

Controle de Estabilização de um Pêndulo Invertido Rotacional

JOSÉ A. DA SILVA^{a,1}, KAUA LESSA L. DOS SANTOS^{b,2}, PABLO MUNIH S. DE CARVALHO^{c,3} and PLÁCIDO AUGUSTUS DE O. CORDEIRO^{d,4}

^aEngenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

^bEngenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

^cEngenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas

Prof. ICARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAUJO

Resumo—Este relatório trata da segunda etapa do projeto da disciplina de Sistemas de Controle I, de um pêndulo invertido rotacional. É apresentado, em primeira instância, as equações diferenciais de movimento do pêndulo obtidas através do método Euler-Lagrange (RAMOS et al., 2011), linearização do modelo e obtenção da função de transferência. Em seguida, a estabilidade do sistema é analisada, assim como a resposta do modelo a diferentes entradas, a fim de prever seu comportamento. Por fim, o software MATLAB/Simulink é utilizado para simular o sistema em malha aberta e os resultados são discutidos.

Keywords—pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares

1. Introdução

Anteriormente, foi discutido a importância do pêndulo invertido no estudo prático de sistemas de controle, as diferenças entre os dois principais modelos presentes na literatura e a escolha do pêndulo invertido rotacional como interesse deste estudo.

1.1. Descrição do Sistema

Recapitulando, o pêndulo invertido rotacional, também chamado de Pêndulo de Furuta, é composto por um pêndulo acoplado a um braço horizontal giratório, que é acionado por um motor. O movimento do sistema ocorre no plano horizontal, através do movimento do braço giratório e no plano vertical, através do movimento do pêndulo. A relação de apenas um atuador para dois graus de liberdade caracteriza este sistema como subatuado. A Figura 1 apresenta o modelo de referência para a modelagem matemática e implementação do controlador.

1.2. Variáveis do Sistema

O sistema físico possui o torque do motor como única entrada. Para este estudo, apenas a ângulo do pêndulo será considerado como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input single output* (SISO). É importante destacar que é possível considerar também o ângulo do braço como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input multiple output* (SIMO), porém, esse não é o foco deste estudo. As variáveis físicas são apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 1. Símbolos para descrever os parâmetros das equações

Símbolo	Descrição
L	Distância até o centro de massa do pêndulo
m	Massa do braço do pêndulo
r	Comprimento do braço rotativo
θ	Ângulo do braço do pêndulo (rad)
α	Ângulo do pêndulo (rad)
h	Distância do centro de massa do pêndulo até o solo
J_{cm}	Inércia do pêndulo em relação ao seu centro de massa
V_x	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção x
V_y	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção y

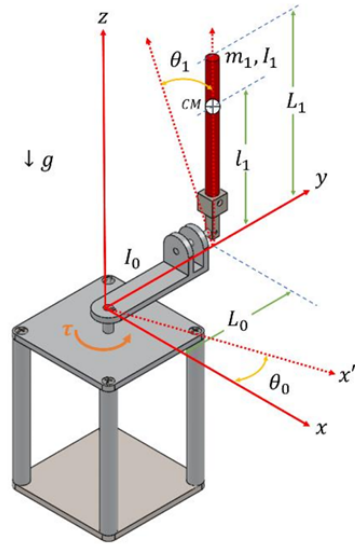


Figura 1. Representação tridimensional do pêndulo invertido rotacional com seus parâmetros físicos e coordenadas. Fonte: (DUART et al., 2017)

1.3. Objetivo

O objetivo desta etapa é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema, analisar o modelo obtido e simular através do software MATLAB/Simulink.

2. Modelagem Matemática

A compreensão precisa da dinâmica do Pêndulo de Furuta exige uma formulação matemática rigorosa. Antes de prosseguir com a derivação das equações de movimento, é fundamental estabelecer a convenção de coordenadas adotada. Conforme ilustrado na Figura 2, o ângulo de rotação do braço horizontal é denotado por θ . O ponto crucial para a estabilização é a definição do ângulo α do pêndulo em relação à vertical: o estado de interesse, onde o pêndulo se encontra na posição invertida (verticalmente para cima), corresponde explicitamente a $\alpha = 0$. Essa definição é vital para a interpretação dos resultados de controle e para a linearização do sistema em torno deste ponto de equilíbrio instável. A formulação adotada neste relatório segue de perto a apresentada em Ramos et al. (RAMOS et al., 2011), que descrevem detalhadamente o procedimento de modelagem do pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta).

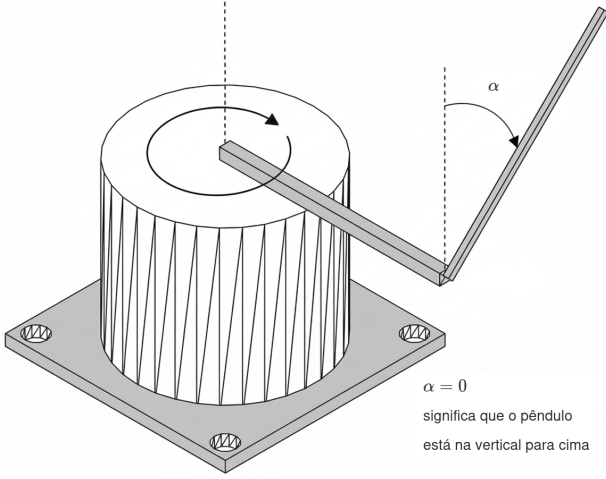


Figura 2. Definição das variáveis angulares do Pêndulo de Furuta, com o ângulo do braço θ e o ângulo do pêndulo α . A posição de equilíbrio instável ($\alpha = 0$) é indicada.

A modelagem matemática do pêndulo invertido rotacional é obtida aplicando o método de Euler-Lagrange. Inicialmente, consideram-se as velocidades do centro de massa do pêndulo e do braço rotativo:

$$V_{pen.cm} = -L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \hat{x} - L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \hat{y} \quad (1)$$

$$V_{arm} = r \dot{\theta} \quad (2)$$

Assim, as componentes de velocidade do centro de massa do pêndulo podem ser escritas como:

$$V_x = r \dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (3)$$

$$V_y = -L \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad (4)$$

2.1. Energia Potencial

A única energia potencial no sistema é a gravitacional:

$$V = mgh = mgL \cos(\alpha) \quad (5)$$

2.2. Energia Cinética

As energias cinéticas são devidas ao movimento do braço, ao movimento do centro de massa do pêndulo e à rotação do pêndulo em torno do seu próprio centro de massa:

$$T = KE_{hub} + KE_{V_x} + KE_{V_y} + KE_{pendulo} \quad (6)$$

Momento de Inércia

O momento de inércia de uma barra homogênea em torno do centro de massa é:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} MR^2 \quad (7)$$

Como o comprimento do pêndulo é $2L$, temos:

$$J_{cm} = \frac{1}{12} M(2L)^2 = \frac{1}{3} ML^2 \quad (8)$$

Energia Cinética do Braço (Hub)

$$T_{hub} = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 \quad (9)$$

Energia Cinética de Translação do Pêndulo

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m(V_x^2 + V_y^2) \quad (10)$$

Substituindo as velocidades:

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m[(r \dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha})^2 + (-L \sin(\alpha) \dot{\alpha})^2] \quad (11)$$

Energia Cinética de Rotação do Pêndulo em torno do CM

$$T_{rot} = \frac{1}{2} J_{cm} \dot{\alpha}^2 \quad (12)$$

Energia Cinética Total

Somando todas as parcelas de energia cinética, temos:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(r \dot{\theta} - L \cos(\alpha) \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m(-L \sin(\alpha) \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J_{cm} \dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

Expandindo os quadrados:

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(r^2 \dot{\theta}^2 - 2rL \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + L^2 \cos^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} m(L^2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2\right) \dot{\alpha}^2 \quad (14)$$

Reagrupando os termos:

$$T = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} mL^2 (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\alpha}^2 \quad (15)$$

Como $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, temos:

$$T = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\alpha}^2 \quad (16)$$

2.3. Lagrangiana

A energia potencial e a energia cinética total foram obtidas como:

$$V = mgL \cos(\alpha) \quad (17)$$

$$T = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\alpha}^2 \quad (18)$$

Portanto, a Lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (19)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (J_{eq} + mr^2) \dot{\theta}^2 - mLr \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\alpha}^2 - mgL \cos(\alpha) \quad (20)$$

2.4. Equações de Lagrange

A equação de Lagrange geral para uma coordenada generalizada q_i é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad (21)$$

No sistema, temos as duas coordenadas generalizadas:

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \alpha$$

Para θ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = T_{output} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (22)$$

- A coordenada θ recebe o torque do motor.

- Esse torque possui duas partes:

1. T_{output} : torque útil gerado pelo motor.
2. $-B_{eq} \dot{\theta}$: torque dissipativo devido ao atrito viscoso.

Aplicando a α

Para a coordenada α , a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \quad (23)$$

Observações importantes:

- A coordenada α não recebe torque aplicado diretamente.
- O único efeito externo é a gravidade (já incluída na energia potencial).
- Por isso, o lado direito da equação é nulo.

Equações diferenciais finais

Após aplicar as equações de Lagrange para θ e α , e linearizar em torno de $\alpha \approx 0$, obtemos:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \quad (\text{Braço}) \quad (24)$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \quad (\text{Pêndulo}) \quad (25)$$

2.5. Modelo em Espaço de Estados

O torque de saída do motor aplicado ao sistema é dado por:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g}{R_m} (V_m - K_G K_m \dot{\theta}) \quad (26)$$

Combinando as equações de movimento obtidas, a representação em espaço de estados pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{bd}{E} & -\frac{cG}{E} & 0 \\ 0 & \frac{E}{qd} & -\frac{bG}{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{c\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \\ \frac{b\eta_m\eta_gK_tK_g}{R_mE} \end{bmatrix} V_m \quad (27)$$

onde os parâmetros são definidos como:

$$\begin{aligned} a &= J_{eq} + mr^2, & b &= mLr, \\ c &= \frac{4}{3}mL^2, & d &= mgL, \\ E &= ac - b^2, & G &= \frac{\eta_m\eta_gK_tK_mK_g^2}{R_m} - B_{eq} \end{aligned}$$

A Tabela 2 apresenta os parâmetros utilizados para o sistema SRV02.

Tabela 2. Parâmetros típicos do sistema SRV02 e do pêndulo

Símbolo	Descrição	Valor
K_t	Constante de torque do motor	0.00767
K_m	Constante de FEM inversa	0.00767
R_m	Resistência de armadura	2.6
K_g	Relação de engrenagem (motor → carga)	14 (14:1)
η_m	Eficiência do motor	0.69
η_g	Eficiência da caixa de engrenagem	0.9
B_{eq}	Coef. de atrito viscoso equivalente	1.5×10^{-3}
J_{eq}	Momento de inércia equivalente na carga	9.31×10^{-4}

2.6. Modelo Numérico em Espaço de Estados

Substituindo os valores da Tabela 2, obtemos o modelo em espaço de estados numérico:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix} V_m \quad (28)$$

E a saída é dada por:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_m \quad (29)$$

2.7. Obtenção da Função de Transferência

A partir do modelo em espaço de estados (Eq. 28), pode-se obter a função de transferência que relaciona a entrada do sistema (tensão no motor V_m) com a saída escolhida (ângulo do pêndulo α). Para isso, foi utilizada a função `tf()` do *MATLAB*, que converte a representação em espaço de estados para a forma de função de transferência.

As matrizes do sistema são definidas como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.32 & -14.52 & 0 \\ 0 & 81.78 & -13.98 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.54 \\ 24.59 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D = 0$$

O código em *MATLAB* para a conversão é o seguinte:

```
A = [0 0 1 0;
      0 0 0 1;
      0 39.32 -14.52 0;
      0 81.78 -13.98 0];
B = [0; 0; 25.54; 24.59];
C = [0 1 0 0]; % Saída = ângulo do pêndulo
D = 0;
```

```
sys_ss = ss(A, B, C, D); % Espaço de estados
sys_tf = tf(sys_ss); % Função de transferência
```

Assim, obtém-se diretamente a função de transferência $G(s)$, que expressa a dinâmica do sistema:

$$G(s) = \frac{\alpha(s)}{V_m(s)} = \frac{24.59s - 0.0024}{s^3 + 14.52s^2 - 81.78s - 637.8} \quad (31)$$

onde $\alpha(s)$ é a transformada de Laplace do ângulo do pêndulo e $V_m(s)$ é a transformada de Laplace da tensão aplicada ao motor.

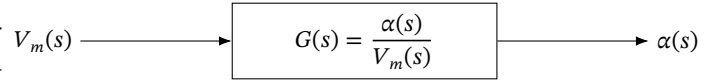


Figura 3. Diagrama de blocos representando a função de transferência entre a entrada $V_m(s)$ e a saída $\alpha(s)$.

3. Análise do Modelo

Após a obtenção da função de transferência que descreve a dinâmica entre a entrada $V_m(s)$ (tensão aplicada ao motor) e a saída $\alpha(s)$ (ângulo do pêndulo), procede-se à análise matemática do sistema em malha aberta. Essa análise permite caracterizar propriedades fundamentais, como ordem e grau relativo, localização dos polos e zeros, estabilidade intrínseca e comportamento esperado diante de diferentes entradas. Embora ainda não haja controle implementado, esta etapa é essencial para compreender as limitações naturais do sistema e justificar a necessidade de técnicas de estabilização.

3.1. Ordem e grau relativo

- **Ordem do sistema:** 3 (denominador de grau 3) — sistema de 3ª ordem.
- **Grau do numerador:** 1.

3.2. Polos e estabilidade

As raízes do denominador (polos) obtidos numericamente são aproximadamente:

$$p_1 \approx -17.12, \quad p_2 \approx -4.94, \quad p_3 \approx +7.54.$$

Como existe um polo em $p_3 \approx +7.54$ (semiplano direito), o sistema é **instável em malha aberta**. Em termos práticos, qualquer pequena perturbação tenderá a crescer exponencialmente se não houver controle. A raiz do numerador (zero) é aproximadamente:

$$z \approx +9.76 \times 10^{-5}.$$

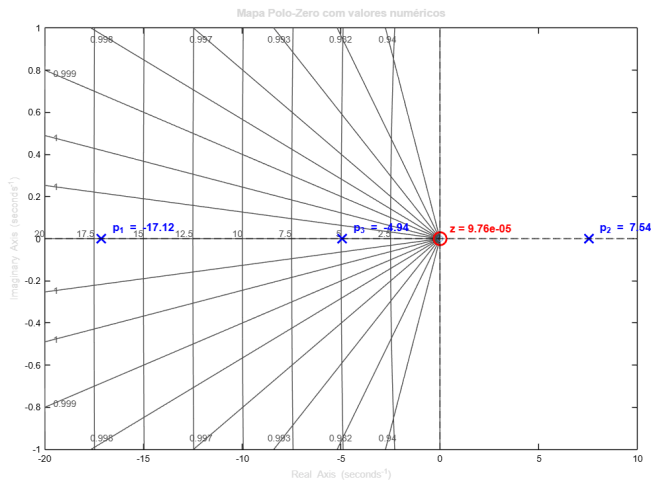


Figura 4. Mapa polo-zero do sistema, com polos (X) e zeros (O) destacados numericamente.

O sistema possui, portanto, um zero no semiplano direito (RHP), caracterizando-o como **não mínimo-fase**, a principal consequência disso é a tendência do sistema de apresentar uma resposta inversa (*undershoot*). Se o sistema fosse estável e recebesse um comando em degrau para ir a um valor positivo, a saída primeiro se moveria ligeiramente na direção negativa antes de se corrigir.

3.3. Ganho DC

O ganho estático do sistema é:

$$G(0) = \frac{-0.0024}{-637.752} \approx 3.76 \times 10^{-6}.$$

O valor é muito pequeno, mas na prática a dinâmica é dominada pelo polo instável.

3.4. Tipo do sistema

Não há polos em $s = 0$, logo o sistema é do **tipo 0**. Em teoria isso significa erro finito para entrada em degrau, mas devido à instabilidade, em malha aberta a saída tende a divergir.

3.5. Observações finais

- O polo no semiplano direito torna o sistema instável em malha aberta.
- O zero no semiplano direito impõe dificuldades na modelagem de um controlador

4. Simulação Computacional

Para validar e visualizar o comportamento dinâmico previsto pela análise matemática, o sistema foi simulado no ambiente *MATLAB/Simulink*. Utilizando a função de transferência $G(s)$ obtida, foram analisadas as respostas do sistema em malha aberta a três sinais de entrada canônicos: impulso, degrau e rampa. Essas simulações são fundamentais para confirmar a instabilidade inerente do pêndulo e compreender a natureza da sua resposta antes da implementação de qualquer estratégia de controle. O comportamento observado em todas as simulações reflete diretamente a presença do polo instável em $s \approx +7.54$.

4.1. Resposta ao Impulso

A resposta a um impulso unitário, que representa a reação do sistema a uma perturbação instantânea de energia, é apresentada na Figura 5. Como se pode observar, a saída (ângulo do pêndulo) diverge exponencialmente, confirmando a instabilidade do sistema em malha aberta. Uma perturbação mínima é suficiente para que o pêndulo inicie um movimento de queda do qual ele não consegue se recuperar

autonomamente. Esse comportamento é totalmente consistente com o polo no semiplano direito, que domina a dinâmica do sistema.

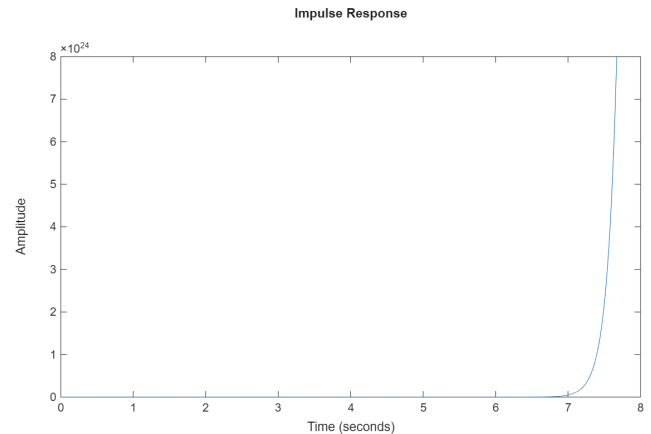


Figura 5. Resposta ao impulso do sistema em malha aberta.

4.2. Resposta ao Degrau

A aplicação de uma entrada em degrau, que equivale a fornecer uma tensão constante ao motor, também resulta em uma resposta instável, como ilustrado na Figura 6. A saída cresce de forma ilimitada, o que, fisicamente, corresponde à queda do pêndulo de forma acelerada. O resultado reforça que uma ação de controle constante é incapaz de estabilizar o sistema, evidenciando a necessidade de uma malha de realimentação que ajuste a entrada dinamicamente com base no estado do pêndulo.

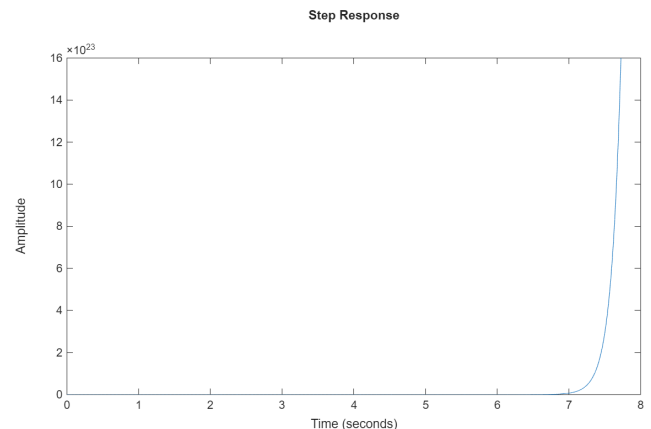


Figura 6. Resposta ao degrau do sistema em malha aberta.

4.3. Resposta à Rampa

A resposta a uma entrada do tipo rampa, mostrada na Figura 7, exibe uma divergência ainda mais acentuada. Este teste submete o sistema a uma solicitação de energia continuamente crescente, e a resposta instável se manifesta de forma mais rápida e agressiva. Embora seja um cenário menos comum na prática, a simulação confirma que o sistema em malha aberta é incapaz de seguir qualquer trajetória de referência, por mais simples que seja, reforçando a necessidade crítica de um controlador para a estabilização.

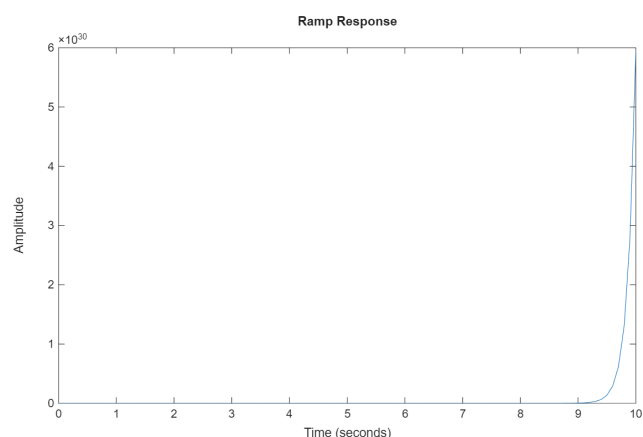


Figura 7. Resposta à rampa do sistema em malha aberta.

5. Conclusão

Nesta etapa do projeto, o modelo matemático para o pêndulo invertido rotacional (Pêndulo de Furuta) foi obtido com sucesso. Partindo dos princípios da mecânica clássica e utilizando o método de Euler-Lagrange, foram derivadas as equações diferenciais não lineares que descrevem a dinâmica do sistema. Subsequentemente, o modelo foi linearizado em torno do ponto de equilíbrio instável ($\alpha \approx 0$) para se obter uma representação em espaço de estados e a correspondente função de transferência, relacionando a tensão de entrada do motor (V_m) com o ângulo do pêndulo (α).

A análise da função de transferência revelou características cruciais do sistema em malha aberta. Foi identificado que o sistema é de terceira ordem, do tipo 0, e, mais importante, intrinsecamente instável devido a um polo localizado no semiplano direito ($p_3 \approx +7.54$). Adicionalmente, a presença de um zero também no semiplano direito caracteriza o sistema como de fase não mínima, o que pode impor desafios ao projeto do controlador, como a ocorrência de uma resposta inversa inicial (*undershoot*).

As simulações computacionais do sistema em malha aberta para entradas de impulso, degrau e rampa confirmaram visualmente a instabilidade prevista pela análise teórica, com a saída divergindo exponencialmente em todos os cenários. Os resultados obtidos nesta etapa concluem a modelagem e a análise do sistema, fornecendo uma base sólida e indispensável para a próxima fase do projeto. A próxima etapa consistirá no projeto e implementação de um controlador em malha fechada com o objetivo de superar a instabilidade natural do sistema e manter o pêndulo estabilizado na posição vertical.

Referências

DUART, J L et al. Dynamic Modeling and Simulation of a Rotational Inverted Pendulum. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 792, n. 1, p. 012081, jan. 2017. DOI: [10.1088/1742-6596/792/1/012081](https://doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081). Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081>.

RAMOS, J. et al. Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods: comparative assessment and result analysis. In: 2011 Pan American Health Care Exchanges. [S.l.]: IEEE, 2011. P. 1–6. DOI: [10.1109/PAHCE.2011.5871873](https://doi.org/10.1109/PAHCE.2011.5871873). Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/224178913_Modeling_and_control_of_a_rotary_inverted_pendulum_using_various_methods_comparative_assessment_and_result_analysis.