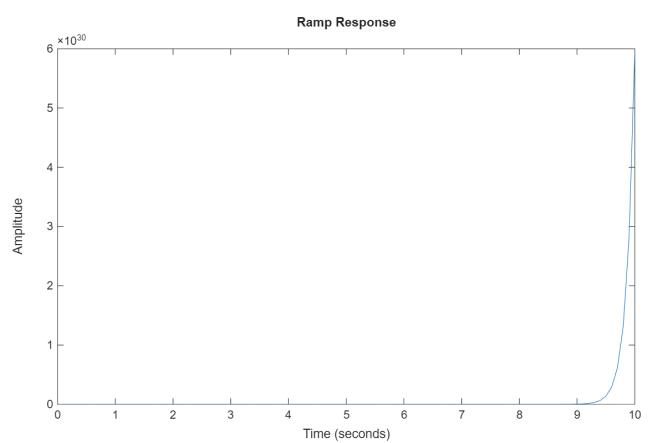
Para validar e visualizar o comportamento dinâmico previsto pela análise matemática, o sistema foi simulado no ambiente *MATLAB/Simulink*. Utilizando a função de transferência  $G(s)$  obtida, foram analisadas as respostas do sistema em malha aberta a três sinais de entrada canônicos: impulso, degrau e rampa.



**Figura 2.** Resposta ao impulso do sistema em malha aberta.



**Figura 3.** Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.



**Figura 4.** Resposta à rampa do sistema em malha aberta.

As simulações computacionais do sistema em malha aberta para entradas de impulso, degrau e rampa confirmaram visualmente a instabilidade prevista pela análise teórica, com a saída divergindo exponencialmente em todos os cenários.

### 1.5. Objetivos

As simulações computacionais, assim como a análise do modelo em malha aberta, confirmaram a instabilidade intrínseca do sistema físico e forneceram uma base sólida e indispensável para a fase do final do projeto. Esta última etapa consolida a montagem prática e o controle do sistema, visando validar o modelo matemático e implementar uma estratégia de controle em malha fechada. Os objetivos específicos incluem: (i) montar o protótipo físico e coletar dados experimentais para validação do modelo teórico; (ii) comparar qualitativa e quantitativamente as respostas real e simulada, analisando eventuais discrepâncias; (iii) projetar um controlador PID que atenda a requisitos de desempenho pré-definidos; (iv) implementar e testar o controlador no protótipo real; e (v) avaliar criticamente o desempenho do sistema controlado, comparando os resultados práticos com as simulações.

### 2. Montagem do Protótipo

Nesta seção é apresentada a montagem do protótipo físico do Pêndulo de Furuta desenvolvido neste projeto. São descritos, de forma detalhada, os procedimentos de construção da planta, incluindo a estrutura mecânica, acoplamento do encoder ao pêndulo e listagem dos componentes eletrônicos utilizados. Além disso, é apresentado o esquema de ligação elétrico final, bem como registros fotográficos do protótipo já montado. O objetivo é estabelecer documentação suficiente para a reprodução do projeto.

ente para permitir a reprodução da montagem realizada, garantindo rastreabilidade entre o projeto conceitual e a implementação prática.

## 2.1. Estrutura Mecânica

A estrutura mecânica do projeto, incluindo a base da planta, suportes e o braço rotacional horizontal foram totalmente fabricados utilizando impressão 3D. Além disso, parafusos foram utilizados para assegurar a fixação das partes mecânicas, garantindo a firmeza do sistema. Para garantir o livre movimento do braço horizontal, o cabo do encoder foi fixado a estrutura do braço mecânico através de abraçadeiras plásticas, assim evitando enrolamento durante sua rotação. Adicionalmente, foi posicionado um grampo sargentino entre a base e a superfície de apoio, a fim de evitar o deslocamento do sistema durante operação e garantir maior segurança durante testes. O pêndulo foi acoplado mecanicamente ao eixo do encoder, de maneira que não existam folgas perceptíveis, dessa forma assegurando que toda a variação angular do pêndulo fosse refletida diretamente na leitura do sensor.

## 2.2. Componentes Eletrônicos e Funcionamento do Circuito

Os componentes eletrônicos utilizados na montagem final são listados na tabela 1, a seguir:

**Tabela 1.** Componentes Eletrônicos

Componente	Qtd.	Finalidade
ESP32 WROOM	1	Lógica de controle, obtenção de dados experimentais
Encoder E38S6G5-600B-G24N	1	Leitura do ângulo do pêndulo
Motor Driver LM298	1	Interface de potência para o motor principal do sistema
Motor JGA25-370 6V	1	Atua sobre braço e pêndulo rotacionais
Fonte de bancada 8.3V	1	Alimentação da ponte H e do motor

Para esse projeto, foi utilizado uma placa Esp32 WROOM responsável pelo controle do motor, leitura do encoder e implementação embarcada do controlador PID. A placa é alimentada via porta usb por um computador, e os sensores são alimentados utilizando a saída de 3.3V da ESP32. Foi utilizada uma fonte de bancada, fornecendo 8.3V diretamente ao driver do motor LM298 pelo terminal  $V_s$  (power suply) da ponte H. O GND da fonte e da placa ESP32 são compartilhados, assim garantindo a mesma referência elétrica em todo o circuito. O diagrama completo do circuito pode ser verificado na imagem.

## 2.3. Conexões

O motor JGA25-370 com encoder hall integrado é conectado aos terminais **OUT1** e **OUT2**, responsáveis pela velocidade do motor. A alimentação do encoder integrado, e a leitura dos canais A e B segue a seguinte pinagem:

- **V<sub>CC</sub>** (Azul): Conectado a saída de 3.3V da ESP32.
- **GND** (Preto): Conectado ao terra comum a placa e fonte.
- **CANAL A** (Amarelo): Conectado ao pino GPIO34.
- **CANAL B** (Verde): Conectado ao pino GPIO35.

É importante lembrar que a leitura do encoder integrado ao motor não está sendo utilizada, devido a natureza **SISO** (Single Input Single Output) desejada. Porém, a conexão facilita um futuro incremento do projeto, considerando também o ângulo do braço horizontal, dessa

forma caracterizando um sistema **MIMO** (Multiple Input Multiple Outpu).

O encoder incremental E38S6G5-600B-G24N que possui saída em dois canais, canal A e canal B, em quadratura, o que permite a leitura do ângulo do pêndulo. O canal A é conectado ao pino **GPIO33** e o canal B ao pino **GPIO32**. A alimentação desse módulo é feita através da saída de 3.3V da ESP32.

O controle da velocidade e direção do motor é feita através do módulo LM298, por meio de sinal PWM e dos canais **IN1** e **IN2** do driver em questão. Além disso, as saídas **OUT1** e **OUT2** são ligadas aos polos negativo e positivo do motor, respectivamente. A ponte H é alimentada pela fonte de bancada com 8.3V na sua entrada  $V_C$  e aterrada ao GND comum do circuito. Os seguintes pinos da ESP32 se conectam ao módulo:

- **GPTIO25** (PWM): Responsável pelo controle da velocidade do motor.
- **GPIO18** e **GPIO19**: Conectados a IN1 e IN2, respectivamente. São reponsáveis pelo controle da direção do motor.

## Referências

RAMOS, J. et al. Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods: comparative assessment and result analysis. In: 2011 Pan American Health Care Exchanges. [S.I.]: IEEE, 2011. P. 1–6. DOI: [10.1109/PAHCE.2011.5871873](https://doi.org/10.1109/PAHCE.2011.5871873). Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/224178913\\_Modeling\\_and\\_control\\_of\\_a\\_rotary\\_inverted\\_pendulum\\_using\\_various\\_methods\\_comparative\\_assessment\\_and\\_result\\_analysis](https://www.researchgate.net/publication/224178913_Modeling_and_control_of_a_rotary_inverted_pendulum_using_various_methods_comparative_assessment_and_result_analysis)>.