

# APRENDIZAJE AUTOMÁTICO

## TEMA 1

**Nombre:** José Arcos Aneas  
**D.N.I:** 74740565-H

Bibliografía y documentación utilizadas:

- Wikipedia.
- Documentos de diferentes universidades (Valencia, Madrid, Granada)
- Ejecicios 5 y 6 de EJERCICIOS Alberto Quesada Aranda

### Cuestionario de Teoría (12 puntos)

### EJERCICIOS: (6 puntos)

1. Verificar que  $\partial/\partial X \text{traza}(XBX^T C) = CXB + C^T X B^T$

$$\text{traza}(XBX^T C) = \text{traza}(C X B X^T) = \text{traza}\left(\begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i^T x_i B^T x_i^T)$$

$$\frac{d \sum_{i=1}^n (x_i^T x_i B^T x_i^T)}{dX} = CXB + C^T X B^T$$

Primero, sabemos que  $A^T A$  es simétrica de orden  $n$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

Por lo tanto, podemos escribir  $A = U \Sigma V^T$  donde  $U$  y  $V$  son ortogonales por lo tanto su inversa es igual a la transpuesta.

La descomposición puede expresarse como la suma de  $n$  matrices de rango 1, donde el rango de la matriz  $A = \sum_{i=1}^n \sigma_i U_i V_i^T$

La matriz se puede escribir como  $A = U \Sigma V^T$

En un caso singular (no invertible) se puede escribir la pseudoinversa como  $A^+ = V \Sigma^+ U^T$

Se puede probar en los casos singulares los elementos de la diagonal que son 0 por 0, por lo tanto se cancelan los que son 0 por 0.

4. Sean  $P = \{p_i > 0, i = 1, \dots, n\}$  una distribución de probabilidad o discreta, es decir  $\sum p_i = 1$ . Probar usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange que la distribución de máxima entropía  $H(P)$  se obtiene cuando  $p_i = 1/n$ .

Sean  $P = \{p_i > 0; i = 1, \dots, n\}$  donde  $\sum p_i = 1$   
 De modo que por el principio del máximo:  

$$\sum_i (-k \sum p_i \ln p_i + \lambda p_i) = 0$$
  
 Esto implica que  

$$\sum_i (-k - k \ln p_i + \lambda) \delta p_i = 0$$
  
 Como hay que cumplir para toda variación de distribución:  
 $-k - k \ln p_i + \lambda = 0 \Rightarrow p_i = \text{const} = 1/n$   
 Normalizando se obtiene  $p_i = 1/n$

5. Suponga que le dan los siguientes 4 vectores de datos para entrenar un árbol de decisión. Calcule la ganancia de información de las dos características y valore lo que haría el algoritmo ID3 en este caso.

A	B	Clase
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\text{Clase} \in \{0, 1\}$      $S = [2, 2]$   
 $H(S) = - (2/4) \log_2 (2/4) - (2/4) \log_2 (2/4) = 1$   
 $IG = 1 - 2/4 \times 1 - 2/4 \times 1 = 0$   
 $S_A = 1$  ;  $S_B = 1$   
 $IG(A, B) = 0$

6. Sea  $H(\text{label}) = 0,95$  la entropía de las etiquetas de un nodo  $N$  con 8 muestras. Supongamos tres posibles situaciones de ramificación dadas por las variables  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  con valores (T,F) y visualizadas en la figura. Analizar los tres supuestos y decir cual de los tres sería preferido por el algoritmo ID3 en términos de la ganancia de información. Extraer alguna conclusión sobre las situaciones que prefiere el algoritmo ID3 a la hora de ramificar.

$H(\text{label}) = 0,95$   
Tenemos 8 muestras

$H(x_1 \rightarrow \text{true}) = -4/6 * \log_{\text{base\_dos}}(4/6) - 2/6 * \log_{\text{base\_dos}}(2/6) = 0,9182$   
 $H(x_1 \rightarrow \text{false}) = 1$   
 $IG(\text{label}, x_1) = 0,95 - 6/8 * 0,9182 - 2/8 * 1 = 0,01135$

$H(x_2 \rightarrow \text{true}) = 1$   
 $H(x_2 \rightarrow \text{false}) = -2/2 * \log_{\text{base\_dos}}(2/2) - 0/2 * \log_{\text{base\_dos}}(0/2) = 0$   
 $IG(\text{label}, x_2) = 0,95 - 6/8 * 1 - 2/8 * 0 = 0,2$

$H(x_3 \rightarrow \text{true}) = 1$   
 $H(x_3 \rightarrow \text{false}) = -4/4 * \log_{\text{base\_dos}}(4/4) - 0/4 * \log_{\text{base\_dos}}(0/4) = 0$   
 $IG(\text{label}, x_3) = 0,95 - 4/8 * 1 - 4/8 * 0 = 0,45$

La ganancia de información es  $x_3$  y será el primero que se tomara para hacer crecer al árbol.  
El elegido es el que tiene un nodo hoja directamente en su ramificación y además su otra rama tiene menor diferencia con los valores más pequeños.

## CUESTIONES: (6 puntos)

**1. Identifique las diferencias esenciales entre las técnicas de aprendizaje supervisado y las técnicas de aprendizaje no-supervisado. Justificar la respuesta.**

**Respuesta:**

El aprendizaje supervisado es una técnica para deducir una función a partir de datos de entrenamiento. Los datos de entrenamiento consisten de pares de objetos (normalmente vectores): una componente del par son los datos de entrada y el otro, los resultados deseados. La salida de la función puede ser un valor numérico (como en los problemas de regresión) o una etiqueta de clase (como en los de clasificación). El objetivo del aprendizaje supervisado es el de crear una función capaz de predecir el valor correspondiente a cualquier objeto de entrada válida después de haber visto una serie de ejemplos, los datos de entrenamiento. Para ello, tiene que generalizar a partir de los datos presentados a las situaciones no vistas previamente.

Aprendizaje no supervisado es un método de Aprendizaje Automático donde un modelo es ajustado a las observaciones. Se distingue del Aprendizaje supervisado por el hecho de que no hay un conocimiento a priori. En el aprendizaje no supervisado, un conjunto de datos de objetos de entrada es tratado. Así, el aprendizaje no supervisado típicamente trata los objetos de entrada como un conjunto de variables aleatorias, siendo construido un modelo de densidad para el conjunto de datos.

**2. ¿Que diferencias esenciales hay entre un problema de regresión y uno de clasificación? Justificar la respuesta.**

**Respuesta:**

Con la regresión se trata de encontrar una función que permita aproximar los datos de una variable independiente en función de datos que dependen. Los valores que devuelven son numéricos.

Con los clasificadores lo que hacemos es clasificar los datos en función de unas variables dependientes. Con los clasificadores se obtiene un clasificador a partir de unos datos de entrenamiento. Una vez construido el clasificador se debe medir su precisión. El clasificador suele devolver etiquetas o algún parámetro que identifique los elementos de una clase.

**3. ¿Cuál es el objetivo más importante en el entrenamiento de cualquier técnica supervisada? Justificar la respuesta.**

*Respuesta:*

Construir un conjunto (o grupo) para que los objetos que se han clasificado con ciertos, sean identificados. Los parámetros que se describen a los objetos deben ser discriminatorios para la clasificación.

**4. ¿Qué considera que es mejor, que un modelo una vez entrenado ajuste perfectamente los datos de entrenamiento o que no lo haga? Justificar la respuesta.**

*Respuesta:*

Es preferible un tamaño pequeño para entrenamiento entre un 10% y un 30% del total de muestra y el resto para test. Si optamos por un número alto es posible que nos pasemos y nos ciñamos a los datos que hemos tenido para entrenar y con un nuevo valor no sepamos clasificarlo.

**5. ¿Qué es mejor usar un K grande o uno pequeño en la regla k-NN? Identificar los pros y contras de cada caso. Justificar la respuesta.**

*Respuesta:*

Un K muy grande nos llevaría a sobreajuste y un K muy pequeño no representaría las características de nuestra población.

La mejor elección de k depende fundamentalmente de los datos: los valores grandes de k reducen el efecto de ruido en la clasificación. Pero crean límites entre clases parecidas. Un buen k puede ser seleccionado por una optimización de uso.

**6. ¿Es posible tener sobreajuste con un clasificador k-NN? En caso afirmativo ¿cómo se puede corregir? Justificar la respuesta.**

*Respuesta:*

Si considerando un conjunto de k muy grande que conlleva a sobrevalorar la capacidad predictiva de los modelos obtenidos.

Lo arreglaríamos cogiendo un conjunto más pequeño de k en el que aparezcan bien representadas las características de cada clase.

**7. Demostrar que en el plano el conjunto de puntos que están a igual distancia de dos prototipos dados  $p_0$  y  $p_1$  es una recta del plano definida por dichos prototipos.**

*Respuesta:*

**8. ¿De qué manera influye la dimensión del vector muestral en el resultado de la regla k-NN? Justificar la respuesta.**

*Respuesta:*

Entendiendo como dimensión como el número mínimo de coordenadas necesarias para especificar cualquier punto de un espacio. El tamaño influye en el número de características que se han de tener en cuenta a la hora de crear el clasificador. Por lo que el cálculo de la distancia euclídea será algo más complicado. Si con dimensión nos referimos al tamaño del vector de muestras tendremos más posibilidades de crear un clasificador que generalice mejor los datos de test.

**9. Identifique los cuatro aspectos que en su opinión son los más importantes a la hora de construir un árbol de decisión ID3. Justificar la respuesta.**

*Respuesta:*

Los aspectos más importantes a la hora de construir un árbol ID3 son los siguientes:

1. Describir los objetos en términos de parejas, el atributo y su valor
2. Calcular la entropía para todas las clases.
3. Seleccionar el mejor atributo basado en la reducción de la entropía.
4. Iterar hasta que todos los objetos sean clasificados.

**10. ¿Es posible tener sobreajuste con un modelo de árbol de clasificación? En caso afirmativo ¿cómo se puede corregir?, en caso negativo decir por qué no. Justificar la respuesta.**

*Respuesta:*

Si, de hecho si hacemos crecer mucho un árbol de decisión en la etapa de entrenamiento, podemos aumentar el error por varianza. Esto es a lo que se denomina sobreajuste.

Por otro lado si no dejamos que crezca lo suficiente, podemos aumentar el error por sesgo.

Los problemas con la varianza son originados porque los datos de entrenamiento no son representativos de datos objetivos.

Si una hoja del árbol tiene pocos datos la regla asociada tendrá baja significancia estadística.

Para mejorar estos problemas de precisión se utilizan un mecanismo llamado poda. Tiene varios tipos:

Pre-poda: Parar la construcción del árbol en algunas ramas en tiempo de construcción

Post-poda: Construir un árbol posiblemente sobreajustado y podarlo después.

**11. Suponga que sobre un mismo conjunto de datos de entrenamiento es posible aplicar un clasificador k-NN o un árbol de decisión. Identifique los criterios que considere son los relevantes para decidir el uso de una u otra técnica. Haga las hipótesis que considere oportunas sobre el conjunto de datos.**

*Respuesta:*

Un clasificador con un número medio de valores para test y con valores no muy dispersos en el que los grupos puedan estar bien formados sin muchos valores en las fronteras de las regiones que identifican cada clase puede ser una opción muy recomendable.

Los árboles de decisiones resumen los ejemplos de partida, permitiendo la clasificación de nuevos casos siempre y cuando no existan modificadores sustanciales en las condiciones bajo las cuales se

generaron los ejemplos que sirvieron para su construcción. Facilitan la interpretación de la decisión adoptada. Explica el comportamiento respecto a una determinada tarea de decisión. Y algo muy importante es que reduce el número de variables independientes. Por lo que sería bueno en un vector con muchas características.

**12. Suponga que tenemos una variable aleatoria  $X$  que puede tomar dos valores con probabilidad  $p$  y  $1 - p$ . Calcular la expresión de la entropía  $H(X)$  como función de  $p$  y analizar que rango de valores de  $p$  serán los más informativos sobre la variable  $X$ .**

*Respuesta:*

La entropía de esta variable, aplicando la fórmula de la definición es:

$$H[X] = -p \cdot \log_2(p) - (1-p) \cdot \log_2(1-p)$$

En el caso general, tenemos infinitas distribuciones diferentes con este esquema dependiendo del valor de  $p$ , que recorre los reales en el intervalo  $[0,1]$ .

El valor máximo de la entropía es para  $p=0,5$

La máxima entropía será  $H[X] = \log_2(2)$