Tema 2
Relaciones Difusas

Dra. Yesenia E. González Navarro

UPIITA-IPN

Transformación difusa

- Considere una **transformación** de un universo X a un universo Y. El universo X es el dominio y el universo Y es el rango de ***f***, donde ***f*** puede considerarse una regla que asigna algún elemento *y* en Y para cada elemento *x* en X. Si X y Y son reales, la transformación ***f*** es una función.
- Si A es un subconjunto de X, la imagen de A a través de *f*, denotada por $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ es un subconjunto de Y.

  Donde $f(A)=B$

- La función de membresía para el conjunto difuso B en Y, el cual se induce a través de la transformación *f*: X→Y, está dada por:

$$\mu_{f(A)}(y) = \mu_A(x)$$

- Si $B \subset Y$, la imagen inversa de B para $\{x \mid f(x) = y, y \subset B\}$ es un subconjunto de X. Por lo tanto, la **transformación inversa** $\boldsymbol{f^{-1}}$ induce un conjunto difuso A en X con su función de membresía definida como $\mu_A(x) = \mu_B(f(x))$ para toda $y \subset Y$.

Cuando dos elementos o más del universo X apuntan a un mismo elemento en el universo Y, Zadeh propuso:

$$\mu_B(y) = Supremum\,\mu_A(x), \qquad \text{para toda} \quad x \in f^{-1}(y)$$

Principio de extensión de una transformación difusa

Dada una función *f* que transforme puntos del universo X a puntos en el universo Y, y cualquier conjunto difuso A en X, donde

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\}$$

El **principio de extensión** establece que:

$$f(A) = f\left(\left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} \right) = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{f(x_1)} + \frac{\mu_A(x_2)}{f(x_2)} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{f(x_n)} \right\}$$

Ejercicio 2.1:

Se tiene un conjunto difuso A en el universo X, realice una transformación difusa utilizando el principio de extensión.

A = Alrededor de 4

$$A = \left\{ \frac{0.5}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.5}{5} \right\} \qquad y_i = 3x_i + 2$$

Aplicando el principio de extensión:

$$f(A) = ?$$

Ejercicio 2.2:

Realice una transformación difusa del conjunto difuso A definido en el universo X aplicando el principio de extensión.

$$A=\left\{\frac{0.3}{-2}+\frac{0.5}{-1}+\frac{0.8}{0}+\frac{1}{1}+\frac{0.4}{2}\right\} \qquad f(x)=x^2$$

Aplicando el principio de extensión:

$$f(A)=?$$

Relaciones difusas

Producto cartesiano difuso

- Es una relación entre dos o más conjuntos difusos.
- Sea A un conjunto difuso en el universo X y B un conjunto difuso en el universo Y, entonces, el producto cartesiano entre los conjuntos difusos A y B resulta en una relación difusa R, contenida dentro del espacio de producto cartesiano:

$$A \times B = R \subset X \times Y$$

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \times B}(x, y) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right)$$

Ejercicio 2.3:

Realizar el producto cartesiano de los siguientes conjuntos difusos:

$$A=\left\{\frac{0.2}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right\} \qquad B=\left\{\frac{0.3}{y_1}+\frac{0.9}{y_2}\right\}$$

$$A\times B=R=?$$

Proyección difusa

Suponiendo dos universos de discurso (X y Y), donde $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$. Sea R una relación difusa sobre el producto cartesiano X x Y.

- La proyección de R sobre X es un conjunto definido por:

$$\Pr oj[R : X] = \sum_{i=1}^{n} \max_{y_j \in Y} \left\{ \frac{\mu_R(x_i, y_j)}{x_i} \right\}$$

- La proyección de R sobre Y es un conjunto definido por:

$$\Pr oj[R : Y] = \sum_{j=1}^{m} \max_{x_i \in X} \left\{ \frac{\mu_R(x_i, y_j)}{y_j} \right\}$$

Ejercicio 2.4:

Sea
$$R = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0.6 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \end{array}$$

Obtener la proyección de R en X y de R en Y.

Extensión cilíndrica

Sea A un conjunto difuso sobre el universo X. La extensión cilíndrica C(A) de A sobre XxY puede definirse por la siguiente matriz difusa:

$$C(A) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_A(x_1) & \mu_A(x_1) & \cdots & \mu_A(x_1) \\ \mu_A(x_2) & \mu_A(x_2) & \cdots & \mu_A(x_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_A(x_n) & \mu_A(x_n) & \cdots & \mu_A(x_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

Sea B un conjunto difuso definido en el universo Y. La extensión cilíndrica C(B) de B sobre XxY puede definirse por la siguiente matriz difusa:

$$C(B)=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad y_1 & \quad y_2 & \quad \cdots & \quad y_m \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_B(y_1) & \mu_B(y_2) & \cdots & \mu_B(y_m) \\ \mu_B(y_1) & \mu_B(y_2) & \cdots & \mu_B(y_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_B(y_1) & \mu_B(y_2) & \cdots & \mu_B(y_m) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 2.5:

Realice la extensión cilíndrica C(A) del conjunto difuso A definido en el universo X y la extensión cilíndrica C(B) del conjunto difuso B definido en el universo Y al espacio de producto cartesiano XxY.

$$A = \left\{ \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right\} \qquad B = \left\{ \frac{0.3}{y_1} + \frac{0.9}{y_2} \right\}$$

Composición difusa

Sea A un conjunto difuso definido sobre el universo X y R una relación difusa definida sobre X x Y. La composición de A y R resulta en un conjunto difuso B definido sobre Y y está dado por:

$$B = A \circ R = \mathrm{Pr}\,oj\left(C(A) \cap R\right) \text{ sobre Y.}$$

También pueden existir composiciones difusas de relaciones difusas existentes en espacios de producto cartesiano, siempre y cuando exista al menos una variable compartida.

Tipos de composición

- Composición max-min.

  Si la intersección se realiza con la operación **min** y la proyección con la operación **max**, se tiene:

  $$A \circ R = \max \min\left(\mu_A(x), \mu_R(x, y)\right)$$

- Composición max-producto.

  Si la intersección se realiza con el producto punto y la proyección con la operación **max**, se tiene:

  $$A \circ R = \max\left(\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\right)$$

  También se conoce como **composición max-punto**.

Ejercicio 2.6:

Realice la composición max-min y max-producto del conjunto difuso A y la relación R:

$$A=\left\{\frac{0.4}{a}+\frac{0.6}{b}+\frac{0.2}{c}\right\}$$

$$R = A\times S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 \\ 1 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 2.7:

Realice la composición max-min y max-producto de las siguientes relaciones:

$$R_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \qquad R_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$