

DECONVOLUCIÓN CIEGA DE IMÁGENES CON TÉCNICAS DE APRENDIZAJE PROFUNDO

1.- Idea general de aprendizaje automático

El Aprendizaje Profundo (Deep Learning) constituye un campo interdisciplinario que aborda principios matemáticos, estadísticos y de ciencias de la computación, con el propósito de construir modelos con la capacidad de adquirir representaciones complejas a partir de conjuntos de datos; Este enfoque se orienta hacia la emulación del funcionamiento cerebral humano, capacitando a los sistemas computacionales para asimilar y procesar información proveniente de diversas fuentes, lo que les permite detectar patrones, realizar predicciones y mejorar su desempeño a través de la experiencia adquirida mediante los inputs recibidos.

1.1 Aprender de los datos

El caso de uso más sencillo para un modelo entrenado a partir de datos es cuando se tiene acceso a una señal x , por ejemplo, consideremos el escenario donde se tiene una imagen de una matrícula de un vehículo (x), a partir de la cual se quiere predecir una cantidad y , como la cadena de caracteres escritos en la matrícula.

En situaciones donde los datos (x) son de alta dimensionalidad y provienen de entornos no controlados, encontrar una relación analítica precisa entre la entrada (x) y la salida (y) puede ser extremadamente complejo.

Lo que sí se puede hacer es recopilar un gran conjunto de entrenamiento (\mathcal{D}) que contiene pares de datos de entrada y salida (x_n, y_n), e idear un modelo paramétrico f , con parámetros entrenables (w) que modulan su comportamiento. El objetivo del entrenamiento es encontrar valores de parámetros (w^*) que minimice una función de pérdida ($\mathcal{L}(w)$), que cuantifica la discrepancia entre las predicciones del modelo y las salidas reales en el conjunto del entrenamiento.

1.2 Underfitting y Overfitting

Una consideración clave es encontrar un equilibrio entre la capacidad del modelo (su flexibilidad y habilidad para ajustarse a datos diversos) y la cantidad y calidad de los datos de entrenamiento.

Underfitting: Cuando la capacidad es insuficiente, el modelo no puede ajustarse a los datos (es decir, el modelo es demasiado simple para capturar la estructura subyacente de los datos).

Overfitting: Cuando la cantidad de datos es insuficiente, el modelo suele aprender características específicas de los ejemplos de entrenamiento, lo que se traduce en un excelente rendimiento durante el entrenamiento, a costa de un peor ajuste a la estructura global de los datos y un rendimiento deficiente a las nuevas entradas (es decir, el modelo

se ajusta demasiado a los datos de entrenamiento, perdiendo capacidad de generalización).

El arte del aprendizaje automático radica en diseñar modelos que no sean demasiado flexibles pero capaces de ajustarse a los datos sin overfitting.

1.3 Categorías de modelos

Podemos categorizar los modelos de aprendizaje en tres grandes grupos_

- **Regresión:** Tiene como objetivo predecir valores continuos basados en variables independientes. Por ejemplo, posición geométrica de un objeto dada una señal de entrada x ; U otro ejemplo: predecir el precio de una casa basándose en características como el área, el número de habitaciones, la ubicación, etc.
- **Clasificación:** El objetivo es asignar una etiqueta/categoría a una instancia de datos basándose en sus características. Por ejemplo, para identificar el tipo de animal en una imagen.
- **Modelado de densidad:** Tiene como objetivo modelar la función de densidad de probabilidad de los datos μX para describir la distribución de los datos (es decir, el objetivo es entender la estructura subyacente de los datos y modelar cómo se distribuyen en el espacio de características). Esto puede ser útil en la generación de imágenes, donde se desea crear nuevas imágenes que se parezcan a las de un conjunto de datos de entrenamiento.

Tanto la regresión como la clasificación se refieren generalmente al aprendizaje supervisado, ya que el valor a predecir, que se requiere como objetivo durante el entrenamiento, debe ser proporcionado, mientras la modelización de densidad se considera aprendizaje no supervisado, ya que basta con tomar datos existentes sin necesidad de producir una verdad de referencia asociada.

Estas tres categorías no son mutuamente excluyentes, existen multitud de problemas los cuales se abordan utilizando más de una de estas categorías.

2.- Regresión Lineal

En el campo del aprendizaje automático la regresión lineal emerge como una de las herramientas fundamentales para modelar y comprender relaciones entre variables. En este contexto, el objetivo principal es encontrar una línea recta que se ajuste de manera óptima a un conjunto de datos dispersos en un plano, lo que implica la predicción de un valor numérico a partir de variables independientes (aquí es donde radican los problemas de la regresión).

Consideremos un ejemplo práctico: supongamos que se desea predecir el precio de viviendas en función de su superficie y su antigüedad. Para desarrollar un modelo de predicción de precios de la vivienda, necesitamos disponer de datos que incluyan el precio de venta, la superficie y la antigüedad de las casas. En la terminología del aprendizaje automático, el conjunto de datos se denomina conjunto de datos de entrenamiento o conjunto de entrenamiento, y cada fila (que contiene los datos

correspondientes a una venta) se denomina ejemplo (o punto de datos, instancia, muestra). La variable que intentamos predecir (el precio) se denomina etiqueta (u objetivo). Las variables (superficie y antigüedad) en las que se basan las predicciones se denominan características (o covariables).

2.1 Conceptos Básicos

La regresión lineal es a la vez la más sencilla y la más popular de las herramientas estándar para abordar los problemas de regresión. Este método, que tiene sus raíces en el siglo XIX (en los trabajos pioneros de Gauss y Legendre), se basa en varios supuestos fundamentales que deben cumplirse para su aplicación efectiva.

En primer lugar, se supone que la relación entre las características (x) y el objetivo (y) es aproximadamente lineal, lo que implica que la media condicional de (y) dado (x) $E[Y|X=x]$ puede expresarse como una suma ponderada de las características (x). Esto significa que el valor esperado de la variable dependiente varía linealmente con respecto a las variables independientes. Esta configuración presupone el “ruido de observación”; esto se refiere a que el valor objetivo pueda desviarse de su valor esperado. Este ruido puede deberse a diversas razones, como errores de medición, fluctuaciones aleatorias en el sistema que estamos estudiando, etc. Para abordar este ruido se impone el supuesto de que dicho ruido se comporta bien, siguiendo una distribución gaussiana o normal.

En lo que se refiere a la notación, ‘ n ’ se utiliza para indicar el número total de ejemplos en el conjunto de datos. Los superíndices se utilizan para enumerar las muestras y los objetivos ($X_{(i)}$), y subíndices para indexar las coordenadas ($X_{j(i)}$). Por ejemplo, si estamos analizando el desempeño académico de estudiantes y cada fila de nuestro conjunto de datos representa a un estudiante, entonces $X_{(i)}$ sería una fila particular que corresponde a un estudiante específico. Ahora, $X_{j(i)}$ indica el valor de una característica específica para esa observación en particular. Aquí, ‘ j ’ representa el índice de la característica. Por ejemplo, si estamos analizando el desempeño académico de los estudiantes y tenemos características como horas de estudio, puntaje en matemáticas, puntaje en ciencias, etc., entonces $X_{j(i)}$ sería el valor de la característica ‘ j ’ (por ejemplo, horas de estudio, puntaje en matemáticas, etc.) para la observación ‘ i ’ (por ejemplo, el estudiante ‘ i ’).

2.2 Modelo matemático

El supuesto de linealidad significa que se asume que la relación entre las características (variable independiente) y el objetivo (variable dependiente) es lineal. Esto es, que el valor esperado del objetivo puede expresarse como una suma ponderada de las características. El modelo en su forma compacta es el siguiente:

$$y^{\wedge} = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x} + b$$

En la ecuación x es el vector de características, w se denomina vector de pesos/ponderaciones, y b se denomina sesgo. La ponderación determina la influencia/peso de cada característica en la predicción, mientras que el sesgo determina el valor de estimación cuando todas las características son 0.

Para tratar las características de todo nuestro conjunto de datos de n ejemplos de manera eficiente se utiliza la matriz de diseño, donde X contiene una fila para cada ejemplo y una columna para cada característica, haciendo que las predicciones \hat{y} se expresen mediante un producto matriz-vector:

$$\hat{y} = X \cdot w + b$$

Dadas las características de un conjunto de datos de entrenamiento ' X ' y las correspondientes etiquetas (conocidas) ' y ', el objetivo de la regresión lineal es encontrar el vector de pesos ' w ' y el término de sesgo ' b ' de forma que, dadas las características de un nuevo ejemplo de datos muestreado a partir de la misma distribución que ' X ' la etiqueta del nuevo ejemplo se prediga (en principio) con el menor error, es decir, que, en promedio, los valores del vector de pesos ' w ' y el sesgo ' b ' hagan que las predicciones de nuestro modelo se ajusten lo más posible a los valores reales observados en los datos.

Antes de buscar los mejores parámetros w y b necesitaremos:

- (i) Una medida de calidad.
- (ii) Un procedimiento para actualizar el modelo.

2.3 Función de pérdida

Para ajustar nuestro modelo a los datos, se necesita definir una medida de adecuación/ajuste; esta es la función de pérdida, la cual cuantifica la diferencia entre los valores reales y las predicciones del objetivo. En el contexto de la regresión lineal, la función de pérdida más común es el error cuadrático medio (MSE):

$$l^{(i)}(w, b) = \frac{1}{2} \left(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)} \right)^2.$$

- $\hat{y}^{(i)}$ es la predicción del modelo para el ejemplo i .
- $y^{(i)}$ es el valor real correspondiente al ejemplo i .

La pérdida suele ser un número no negativo en el que los valores más pequeños son mejores y las predicciones perfectas incurrir en una pérdida de 0.

Es importante destacar que la naturaleza cuadrática del MSE puede hacer que el modelo evite grandes errores, pero sea excesivamente sensible a los datos anómalos (es decir, el minimizar esta función puede llevar a un ajuste excesivo a puntos atípicos en el conjunto de datos). Para medir la calidad de un modelo en todo el conjunto de datos de n ejemplos, basta con promediar las pérdidas en el conjunto de entrenamiento:

$$L(w, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l^{(i)}(w, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(w^T x^{(i)} + b - y^{(i)} \right)^2.$$

2.4 Solución analítica

La regresión lineal ofrece una manera sencilla y elegante de calcular los valores óptimos de los parámetros del modelo que minimicen la función de pérdida a través de la siguiente. Primero:

$$L(w) = \|y - Xw\|_2^2$$

podemos subsumir el sesgo b en el parámetro w añadiendo una columna a la matriz de diseño formada por toda por 1s. Entonces nuestro problema de predicción es minimizar $\|y - Xw\|_2^2$. Mientras la matriz de diseño X tenga rango completo (ninguna característica depende linealmente de las demás), sólo habrá un punto crítico en la superficie de pérdida, que corresponde al mínimo de la pérdida en todo el dominio. Si se toma la derivada de la pérdida con respecto a w e igualándola a cero se obtiene:

$$\partial_w \|y - Xw\|_2^2 = 2X^T(Xw - y) = 0 \text{ and hence } X^T y = X^T Xw.$$

Resolviendo para w , nos proporciona la solución óptima para el problema de optimización:

$$w^* = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Nótese que esta solución solo será única cuando la matriz $X^T X$ es invertible.

2.5 Descenso de Gradiente Estocástico por Mini-Lotes

Esta técnica es crucial para optimizar modelos que no pueden ser resueltos de manera analítica y pueden resultar difíciles de optimizar. El descenso de gradiente es el algoritmo principal para reducir iterativamente el error mediante la actualización de los parámetros en la dirección que disminuye incrementalmente la función de pérdida.

La aplicación más básica del descenso de gradiente es calcular la derivada de la función de pérdida, que es un promedio de las pérdidas calculadas en cada ejemplo del conjunto de datos. Sin embargo, en la práctica realizar una actualización completa en cada paso puede ser extremadamente lento, especialmente si hay mucha redundancia en los datos de entrenamiento.

El descenso de gradiente estocástico (SGD) es una solución eficaz (incluso para grandes conjuntos de datos) que consiste en considerar un único ejemplo a la vez para actualizar los parámetros. Aunque eficiente, el SGD tiene desventajas tanto computacionales como estadísticas, como el tiempo necesario para procesar una muestra a la vez y la dificultad para aplicar ciertas técnicas como la normalización por lotes.

Para abordar estos problemas se propone una estrategia intermedia, el descenso de gradiente estocástico mini-batch, donde en lugar de tomar un lote completo o una sola muestra a la vez, tomamos un mini-lote de observaciones.

El funcionamiento de este modelo es el siguiente:

- (i) Inicializa los valores de los parámetros del modelo de forma aleatoria.
- (ii) Muestra iterativamente minilotes aleatorios de los datos, actualizando los parámetros en la dirección del gradiente negativo de la pérdida promedio en el minibatch (el gradiente indica la dirección y la magnitud en la que la pérdida cambia más rápidamente con respecto a los parámetros del modelo).

Después del entrenamiento, los parámetros del modelo se registran para su evaluación en un conjunto de datos de validación separado.

Aunque el algoritmo converge lentamente hacia los minimizadores de pérdida, normalmente no los encontrará exactamente en un número finito de pasos, sin embargo, en la práctica, el objetivo es encontrar cualquier conjunto de parámetros que conduzca a predicciones precisas sobre datos nunca antes vistos.

2.6 Vectorización para velocidad

Durante el proceso de entrenamiento de modelos de regresión lineal, la eficiencia computacional es crucial para manejar grandes conjuntos de datos de manera efectiva. Cuando entrenamos nuestros modelos, normalmente queremos procesar mini-lotes enteros de ejemplos simultáneamente. Para hacerlo de forma eficiente, es necesario vectorizar los cálculos.

La vectorización es una técnica fundamental en la programación computacional que consiste en realizar operaciones sobre vectores o matrices enteras en lugar de elementos individuales. En el contexto de Python y el aprendizaje automático, la vectorización se logra utilizando bibliotecas especializadas de álgebra lineal, como 'PyTorch', que están optimizadas para ejecutar operaciones en matrices de manera eficiente.

Para ilustrar la importancia de la vectorización, consideremos dos métodos para sumar vectores de alta dimensionalidad:

1er método) Iteramos sobre cada elemento de los vectores utilizando un bucle for en Python y sumamos los elementos correspondientes uno a uno.

```
n = 10000
a = torch.ones(n)
b = torch.ones(n)
c = torch.zeros(n)
t = time.time()

for i in range(n):
    c[i] = a[i] + b[i]

f'{time.time() - t:.5f} sec'
```

```
'0.17802 sec'
```

2do método) aprovechamos las capacidades de vectorización de la biblioteca PyTorch para sumar los vectores en una sola operación '+':

```
t = time.time()
d = a + b
f'{time.time() - t:.5f} sec'
```

```
'0.00036 sec'
```

Al comparar los tiempos de ejecución de ambos métodos, observamos una diferencia significativa en la eficiencia a favor del método donde utilizamos operaciones vectorizadas. Este aumento en la velocidad de ejecución puede ser del orden de magnitud, lo que demuestra la importancia de la vectorización para optimizar el rendimiento de los algoritmos de regresión lineal. Además, también reduce la complejidad del código y aumenta su portabilidad al trasladar la carga computacional a las bibliotecas de álgebra lineal.

2.7 La distribución normal y la pérdida al cuadrado

La distribución normal o gaussiana es una de las distribuciones de probabilidad más importantes en la teoría estadística. Esta viene determinada por dos parámetros: la media μ y la varianza σ^2 (desviación típica σ); y viene dada por la fórmula:

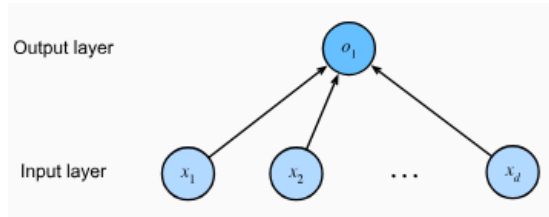
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right).$$

La regresión lineal busca modelar la relación entre una variable dependiente Y y una o más variables independientes X mediante una función lineal. En el contexto de la regresión lineal, se asume que las observaciones están sujetas a errores aleatorios (es decir, las diferencias entre los valores observados y los valores predichos por el modelo) que siguen una distribución normal. Es decir, se supone que los errores de predicción ε tienen una distribución normal con una media de cero (se espera que los errores de predicción se distribuyan alrededor de cero) y una varianza constante σ^2 (la dispersión de los errores es constante en todo el rango de los valores de las variables independientes).

La elección de la pérdida al cuadrado en la regresión lineal se justifica teóricamente mediante el principio de máxima verosimilitud (es decir, buscar aquellos valores de los parámetros del modelo que hacen que nuestros datos sean lo más probables posible). Según este principio, los mejores estimadores de los parámetros del modelo son aquellos que maximizan la probabilidad de observar los datos dados los parámetros del modelo. En el caso de la regresión lineal, maximizar la verosimilitud es equivalente a minimizar la suma de los cuadrados de los errores residuales, ya que se asume que los errores siguen una distribución normal. Por lo tanto, la minimización de la pérdida al cuadrado en la regresión lineal conduce a estimaciones de parámetros que son consistentes con el enfoque de máxima verosimilitud.

2.8 Regresión Lineal como red neuronal

La siguiente figura representa la regresión lineal como una red neuronal. El diagrama destaca el patrón de conectividad, por ejemplo, cómo se conecta cada entrada x_1, \dots, x_d (es decir las diferentes características o variables independientes) a la salida ' o_1 ' (la predicción), pero no los valores específicos que toman los pesos o los sesgos.



En resumen, en esta ilustración podemos pensar en la regresión lineal como una red neuronal totalmente conectada de una sola capa.

3.2.- Implementación en Pytorch

En pytorch tenemos tres clases principales:

- (i). Module: contiene módulos, pérdidas y métodos de optimización.
- (ii). DataModule: proporciona cargadores de datos para el entrenamiento y la validación.
- (iii). ambas clases se combinan utilizando la clase Trainer, que nos permite entrenar modelos en una variedad de plataformas de hardware.

```
import time
import numpy as np
import torch
from torch import nn
from d2l import torch as d2l
```

3.2.1.- Utilidades

Uno de los contras de las definiciones de clases suelen ser bloques de código bastante largos; Para solucionar esto existe la sentencia '@add_to_class(Class)' .

Por ejemplo: queremos implementar una clase **A** que va a tener un método **do**. En lugar de que en **A** este todo el código de la clase, podemos implementar en **A** los datos miembros de esta y su inicializador. Luego podemos declarar el método **do** fuera del alcance de la clase, pero añadiendo el decorador '@add_to_class(A)' para que el método se incorpore como método de la clase **A**:


```
def add_to_class(Class): #@save
    """Register functions as methods in created class."""
    def wrapper(obj):
        setattr(Class, obj.__name__, obj)
    return wrapper

class A:
    def __init__(self):
        self.b = 1

a = A()

@add_to_class(A)
def do(self):
    print('Class attribute "b" is', self.b)

a.do()
```

```
Class attribute "b" is 1
```

La segunda es una clase de utilidad que guarda todos los argumentos que se le pasan al método `__init__` de una clase como atributos de clase. Esto nos permite llamar al constructor con diferentes argumentos sin tener que añadir código adicional.

```
class HyperParameters: #@save
    """The base class of hyperparameters."""
    def save_hyperparameters(self, ignore=[]):
        raise NotImplemented
```

Para usarlo, definimos nuestra clase que hereda de `HyperParameters` y llama a `save_hyperparameters` en el método `__init__`.

```
# Call the fully implemented HyperParameters class saved in d21
class B(d21.HyperParameters):
    def __init__(self, a, b, c):
        self.save_hyperparameters(ignore=['c'])
        print('self.a =', self.a, 'self.b =', self.b)
        print('There is no self.c =', not hasattr(self, 'c'))

b = B(a=1, b=2, c=3)
```

```
self.a = 1 self.b = 2
There is no self.c = True
```

3.2.2.- Module

La clase **Module** es la clase base de todos los modelos (y de las redes neuronales). Necesitaremos tres métodos:

- (i). **__init__**: almacena los parámetros aprendibles.
- (ii). **training_step**: acepta un lote de datos para devolver el valor de pérdida.
- (iii). **configure_optimizers**: devuelve el método de optimización, o una lista de ellos, que se utiliza para actualizar los parámetros aprendibles.

```
class Module(nn.Module, d2l.HyperParameters): #@save
    """The base class of models."""
    def __init__(self, plot_train_per_epoch=2, plot_valid_per_epoch=1):
        super().__init__()
        self.save_hyperparameters()
        self.board = ProgressBoard()

    def loss(self, y_hat, y):
        raise NotImplementedError

    def forward(self, X):
        assert hasattr(self, 'net'), 'Neural network is defined'
        return self.net(X)

    def plot(self, key, value, train):
        """Plot a point in animation."""
        assert hasattr(self, 'trainer'), 'Trainer is not initied'
        self.board.xlabel = 'epoch'
        if train:
            x = self.trainer.train_batch_idx / \
                self.trainer.num_train_batches
            n = self.trainer.num_train_batches / \
                self.plot_train_per_epoch
        else:
            x = self.trainer.epoch + 1
            n = self.trainer.num_val_batches / \
                self.plot_valid_per_epoch
        self.board.draw(x, value.to(d2l.cpu()).detach().numpy(),
                        ('train_' if train else 'val_') + key,
                        every_n=int(n))

    def training_step(self, batch):
        l = self.loss(self(*batch[:-1]), batch[-1])
        self.plot('loss', l, train=True)
        return l

    def validation_step(self, batch):
        l = self.loss(self(*batch[:-1]), batch[-1])
        self.plot('loss', l, train=False)
```

```
def configure_optimizers(self):  
    raise NotImplementedError
```

Opcionalmente podemos definir **validation_step** para informar de las medidas de evaluación.

3.2.3.- Data

La clase **DataModule** es la clase base para los datos. Utiliza el método **__init__** para preparar los datos. El método **train_dataloader** devuelve el cargador de datos para el conjunto de datos de entrenamiento. Un cargador de datos es un generador (Python) que produce un lote de datos cada vez que se utiliza. Este lote se introduce en el método **training_step** de Module para calcular la pérdida. *(Existe un **val_dataloader** opcional para devolver el cargador del conjunto de datos de validación. Se comporta de la misma manera, excepto que produce lotes de datos para el método **validation_step** de Module.)*

```
class DataModule(d2l.HyperParameters): #@save  
    """The base class of data."""  
    def __init__(self, root='../data', num_workers=4):  
        self.save_hyperparameters()  
  
    def get_dataloader(self, train):  
        raise NotImplementedError  
  
    def train_dataloader(self):  
        return self.get_dataloader(train=True)  
  
    def val_dataloader(self):  
        return self.get_dataloader(train=False)
```

3.2.4.- Training

La clase **Trainer** entrena los parámetros aprendibles de la clase Módulo con los datos especificados en DataModule. El método clave es **fit**, que acepta dos argumentos: *model*, una instancia de Module, y *data*, una instancia de DataModule. A continuación, itera sobre todo el conjunto de datos *max_epochs* veces para entrenar el modelo. Como antes, dejaremos la implementación de este método para capítulos posteriores.

```
class Trainer(d2l.HyperParameters): #@save  
    """The base class for training models with data."""  
    def __init__(self, max_epochs, num_gpus=0, gradient_clip_val=0):  
        self.save_hyperparameters()  
        assert num_gpus == 0, 'No GPU support yet'  
  
    def prepare_data(self, data):  
        self.train_dataloader = data.train_dataloader()  
        self.val_dataloader = data.val_dataloader()  
        self.num_train_batches = len(self.train_dataloader)
```

```

        self.num_val_batches = (len(self.val_dataloader)
                                if self.val_dataloader is not None else 0)

    def prepare_model(self, model):
        model.trainer = self
        model.board.xlim = [0, self.max_epochs]
        self.model = model

    def fit(self, model, data):
        self.prepare_data(data)
        self.prepare_model(model)
        self.optim = model.configure_optimizers()
        self.epoch = 0
        self.train_batch_idx = 0
        self.val_batch_idx = 0
        for self.epoch in range(self.max_epochs):
            self.fit_epoch()

    def fit_epoch(self):
        raise NotImplementedError

```

3.4.- Implementación desde 0: Regresión Lineal

Ahora estamos listos para trabajar con una implementación de regresión lineal completamente funcional. Vamos a implementar el método desde cero, incluyendo:

- (i) el modelo;
- (ii) la función de pérdida;
- (iii) un optimizador de descenso de gradiente estocástico minibatch;
- (iv) la función de entrenamiento que une todas estas piezas.

```

%matplotlib inline
import torch
from d2l import torch as d2l

```

3.4.1.- Definiendo el modelo

Antes de que podamos empezar a optimizar los parámetros de nuestro modelo mediante SGD (descenso de gradiente estocástico) de mini-lotes, necesitamos tener algunos parámetros en primer lugar. A continuación, inicializamos los pesos extrayendo números aleatorios de una distribución normal con media 0 y una desviación estándar de 0,01. El número mágico 0,01 suele funcionar bien en la práctica, pero se puede especificar un valor diferente mediante el argumento sigma. Además, establecemos el sesgo a 0.

Comentado [JT1]: En el código 'regresion lineal - pytorch.ipynb' está el código explicado.

```
class LinearRegressionScratch(d2l.Module): #@save
    """The linear regression model implemented from scratch."""
    def __init__(self, num_inputs, lr, sigma=0.01):
        super().__init__()
        self.save_hyperparameters()
        self.w = torch.normal(0, sigma, (num_inputs, 1), requires_grad=True)
        self.b = torch.zeros(1, requires_grad=True)
```

A continuación, tenemos que definir nuestro modelo, relacionando su entrada y sus parámetros con su salida. Tomamos el producto vectorial-matricial de las características de entrada X y las ponderaciones del modelo w , y añadimos el desplazamiento b a cada ejemplo. El producto Xw es un vector y b es un escalar (Cuando sumamos un vector y un escalar, el escalar se añade a cada componente del vector). El método forward resultante se registra en la clase LinearRegressionScratch mediante **add_to_class**.

```
@d2l.add_to_class(LinearRegressionScratch) #@save
def forward(self, X):
    return torch.matmul(X, self.w) + self.b
```

3.4.2.- Definiendo la función de pérdida

Dado que la actualización de nuestro modelo requiere tomar el gradiente de nuestra función de pérdida, debemos definir primero la función de pérdida. Utilizaremos la función de pérdida al cuadrado (error cuadrático medio MSE). En la implementación, necesitamos transformar el valor verdadero y (etiquetas reales) en la forma del valor predicho y_{hat} (predicciones del modelo). El resultado devuelto por el siguiente método también tendrá la misma forma que y_{hat} . También devolvemos el valor medio de la pérdida entre todos los ejemplos del mini-lote.

```
@d2l.add_to_class(LinearRegressionScratch) #@save
def loss(self, y_hat, y):
    l = (y_hat - y) ** 2 / 2
    return l.mean()
```

3.4.3.- Definiendo del algoritmo de optimización

En cada paso, utilizando un mini-lote extraído aleatoriamente de nuestro conjunto de datos, estimamos el gradiente de la pérdida con respecto a los parámetros. A continuación, actualizamos los parámetros en la dirección que pueda reducir la pérdida.

El código siguiente aplica la actualización, dado un conjunto de parámetros, una tasa de aprendizaje lr . Dado que nuestra pérdida se calcula como una media sobre el mini-lote, no necesitamos ajustar la tasa de aprendizaje en función del tamaño del lote.

*Actualizamos los parámetros en el método **step**. El método **zero_grad** establece todos los gradientes a 0, que debe ejecutarse antes de un paso de retropropagación.*

```
class SGD(d2l.HyperParameters): #@save
    """Minibatch stochastic gradient descent."""
```

```

def __init__(self, params, lr):
    self.save_hyperparameters()

def step(self):
    for param in self.params:
        param -= self.lr * param.grad

def zero_grad(self):
    for param in self.params:
        if param.grad is not None:
            param.grad.zero_()

```

A continuación, definimos el método **configure_optimizers**, que devuelve una instancia de la clase SGD.

```

@d2l.add_to_class(LinearRegressionScratch) #@save
def configure_optimizers(self):
    return SGD([self.w, self.b], self.lr)

```

3.4.4.- Entrenamiento

Ahora que tenemos todas las piezas en su lugar (parámetros, función de pérdida, modelo y optimizador), estamos listos para implementar el bucle de entrenamiento principal. En cada **'epoch'**, iteramos a través de todo el conjunto de datos de entrenamiento, pasando una vez por cada ejemplo (suponiendo que el número de ejemplos es divisible por el tamaño del lote). En cada iteración, tomamos un mini-lote de ejemplos de entrenamiento, y calculamos su pérdida a través del método `training_step` del modelo. A continuación, calculamos los gradientes con respecto a cada parámetro. Finalmente, llamaremos al algoritmo de optimización para actualizar los parámetros del modelo. En resumen, ejecutaremos el siguiente bucle:

- Inicializar parámetros (w,b)
- Repetir hasta terminar
 - o Calcular el gradiente g
 - o Actualizar parámetros (w,b) \leftarrow (w,b)

En la mayoría de los casos queremos un conjunto de datos de validación para medir la calidad de nuestro modelo. Aquí pasamos el cargador de datos de validación una vez en cada **epoch** (época) para medir el rendimiento del modelo. Siguiendo nuestro diseño orientado a objetos, los métodos `prepare_batch` y `fit_epoch` están registrados en la clase `d2l.Trainer` (introducida en la Sección 3.2.4).

```

@d2l.add_to_class(d2l.Trainer) #@save
def prepare_batch(self, batch):
    return batch

@d2l.add_to_class(d2l.Trainer) #@save
def fit_epoch(self):
    self.model.train()
    for batch in self.train_dataloader:
        loss = self.model.training_step(self.prepare_batch(batch))

```

```

self.optim.zero_grad()
with torch.no_grad():
    loss.backward()
    if self.gradient_clip_val > 0: # To be discussed later
        self.clip_gradients(self.gradient_clip_val, self.model)
    self.optim.step()
    self.train_batch_idx += 1
if self.val_dataloader is None:
    return
self.model.eval()
for batch in self.val_dataloader:
    with torch.no_grad():
        self.model.validation_step(self.prepare_batch(batch))
    self.val_batch_idx += 1

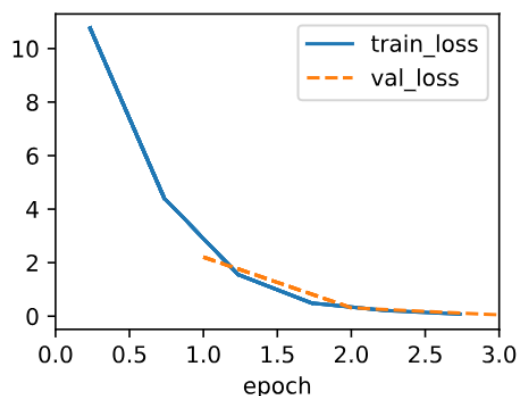
```

Estamos casi listos para entrenar el modelo, pero primero necesitamos algunos datos de entrenamiento. Aquí usamos la clase `SyntheticRegressionData` y le pasamos algunos parámetros de verdad. A continuación, entrenamos nuestro modelo con la tasa de aprendizaje $lr=0.03$ y establecemos `max_epochs=3`. Tenga en cuenta que, en general, tanto el número de épocas como la tasa de aprendizaje son hiperparámetros. En general, establecer hiperparámetros es complicado y normalmente queremos utilizar una división en tres, un conjunto para el entrenamiento, un segundo para la selección de hiperparámetros, y el tercero reservado para la evaluación final.

```

model = LinearRegressionScratch(2, lr=0.03)
data = d2l.SyntheticRegressionData(w=torch.tensor([2, -3.4]), b=4.2)
trainer = d2l.Trainer(max_epochs=3)
trainer.fit(model, data)

```



Comentado [JT2]: train_loss: Representa la pérdida durante el entrenamiento del modelo en cada época. Esta pérdida se calcula utilizando los datos de entrenamiento y se utiliza para actualizar los parámetros del modelo durante el proceso de entrenamiento. El objetivo es minimizar esta pérdida para que el modelo se ajuste mejor a los datos de entrenamiento.

val_loss: Representa la pérdida durante la validación del modelo en cada época. Esta pérdida se calcula utilizando un conjunto de datos de validación separado, que no se utiliza para entrenar el modelo. La validación se realiza para evaluar el rendimiento del modelo en datos que no ha visto durante el entrenamiento y para detectar posibles problemas de sobreajuste. El objetivo es minimizar también esta pérdida, lo que indica que el modelo generaliza bien a nuevos datos.

3.6.- Generalización (Overfitting y Underfitting)

3.6.1.- Error de entrenamiento y error de generalización

- Error de entrenamiento (Remp): Es una métrica que muestra qué tan bien se ajusta tu modelo a los datos que has utilizado para entrenarlo. (Error de entrenamiento bajo -> modelo capaz de ajustarse a etiquetas arbitrarias).
- Error de generalización (R): Este es como el error que esperarías ver si aplicarás tu modelo a un número infinito de nuevos datos que provienen de la misma fuente que tus datos de entrenamiento.
- Diferencia entre ambos: El error de entrenamiento se calcula usando solo los datos de entrenamiento, mientras que el error de generalización se calcula considerando toda la población subyacente.
- Problema central: Nunca podemos calcular el error de generalización exactamente, ya que no conocemos la verdadera distribución de los datos. Además, no podemos tener un flujo infinito de datos para probar nuestro modelo.
- Cómo se estima el error de generalización en la práctica: Utilizamos un conjunto de pruebas independiente, que es una selección aleatoria de datos del conjunto de entrenamiento que no se usaron durante el entrenamiento del modelo. Aplicamos el modelo a este conjunto de pruebas para estimar su rendimiento.
- Importancia de la generalización: La cuestión clave es cuándo podemos esperar que el error de entrenamiento sea una buena aproximación del error de generalización. Esto es fundamental para asegurarnos de que nuestro modelo funcione bien en datos nuevos y no solo en los datos de entrenamiento.

Comentado [JT3]: Imagina que estás enseñando a un robot a reconocer gatos en imágenes. Tienes un conjunto de datos de 1000 imágenes de gatos, cada una etiquetada como "gato" o "no gato". Este es tu conjunto de datos de entrenamiento.

1. ****Error de entrenamiento (Remp)**:** Después de entrenar al robot con estas 1000 imágenes, calculas que comete errores en 50 imágenes. Entonces, tu error de entrenamiento sería del 5% (50 errores de clasificación de 1000 imágenes).

2. ****Error de generalización (R)**:** Ahora, imagina que tienes un flujo infinito de imágenes de gatos que nunca antes has visto, y le pides al robot que las clasifique. El error de generalización sería el porcentaje de estas nuevas imágenes de gatos que el robot clasifica incorrectamente.

Entonces, la diferencia clave es que el error de entrenamiento se basa en el conjunto de datos de entrenamiento específico que tienes, mientras que el error de generalización se refiere a cómo se desempeñaría el robot en un conjunto infinito de datos nuevos de la misma naturaleza que los datos de entrenamiento.

En resumen, el error de entrenamiento te dice cómo le está yendo al robot con los datos con los que lo entrenaste, mientras que el error de generalización te dice qué tan bien podría hacer el robot con datos completamente nuevos que nunca antes ha visto.

Comentado [JT4]: El modelo no logra capturar la estructura subyacente de los datos (es decir, los patrones o las relaciones fundamentales presentes en los datos).

Comentado [JT5]: El modelo se ajusta demasiado a los datos de entrenamiento capturando incluso ruido o las fluctuaciones irrelevantes en los datos.

Comentado [JT6]: Cuantas menos muestras tengamos en el conjunto de datos de entrenamiento mas probabilidad de overfitting

3.6.2.- ¿Underfitting o Overfitting?

Cuando miramos los errores de entrenamiento y validación, hay dos situaciones clave que debemos tener en cuenta:

1.- **Underfitting**: Si los errores de entrenamiento y validación son altos, pero apenas hay diferencia entre ellos, podría significar que nuestro modelo es demasiado simple para capturar el patrón que intentamos modelar. En este caso, podríamos necesitar un modelo más complejo para mejorar la predicción.

2.- **Overfitting**: Cuando el error de entrenamiento es mucho más bajo que el error de validación, indica que el modelo se ha ajustado demasiado a los datos de entrenamiento y no generaliza bien a nuevos datos. Aunque el sobreajuste no siempre es malo, ya que algunos modelos complejos pueden funcionar mejor en los datos de entrenamiento, lo importante es reducir el error de generalización, preocupándonos por la brecha (Remp - R) solo si dificulta este objetivo.

Si el error de entrenamiento es cero, la brecha de generalización es igual al error de generalización, y solo podemos avanzar reduciendo esta brecha.

5.1.- Perceptrón Multicapa

El perceptrón multicapa (MLP por sus siglas en inglés) es una arquitectura de redes neuronales profundas que consiste en una sucesión de capas totalmente conectadas separadas por funciones de activación.

5.1.1.- Capas Ocultas

En comparación con modelos lineales simples, los perceptrones multicapa (redes neuronales) introducen capas ocultas que permiten aprender representaciones más complejas de los datos. Mientras que los modelos lineales operan bajo la suposición de linealidad, las capas ocultas permiten capturar relaciones no lineales entre las características de entrada y las salidas deseadas.

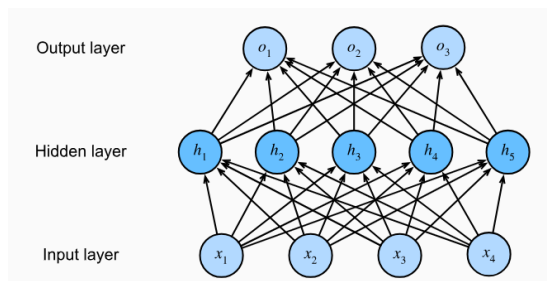
5.1.1.1- Limitaciones de los modelos

Los modelos lineales asumen una relación lineal entre las características de entrada y las salidas. Sin embargo, esta suposición puede ser demasiado restrictiva en muchos casos. Por ejemplo, la monotonidad (aumento o disminución constante en la salida ante cambios en las características de entrada) puede no ser válida en todas las situaciones.

En problemas de clasificación de imágenes, la no linealidad es aún más evidente. La relación entre los píxeles de una imagen y su categoría (por ejemplo, perro o gato) no es lineal y puede ser altamente compleja. La confianza en un modelo lineal para esta tarea es ingenua, ya que no puede capturar adecuadamente las relaciones espaciales entre los píxeles que son esenciales para la clasificación precisa de imágenes.

5.1.1.2.- Incorporando capas ocultas

Podemos superar las limitaciones de los modelos lineales incorporando una o más capas ocultas. La forma más sencilla de hacerlo es apilar muchas capas completamente conectadas una encima de la otra. Cada capa alimenta a la siguiente capa, con la última capa produciendo las salidas. Las primeras L-1 capas se consideran la representación de los datos, mientras que la última capa se utiliza para realizar la predicción lineal. Esta arquitectura es comúnmente conocida como MLP.



5.1.2.- Funciones de activación

Son operadores diferenciables que deciden si una neurona debe activarse o no al calcular la suma ponderada y agregar un sesgo adicional. Introducen no linealidad en las redes neuronales, lo que es crucial para el aprendizaje profundo.

5.1.2.1.- Función ReLU

- Es una función de activación no lineal muy popular, que retorna cero para valores negativos y el mismo valor para valores positivos.
- $\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$
- La función ReLU es muy eficiente computacionalmente y permite un entrenamiento más rápido de redes neuronales profundas debido a su simplicidad.
- Sin embargo, puede presentar el problema conocido como "dying ReLU", donde algunas neuronas pueden quedar inactivas y no actualizar sus pesos durante el entrenamiento, lo que puede afectar negativamente al rendimiento de la red.

5.1.2.- Función Sigmoide

- La función sigmoide toma cualquier valor real como entrada y produce una salida en el rango de 0 a 1.
- $\text{Sigmoid}(x) = 1 / (1 + \exp(-x))$
- Es una función suave y diferenciable, lo que la hace útil en el entrenamiento de redes neuronales mediante técnicas de optimización como el descenso de gradiente.
- Sin embargo, puede sufrir del problema de desvanecimiento del gradiente cuando se utilizan muchas capas en una red profunda, lo que puede dificultar el entrenamiento.

5.1.2.- Función Tanh

- Similar a la función sigmoide, pero produce una salida en el rango de -1 a 1.
- $\tanh(x) = (1 - \exp(-2x)) / (1 + \exp(-2x))$
- Al igual que la función sigmoide, es suave y diferenciable, lo que la hace útil en el entrenamiento de redes neuronales.
- A menudo se prefiere sobre la función sigmoide en capas ocultas de redes neuronales, ya que produce salidas centradas alrededor de cero, lo que puede ayudar a mantener la salida de la red en un rango manejable.

5.2.- Implementación de perceptrones multicapa

5.2.1.2.- Modelo

La implementación del MLP se realiza utilizando la clase Sequential de PyTorch, lo que nos permite definir de manera secuencial las capas del modelo de forma más compacta. Definimos una capa oculta y una capa de salida en una sola línea de código.

```
class MLP(d2l.Classifier):
    def __init__(self, num_outputs, num_hiddens, lr):
        super().__init__()
        self.save_hyperparameters()
        self.net = nn.Sequential(nn.Flatten(), nn.LazyLinear(num_hiddens),
                                nn.ReLU(), nn.LazyLinear(num_outputs))
```

5.2.1.3.- Training

Afortunadamente, el ciclo de entrenamiento para MLP es exactamente el mismo que para la regresión softmax. Definimos el modelo, los datos y el entrenador, luego finalmente invocamos el fit método en el modelo y los datos.

```
model = MLP(num_outputs=10, num_hiddens=256, lr=0.1)
data = d2l.FashionMNIST(batch_size=256)
trainer = d2l.Trainer(max_epochs=10)
trainer.fit(model, data)
```

6.1.- Capas y módulos

En el contexto de las redes neuronales, inicialmente nos centramos en modelos simples con una sola neurona que toma entradas, produce una salida y tiene parámetros ajustables. Más tarde, al considerar redes con múltiples salidas, utilizamos capas completas de neuronas, que funcionan de manera similar, pero con entradas y salidas vectorizadas. Incluso al introducir modelos más complejos como los MLP, estos mantienen la misma estructura básica.

Para construir redes neuronales más grandes y complejas, surgió la necesidad de hablar sobre componentes más grandes que una sola capa, pero más pequeños que el modelo completo. Para abordar esto, introducimos el concepto de módulos de red neuronal, que pueden describir desde una sola capa hasta el modelo completo. Los módulos se pueden combinar de forma recursiva para crear artefactos más grandes. Esto simplifica la implementación de redes complejas, ya que los módulos pueden definirse con métodos para la propagación hacia adelante y hacia atrás, y encapsulan los parámetros necesarios.

```
import torch
from torch import nn
from torch.nn import functional as F

net = nn.Sequential(nn.LazyLinear(256), nn.ReLU(), nn.LazyLinear(10))

X = torch.rand(2, 20)
net(X).shape
torch.Size([2, 10])
```

Comentado [JT7]: class MLP(d2l.Classifier):: Define una nueva clase llamada MLP que hereda de la clase d2l.Classifier. Esto significa que la clase MLP tendrá todas las propiedades y métodos de d2l.Classifier, además de cualquier modificación o adición que hagamos en la definición de la clase MLP.

def __init__(self, num_outputs, num_hiddens, lr):: Este es el método constructor de la clase MLP. Toma tres parámetros: num_outputs (número de unidades en la capa de salida), num_hiddens (número de unidades en la capa oculta) y lr (tasa de aprendizaje).

super().__init__(): Llama al método __init__() de la clase padre (d2l.Classifier). Esto es útil cuando queremos inicializar propiedades heredadas de la clase padre.

self.save_hyperparameters(): Guarda automáticamente los hiperparámetros (en este caso, num_outputs, num_hiddens y lr) para su uso posterior. Esto es útil para mantener un registro de los hiperparámetros utilizados durante el entrenamiento.

self.net = nn.Sequential(nn.Flatten(), nn.LazyLinear(num_hiddens), nn.ReLU(), nn.LazyLinear(num_outputs)): Define la red neuronal como una secuencia de capas utilizando nn.Sequential(). Las capas incluidas son:

nn.Flatten(): Esta capa se utiliza para aplanar los datos de entrada. Es útil cuando los datos de entrada tienen una forma de tensor multidimensional, como imágenes.

nn.LazyLinear(num_hiddens): Define una capa lineal (totalmente conectada) con num_hiddens unidades. La capa LazyLinear se utiliza para una inicialización diferida de los pesos, lo que puede ser útil en algunos casos de implementación.

nn.ReLU(): Define la función de activación ReLU que se aplicará después de la primera capa lineal.

nn.LazyLinear(num_outputs): Define la capa de salida lineal con num_outputs unidades.

En el código, implementamos un MLP con una capa oculta de 256 unidades con activación ReLU, seguida de una capa de salida con diez unidades. Esto se logra mediante la clase `nn.Sequential`, que organiza las capas en orden y las ejecuta secuencialmente. Cada capa está representada por una instancia de la clase `Module`, con métodos simples para propagar la entrada hacia adelante. La invocación del modelo se realiza a través de `net(X)`, que es una abreviatura de `net.__call__(X)`.

6.1.1.- Un módulo personalizado

Para entender cómo funciona un módulo, es útil implementarlo desde cero. Un módulo debe cumplir varias funciones básicas:

1. Aceptar datos de entrada para la propagación hacia adelante.
2. Generar una salida basada en los datos de entrada.
3. Calcular el gradiente de la salida con respecto a la entrada.
4. Almacenar y proporcionar acceso a los parámetros necesarios.
5. Inicializar los parámetros del modelo según sea necesario.

En el siguiente código, creamos un módulo personalizado para un MLP con una capa oculta de 256 unidades y una capa de salida de 10 dimensiones. La clase `MLP` hereda de `nn.Module` y define un constructor y un método de propagación hacia adelante.

```
class MLP(nn.Module):
    def __init__(self):
        # Call the constructor of the parent class nn.Module to perform
        # the necessary initialization
        super().__init__()
        self.hidden = nn.Linear(256)
        self.out = nn.Linear(10)

        # Define the forward propagation of the model, that is, how to return the
        # required model output based on the input X
    def forward(self, X):
        return self.out(F.relu(self.hidden(X)))
```

El método de propagación hacia adelante toma la entrada `X`, calcula la representación oculta con una función de activación aplicada, y genera los logits (son las salidas no normalizadas de un modelo, es decir, los valores que se generan directamente a partir de la última capa antes de aplicar la función de activación final). Las capas del MLP se instancian en el constructor y se invocan en cada llamada al método `forward`.

Una ventaja clave de la abstracción del módulo es su versatilidad. Podemos usarla para crear capas individuales, modelos completos o componentes de complejidad intermedia. Esta versatilidad se explora en los próximos capítulos, como cuando trabajamos con redes neuronales convolucionales.

6.1.3.- Ejecutar código en el método de propagación hacia adelante

La clase Sequential simplifica la creación de modelos, pero a veces necesitamos más flexibilidad para definir nuestras propias arquitecturas. Podemos ejecutar código Python personalizado en el método de propagación hacia adelante y realizar operaciones matemáticas arbitrarias. Por ejemplo, podríamos querer incorporar parámetros constantes en nuestras capas, como en el caso de la clase FixedHiddenMLP.

```
class FixedHiddenMLP(nn.Module):
    def __init__(self):
        super().__init__()
        # Random weight parameters that will not compute gradients and
        # therefore keep constant during training
        self.rand_weight = torch.rand((20, 20))
        self.linear = nn.Linear(20)

    def forward(self, X):
        X = self.linear(X)
        X = F.relu(X @ self.rand_weight + 1)
        # Reuse the fully connected layer. This is equivalent to sharing
        # parameters with two fully connected layers
        X = self.linear(X)
        # Control flow
        while X.abs().sum() > 1:
            X /= 2
        return X.sum()
```

Esta clase implementa una capa oculta con pesos inicializados aleatoriamente que permanecen constantes durante el entrenamiento. Después de pasar la salida de esta capa por una capa completamente conectada, ejecutamos un bucle while que divide el vector de salida por 2 hasta que cumple una condición específica. Esta operación no es común en las redes neuronales estándar, pero ilustra cómo integrar código personalizado en el flujo de cálculo de la red.

La clase NestMLP anida módulos de manera creativa, utilizando una combinación de capas secuenciales y capas lineales. Por ejemplo, la función forward de NestMLP primero pasa los datos de entrada a través de una secuencia de capas lineales y activaciones ReLU, y luego los pasa por una capa lineal final.

```
class NestMLP(nn.Module):
    def __init__(self):
        super().__init__()
        self.net = nn.Sequential(nn.Linear(64), nn.ReLU(),
                                nn.Linear(32), nn.ReLU())
        self.linear = nn.Linear(16)

    def forward(self, X):
        return self.linear(self.net(X))

chimera = nn.Sequential(NestMLP(), nn.Linear(20), FixedHiddenMLP())
chimera(X)
```

Podemos combinar diferentes módulos de formas diversas, como se muestra en el ejemplo con la variable chimera, que contiene una instancia de NestMLP, seguida de una

capa lineal y una instancia de FixedHiddenMLP. Esto demuestra cómo podemos crear arquitecturas más complejas ensamblando varios módulos de manera creativa.

6.2.- Gestión de parámetros

Una vez configurada la arquitectura y los hiperparámetros de nuestra red neuronal, nos adentramos en el ciclo de entrenamiento. Durante este proceso, nuestro objetivo es minimizar la función de pérdida encontrando valores óptimos para los parámetros del modelo. Posteriormente, estos parámetros serán esenciales para realizar predicciones futuras y pueden ser útiles para otros propósitos, como la reutilización del modelo en diferentes contextos o su análisis científico.

Aunque en la mayoría de los casos confiamos en los frameworks de aprendizaje profundo para manejar los detalles de declaración y manipulación de parámetros, a veces es necesario adentrarse en estos aspectos, especialmente al trabajar con arquitecturas no estándar. En esta sección, nos enfocamos en dos aspectos clave:

6.2.1.- Acceso a parámetros

Para depuración, diagnóstico y visualizaciones, es importante poder acceder a los parámetros de nuestro modelo. Esto se puede lograr de manera sencilla cuando se utiliza una estructura secuencial como en el caso de `torch.nn.Sequential`. Por ejemplo, podemos acceder a los parámetros de una capa específica utilizando la indexación del modelo y examinar sus atributos.

```
net[2].state_dict()
OrderedDict([('weight',
              tensor([[ -0.1649,  0.0605,  0.1694, -0.2524,  0.3526, -0.3414, -
0.2322,  0.0822]])),
            ('bias', tensor([0.0709]))])
```

6.2.2.- Parámetros compartidos

En ocasiones, deseamos compartir parámetros entre diferentes componentes de nuestro modelo. Esto se puede lograr asignando los mismos parámetros a varias capas. Por ejemplo, podemos configurar los parámetros de una capa para que sean los mismos que los de otra capa, lo que resulta útil en ciertos escenarios de diseño de redes.

```
shared = nn.Linear(8)
net = nn.Sequential(
    nn.Linear(8),
    nn.ReLU(),
    shared,
    nn.ReLU(),
    shared,
    nn.ReLU(),
    nn.Linear(1))
```

5.3.- Propagación hacia delante y atrás

5.3.1.-Propagación hacia delante (o directa)

La propagación hacia adelante es un proceso fundamental en el funcionamiento de las redes neuronales en el que los datos de entrada se propagan a través de la red neuronal capa por capa, desde la entrada hasta la salida. Vamos a desglosar cómo funciona este proceso paso a paso para comprenderlo mejor.

Primero, consideremos un ejemplo de entrada x que pertenece al conjunto de números reales (R). Digamos que nuestra red neuronal tiene una capa oculta y no incluye un término de sesgo para simplificar las cosas. En este caso, necesitamos calcular una variable intermedia, que llamaremos z , utilizando la multiplicación de la entrada x por el parámetro de peso $W(1)$ de la capa oculta.

$$z = W(1) * x$$

Ahora, una vez que tenemos esta variable intermedia z , la pasamos a través de una función de activación, que denotamos como o , para obtener el vector de activación oculto h . Esto se realiza mediante la fórmula $h = o(z)$. El vector h representa la salida de la capa oculta y es otra variable intermedia en nuestro proceso.

Ahora, supongamos que los parámetros de la capa de salida incluyen solo un peso, denotado como $W(2)$, que también es un número real (R). Podemos obtener una variable de capa de salida utilizando este peso $W(2)$ multiplicado por el vector de activación oculto h , lo que se expresa como:

$$o = W(2) * h$$

Aquí, o representa la salida final de la red neuronal.

En términos de optimización y regularización del modelo, introducimos un término de regularización s , que se calcula utilizando la norma de Frobenius de las matrices de pesos ($W(1)$ y $W(2)$). La norma de Frobenius es simplemente la norma L^2 aplicada aplanando la matriz en un vector. El término de regularización se suma a la pérdida del modelo (J), junto con la pérdida sin regularización (L), donde

$$J = L + s$$

Esta función J se conoce como la función objetivo del modelo.

5.3.3.-Propagación hacia atrás

La propagación hacia atrás es un proceso fundamental en el entrenamiento de redes neuronales, ya que permite ajustar los pesos de las conexiones entre las neuronas para minimizar el error de predicción. Veamos cómo funciona este proceso paso a paso:

1. **Cálculo del Error:** En primer lugar, después de que la red neuronal ha realizado una propagación hacia adelante y ha generado una predicción para un conjunto de datos de entrada, se calcula el error entre la predicción y la salida deseada. Este error puede calcularse utilizando diferentes funciones de pérdida, como el error cuadrático medio.

Comentado [JT8]: EJEMPLO:

Supongamos que estamos construyendo una red neuronal para clasificar imágenes de dígitos escritos a mano en dos categorías: "cero" o "no cero". Nuestra red neuronal tiene una capa de entrada con 784 neuronas (correspondientes a píxeles en una imagen de 28x28), una capa oculta con 100 neuronas y una capa de salida con una sola neurona que indica la probabilidad de que la imagen sea un cero.

1. **Inicialización:** Comenzamos inicializando los pesos de nuestras conexiones entre las neuronas. Por ejemplo, $W(1)$ sería una matriz de dimensiones 100×784 y $W(2)$ sería un vector de longitud 100.

2. **Propagación hacia adelante:** Supongamos que tenemos una imagen de un dígito cero que queremos clasificar. Primero, aplanamos la imagen en un vector de 784 píxeles y lo alimentamos. Claro, consideremos un ejemplo sencillo para ilustrar cómo funciona la propagación hacia adelante en una red neuronal.

3.

4. Supongamos que estamos construyendo una red neuronal para clasificar imágenes de dígitos escritos a mano en dos categorías: "cero" o "no cero". Nuestra red neuronal tiene una capa de entrada con 784 neuronas (correspondientes a píxeles en una imagen de 28x28), una capa oculta con 100 neuronas y una capa de salida con una sola neurona que indica la probabilidad de que la imagen sea un cero.

5.

6. 1. **Inicialización:** Comenzamos inicializando los pesos de nuestras conexiones entre las neuronas. Por ejemplo, $W(1)$ sería una matriz de dimensiones 100×784 y $W(2)$ sería un vector de longitud 100.

7.

8. 2. **Propagación hacia adelante:** Supongamos que tenemos una imagen de un dígito cero que queremos clasificar. Primero, aplanamos la imagen en un vector de 784 píxeles y lo alimentamos como entrada a nuestra red neuronal.

9.

10. **Capa de entrada a capa oculta:** Multiplicamos el vector de entrada por la matriz de pesos $W(1)$ y aplicamos una función de activación, como la función sigmoide o ReLU, para obtener las activaciones de la capa oculta.

11. **Capa oculta a capa de salida:** Luego, multiplicamos las activaciones de la capa oculta por el vector de pesos $W(2)$ y aplicamos otra función de activación (por ejemplo, la función sigmoide o softmax) para obtener la salida de la red, que es la probabilidad de que la imagen sea un cero.

12.

13. 3. **Clasificación:** Si la salida de la red es mayor que 0.5, clasificamos la imagen como un "cero"; de lo contrario, la clasificamos como "no cero".

14.

2. **Propagación hacia Atrás de los Errores:** Una vez que se ha calculado el error, este se propaga hacia atrás a través de la red neuronal. La idea es calcular cómo cada peso en la red contribuyó al error total.
3. **Cálculo de Gradientes:** Durante esta etapa, se calculan los gradientes de la función de pérdida con respecto a los pesos de la red neuronal. Esto se realiza utilizando el algoritmo de diferenciación automática, que aplica la regla de la cadena para calcular los gradientes en todas las capas de la red.
4. **Actualización de Pesos:** Una vez que se han calculado los gradientes, se utilizan para actualizar los pesos de la red neuronal mediante un algoritmo de optimización, como el descenso de gradiente. Este algoritmo ajusta los pesos en la dirección que reduce el error de predicción.
5. **Iteración:** El proceso de propagación hacia atrás y actualización de pesos se repite iterativamente para varios ejemplos de entrenamiento. Con cada iteración, la red neuronal ajusta sus pesos para mejorar su capacidad de hacer predicciones precisas.

5.3.3.- Entrenamiento de redes neuronales

Al entrenar redes neuronales, la propagación hacia adelante y hacia atrás depende una de otra. Cuando hablamos de propagación hacia adelante, nos referimos a pasar los datos a través de la red neuronal en la dirección de las conexiones, calculando todas las variables necesarias en el camino. Este proceso es como seguir un mapa desde la entrada hasta la salida de la red. Una vez que hemos realizado la propagación hacia adelante y calculado todas las variables necesarias, pasamos a la propagación hacia atrás. En esta etapa, invertimos el orden de cálculo en el gráfico computacional.

Durante la propagación hacia adelante, calculamos el término de regularización y dependemos de los valores actuales de los parámetros del modelo, como $W(1)$ y $W(2)$, que se actualizan según el algoritmo de optimización en la iteración más reciente. Por otro lado, durante la propagación hacia atrás, calculamos el gradiente para ajustar los parámetros del modelo. Este cálculo depende del valor actual de la salida de la capa oculta h , que proviene de la propagación hacia adelante.

Entonces, en el entrenamiento de redes neuronales, alternamos entre la propagación hacia adelante y la propagación hacia atrás, actualizando los parámetros del modelo utilizando los gradientes calculados durante la propagación hacia atrás.

Es importante destacar que la propagación hacia atrás reutiliza los valores intermedios almacenados durante la propagación hacia adelante para evitar cálculos duplicados. Esto significa que debemos conservar estos valores intermedios hasta que se complete la retropropagación. Esta necesidad de almacenamiento adicional es una de las razones por las que el entrenamiento de redes neuronales requiere más memoria que la simple predicción.

Además, el tamaño de estos valores intermedios es proporcional al número de capas en la red y al tamaño del lote de datos utilizados para el entrenamiento. Por lo tanto, al entrenar redes más profundas o con lotes de datos más grandes, es más probable que surjan errores de falta de memoria.

7.- Redes neuronales convolucionales

7.1.1.- Invariancia

Imaginemos que queremos reconocer una entidad en una imagen. El método que utilizemos debe ser capaz de detectar entidades en la imagen independientemente de su posición en esta.

Para ilustrar este principio, nos remitimos al famoso juego "¿Dónde está Waldo?", donde el desafío consiste en encontrar a Waldo en escenas caóticas llenas de distracciones. Aunque Waldo puede estar en diversas ubicaciones, su apariencia permanece constante. Este concepto inspira el diseño de las CNN, que buscan ser invariantes a la traslación, lo que significa que responden de manera similar a un parche de imagen independientemente de su posición en la misma.



Además de la invariancia espacial, otro principio crucial en el diseño de las CNN es la localidad. Esto implica que las primeras capas de la red se centren en regiones locales de la imagen, sin tener en cuenta el contenido de regiones distantes. A medida que avanzamos en las capas de la red, estas representaciones locales se combinan para hacer predicciones a nivel de imagen completa. Este enfoque modular permite un procesamiento más eficiente y efectivo de la información visual.

Conforme profundizamos en las capas más avanzadas de la red, surge la necesidad de capturar características de mayor alcance, similar a la visión de nivel superior en la naturaleza. Este proceso refleja la capacidad de las CNN para aprender representaciones jerárquicas de las características visuales, permitiendo la detección y segmentación de objetos con precisión y eficacia.

7.1.1.- Canales

Volviendo al ejemplo de Waldo, la capa convolucional selecciona ventanas de un tamaño determinado y pesa las intensidades según un filtro V .



Podríamos intentar aprender un modelo para que dondequiera que la "valencia" sea mayor, encontremos un pico en las representaciones de la capa oculta.

7.2.1.- La operación de correlación cruzada

La entrada es un tensor bidimensional 3x3 y la ventana del kernel o ventana de convolución es 2x2.

Input		Kernel		Output																	
<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	*	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	0	1	2	3	=	<table><tr><td>19</td><td>25</td></tr><tr><td>37</td><td>43</td></tr></table>	19	25	37	43
0	1	2																			
3	4	5																			
6	7	8																			
0	1																				
2	3																				
19	25																				
37	43																				

Las partes sombreadas son el primer elemento de salida, así como los elementos de entrada y tensor del núcleo utilizados para el cálculo de salida: $0 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 = 19$.

La implementación de este código sería la siguiente:

```
def corr2d(X, K): #@save
    """Compute 2D cross-correlation."""
    h, w = K.shape
    Y = torch.zeros((X.shape[0] - h + 1, X.shape[1] - w + 1))
    for i in range(Y.shape[0]):
        for j in range(Y.shape[1]):
            Y[i, j] = (X[i:i+h, j:j+w] * K).sum()
    return Y
```

Comentado [JT9]: Acepta un tensor de entrada X y un núcleo (o kernel) K

E inicializando la entrada y el kernel con los valores del ejemplo anterior y ejecutando la función:

```
X = torch.tensor([[0.0, 1.0, 2.0], [3.0, 4.0, 5.0], [6.0, 7.0, 8.0]])
K = torch.tensor([[0.0, 1.0], [2.0, 3.0]])
corr2d(X, K)
tensor([[19., 25.],
        [37., 43.]])
```

7.2.2.- Capas convolucionales

Los dos parámetros de una capa convolucional son el kernel y el sesgo. Cuando entrenamos modelos basados en capas convolucionales, normalmente inicializamos los núcleos de forma aleatoria.

En el `__init__` método constructor, declaramos `weight` y `bias` como los dos parámetros del modelo. El método de propagación hacia adelante llama a la `corr2d` función y agrega el sesgo.

```
class Conv2D(nn.Module):
    def __init__(self, kernel_size):
        super().__init__()
        self.weight = nn.Parameter(torch.rand(kernel_size))
        self.bias = nn.Parameter(torch.zeros(1))

    def forward(self, x):
        return corr2d(x, self.weight) + self.bias
```

Tomemos una aplicación simple de una capa convolucional: "detectar el borde de un objeto en una imagen encontrando la ubicación del cambio de píxel."

Primero, construimos una “imagen” de 6x8 píxeles. Las cuatro columnas del medio son negras (0) y el resto son blancos (1).

```
X = torch.ones((6, 8))
X[:, 2:6] = 0
tensor([[1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1.],
        [1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1.],
        [1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1.],
        [1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1.],
        [1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1.],
        [1., 1., 0., 0., 0., 0., 1., 1.]])
```

Ahora se define un kernel de tamaño 1x2 con valores específicos para realizar la operación de convolución o correlación cruzada con la imagen.

```
K = torch.tensor([[1.0, -1.0]])
```

Ahora realizamos la operación de correlación cruzada, donde detectamos 1 para los bordes de blanco a negro y -1 para los bordes de negro a blanco. Todas las demás salidas toman valor 0.

```
Y = corr2d(X, K)
tensor([[[ 0.,  1.,  0.,  0.,  0., -1.,  0.],
          [ 0.,  1.,  0.,  0.,  0., -1.,  0.],
          [ 0.,  1.,  0.,  0.,  0., -1.,  0.],
          [ 0.,  1.,  0.,  0.,  0., -1.,  0.],
          [ 0.,  1.,  0.,  0.,  0., -1.,  0.],
          [ 0.,  1.,  0.,  0.,  0., -1.,  0.]])
```

Ahora si aplicamos el kernel a la imagen traspuesta desaparecen los bordes, ya que este kernel solo detecta los bordes verticales.

[illegible]

7.2.4.- Aprendiendo un núcleo

Diseñar manualmente un detector de bordes mediante diferencias finitas es una estrategia eficaz cuando se conoce exactamente lo que se busca. Sin embargo, conforme aumenta la complejidad de los núcleos y se consideran múltiples capas de convolución, especificar manualmente cada filtro puede volverse impracticable.

Para abordar esto, inicialmente se construye una capa convolucional y se asigna un tensor aleatorio como kernel inicial. En cada iteración, se evalúa el error cuadrático entre la salida de la capa convolucional y la salida deseada. Este error se utiliza para calcular el gradiente, que posteriormente se aplica para actualizar el núcleo. El proceso se repite varias veces para refinar el núcleo hacia una solución más precisa.

```
# Construir una capa convolucional bidimensional con 1 canal de salida y un
# núcleo de forma (1, 2). Por simplicidad, ignoramos el sesgo aquí
conv2d = nn.LazyConv2d(1, kernel_size=(1, 2), bias=False)

# La capa convolucional bidimensional utiliza datos de entrada y salida en formato
# de cuatro dimensiones (ejemplo, canal, altura, ancho), donde el tamaño del lote
# (número de ejemplos en el lote) y el número de canales son ambos 1
X = X.reshape((1, 1, 6, 8))
Y = Y.reshape((1, 1, 6, 7))
lr = 3e-2 # Tasa de aprendizaje

for i in range(10):
    Y_hat = conv2d(X)
    l = (Y_hat - Y) ** 2
    conv2d.zero_grad()
    l.sum().backward()
    # Actualizar el núcleo
    conv2d.weight.data[:] -= lr * conv2d.weight.grad
    if (i + 1) % 2 == 0:
        print(f'epoch {i + 1}, loss {l.sum():.3f}')

epoch 2, loss 16.481
epoch 4, loss 5.069
epoch 6, loss 1.794
epoch 8, loss 0.688
epoch 10, loss 0.274
```

7.2.6.- Mapa de características y campo receptivo

Input

0	1	2
3	4	5
6	7	8

Kernel

0	1
2	3

Output

19	25
37	43

La salida obtenida tras la convolución se denomina **mapa de características**, ya que se puede considerar como las representaciones aprendidas en las dimensiones espaciales de la capa posterior.

La salida obtenida tras la convolución se denomina **mapa de características**, ya que se puede considerar como las representaciones aprendidas en las dimensiones espaciales de la capa posterior.

En las CNN, para cualquier elemento x de alguna capa, su **campo receptivo** se refiere a todos los elementos que pueden afectar el cálculo de x durante su propagación hacia adelante.

Comentado [JT10]: utilizamos el término *elemento* para referirnos a una entrada o cualquier tensor que represente una representación de capa o un núcleo de convolución.

Utilizando la imagen anterior para explicarlo:

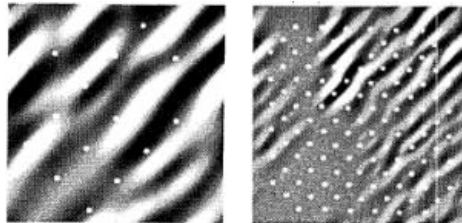
Input		Kernel		Output																	
<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	*	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	0	1	2	3	=	<table border="1"> <tr><td>19</td><td>25</td></tr> <tr><td>37</td><td>43</td></tr> </table>	19	25	37	43
0	1	2																			
3	4	5																			
6	7	8																			
0	1																				
2	3																				
19	25																				
37	43																				

Dado el núcleo de convolución (o kernel) 2x2, el campo receptivo del elemento de salida sombreado (19) son los 4 elementos en la parte sombreada de la entrada (0,1,3,4).

Dado el núcleo de convolución (o kernel) 2x2, el campo receptivo del elemento de salida sombreado (19) son los 4 elementos en la parte sombreada de la entrada (0,1,3,4).

Ahora vamos a denotar la salida 2x2 como **Y** y consideremos una CNN más profunda con una capa convolucional 2x2 que toma **Y** como entrada, generando un solo elemento **z** como output. En este caso el campo receptivo de **z** en **Y** incluye los cuatro elementos de **Y** (19,25,37,43), mientras que el campo receptivo de la entrada (**z** en **Y**, e **Y** en Input) incluye los nueve elementos de entrada (0,1,3,4, 19,25,37,43, el valor producido como *output(z)*). Por tanto, cuando cualquier elemento de un mapa de características necesita un campo receptivo más grande para detectar características de entrada en un área más amplia, podemos construir una red más profunda.

MAPA DE CARACTERÍSTICAS



7.3.1.- Padding (relleno)

Un problema complicado al aplicar capas convolucionales es que tendemos a perder píxeles en el perímetro de nuestra imagen.

Input		Kernel		Output																	
<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr></table>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	*	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	0	1	2	3	=	<table><tr><td>19</td><td>25</td></tr><tr><td>37</td><td>43</td></tr></table>	19	25	37	43
0	1	2																			
3	4	5																			
6	7	8																			
0	1																				
2	3																				
19	25																				
37	43																				

Normalmente se utilizan núcleos pequeños, para cualquier convolución determinada por lo que es posible que solo se pierdan unos pocos píxeles, pero esto puede acumularse a medida que aplicamos muchas capas convolucionales sucesivas. **SOLUCIÓN:** Agregar píxeles adicionales de relleno (el valor de estos es 0) alrededor del límite de nuestra imagen de entrada, aumentando así el tamaño efectivo de la imagen.

Input	Kernel	Output																																													
<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	3	4	5	0	0	6	7	8	0	0	0	0	0	0	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	0	1	2	3	<table><tr><td>0</td><td>3</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>9</td><td>19</td><td>25</td><td>10</td></tr><tr><td>21</td><td>37</td><td>43</td><td>16</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>0</td></tr></table>	0	3	8	4	9	19	25	10	21	37	43	16	6	7	8	0
0	0	0	0	0																																											
0	0	1	2	0																																											
0	3	4	5	0																																											
0	6	7	8	0																																											
0	0	0	0	0																																											
0	1																																														
2	3																																														
0	3	8	4																																												
9	19	25	10																																												
21	37	43	16																																												
6	7	8	0																																												

Entonces la **forma** del output resultante de la convolución sería la siguiente:

$$(n_h - k_h + p_h + 1) \times (n_w - k_w + p_w + 1)$$

p_h es filas de relleno y p_w es columnas de relleno.

Comentado [JT11]: En muchos casos, queremos establecer $p_h = k_h - 1$ y $p_w = k_w - 1$ para dar a la entrada y salida la misma altura y ancho.

En el siguiente ejemplo, creamos una capa convolucional bidimensional con una altura y un ancho de 3 y aplicamos 1 píxel de relleno en todos los lados. Dada una entrada con una altura y un ancho de 8, encontramos que la altura y el ancho de la salida también son 8.

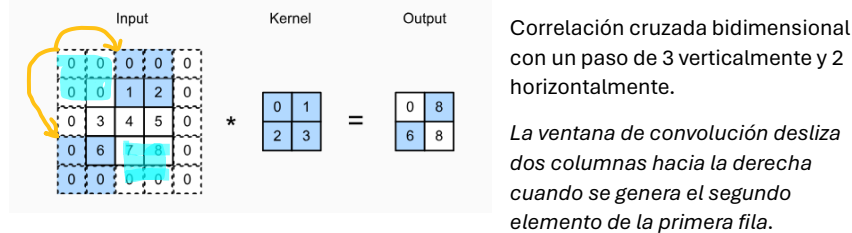
```
# Definimos una función auxiliar para calcular convoluciones. Inicializa
# los pesos de la capa convolucional y realiza elevaciones y reducciones
# de dimensionalidad correspondientes en la entrada y salida.
def comp_conv2d(conv2d, X):
    # (1, 1) indica que el tamaño del lote (batch) y el número de canales son ambos 1
    X = X.reshape((1, 1) + X.shape)
    Y = conv2d(X)
    # Eliminamos las dos primeras dimensiones: ejemplos y canales
    return Y.reshape(Y.shape[2:])

# Se añade 1 fila y columna en cada lado, lo que da un total de 2 filas o columnas
añadidas
conv2d = nn.LazyConv2d(1, kernel_size=3, padding=1)
X = torch.rand(size=(8, 8))
print(comp_conv2d(conv2d, X).shape)
torch.Size([8, 8])
```

7.3.2.- Stride (zancada)

Al calcular la correlación cruzada, comenzamos con la ventana de convolución en la esquina superior izquierda del tensor de entrada y luego la deslizamos por todas las ubicaciones tanto hacia abajo como hacia la derecha. En los ejemplos anteriores, por defecto deslizamos un elemento a la vez.

Nos referimos al número de filas y columnas recorridas por diapositiva como zancada. Hasta ahora, hemos utilizado zancadas de 1, tanto para alto como para ancho. A veces, es posible que queramos dar una zancada más larga.



Correlación cruzada con zancadas de 3 y 2 para altura y ancho

Cuando la zancada para la altura es s_h y la zancada para el ancho es s_w la forma de salida es:

$$\left[\frac{(n_h - k_h + p_h + s_h)}{s_h} \right] \times \left[\frac{(n_w - k_w + p_w + s_w)}{s_w} \right]$$

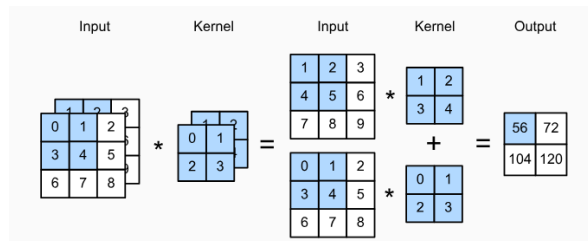
7.4- Múltiples canales de entrada y múltiples canales de salida

Comentado [JT12]: Tensores tridimensionales: 3 canales (RGB) x height (altura) x width (anchura)

7.4.1.- Múltiples canales de entrada

Cuando los datos de entrada contienen múltiples canales, necesitamos construir un núcleo de convolución con la misma cantidad de canales para que se pueda realizar la correlación cruzada.

Correlación cruzada bidimensional con dos canales de entrada:



```
def corr2d_multi_in(X, K):  
    # Iterate through the 0th dimension (channel) of K first, then add them up  
    return sum(d2l.corr2d(x, k) for x, k in zip(X, K))
```

7.4.1.- Múltiples canales de salida

Se necesitan múltiples canales de salida en las redes neuronales para capturar diversas características. Para lograrlo, creamos tensores de convolución con forma de kernel $c_i \times k_h \times k_w$ para cada canal de salida y los concatenamos.

Comentado [JT13]: Canales de entrada

Comentado [JT14]: Altura y ancho del grano

Una implementación sería:

```
def corr2d_multi_in_out(X, K):  
    # Iteramos a través de la dimensión 0 de K y realizamos operaciones de  
    # correlación cruzada con la entrada X.  
    # Todos los resultados se apilan juntos.  
    return torch.stack([corr2d_multi_in(X, k) for k in K], 0)  
  
# Creamos un tensor de convolución trivial con tres canales de salida concatenando el  
# tensor del núcleo.  
K = torch.stack((K, K + 1, K + 2), 0)  
  
# Realizamos operaciones de correlación cruzada en el tensor de entrada X con el  
# tensor del núcleo K.  
# La salida contiene tres canales.  
output = corr2d_multi_in_out(X, K)  
  
tensor([[[ 56., 72.],  
         [104., 120.]],  
        [[ 76., 100.],  
         [148., 172.]],  
        [[ 96., 128.],  
         [192., 224.]])
```

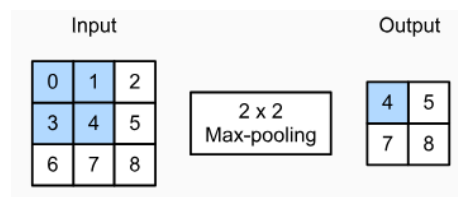
Comentado [JT15]: función de correlación cruzada para calcular la salida de múltiples canales

Comentado [JT16]: Kernel básico con tres canales

7.5.- Pooling

7.5.1.- Agrupación máxima y agrupación media

La agrupación promedio se basa en promediar los píxeles adyacentes cubiertos por la ventana de agrupación. La agrupación máxima en cambio dentro del bloque de píxeles cubierto por la ventana de agrupación selecciona el de mayor valor para la salida. El max pooling (agrupación máxima) es preferible a la agrupación promedio.



En el siguiente código se implementa un algoritmo de agrupación:

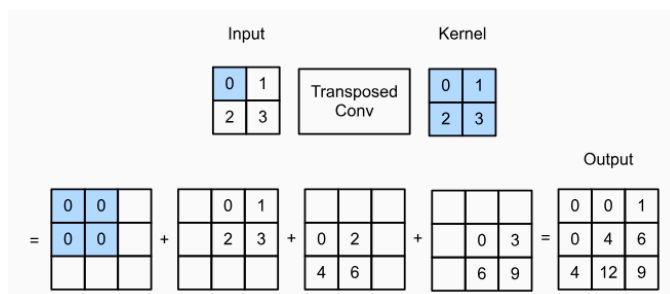
```
def pool2d(X, pool_size, mode='max'):  
    p_h, p_w = pool_size  
    Y = torch.zeros((X.shape[0] - p_h + 1, X.shape[1] - p_w + 1))  
    for i in range(Y.shape[0]):  
        for j in range(Y.shape[1]):  
            if mode == 'max':  
                Y[i, j] = X[i: i + p_h, j: j + p_w].max()  
            elif mode == 'avg':  
                Y[i, j] = X[i: i + p_h, j: j + p_w].mean()  
    return Y
```

7.5.3.- Múltiples capas

Al procesar datos de entrada multicanal, la capa de agrupación agrupa cada canal por separado. Esto significa que la cantidad de canales de salida para la capa de agrupación es la misma que la cantidad de canales de entrada.

14.10.- Convolución traspuesta

Esto invierte el proceso de convolución entre el kernel y la entrada:



Implementado en código:

```
def trans_conv(X, K):  
    h, w = K.shape  
    Y = torch.zeros((X.shape[0] + h - 1, X.shape[1] + w - 1))  
    for i in range(X.shape[0]):  
        for j in range(X.shape[1]):  
            Y[i: i + h, j: j + w] += X[i, j] * K  
    return Y
```

A diferencia de la convolución regular donde el padding se aplica en la entrada, en la convolución traspuesta el padding se aplica en la salida.

Aprendizaje de residuos basado en Moore-Penrose para la deconvolución robusta de imágenes no ciegas

1.- Introducción

La restauración de imágenes es el problema de estimar una imagen \mathbf{x} a partir de su versión borrosa y ruidosa \mathbf{y} .

La imagen borrosa \mathbf{y} se modela como una convolución de la imagen latente \mathbf{x} y el desenfoque \mathbf{H} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

donde \mathbf{n} , es el ruido (normalmente gaussiano). Tanto \mathbf{y} como \mathbf{x} , así como \mathbf{n} , son vectores $N \times 1$ que representan las imágenes correspondientes ordenadas lexicográficamente. Asumimos que \mathbf{H} la matriz $N \times N$ representa una matriz de convolución bidimensional espacialmente invariante de una función de dispersión de puntos (PSF), \mathbf{h} , de tamaño $M \times 1$. Si \mathbf{H} no es conocido el problema se denomina deconvolución ciega de imágenes (BID) (Si se conoce \mathbf{H} entonces se conoce como deconvolución de imágenes no ciega (NBID)).

3.-Modelos de aprendizaje profundo

3.1.- Escenario de desenfoque conocido sin ruido

Consideramos un escenario simple de deconvolución de imagen con desenfoque conocido \mathbf{H} y sin ruido (**modelo de degradación**):

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$$

Para restaurar la imagen original \mathbf{x} , bastaría con calcular $\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}$, sin embargo puede que no exista la inversa de \mathbf{H} . Para abordar este problema utilizamos la pseudoinversa del desenfoque Moore-Penrose \mathbf{H}^+ , que permite encontrar una aproximación lo más cercana posible a la inversa de la matriz \mathbf{H} , incluso si \mathbf{H} no es invertible.

Cuando aplicamos entonces $\mathbf{H}^+\mathbf{y}$, estamos intentando deshacer el efecto del desenfoque sobre la imagen borrosa recuperando frecuencias, sin embargo, hay algunas frecuencias de la imagen original que no se pueden recuperar porque el filtro de desenfoque las anula (son frecuencias para las cuales el filtro de desenfoque produce un resultado de 0 en la imagen borrosa). Esto significa que algunas partes de la imagen original pueden no ser recuperables usando solo la pseudoinversa de Moore-Penrose, y pueden surgir artefactos en esas áreas donde las frecuencias se han perdido irremediabilmente. Por tanto, necesitamos aprender esas frecuencias de la imagen original.

Para aprender las frecuencias de \mathbf{x} no presentes en $\mathbf{H}^+\mathbf{y}$, se utiliza un método basado en la superresolución de imágenes para definir una función $g_0(\mathbf{z})$:

$$g_0(\mathbf{z}) = (\mathbf{I} - \mathbf{H}^+\mathbf{H})^*f_0(\mathbf{z}) + \mathbf{H}^+\mathbf{y}$$

donde $f_0(\mathbf{z})$ es una red neuronal convolucional (CNN) con parámetros θ , que se utiliza para aprender y modelar las frecuencias de la imagen que no están presentes en $\mathbf{H}^+\mathbf{y}$.

Comentado [JT17]: \mathbf{H} describe como la imagen original se se difumina para crear la imagen borrosa. \mathbf{n} representa el ruido que se añade a la imagen borrosa.

Comentado [JT18]: $N \times 1$, donde N es el número total de píxeles en la imagen. De forma que se organizan como una columna de píxeles apilados uno encima de otro.

Imagen original (\mathbf{x}):

```
| 1 | 2 |  
| 3 | 4 |
```

Vector de la imagen original (\mathbf{x}): $\mathbf{x} = [1, 2, 3, 4]$

Comentado [JT19]: El mismo tipo de convolución se aplica a todos los puntos de la imagen.

Comentado [JT20]: Función matemática que describe como un punto de luz se dispersa en un sistema óptico. Entender la PSF es crucial para deshacer los efectos de difusión y restaurar la imagen original.

Comentado [JT21]: Es $M \times 1$ porque describe como la luz se difunde en una dimensión (p.ej: vertical u horizontal) en comparación con la imagen original. Si consideramos una PSF que describe el desenfoque vertical de una imagen, M sería la altura de la PSF, mientras que la anchura sería 1, ya que el desenfoque se produce solo en una dimensión.

Comentado [JT22]: No todas las matrices de convolución son invertibles. (Matriz singular)

Comentado [JT23]: FOURIER

Comentado [JT24]: \mathbf{z} es la variable en el espacio de frecuencia, es decir, cuando trabajamos con la transformada de fourier, la variable \mathbf{z} representa las frecuencias presentes en la señal.

Comentado [JT25]: Matriz identidad

Comentado [JT26]: $(\mathbf{I} - \mathbf{H}^+\mathbf{H})^*f_0(\mathbf{z})$ representan las frecuencias de la imagen original ' \mathbf{x} ' que no están presentes en la imagen observada ' \mathbf{y} '.

Comentado [JT27]: $\mathbf{H}^+\mathbf{y}$ representan las frecuencias de la imagen observada ' \mathbf{y} ' que pueden ser recuperadas mediante la aplicación de la pseudoinversa \mathbf{H}^+ .

Teniendo en cuenta que $H^*H^*H^+ = H$:

$$H^*g_0(z) = H^*(I - H^*H^+)*f_0(z) + H^*H^+*y = y$$

3.2.- Modelo general

Aproximamos H^+ :

$$H_{+e} = (H^*H^+eI)^{-1}H^*$$

Donde $e > 0$ es un parámetro de regulación que controla el ruido y evita la pérdida de aquellas frecuencias para las cuales H es cero.

Redefiniendo $g_0(z)$ ahora, tenemos:

$$g_0(z) = (I - H_{+e}^*H^*)f_0(z) + H_{+e}^*y = (I - H_{+e}^*H^*)f_0(z) + x_w$$

donde $x_w = H_{+e}^*y$ es la estimación aproximada de la imagen original x mediante la aproximación del filtro de Wiener.

La red aprende las frecuencias “faltantes” en x_w y elimina el ruido y los artefactos introducidos por la aproximación del filtro de Wiener. Estos artefactos, aunque dependen de la combinación de imagen, desenfoque y ruido, son todos de naturaleza muy similar. Aprender el residual asociado con el filtro Wiener reduce la carga de la red y la hace capaz de lidiar con diferentes desenfoques.

Veamos ahora cuál es la entrada a la red. La función $f_0(\cdot)$ (y consecuentemente $g_0(\cdot)$) toma como entrada ambos x_w e y concatenados a lo largo de la dimensión del canal, es decir, si ambas imágenes son imágenes en escala de grises de un canal, la entrada a la red sería una imagen con dos canales.

$$z = (x_w, y)$$

El uso de la imagen borrosa y es necesario ya que algunos artefactos que aparecen en la solución del filtro Wiener, son difíciles de distinguir de estructuras similares al mundo real, lo que dificulta su eliminación (es decir, los artefactos introducidos por el filtro de Wiener pueden parecerse a las características naturales de la escena, lo que dificulta su eliminación solo basándose en la imagen restaurada x_w , por lo tanto, al incluir la imagen observada y como entrada a la red neuronal, se proporciona a la red más información sobre la escena original, lo que puede ayudar a distinguir entre artefactos y características naturales de la imagen).

Digamos que en el dominio de la

$x(z)$ = Frecuencias de la imagen original

$y(z)$ = Frecuencias de la imagen observada

Ahora, para recuperar las frecuencias faltantes en la imagen observada $y(z)$, definimos:

$$g_0(z) = (I - H^+ \cdot H) \cdot f_0(z)$$

- I es la matriz identidad.
- H^+ es la pseudoinversa de H .
- H es el filtro de desenfoque.
- $f_0(z)$ es una red neuronal que aprende los artefactos.

Entonces, $g_0(z)$ es una combinación de:

1. $(I - H^+ \cdot H) \cdot f_0(z)$: Representa los artefactos en la imagen observada y que no están presentes en la imagen original.
2. $H^+ \cdot y(z)$: Representa las frecuencias faltantes mediante la aplicación de la pseudoinversa.

En resumen, $g_0(z)$ proporciona la información en el dominio de la frecuencia, donde se encuentran las frecuencias faltantes de la imagen original que no están presentes en la imagen observada.

Comentado [JT28]:

Comentado [JT29]: El término 'el' se agrega a la matriz H^*H para garantizar que sea invertible.

Puede verse como una aproximación al filtro de Wiener clásico, donde e representa la relación entre la densidad de potencia del ruido y la densidad espectral de la potencia de la imagen.