Controle de Estabilização de um Pêndulo Invertido Rotacional

JOSÉ A. DA SILVA[a,1], **KAUA LESSA L. DOS SANTOS** [b,2], **PABLO MUNIH S. DE CARVALHO**[c,3] and **PLÁCIDO AUGUSTUS DE O. CORDEIRO**[d,4]

[a]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*
[b]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*
[c]*Engenharia da Computação, Universidade Federal de Alagoas*

Prof. ICARO BEZERRA QUEIROZ DE ARAUJO

Resumo—Este relatório trata da segunda etapa do projeto da disciplina de sistemas de controle 1, de um pêndulo invertido rotacional. É apresentado, em primeira instância, as equações diferenciais de movimento do pêndulo obtidas através do método Euler-Lagrange, linearização do modelo e obtenção da função de transferência. Em seguida, a estabilidade do sistema é analisada, assim como a resposta do modelo a diferentes entradas, a fim de prever seu comportamento. Por fim, o software MATLAB/Simulink é utilizado para simular o sistema em malha aberta e os resultados são discutidos.

Keywords—*pêndulo invertido, controle rotacional, estabilização, sistemas não lineares*

1. Introdução

Anteriormente, foi discutido a importância do pêndulo invertido no estudo prático de sistemas de controle, as diferenças entre os dois principais modelos presentes na literatura e a escolha do pêndulo invertido rotacional como interesse deste estudo.

1.1. Descrição do Sistema

Recapitulando, o pêndulo invertido rotacional, também chamado de Pêndulo de Furuta, é composto por um pêndulo acoplado a um braço horizontal giratório, que é acionado por um motor. O movimento do sistema ocorre no plano horizontal, através do movimento do braço giratório e no plano vertical, através do movimento do pêndulo. A relação de apenas um atuador para dois graus de liberdade caracteriza este sistema como subatuado. A Figura 1 apresenta o modelo de referência para a modelagem matemática e implementação do controlador.

1.2. Variávies do Sistema

O sistema físico possui o torque do motor como única entrada. Para este estudo, apenas a ângulo do pêndulo será considerado como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input single output* (SISO). É importante destacar que é possível considerar também o ângulo do braço como saída, dessa forma caracterizando um sistema *single input multiple output* (SIMO), porém, esse não é o foco deste estudo. As variáveis físicas são apresentadas na tabela a seguir:

Tabela 1. Símbolos para descrever os parâmetros das equações

Símbolo	Descrição
L	Distância até o centro de massa do pêndulo
m	Massa do braço do pêndulo
r	Comprimento do braço rotativo
θ	Ângulo do braço do pêndulo (rad)
α	Ângulo do pêndulo (rad)
h	Distância do centro de massa do pêndulo até o solo
J_{cm}	Inércia do pêndulo em relação ao seu centro de massa
V_x	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção x
V_y	Velocidade do centro de massa do pêndulo na direção y

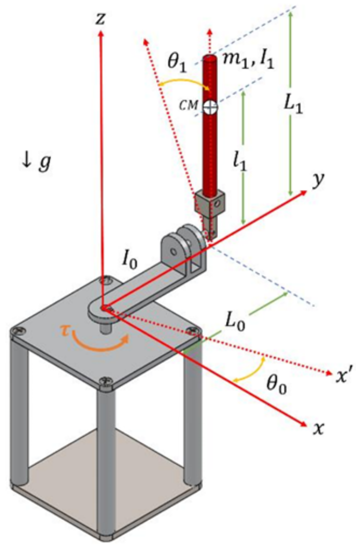

Figura 1. Representação tridimensional do pêndulo invertido rotacional com seus parâmetros físicos e coordenadas. Fonte: (DUART et al., 2017)

1.3. Objetivo

O objetivo desta etapa é a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do sistema, análisar o modelo obtido e simular através do software MATLAB/Simulink.

2. Modelagem Matemática

A modelagem matemática do pêndulo invertido rotacional é obtida aplicando o método de Euler-Lagrange. Inicialmente, consideram-se as velocidades do centro de massa do pêndulo e do braço rotativo:

$$V_{Pen.cm} = -L\cos(\alpha)\,\dot{\alpha}\,\hat{x} - L\sin(\alpha)\,\dot{\alpha}\,\hat{y} \tag{1}$$

$$V_{arm} = r\dot{\theta} \tag{2}$$

Assim, as componentes de velocidade do centro de massa do pêndulo podem ser escritas como:

$$V_x = r\dot{\theta} - L\cos\alpha\,\dot{\alpha} \tag{3}$$
$$V_y = -L\sin\alpha\,\dot{\alpha} \tag{4}$$

2.1. Energia Potencial

A única energia potencial no sistema é a gravitacional:

$$V = mgh = mgL\cos\alpha \tag{5}$$

2.2. Energia Cinética

As energias cinéticas são devidas ao movimento do braço, ao movimento do centro de massa do pêndulo e à rotação do pêndulo em torno do seu próprio centro de massa:

$$T = \tfrac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m(r\dot{\theta} - L\cos\alpha\dot{\alpha})^2 + \tfrac{1}{2}m(-L\sin\alpha\dot{\alpha})^2 + \tfrac{1}{2}J_{cm}\dot{\alpha}^2 \tag{6}$$

O momento de inércia do pêndulo em relação ao seu centro de massa é dado por:

$$J_{cm} = \frac{1}{3}mL^2 \tag{7}$$

2.3. Lagrangiana

Assim, a Lagrangiana é escrita como:

$$\mathcal{L} = T - V \tag{8}$$

Expandindo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 - mLr\cos\alpha\,\dot{\alpha}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\alpha \tag{9}$$

2.4. Equações de Movimento

As coordenadas generalizadas são θ e α, de forma que o sistema pode ser descrito por:

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mLr\ddot{\alpha} = T_{output} - B_{eq}\dot{\theta} \tag{10}$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\alpha} - mLr\ddot{\theta} - mgL\alpha = 0 \tag{11}$$

3. Análise do Modelo

- Análise teórica da estabilidade do sistema em malha aberta (análise dos polos da função de transferência).
- Previsão do comportamento dinâmico do sistema a partir do modelo (análise de resposta a degrau, rampa, etc.).

4. Simulação Computacional

- Implementação do modelo matemático em software (MATLAB/-Simulink ou similar).
- Apresentação dos resultados da simulação da resposta do sistema em malha aberta a diferentes sinais de entrada (degrau, impulso).
- Discussão e análise crítica dos resultados da simulação.

5. Conclusão Parcial

- Resumo dos resultados obtidos na modelagem e simulação.
- Perspectivas para a próxima etapa de montagem e validação.

Referências

DUART, J L et al. Dynamic Modeling and Simulation of a Rotational Inverted Pendulum. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 792, n. 1, p. 012081, jan. 2017. DOI: 10.1088/1742-6596/792/1/012081. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/792/1/012081>.