Tema 1
Fundamentos de la Lógica Difusa

Dra. Yesenia E. González Navarro

UPIITA-IPN

Teoría de Conjuntos Clásicos o Certeros

Para los conjuntos certeros A y B que contienen elementos en el universo X, se define la siguiente notación:

$x \in X \Rightarrow$ elemento x que pertenece al universo X

$x \in A \Rightarrow$ elemento x que pertenece al conjunto A

$x \notin A \Rightarrow$ elemento x que no pertenece al conjunto A

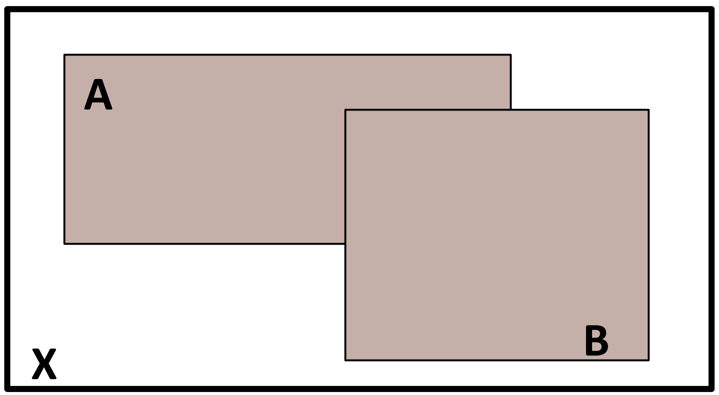
$A \subset B \Rightarrow$ A está completamente contenida en B
(si x ∈ A, entonces x ∈ B)

$A \subseteq B \Rightarrow$ A está contenida en o es equivalente a B

$A = B \Rightarrow$ $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

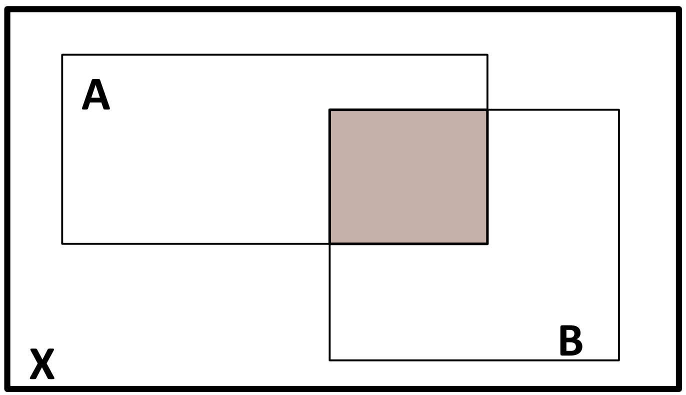
Operaciones con Conjuntos Certeros

- Unión



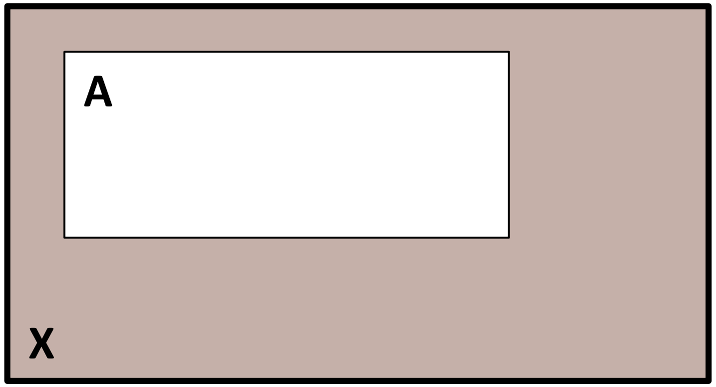
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ o \ x \in B\}$$

- Intersección



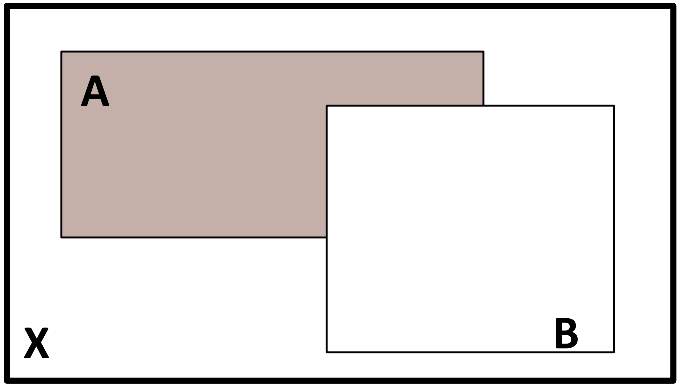
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ y \ x \in B\}$$

- Complemento



$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A, x \in X\}$$

- Diferencia (A|B)



$$A|B = \{x \mid x \in A \ \ y \ \ x \notin B\}$$

Propiedades de los Conjuntos Certeros

- Conmutativa
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- Asociativa
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Distributiva
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Idempotencia
$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

- Identidad $A \cup \Theta = A$

  $A \cap X = A$

  $A \cap \Theta = \Theta$

  $A \cup X = X$

- Transitiva Si $A \subseteq B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$

- Involutiva $\overline{\overline{A}} = A$

- Ley del Medio Excluido $A \cup \overline{A} = X$
- Ley de la Contradicción $A \cap \overline{A} = \Theta$

- Leyes de D' Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

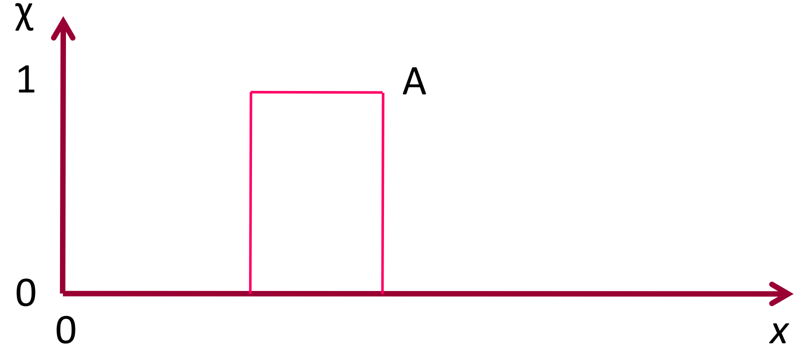
Transformación de Conjuntos Clásicos a Funciones

Funciones de Membresía para Conjuntos Certeros

- Una mejor representación para la manipulación matemática de los conjuntos teóricos se logra al convertir estos conjuntos a funciones.

- Sea la función característica $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

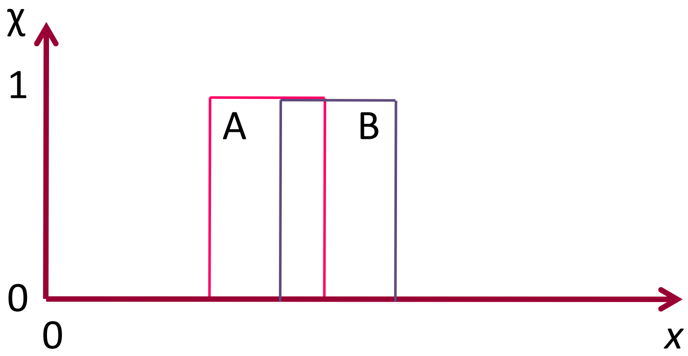
donde χ_A expresa "membresía" en el conjunto A para el elemento *x* en el universo *X*.



Operaciones

Sean los conjuntos A y B definidos en el universo X. A continuación se describen las operaciones de estos conjuntos en términos de funciones:

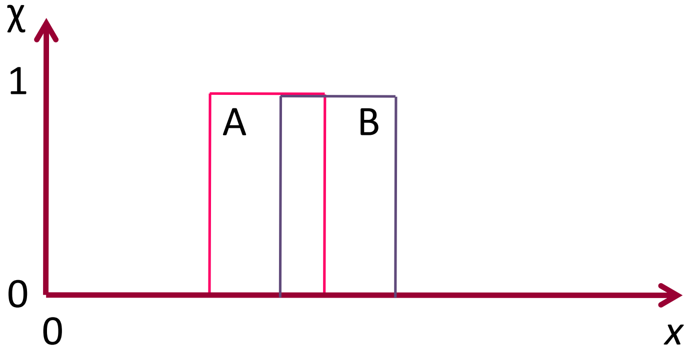
Unión $$A \cup B \rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$$

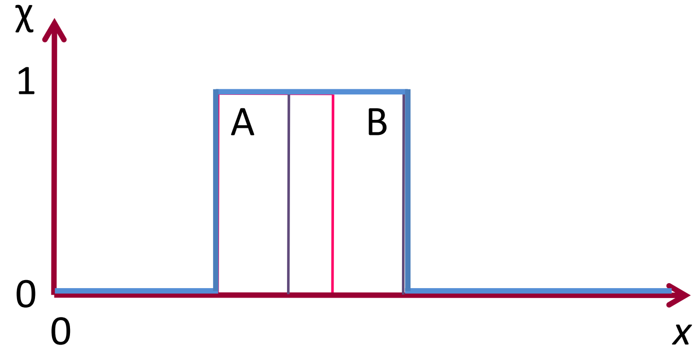


Operaciones

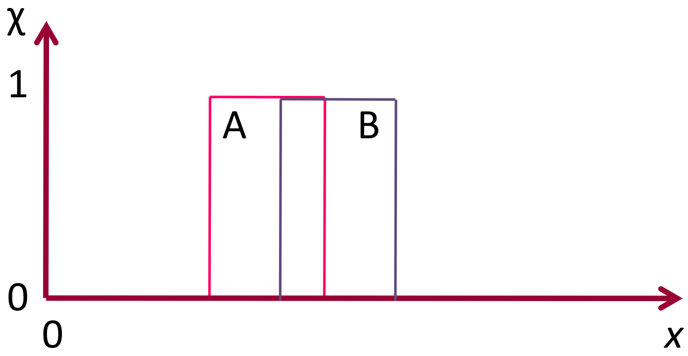
Sean los conjuntos A y B definidos en el universo X. A continuación se describen las operaciones de estos conjuntos en términos de funciones:

Unión $$A \cup B \rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$$

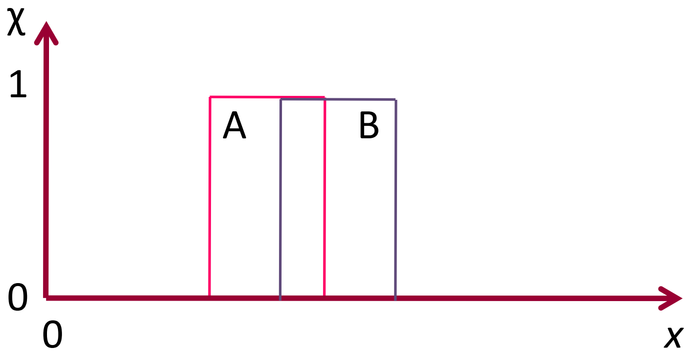


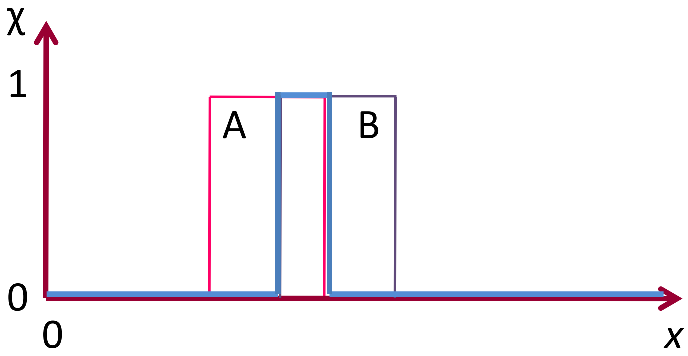


Intersección $$A \cap B \rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$$

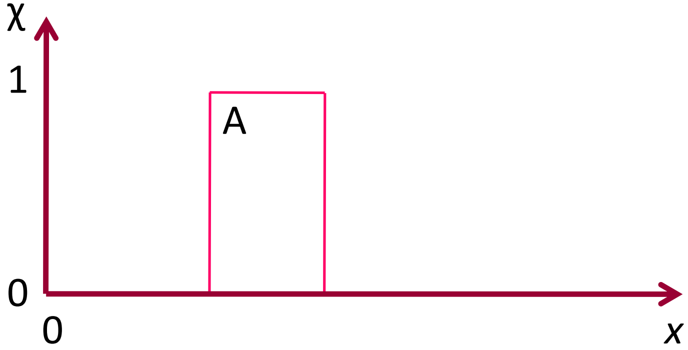


Intersección $A \cap B \rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$

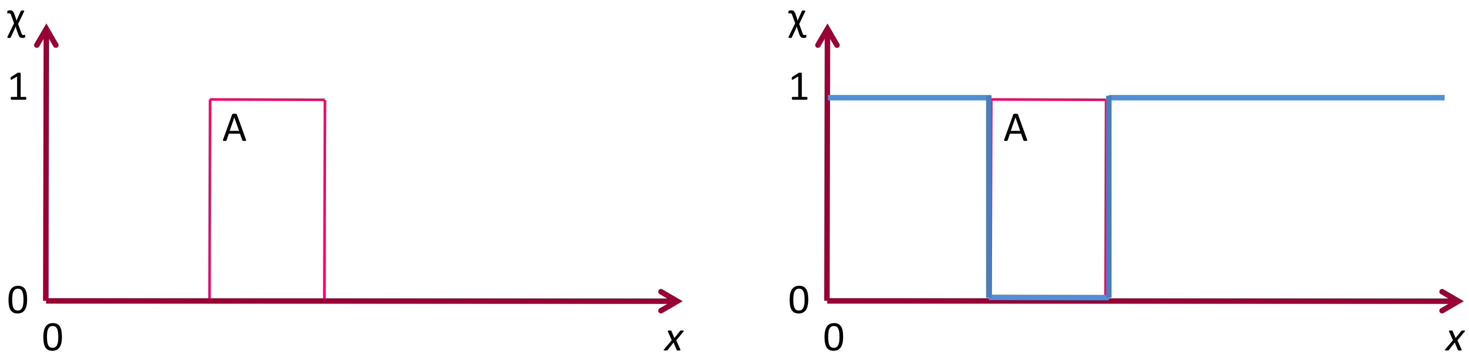




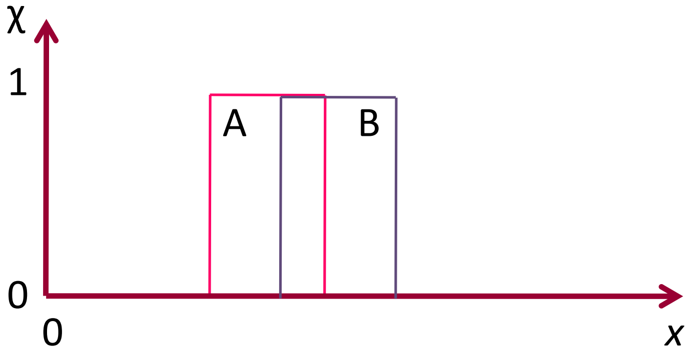
Complemento $\overline{A} \rightarrow \chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$



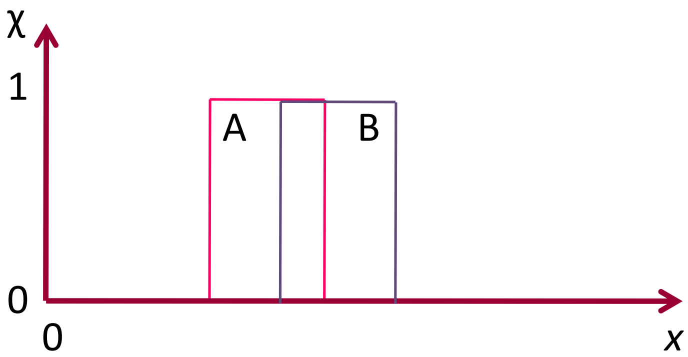
Complemento $\overline{A} \rightarrow \chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

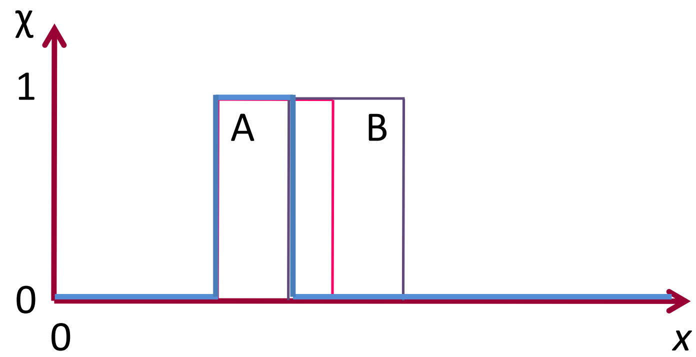


Diferencia $$A \mid B = \min(\chi_A(x), \chi_{\overline{B}}(x))$$



Diferencia $$A \,|\, B = \min(\chi_A(x), \chi_{\overline{B}}(x))$$





Teoría de Conjuntos Difusos

Consideraciones Importantes

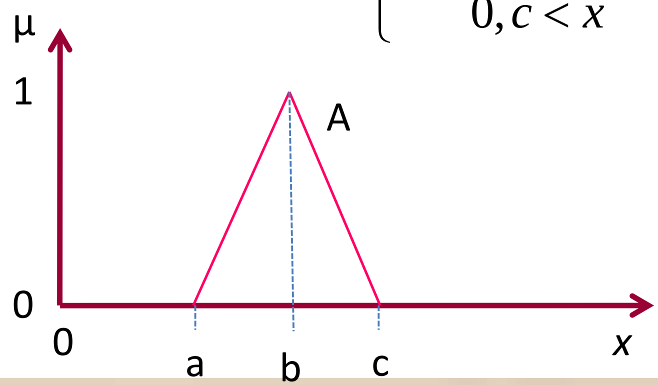
1. Un conjunto difuso es aquel donde el cambio de pertenencia a no pertenencia o viceversa es gradual.
2. Un conjunto difuso debe ser continuo y monotónicamente creciente o decreciente.
3. Un conjunto difuso puede pasar de no pertenencia a pertenencia y de nuevo a no pertenencia, pero, una vez que decae, no puede volver a adquirir valores numéricos mayores al anterior.
4. Al menos un elemento del conjunto difuso debe tener el mayor grado de pertenencia posible (uno).
5. El conjunto difuso debe estar definido en todo el universo.

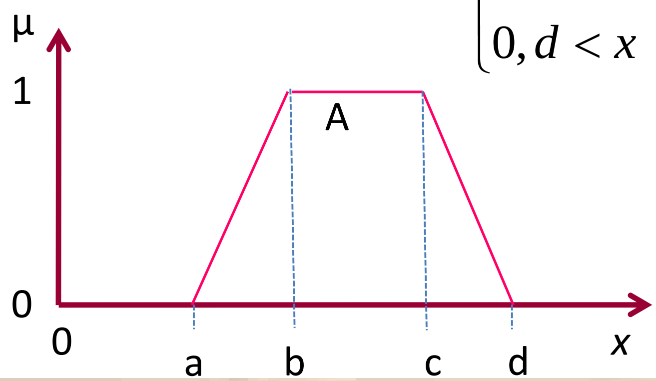
Funciones de Membresía Difusas en Una Dimensión

- Funciones discretas (referente al tipo de programación).

$$Triangular(x;a,b,c)=\begin{cases} 0, x\le a \\ \frac{x-a}{b-a}, a<x\le b \\ \frac{c-x}{c-b}, b<x\le c \\ 0, c<x \end{cases}$$

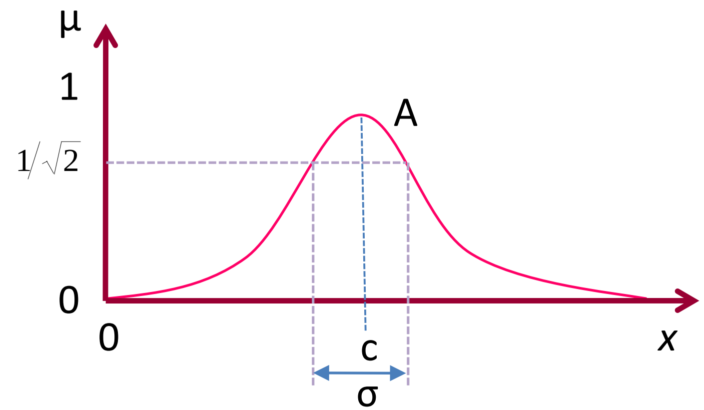
$$Trapezoidal(x;a,b,c,d)=\begin{cases} 0, x\le a \\ \frac{x-a}{b-a}, a<x\le b \\ 1, b<x\le c \\ \frac{d-x}{d-c}, c<x\le d \\ 0, d<x \end{cases}$$





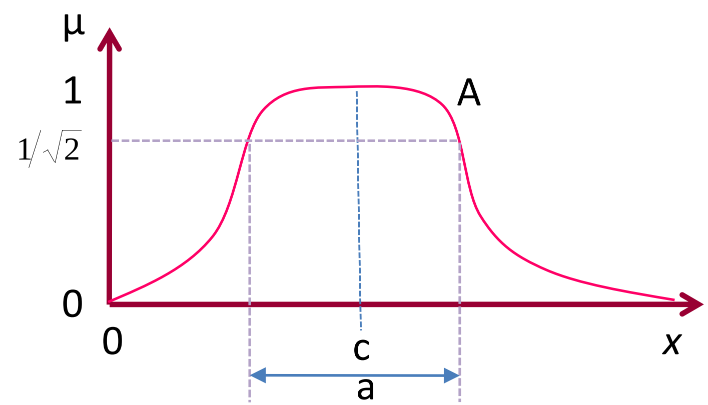
- Funciones continuas.

$$Gaussiana(x;c,\sigma)=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

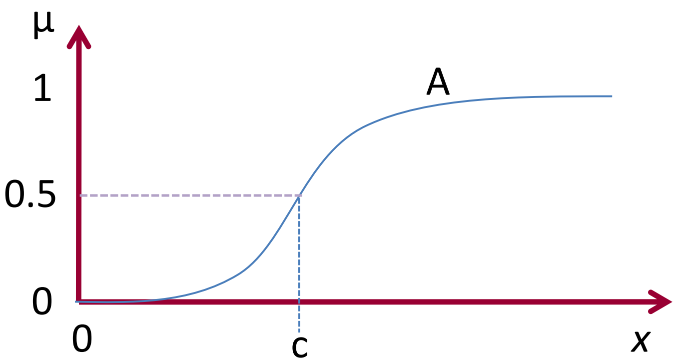


$$Campana(x;a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

(Con el valor de b usualmente positivo).



$$Sigmoide(x;a,c)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

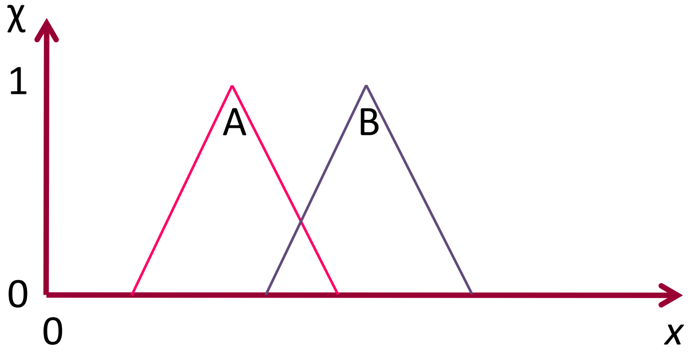


El parámetro *a* controla la razón de cambio de la pendiente.

Operaciones con Funciones de Membresía Difusas

Sean los conjuntos A y B definidos en el universo X.

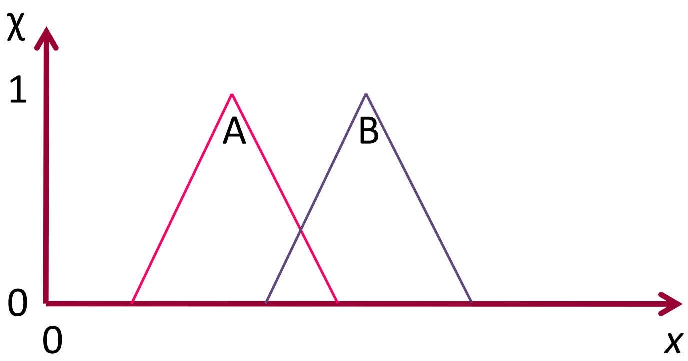
Unión $$A \cup B \rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$$

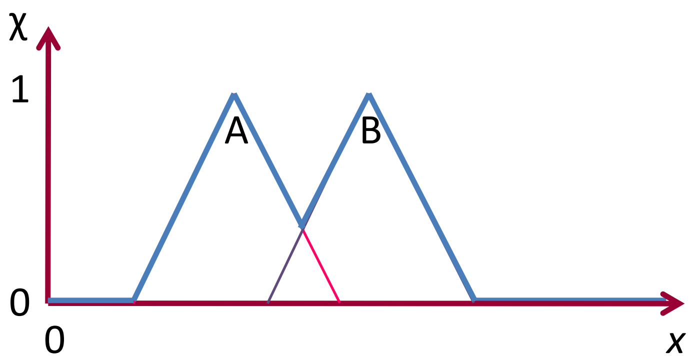


Operaciones con Funciones de Membresía Difusas

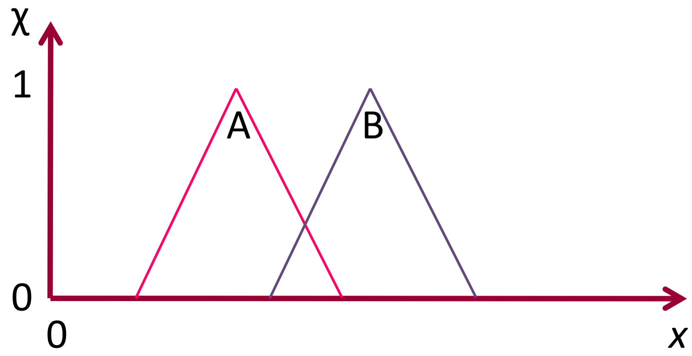
Sean los conjuntos A y B definidos en el universo X.

Unión $$A \cup B \rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$$

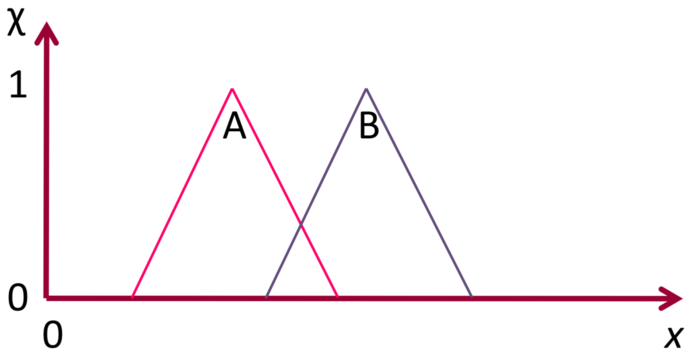


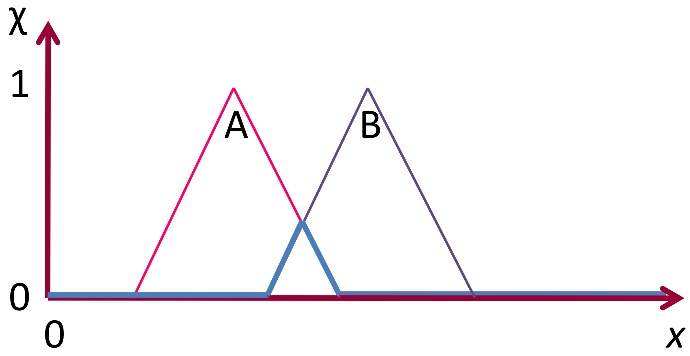


Intersección $A \cap B \rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$

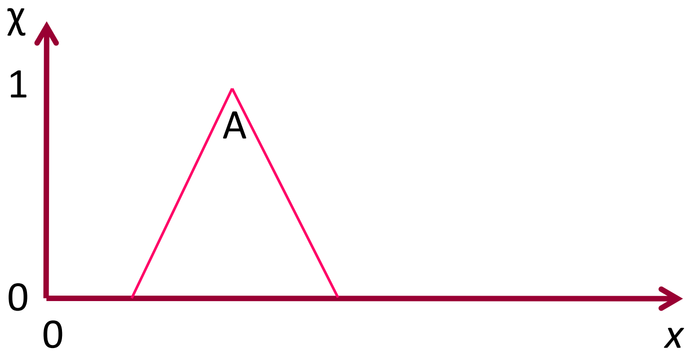


Intersección $$A \cap B \rightarrow \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min\left(\chi_A(x), \chi_B(x)\right)$$

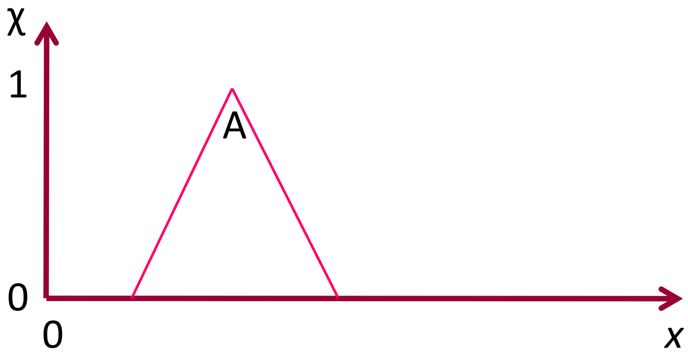


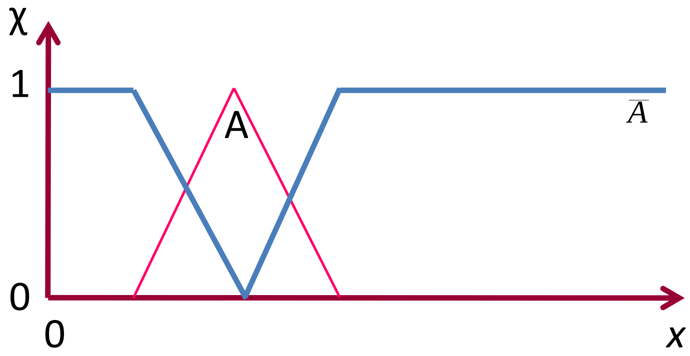


Complemento $\quad \overline{A} \rightarrow \chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

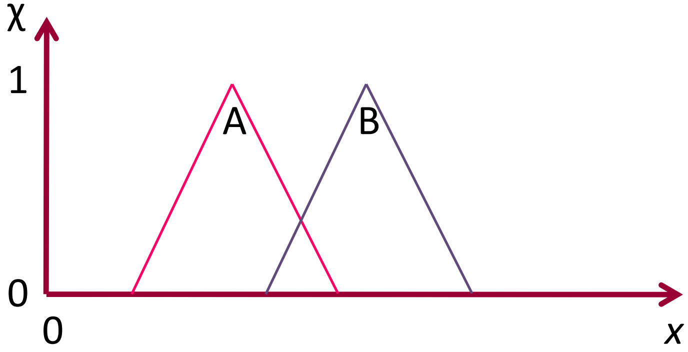


Complemento $\overline{A} \to \chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

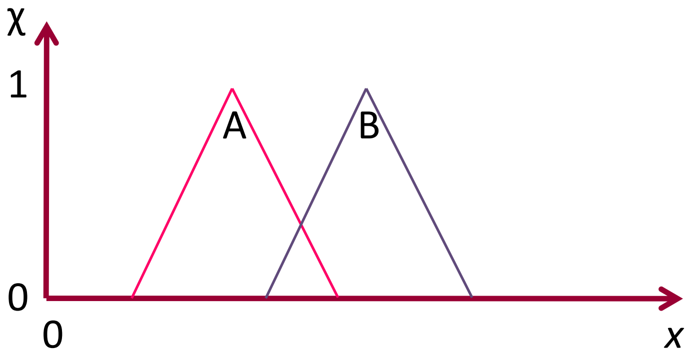


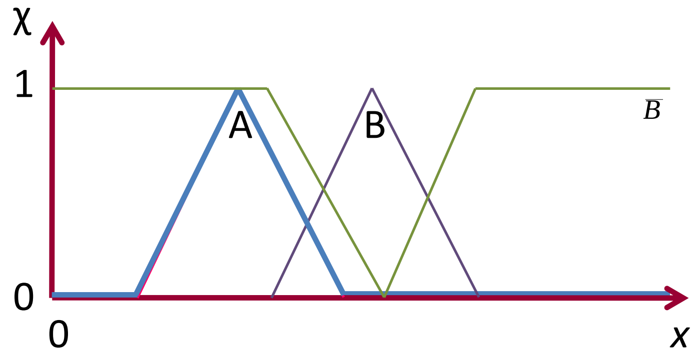


Diferencia $$A \mid B = \min(\chi_A(x), \chi_{\bar{B}}(x))$$



Diferencia $$A \mid B = \min(\chi_A(x), \chi_{\overline{B}}(x))$$





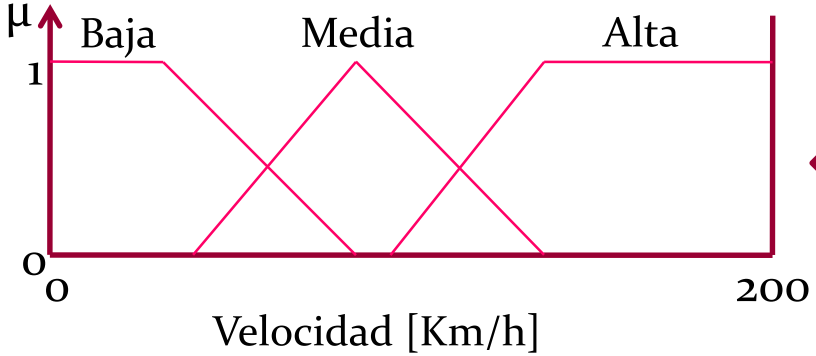
Ejercicio 1:

Realice gráficamente utilizando un conjunto difuso triangular definido sobre el universo X las operaciones que describen a:

- Ley del medio excluido $A \cup \overline{A} = X$
- Ley de la contradicción $A \cap \overline{A} = \Theta$

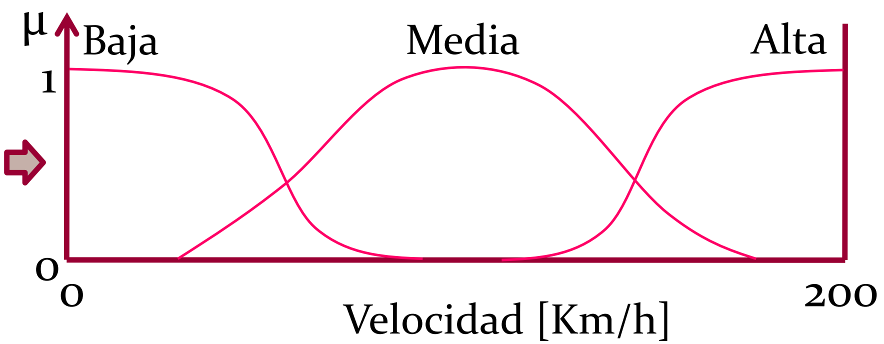
Caracterización de Universos de Discurso

Un universo difuso está completamente caracterizado por sus funciones de membresía.

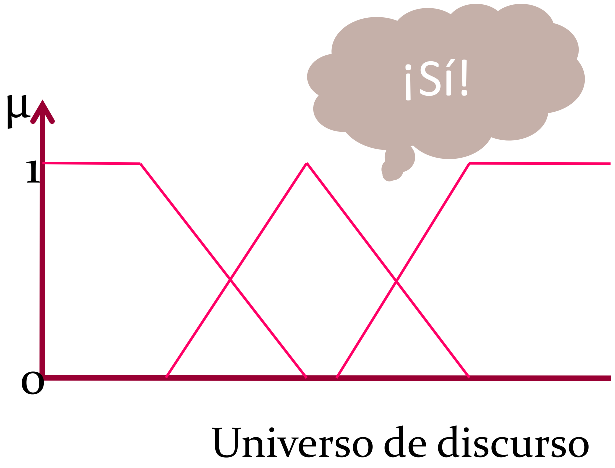


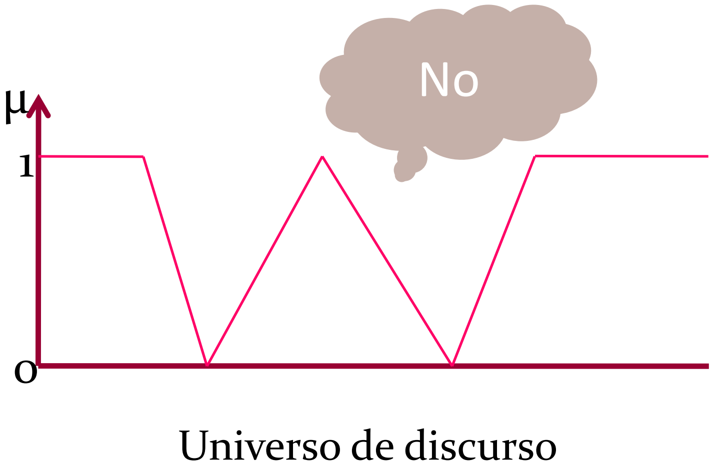
Caracterización de la variable "Velocidad" empleando funciones de membresía discretas.

Caracterización de la variable "Velocidad" empleando funciones de membresía continuas.



Aparte de cumplir con las condiciones antes mencionadas, al caracterizar un universo de discurso con diferentes conjuntos difusos, estos conjuntos deben traslaparse, ya que es precisamente mediante el traslape como la lógica difusa manipula la ambigüedad o incertidumbre.





Probabilidad vs Difusividad

Es importante mencionar que la difusividad no proviene de la aleatoriedad de los elementos que constituyen los conjuntos, pero sí proviene de la incertidumbre e imprecisión de pensamientos y de conceptos abstractos.

Operaciones elementales aplicables a los conjuntos difusos

Notación Convencional para Conjuntos Difusos

- Universo discreto y finito:

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \right\}$$

- Universo continuo e infinito:

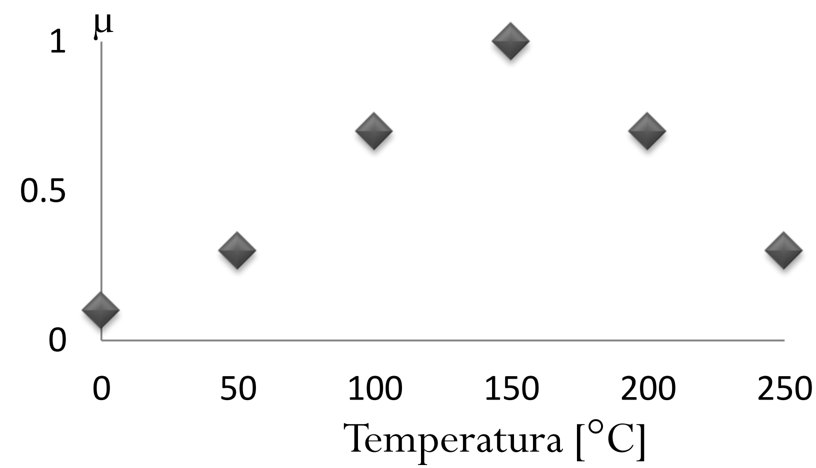
$$A = \left\{ \int \frac{\mu_A(x)dx}{x} \right\}$$

Ejemplo de un conjunto difuso con elementos discretos en el universo

$$X = \{0,50,100,150,200,250\}$$

donde X es la temperatura en grados centígrados de un horno casero.

A= Temperatura media de cocción



$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

$$A = \left\{ \frac{0.1}{0} + \frac{0.3}{50} + \frac{0.7}{100} + \frac{1}{150} + \frac{0.7}{200} + \frac{0.3}{250} \right\}$$

$$A = \{(0,0.1), (50,0.3), (100,0.7), (150,1), (200,0.7), (250,0.3)\}$$

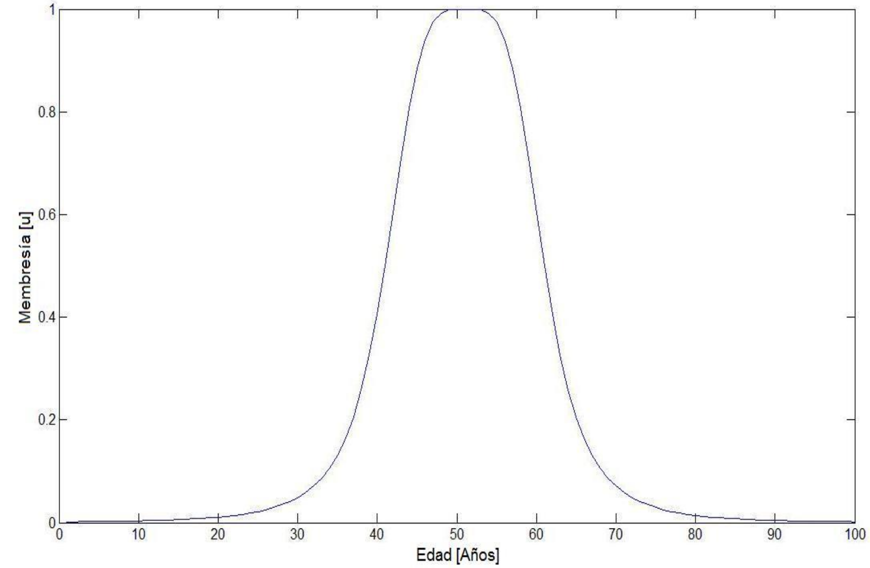
Ejemplo de un conjunto difuso con elementos continuos en el universo

$X = R^{+}$

donde R^{+} son las edades posibles en los humanos (en años)

B = Edades cercanas a 50 años $B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4}$$



Operaciones difusas
Ejercicio 2

- Suponga las siguientes funciones de membresía discretas para un transistor y un resistor:

$$\mu_T = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0.3}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.9}{4} + \frac{1}{5} \right\} \qquad \mu_R = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0.2}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} \right\}$$

- Para estos dos conjuntos difusos realizar lo siguiente:

1) $\mu_T \vee \mu_R$
2) $\mu_T \wedge \mu_R$
3) $\mu_{\overline{T}}$
4) $\mu_{\overline{R}}$
5) $\overline{\mu_T \wedge \mu_R}$
6) Graficar μ_T y μ_R

   ¿que representan las curvas de μ_T y μ_R?

Ejercicio 3

- Considere los conjuntos difusos A, B y C definidos en el intervalo X=[0,10] de los números reales por las funciones de membresía:

$$\mu_A(x) = \frac{x}{x+2} \qquad \mu_B(x) = 2^{-x} \qquad \mu_C(x) = \frac{1}{1+10(x-2)^2}$$

- Determine la notación matemática y grafique las funciones de membresía para cada una de las siguientes operaciones:

1) $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$
2) $A \cup B, A \cup C, B \cup C$
3) $A \cap B, A \cap C, B \cap C$
4) $\overline{A \cap \overline{C}}, \overline{\overline{B} \cap C}, \overline{A \cup C}$

Operadores
T-norma y S-norma

Operador T-norma

La intersección de dos conjuntos difusos está especificada en forma general por una función

$$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

que agrega dos grados de membresía de la siguiente manera:

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \overset{\sim}{*} \mu_B(x)$$

donde $\overset{\sim}{*}$ es un operador binario para la función T. Este tipo de operadores de intersección difusa se conocen como operadores T-norma (norma triangular.)

Operadores T-norma más utilizados

Mínimo: $T_{\min}(a,b) = \min(a,b) = a \wedge b$

Producto algebraico: $T_{ap}(a,b) = a \cdot b$

Producto frontera: $T_{bp}(a,b) = 0 \vee (a+b-1)$

Producto drástico:
$$T_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, b = 1 \\ b, a = 1 \\ 0, (a,b) < 1 \end{cases}$$

Operador S-norma

Al igual que la intersección difusa, el operador de unión difusa está especificado en general por una función

$$S:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$$

que agrega dos grados de membresía de la siguiente manera:

$$\mu_{A\cup B}=S(\mu_A(x),\mu_B(x))=\mu_A(x)\,\tilde{+}\,\mu_B(x)$$

donde $\tilde{+}$ es un operador binario para la función S. Este tipo de operadores de unión difusa se conocen como operadores S-norma o T-conorma.

Operadores S-norma más utilizados

Máximo: $S_{\max}(a,b) = \max(a,b) = a \vee b$

Suma algebraica: $S_{as}(a,b) = a + b - a \cdot b$

Suma frontera: $S_{bs}(a,b) = 1 \wedge (a+b)$

Suma drástica: $$S_{ds}(a,b) = \begin{cases} a, b = 0 \\ b, a = 0 \\ 1, (a,b) > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4:

Aplique los distintos operadores T-norma y S-norma a los siguientes conjuntos difusos descritos en el mismo universo:

$$\mu_T = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0.3}{1} + \frac{0.7}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.9}{4} + \frac{1}{5} \right\} \qquad \mu_R = \left\{ \frac{0}{0} + \frac{0.2}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1}{5} \right\}$$

Ejercicio 5:

Obtener las gráficas de los distintos operadores T-norma y S-norma aplicados a los siguientes conjuntos difusos (considere a X=[-15,15]).

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+5}{7.5}\right)^4} \qquad \mu_B(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-5}{5}\right)^2}$$