

**Resumo**—Este relatório trata da segunda etapa do projeto da disciplina de Sistemas de Controle I, de um pêndulo invertido rotacional. É apresentado, em primeira instância, as equações diferenciais de movimento do pêndulo obtidas através do método Euler-Lagrange (Ramos et al., 2011), linearização do modelo e obtenção da função de transferência. Em seguida, a estabilidade do sistema é analisada, assim como a resposta do modelo a diferentes entradas, a fim de prever seu comportamento. Por fim, o software MATLAB/Simulink é utilizado para simular o sistema em malha aberta e os resultados são discutidos.

**Keywords**—pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares

## 1. Introdução

O pêndulo invertido é um sistema clássico utilizado como plataforma de testes no estudo de controle de sistemas dinâmicos instáveis. Seu comportamento não linear e naturalmente instável o torna ideal para o desenvolvimento e avaliação de diferentes estratégias de controle. Esse tipo de sistema está presente em aplicações reais como segways, foguetes e robôs bípedes autobalanceados.

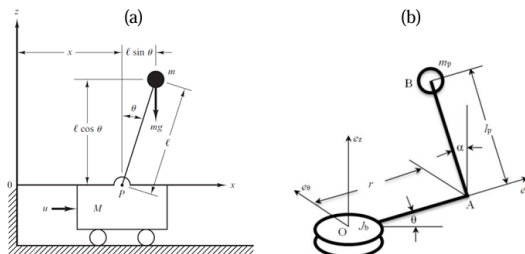
### 1.1. Importância

De acordo com (casas2024), os modelos de pêndulos são úteis tanto por razões pedagógicas e de pesquisa, como por representarem versões simplificadas de sistemas mecânicos que surgem na robótica e sistemas espaciais. Já (breganon2021) destaca modelos de pêndulos, como o aeropêndulo e o Pêndulo de Furuta, como ferramentas importantes para o ensino de conteúdos relacionados ao controle de sistemas.

### 1.2. Arquiteturas

Na literatura, é possível encontrar duas arquiteturas principais de pêndulos invertidos: A linear (Figura ??a), considerada a forma mais comum de pêndulo invertido, tem o pêndulo montado sobre uma base com um carrinho que pode se movimentar livremente sobre um plano horizontal (diao2016); E o modelo rotacional (Figura ??b), também conhecido como Pêndulo de Furuta, onde o pêndulo está conectado a um braço giratório acionado por um motor. Este último representa um sistema subatuado e com maior complexidade dinâmica, sendo mais desafiador do ponto de vista de controle.

Figura 1. (a) Pêndulo Invertido Linear. (b) Pêndulo Invertido Rotacional.



Fonte: (Ogata2010) e (Nath2014).

O Pêndulo de Furuta foi proposto por Katsuhita Furuta em 1992 no Instituto de Tecnologia de Tóquio (houck2013), e tem sido amplamente utilizado em contextos acadêmicos e experimentais. Devido às suas características, o modelo rotacional foi o escolhido neste projeto.

### 1.3. Objetivo

Este relatório apresenta a primeira etapa do desenvolvimento de um sistema de controle para estabilização do pêndulo rotacional. Os objetivos incluem a descrição conceitual do sistema, definição das variáveis envolvidas, revisão de abordagens de controle aplicadas e levantamento dos materiais e métodos necessários para a implementação prática e simulação do protótipo.

## 2. Descrição do Sistema

O sistema proposto consiste em um **pêndulo invertido rotacional**, também conhecido como Pêndulo de Furuta. Trata-se de uma estrutura clássica na área de controle de sistemas dinâmicos, composta por uma barra vertical (pêndulo) acoplada a um braço horizontal giratório, que é acionado por um motor DC. A base do sistema permanece fixa, e o movimento ocorre simultaneamente em dois planos: o braço gira no plano horizontal, enquanto o pêndulo oscila no plano vertical.

Esse tipo de pêndulo é especialmente interessante do ponto de vista didático e experimental, pois combina características desafiadoras como a instabilidade natural e a subatuação — ou seja, o número de entradas de controle (um único motor) é inferior ao número de variáveis dinâmicas relevantes (dois ângulos). Isso impõe restrições significativas ao projeto do controlador, que deve ser capaz de estabilizar o sistema mesmo com essa limitação.

### 2.1. Funcionamento do Sistema

O motor aplica um torque  $\tau$  na base giratória, fazendo com que o braço horizontal, com inércia  $I_0$ , rotacione ao redor do eixo vertical. Essa rotação transfere momento ao pêndulo, gerando uma interação dinâmica entre os dois corpos. A gravidade atua diretamente sobre o pêndulo vertical, fazendo com que ele tenda naturalmente a cair. O objetivo do sistema de controle é calcular e aplicar um torque adequado no braço giratório para gerar forças inerciais que mantenham o pêndulo em pé, na posição vertical invertida.

A interação entre os dois graus de liberdade ( $\theta_0$  e  $\theta_1$ ) cria um sistema acoplado e não linear. A ausência de controle direto sobre o pêndulo (pois o motor atua apenas sobre o braço) impõe desafios adicionais, exigindo que o controlador manipule o braço de forma inteligente para influenciar o movimento do pêndulo de maneira indireta, especialmente durante oscilações rápidas ou diante de perturbações externas.

### 2.2. Variáveis do Sistema

O sistema possui uma única entrada e duas saídas principais:

- **Variável de entrada (atuador):** torque  $\tau$  aplicado pelo motor na base.
- **Variáveis de saída (controladas):**
  - $\theta_0$ : ângulo de rotação da base (braço horizontal), medido pelo *encoder acoplado ao motor*. Representa o movimento de rotação no plano horizontal.
  - $\theta_1$ : ângulo do pêndulo em relação à vertical, medido pelo *encoder incremental* localizado no eixo de articulação entre o pêndulo e o braço horizontal. Essa é a principal variável a ser estabilizada pelo controle, idealmente mantendo-se próxima de zero (posição vertical invertida).

Além dessas variáveis, outros parâmetros físicos são essenciais para a modelagem e controle do sistema, como as massas dos componentes ( $m_0$ ,  $m_1$ ), os comprimentos dos braços ( $L_0$ ,  $L_1$ ), os momentos de inércia ( $I_0$ ,  $I_1$ ) e a constante gravitacional  $g$ .

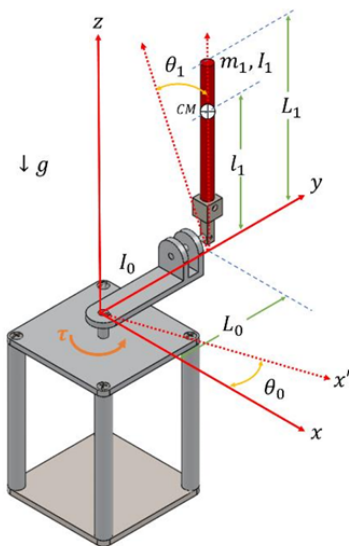
o ponto de vista de modelagem em espaço de estados, o sistema é classificado como um sistema dinâmico não linear de quarta ordem, pois seu comportamento é descrito por quatro variáveis de estado:

- $\theta_0$  e sua derivada temporal  $\omega_0$  (velocidade angular do braço)
- $\theta_1$  e sua derivada temporal  $\omega_1$  (velocidade angular do pêndulo).

Essas quatro variáveis constituem o vetor de estado e são suficientes para representar completamente a evolução dinâmica do sistema ao longo do tempo.

### 2.3. Esquema do Sistema

A Figura ?? apresenta uma representação tridimensional do sistema, destacando os principais parâmetros físicos e as coordenadas angulares relevantes. Esse modelo será utilizado como referência para a modelagem matemática e implementação do controlador nas etapas seguintes do projeto.



**Figura 2.** Representação tridimensional do pêndulo invertido rotacional com seus parâmetros físicos e coordenadas. Fonte: (Duart *et al.*, 2017)

### 3. Revisão Bibliográfica

O controle de um pêndulo rotacional invertido normalmente é dividido em duas etapas: swing-up (balanço inicial), que leva o pêndulo da posição para baixo até próximo da posição invertida, e estabilização, que mantém o pêndulo equilibrado no ponto de equilíbrio.

Diversas estratégias podem ser utilizadas na fase de estabilização. Estudos como os de (mathew2013) mostram que controladores PID bem sintonizados podem apresentar desempenho satisfatório em torno do ponto de equilíbrio, sendo uma boa escolha para projetos introdutórios. Outras técnicas mais avançadas incluem o controle por linearização por realimentação, detalhado na obra de (spong2008), o controle robusto não linear, exemplificado por (Furuta1992), e o controle preditivo baseado em modelo (MPC), como abordado por (deepak2019), mas estas exigem maior conhecimento em controle.

Além dessas variáveis, outros parâmetros físicos são essenciais para a modelagem e controle do sistema, como as massas dos componentes ( $m_0$ ,  $m_1$ ), os comprimentos dos braços ( $L_0$ ,  $L_1$ ), os momentos de inércia ( $I_0$ ,  $I_1$ ) e a constante gravitacional  $g$ .

Neste trabalho, adotaremos como principal referência o documento elaborado por (yamane2021) intitulado “Projeto Mecânico e Síntese do Controlador de um Pêndulo de Furuta”. Essa obra propõe diretamente a modelagem do pêndulo invertido rotacional

O autor apresenta uma modelagem detalhada baseada em:

- Cálculo da energia cinética e potencial do sistema
- Aplicação das equações de Euler-Lagrange
- Obtenção das equações de movimento para os subsistemas mecânico e eletromecânico
- Construção de um modelo não linear acoplado no ambiente MATLAB Simulink

Além disso, o trabalho realiza a síntese e simulação de um controlador LQR, validando os resultados por meio de experimentos com um protótipo real.

Adicionalmente, será utilizada como referência complementar prática a obra “Modular Control of a Rotary Inverted Pendulum System” (diao2016), que apresenta uma abordagem didática e direta para implementação prática do controle de um pêndulo rotacional. Essa obra fornece os modelos dinâmicos (linear e não linear), parâmetros físicos e estratégias de controle PID e swing-up modulares, sendo ideal para aplicação em ambiente real e simulações no MATLAB/Simulink. Sua linguagem clara e foco na execução o fizeram um bom candidato para esse projeto.

## 4. Materiais e Métodos Propostos

Para a implementação do sistema, serão utilizados os seguintes componentes, organizados em categorias de componentes eletrônicos e mecânicos.

### 4.1. Componentes Eletrônicos

- **Microcontrolador:** Esp32 ([esp32Datasheet](#)), utilizado para controle do sistema de balanceamento e leitura dos sensores.
- **Motor com Encoder:** JGA25-371 12V DC 18-1930RPM ([mot4datasheet](#)), motor DC com encoder incremental para acionar o pêndulo e medir o ângulo.
- **Driver de Motor (Ponte H):** BTS7960 ([bts7960datasheet](#)), utilizado para controlar a direção e a velocidade do motor.
- **Encoder Incremental:** E38S6G5-600B-G24N ([e38s6g5datasheet](#)), para medir a posição do pêndulo e enviar os dados de feedback para o microcontrolador.
- **Fonte de Alimentação:** Fonte de 12V para alimentar os motores, encoder e o microcontrolador.

### 4.2. Componentes Mecânicos

- **Estrutura impressa em 3D:** A estrutura do protótipo será totalmente impressa em 3D, incluindo a base e os suportes necessários para o sistema de pêndulo.
- **Parafusos:** Para fixação das partes mecânicas, serão usados parafusos, assegurando que os componentes fiquem firmemente montados.

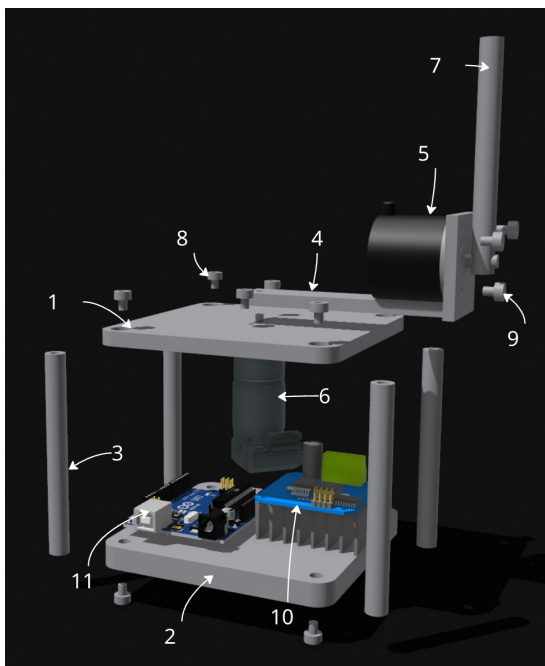


Figura 3. Esquema do Pêndulo Invertido Rotacional e seus Componentes.

Tabela 1. Lista de Peças Utilizadas na Construção do Protótipo

Número	Peça	Qtd	Preço
1	Topo	1	R\$ -
2	Base	1	R\$ -
3	Suporte	4	R\$ -
4	Braço	1	R\$ -
5	Encoder Incremental	1	R\$ 80,34
6	Motor com Encoder	1	R\$ 55,17
7	Pêndulo	1	R\$ -
8	Parafuso M3x6	5	R\$ 2,00
9	Parafuso M6x25	8	R\$ 4,00
10	Ponte H	1	R\$ 31,56
11	Esp Wroom 32	1	R\$ 33,04
Total	-	-	R\$ 206,11

Note: A quantidade dos componentes foi estimada com base no modelo 3D e pode ser ajustada durante a montagem.

#### 4.3. Descrição do Circuito e Ligações

O circuito do sistema é composto por um microcontrolador ESP32 DevKit, responsável pelo controle do motor, leitura dos encoders e execução dos algoritmos de estabilização do pêndulo. A Figura ?? ilustra as conexões entre os principais componentes.

A alimentação principal é fornecida por uma fonte de 12V, que alimenta diretamente o driver de motor BTS7960 pelos terminais B+ e B-. O mesmo GND da fonte é compartilhado com o GND do ESP32 para garantir a referência comum entre os sinais de controle e potência.

O motor DC com encoder Hall integrado é conectado ao BTS7960 pelos terminais M+ e M-, responsáveis pela potência do motor, e também por quatro fios adicionais que compõem o encoder Hall:

- **VCC (vermelho)** – Alimentação de 5V fornecida pelo pino VIN do ESP32.
- **GND (preto)** – Terra comum ao ESP32 e à fonte.
- **Canal A** – Ligado ao pino GPIO34 do ESP32 (entrada apenas), utilizado para leitura de pulsos do encoder.
- **Canal B** – Ligado ao pino GPIO35 do ESP32 (entrada apenas), utilizado para determinar o sentido de rotação.

O pêndulo é instrumentado com um encoder incremental E38S6G5-600B-G24N, que possui saída de dois canais (A e B) em quadratura. Esses sinais são conectados aos pinos GPIO32 e GPIO33 do ESP32, permitindo a leitura da posição angular e do sentido de movimento.

O controle de velocidade e direção do motor é realizado via sinais PWM gerados pelo ESP32:

- **RPWM** – Pino GPIO25, responsável pelo controle de rotação em sentido horário.
- **LPWM** – Pino GPIO26, responsável pelo controle de rotação em sentido anti-horário.
- **EN-R e EN-L** – Pinos GPIO27 e GPIO14, respectivamente, usados para habilitar os canais do driver (podendo ser fixados em nível lógico alto se não for necessário controle via software).

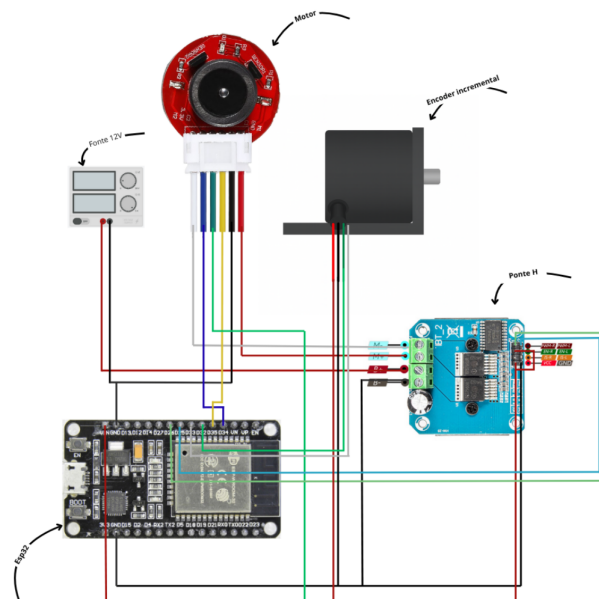


Figura 4. Diagrama do circuito do pêndulo invertido rotacional com ESP32, BTS7960, motor DC com encoder Hall e encoder incremental do pêndulo.

#### 4.4. Ambiente de Software

Para a simulação do sistema de controle do pêndulo invertido rotacional, será utilizado o ambiente de simulação **MATLAB/Simulink**. O Simulink permitirá a modelagem gráfica do sistema dinâmico e do controlador, além de possibilitar a simulação do comportamento do sistema em malha fechada. As equações diferenciais que governam o movimento do pêndulo serão implementadas no Simulink, e o controlador será testado em ambiente simulado antes de sua implementação em hardware.

O MATLAB será utilizado para análise dos resultados, ajustes no controlador, e validação da solução por meio de simulações numéricas. Além disso, o MATLAB/Simulink facilita a integração com o Arduino, permitindo a comunicação entre a simulação e a implementação real do sistema.

### 5. Introdução

Anteriormente, foi discutido a importância do pêndulo invertido no estudo prático de sistemas de controle, as diferenças entre os dois principais modelos presentes na literatura e a escolha do pêndulo invertido rotacional como interesse deste estudo.

#### 5.1. Descrição do Sistema

Recapitulando, o pêndulo invertido rotacional, também chamado de Pêndulo de Furuta, é composto por um pêndulo acoplado a um braço horizontal giratório, que é acionado por um motor. O movimento do sistema ocorre no plano horizontal, através do movimento do braço

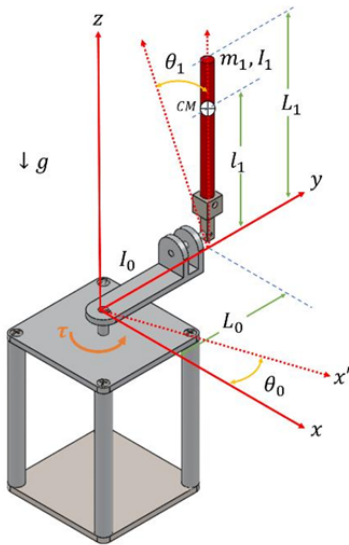
giratório e no plano vertical, através do movimento do pêndulo. A relação de apenas um atuador para dois graus de liberdade caracteriza este sistema como subatuado. A Figura ?? apresenta o modelo de referência para a modelagem matemática e implementação do controlador.

## 5.2. Variáveis do Sistema

O sistema físico possui o torque do motor como única entrada. Para este estudo, apenas a ângulo do pêndulo será considerado como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input single output* (SISO). É importante destacar que é possível considerar também o ângulo do braço como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input multiple output* (SIMO), porém, esse não é o foco deste estudo. As variáveis físicas são apresentadas na tabela a seguir:

**Tabela 2.** Símbolos para descrever os parâmetros das equações

Símbolo	Descrição
$L$	Distância até o centro de massa do pêndulo
$m$	Massa do braço do pêndulo
$r$	Comprimento do braço rotativo
$\theta$	Ângulo do braço do pêndulo (rad)
$\alpha$	Ângulo do pêndulo (rad)
$h$	Distância do centro de massa do pêndulo até o solo
$J_{cm}$	Inércia do pêndulo em relação ao seu centro de massa
$V_x$	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção $x$
$V_y$	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção $y$



**Figura 5.** Representação tridimensional do pêndulo invertido rotacional com seus parâmetros físicos e coordenadas. Fonte: (Duart et al., 2017)

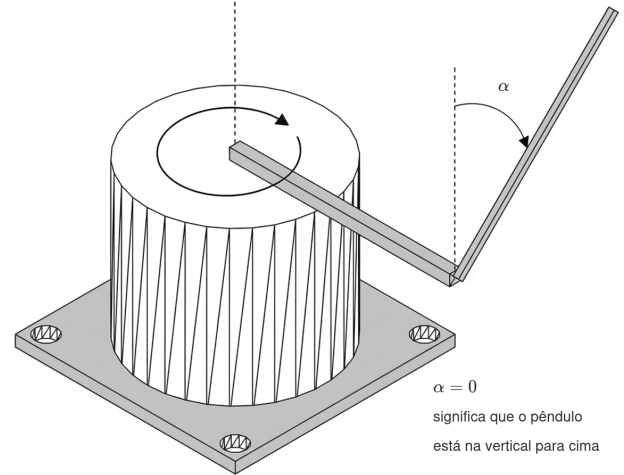
## 5.3. Objetivo

O objetivo desta etapa é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema, analisar o modelo obtido e simular através do software MATLAB/Simulink.

## 6. Modelagem Matemática

A compreensão precisa da dinâmica do Pêndulo de Furuta exige uma formulação matemática rigorosa. Antes de prosseguir com a derivação das equações de movimento, é fundamental estabelecer a convenção de coordenadas adotada. Conforme ilustrado na Figura ??, o ângulo de rotação do braço horizontal é denotado por  $\theta$ . O ponto crucial para a estabilização é a definição do ângulo  $\alpha$  do pêndulo em

relação à vertical: o estado de interesse, onde o pêndulo se encontra na posição invertida (verticalmente para cima), corresponde explicitamente a  $\alpha = 0$ . Essa definição é vital para a interpretação dos resultados de controle e para a linearização do sistema em torno deste ponto de equilíbrio instável. A formulação adotada neste relatório segue de perto a apresentada em Ramos et al. (Ramos et al., 2011), que descrevem detalhadamente o procedimento de modelagem do pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta).



**Figura 6.** Definição das variáveis angulares do Pêndulo de Furuta, com o ângulo do braço  $\theta$  e o ângulo do pêndulo  $\alpha$ . A posição de equilíbrio instável ( $\alpha = 0$ ) é indicada.

A modelagem matemática do pêndulo invertido rotacional é obtida aplicando o método de Euler-Lagrange. Inicialmente, consideram-se as velocidades do centro de massa do pêndulo e do braço rotativo:

$$V_{Pen.cm} = -L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \hat{x} - L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \hat{y} \quad (1)$$

$$V_{arm} = r \dot{\theta} \quad (2)$$

Assim, as componentes de velocidade do centro de massa do pêndulo podem ser escritas como:

$$V_x = r \dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3)$$

$$V_y = -L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (4)$$

### 6.1. Energia Potencial

A única energia potencial no sistema é a gravitacional:

$$V = mgh = mgL \cos(\alpha) \quad (5)$$

### 6.2. Energia Cinética

As energias cinéticas são devidas ao movimento do braço, ao movimento do centro de massa do pêndulo e à rotação do pêndulo em torno do seu próprio centro de massa:

$$T = KE_{hub} + KE_{V_x} + KE_{V_y} + KE_{pendulo} \quad (6)$$

#### Momento de Inércia

O momento de inércia de uma barra homogênea em torno do centro de massa é:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} MR^2 \quad (7)$$

Como o comprimento do pêndulo é  $2L$ , temos:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} M(2L)^2 = \frac{1}{3} ML^2 \quad (8)$$

#### Energia Cinética do Braço (Hub)

$$T_{hub} = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 \quad (9)$$



### Energia Cinética de Translação do Pêndulo

$$T_{trans} = \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2) \quad (10)$$

Substituindo as velocidades:

$$T_{trans} = \frac{1}{2}m[(r\dot{\theta} - L\cos(\alpha)\dot{\alpha})^2 + (-L\sin(\alpha)\dot{\alpha})^2] \quad (11)$$

### Energia Cinética de Rotação do Pêndulo em torno do CM

$$T_{rot} = \frac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \quad (12)$$

### Energia Cinética Total

Somando todas as parcelas de energia cinética, temos:

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta} - L\cos(\alpha)\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}m(-L\sin(\alpha)\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

Expandindo os quadrados:

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 - 2rL\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + L^2\cos^2(\alpha)\dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2}m(L^2\sin^2(\alpha)\dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}mL^2)\dot{\alpha}^2 \quad (14)$$

Reagrupando os termos:

$$T = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}mL^2(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha))\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6}mL^2\dot{\alpha}^2 \quad (15)$$

Como  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , temos:

$$T = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 \quad (16)$$

### 6.3. Lagrangiana

A energia potencial e a energia cinética total foram obtidas como:

$$V = mgL\cos(\alpha) \quad (17)$$

$$T = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 \quad (18)$$

Portanto, a Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (19)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(J_{eq} + mr^2)\dot{\theta}^2 - mLr\cos(\alpha)\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 - mgL\cos(\alpha) \quad (20)$$

### 6.4. Equações de Lagrange

A equação de Lagrange geral para uma coordenada generalizada  $q_i$  é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (21)$$

No sistema, temos as duas coordenadas generalizadas:

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \alpha$$

Para  $\theta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad (22)$$

- A coordenada  $\theta$  recebe o torque do motor.

- Esse torque possui duas partes:

1.  $T_{output}$ : torque útil gerado pelo motor.
2.  $-B_{eq}\dot{\theta}$ : torque dissipativo devido ao atrito viscoso.

Aplicando a  $\alpha$

Para a coordenada  $\alpha$ , a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \quad (23)$$

Observações importantes:

- A coordenada  $\alpha$  não recebe torque aplicado diretamente.
- O único efeito externo é a gravidade (já incluída na energia potencial).
- Por isso, o lado direito da equação é nulo.

### Equações diferenciais finais

Após aplicar as equações de Lagrange para  $\theta$  e  $\alpha$ , e linearizar em torno de  $\alpha \approx 0$ , obtemos:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad (\text{Braço}) \quad (24)$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \quad (\text{Pêndulo}) \quad (25)$$

### 6.5. Modelo em Espaço de Estados

O torque de saída do motor aplicado ao sistema é dado por:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m} (V_m - K_G K_m \dot{\theta}) \quad (26)$$

Combinando as equações de movimento obtidas, a representação em espaço de estados pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{bd}{E} & -\frac{cG}{E} & 0 \\ 0 & \frac{E}{qd} & -\frac{E}{bG} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \\ \frac{b\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \end{bmatrix} V_m \quad (27)$$

onde os parâmetros são definidos como:

$$\begin{aligned} a &= J_{eq} + mr^2, & b &= mLr, \\ c &= \frac{4}{3}mL^2, & d &= mgL, \\ E &= ac - b^2, & G &= \frac{\eta_m\eta_gK_tK_mK_g^2}{R_m} - B_{eq} \end{aligned}$$

A Tabela ?? apresenta os parâmetros utilizados para o sistema SRV02.

**Tabela 3.** Parâmetros típicos do sistema SRV02 e do pêndulo

Símbolo	Descrição	Valor
$K_t$	Constante de torque do motor	0.00767
$K_m$	Constante de FEM inversa	0.00767
$R_m$	Resistência de armadura	2.6
$K_g$	Relação de engrenagem (motor $\rightarrow$ carga)	14 (14:1)
$\eta_m$	Eficiência do motor	0.69
$\eta_g$	Eficiência da caixa de engrenagem	0.9
$B_{eq}$	Coef. de atrito viscoso equivalente	$1.5 \times 10^{-3}$
$J_{eq}$	Momento de inércia equivalente na carga	$9.31 \times 10^{-4}$

### 6.6. Modelo Numérico em Espaço de Estados

Substituindo os valores da Tabela ??, obtemos o modelo em espaço de estados numérico:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (28)$$

E a saída é dada por:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \quad (29)$$

### 6.7. Obtenção da Função de Transferência

A partir do modelo em espaço de estados (Eq. ??), pode-se obter a função de transferência que relaciona a entrada do sistema (tensão no

motor  $V_m$ ) com a saída escolhida (ângulo do pêndulo  $\alpha$ ). Para isso, foi utilizada a função `tf()` do *MATLAB*, que converte a representação em espaço de estados para a forma de função de transferência.

As matrizes do sistema são definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0$$

O código em *MATLAB* para a conversão é o seguinte:

```
A = [0 0 1 0;
      0 0 0 1;
      0 39.32 -14.52 0;
      0 81.78 -13.98 0];

B = [0; 0; 25.54; 24.59];

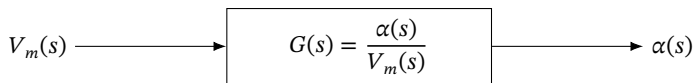
C = [0 1 0 0]; % Saída = ângulo do pêndulo
D = 0;

sys_ss = ss(A, B, C, D); % Espaço de estados
sys_tf = tf(sys_ss); % Função de transferência
```

Assim, obtém-se diretamente a função de transferência  $G(s)$ , que expressa a dinâmica do sistema:

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{24.59s - 0.0024}{s^3 + 14.52s^2 - 81.78s - 637.8} \quad (31)$$

onde  $\alpha(s)$  é a transformada de Laplace do ângulo do pêndulo e  $V_m(s)$  é a transformada de Laplace da tensão aplicada ao motor.



**Figura 7.** Diagrama de blocos representando a função de transferência entre a entrada  $V_m(s)$  e a saída  $\alpha(s)$ .

## 7. Análise do Modelo

Após a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica entre a entrada  $V_m(s)$  (tensão aplicada ao motor) e a saída  $\alpha(s)$  (ângulo do pêndulo), procede-se à análise matemática do sistema em malha aberta. Essa análise permite caracterizar propriedades fundamentais, como ordem e grau relativo, localização dos polos e zeros, estabilidade intrínseca e comportamento esperado diante de diferentes entradas. Embora ainda não haja controle implementado, esta etapa é essencial para compreender as limitações naturais do sistema e justificar a necessidade de técnicas de estabilização.

### 7.1. Ordem e grau relativo

- **Ordem do sistema:** 3 (denominador de grau 3) — sistema de 3ª ordem.
- **Grau do numerador:** 1.

### 7.2. Polos e estabilidade

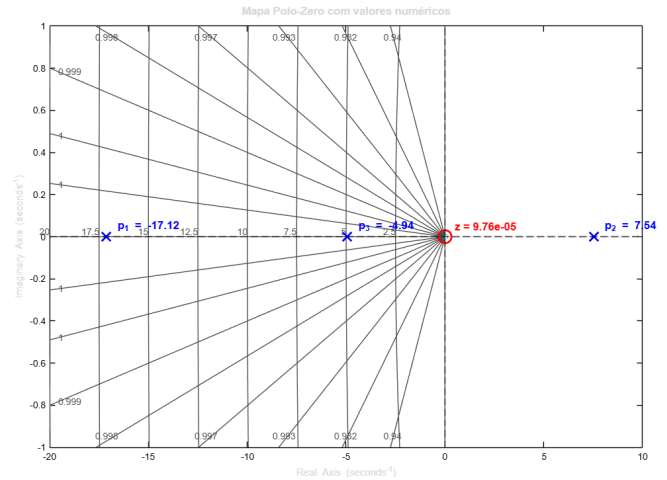
As raízes do denominador (polos) obtidos numericamente são aproximadamente:

$$p_1 \approx -17.12, \quad p_2 \approx -4.94, \quad p_3 \approx +7.54.$$

Como existe um polo em  $p_3 \approx +7.54$  (semiplano direito), o sistema é **instável em malha aberta**. Em termos práticos, qualquer pequena

perturbação tenderá a crescer exponencialmente se não houver controle. A raiz do numerador (zero) é aproximadamente:

$$z \approx +9.76 \times 10^{-5}.$$



**Figura 8.** Mapa polo-zero do sistema, com polos (X) e zeros (O) destacados numericamente.

O sistema possui, portanto, um zero no semiplano direito (RHP), caracterizando-o como **não mínimo-fase**, a principal consequência disso é a tendência do sistema de apresentar uma resposta inversa (*undershoot*). Se o sistema fosse estável e recebesse um comando em degrau para ir a um valor positivo, a saída primeiro se moveria ligeiramente na direção negativa antes de se corrigir.

### 7.3. Ganho DC

O ganho estático do sistema é:

$$G(0) = \frac{-0.0024}{-637.752} \approx 3.76 \times 10^{-6}.$$

O valor é muito pequeno, mas na prática a dinâmica é dominada pelo polo instável.

### 7.4. Tipo do sistema

Não há polos em  $s = 0$ , logo o sistema é do **tipo 0**. Em teoria isso significa erro finito para entrada em degrau, mas devido à instabilidade, em malha aberta a saída tende a divergir.

### 7.5. Observações finais

- O polo no semiplano direito torna o sistema instável em malha aberta.
- O zero no semiplano direito impõe dificuldades na modelagem de um controlador

## 8. Simulação Computacional

Para validar e visualizar o comportamento dinâmico previsto pela análise matemática, o sistema foi simulado no ambiente *MATLAB/Simulink*. Utilizando a função de transferência  $G(s)$  obtida, foram analisadas as respostas do sistema em malha aberta a três sinais de entrada canônicos: impulso, degrau e rampa. Essas simulações são fundamentais para confirmar a instabilidade inerente do pêndulo e compreender a natureza da sua resposta antes da implementação de qualquer estratégia de controle. O comportamento observado em todas as simulações reflete diretamente a presença do polo instável em  $s \approx +7.54$ .

### 8.1. Resposta ao Impulso

A resposta a um impulso unitário, que representa a reação do sistema a uma perturbação instantânea de energia, é apresentada na Figura ???. Como se pode observar, a saída (ângulo do pêndulo) diverge exponencialmente, confirmando a instabilidade do sistema em malha aberta. Uma perturbação mínima é suficiente para que o pêndulo inicie um movimento de queda do qual ele não consegue se recuperar autonomamente. Esse comportamento é totalmente consistente com o polo no semiplano direito, que domina a dinâmica do sistema.

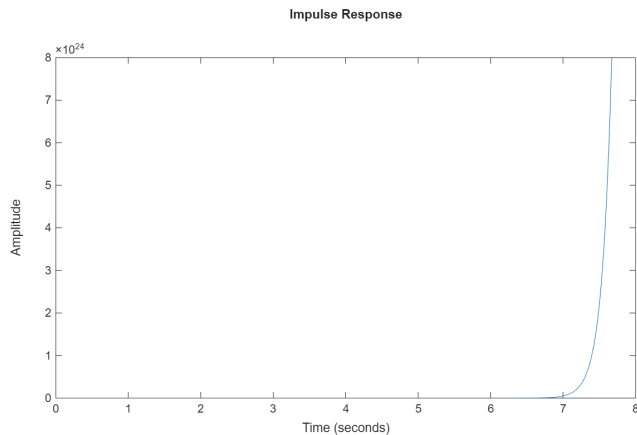


Figura 9. Resposta ao impulso do sistema em malha aberta.

### 8.2. Resposta ao Degrau

A aplicação de uma entrada em degrau, que equivale a fornecer uma tensão constante ao motor, também resulta em uma resposta instável, como ilustrado na Figura ???. A saída cresce de forma ilimitada, o que, fisicamente, corresponde à queda do pêndulo de forma acelerada. O resultado reforça que uma ação de controle constante é incapaz de estabilizar o sistema, evidenciando a necessidade de uma malha de realimentação que ajuste a entrada dinamicamente com base no estado do pêndulo.

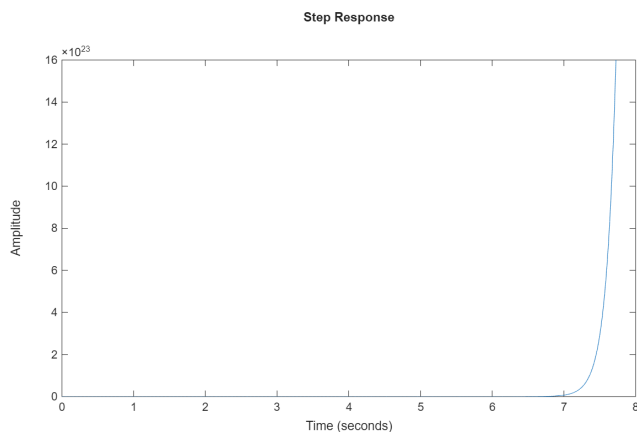


Figura 10. Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.

### 8.3. Resposta à Rampa

A resposta a uma entrada do tipo rampa, mostrada na Figura ??, exibe uma divergência ainda mais acentuada. Este teste submete o sistema a uma solicitação de energia continuamente crescente, e a resposta instável se manifesta de forma mais rápida e agressiva. Embora seja um cenário menos comum na prática, a simulação confirma que o sistema em malha aberta é incapaz de seguir qualquer trajetória de referência, por mais simples que seja, reforçando a necessidade crítica de um controlador para a estabilização.

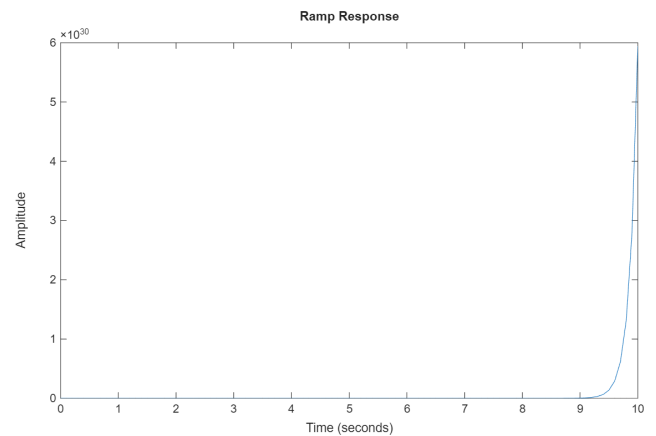


Figura 11. Resposta à rampa do sistema em malha aberta.

## 9. Conclusão

Nesta etapa do projeto, o modelo matemático para o pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta) foi obtido com sucesso. Partindo dos princípios da mecânica clássica e utilizando o método de Euler-Lagrange, foram derivadas as equações diferenciais não lineares que descrevem a dinâmica do sistema. Subsequentemente, o modelo foi linearizado em torno do ponto de equilíbrio instável ( $\alpha \approx 0$ ) para se obter uma representação em espaço de estados e a correspondente função de transferência, relacionando a tensão de entrada do motor ( $V_m$ ) com o ângulo do pêndulo ( $\alpha$ ).

A análise da função de transferência revelou características cruciais do sistema em malha aberta. Foi identificado que o sistema é de terceira ordem, do tipo 0, e, mais importante, intrinsecamente instável devido a um polo localizado no semiplano direito ( $p_3 \approx +7.54$ ). Adicionalmente, a presença de um zero também no semiplano direito caracteriza o sistema como de fase não mínima, o que pode impor desafios ao projeto do controlador, como a ocorrência de uma resposta inversa inicial (*undershoot*).

As simulações computacionais do sistema em malha aberta para entradas de impulso, degrau e rampa confirmaram visualmente a instabilidade prevista pela análise teórica, com a saída divergindo exponencialmente em todos os cenários. Os resultados obtidos nesta etapa concluem a modelagem e a análise do sistema, fornecendo uma base sólida e indispensável para a próxima fase do projeto. A próxima etapa consistirá no projeto e implementação de um controlador em malha fechada com o objetivo de superar a instabilidade natural do sistema e manter o pêndulo estabilizado na posição vertical.

## Referências

DUART, J L *et al.* Dynamic Modeling and Simulation of a Rotational Inverted Pendulum. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 792, n. 1, p. 012081, jan. 2017. DOI: [10.1088/1742-6596/792/1/012081](https://doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081>.

RAMOS, J. *et al.* Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods: comparative assessment and result analysis. In: 2011 Pan American Health Care Exchanges. [S. l.]: IEEE, 2011. p. 1-6. DOI: [10.1109/PAHCE.2011.5871873](https://doi.org/10.1109/PAHCE.2011.5871873). Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/224178913\\_Modeling\\_and\\_control\\_of\\_a\\_rotary\\_inverted\\_pendulum\\_using\\_various\\_methods\\_comparative\\_assessment\\_and\\_result\\_analysis](https://www.researchgate.net/publication/224178913_Modeling_and_control_of_a_rotary_inverted_pendulum_using_various_methods_comparative_assessment_and_result_analysis).