Departamento de Informática
Universidad Carlos III de Madrid

Ingeniería en Informática

Inteligencia Artificial

Octubre 2007

Hoja de Ejercicios 1:
Espacio de Estados

Comentarios generales sobre los ejercicios

- Asumiendo que se conocen los contenidos teóricos, el tiempo estimado para realizar los ejercicios es de **2 horas**
- Describir las soluciones a los ejercicios de una manera lo más formal posible

Ejercicio 1

1. Definir el tamaño del espacio de estados del problema de las garrafas, asumiendo que en el estado inicial las dos garrafas están vacías.
2. ¿Son las acciones reversibles?
3. Se dice que un espacio de estados es conexo, si para cualquier par de estados x e y hay un camino $\langle x, \ldots, y\rangle$ entre ellos. ¿El espacio de estados de este problema es conexo? Razonar la respuesta.

Ejercicio 2

Se pide:

1. Calcular el tamaño del espacio de estados del 8-Puzle.
2. Calcular el tamaño del espacio de estados del 15-Puzle.

Considérese ahora el caso del N-Puzle:

3. ¿Cuál es la expresión general para el tamaño del espacio de estados del N-Puzle?
4. ¿Cuál es el factor de ramificación medio?

En vez de la versión popular del N-Puzle en la que el blanco es desplazado únicamente a posiciones inmediatamente adyacentes, considérese ahora el caso en el que el blanco puede desplazarse a cualquier posición de la misma fila o columna en la que se encuentra. El juego resultante se conoce como Macro N-Puzle. Por lo tanto, para el Macro N-Puzle:

5. ¿Cuál es la expresión general para el tamaño del espacio de estados?
6. ¿Cuál es el factor de ramificación medio? Compáralo con el obtenido en la sección 4 y discute su relación con el obtenido ahora.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a) $n = 3$

3	6	12	13
10	15	1	8
5	4	14	11
16	9	7	2

(b) $n = 4$

Figura 1: Ejemplos de cuadrados mágicos

Ejercicio 3

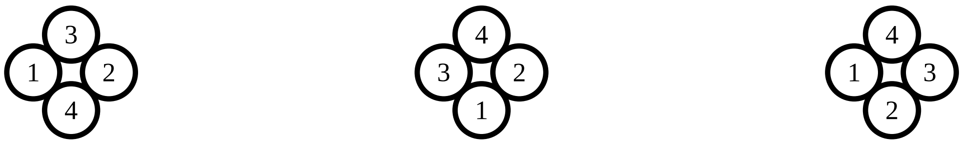
Un cuadrado mágico consiste en una distribución de números en filas y columnas, formando un cuadrado, de forma que los números de cada fila, columna y diagonal suman lo mismo. Aunque es posible recrear diferentes tipos de cuadrados mágicos, tradicionalmente se forman con los números naturales desde el 1 hasta n^2 donde n es el lado del cuadrado.

Se pide:

1. Representar el problema de generación automática de cuadrados mágicos de tamaño n como un espacio de problemas.
2. ¿Cuál sería el factor de ramificación y la profundidad de un árbol de búsqueda desarrollado en el espacio de problemas identificado en el apartado anterior?
3. A partir de un cuadrado vacío, representar un árbol de búsqueda que muestre la aplicación de operadores para $n = 2$

Ejercicio 4

Considérense dos triángulos que comparten un lado, de modo que cada estado del puzle consiste en cuatro piezas, una en cada esquina de los dos triángulos, como se muestra en la figura 2(a), donde los dos triángulos serían $\langle 1, 3, 4\rangle$ y $\langle 2, 3, 4\rangle$.



(a) Posición de ejemplo (b) Un posible vecino (c) Otro vecino factible

Figura 2: Configuraciones válidas del puzle

Un movimiento en este juego consiste en la rotación de las tres esquinas de un único triángulo. Por ejemplo, a partir de la posición de la figura 2(a), dos movimientos legales dispondrán el puzle como se muestra en las figuras 2(b) y 2(c).

Se pide:

1. Dibujar el espacio de estados del problema.
2. Si ahora sólo se permitieran giros a favor de las agujas del reloj, ¿cómo es el espacio de estados resultante?

Ejercicio 5

Mi monovolumen nuevo es muy versátil. En principio, pueden montarse hasta 7 personas: 2 delante, 3 detras, y 2 en una tercera fila de asientos. Todos los asientos son individuales e independientes. Además, tiene un maletero de 200 litros. Todos los asientos son abatibles y se pueden ocultar en el suelo, o sacar del vehículo. Cuando se abate un asiento, se ganan 200 litros de capacidad. Además, los asientos de la segunda fila y del copiloto se pueden desplazar hacia adelante, ganando un volumen de 50 litros por cada asiento que se mueve. Sin embargo, el asiento del copiloto sólo se puede abatir o desplazar si se han abatido los dos asientos que tiene detrás (en la segunda fila, el central y el derecho), y nunca se puede dar la situación de que el asiento del copiloto esté abatido, y los dos que tiene detrás esté en posición normal. Los asientos sólo se pueden abatir o desplazar si están en posición normal. Por último, en cada asiento sólo se puede sentar una persona.

Todas las acciones de abatir y desplazar asientos son individuales. Es decir, no se pueden abatir ni desplazar dos asientos a la vez. Además, cada una de esas operaciones tiene un coste: abatir un asiento tiene coste 2, y desplazarlo tiene coste 1. Las operaciones inversas (desabatir y desplazar a posición original) tienen el mismo coste.

Se pide:

1. Describir el espacio del problema
2. Representar un estado inicial consistente en que todos los asientos están en su posición inicial (sin desplazar ni abatir), excepto los dos asientos de la tercera fila, que estarán abatidos. Además, en ese estado inicial no habrá carga.
3. ¿Cuál es el tamaño del espacio de estados?

Solución ejercicio 1

1. El tamaño máximo del espacio de estados es $6 \times 4 = 24$ (6 posibles valores de la x por 4 posibles valores de y). A estos estados hay que restar aquellos estados inalcanzables. Habría, por tanto, que decidir qué estados son inalcanzables. Esto es equivalente a buscar una solución para cada posible estado, es decir, equivale a resolver los 24 posibles problemas.

   Sin embargo, es fácil ver que hay algunos estados que no son alcanzables. Por ejemplo, uno de los posibles estados metas, el estado $\langle 4, 1\rangle$, no es alcanzable desde ningún otro operador. No corresponde con ninguna acción de llenar ni vaciar sobre cualquiera de las dos garrafas. Y tampoco con ninguna acción de traspasar líquido de una garrafa a otra, dado que, para una operación de traspasar, siempre hay una garrafa que queda llena (a la que se traspasa agua) o una que queda vacía (desde las que se traspasa). Y el estado mencionado no cumple ninguna de estas características.

2. Las acciones no son reversibles. Por ejemplo, si tengo 3 litros en la garrafa grande, y 2 en la pequeña, puedo pasar 1 litro de la grande a la pequeña mediante la operación de trasvase, pero no tengo ninguna operación que devuelva el litro a la garrafa original. Esto no significa que desde el estado al que se llega, no se pueda volver al original tras una serie de acciones: es simplemente que no está garantizado.

3. Tal y como se ha probado en el apartado 1, hay estados, como el $\langle 4, 1\rangle$, a los que no es posible llegar desde ningún otro nodo del espacio de estados. Por lo tanto, el espacio de estados de este problema es no conexo.

Solución ejercicio 2

1. El N-puzle es, como tantos otros problemas, un problema que pertenece al denominado *espacio de permutaciones* —otros ejemplos son el cubo de Rubik o el TopSpin. Esto es, los estados se caracterizan, simplemente, como una permutación de símbolos.

   En este caso los símbolos son los números del 1 al 8: $\langle 1, 2, \ldots 8\rangle$ y el blanco que representaremos simplemente como $\square$. Así, por ejemplo, el típico estado final del 8-puzle, mostrado en la figura 3(a), se describe como: $\langle \square, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\rangle$ que contiene, en total, hasta 9 símbolos.

   (a) Típico estado final　　(b) Un estado inalcanzable

   Figura 3: Ejemplos del 8-puzle

   Naturalmente, el número de diferentes ordenaciones de 9 símbolos sin repetición son precisamente, todas sus permutaciones: $9! = 362{,}880$. En otras palabras, en el problema del 8-puzle, que consiste en 9 constantes, el número de estados posibles son 362.880.

   Sin embargo, resulta fácil observar que no todos ellos son alcanzables desde el estado final descrito anteriormente:

   - De una parte, resulta fácil observar que el número de movimientos que hace el blanco para volver a su posición inicial, una vez que empieza a moverse, desde el estado final de la figura 3(a) debe ser necesariamente par.

     Por ejemplo, el blanco puede volver a la esquina superior izquierda en dos movimientos con la secuencia: $\langle \circ\!\!-\!\!\bullet, \bullet\!\!-\!\!\circ\rangle$ (donde el punto sólido representa una casilla numerada, y el otro el blanco) o con $\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}, \genfrac{}{}{0pt}{}{\bullet}{\circ}\rangle$. Asimismo, puede hacer un viaje más elaborado con hasta 4 movimientos con $\langle \circ\!\!-\!\!\bullet, \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}, \bullet\!\!-\!\!\circ, \genfrac{}{}{0pt}{}{\bullet}{\circ}\rangle$, pero en ningún caso podrá volver a la esquina superior izquierda en 3 movimientos, ni en 5 ó 7, ... o, en general, en un número impar de movimientos.
   - De otra parte, en cada movimiento del blanco se altera el *número de inversiones* de la permutación resultante. Por ejemplo, el estado de la figura 3(a) no tiene ninguna *inversión*. Esto es, todos los símbolos están correctamente ordenados. Después de aplicar el desplazamiento $\langle \circ\!\!-\!\!\bullet\rangle$, la permutación que resulta es $\langle 1, \square, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\rangle$ en el que hay una inversión —el 1 está ahora por delante del $\square$; decimos que está *invertido*. Si volvemos a aplicar el mismo operador, $\langle \circ\!\!-\!\!\bullet\rangle$, resultará ahora la permutación siguiente: $\langle 1, 2, \square, 3, 4, 5, 6, 7, 8\rangle$ que tiene exactamente dos inversiones (ahora el 1 y el 2 están invertidos con el $\square$), a la que hemos llegado con dos movimientos: $\langle \circ\!\!-\!\!\bullet, \circ\!\!-\!\!\bullet\rangle$. Si ahora aplicamos por ejemplo el operador $\langle \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}\rangle$ resultará la secuencia: $\langle 1, 2, 5, 3, 4, \square, 6, 7, 8\rangle$ que tiene hasta 7 inversiones (1, 2, 5, 3 y 4 están invertidos con el $\square$ y el 5, además, con el 3, el 4) a la que hemos llegado con tres movimientos: $\langle \circ\!\!-\!\!\bullet, \circ\!\!-\!\!\bullet, \genfrac{}{}{0pt}{}{\circ}{\bullet}\rangle$.

     Operando de esta manera es fácil advertir que con un número impar de movimientos se llega a permutaciones que tienen un número impar de inversiones; análogamente, con un número par de movimientos sólo se puede llegar a posiciones con un número par de inversiones. En términos generales, decimos que: **la paridad del número de movimientos es siempre igual a la paridad del número de inversiones**

Examinando ahora el caso de la figura 3(b), se ve que sólo hay una inversión (sólo el 8 está invertido con el 7) de modo que sólo se podría llegar hasta esa configuración desde el estado de la figura 3(a) con un número **impar** de movimientos. Sin embargo, como quiera que el blanco, □, aparece en la figura 3(b) en la esquina superior izquierda, debería hacer un número de movimientos **par** desde el estado de la figura 3(a), puesto que también ahí está en la misma posición, y sabemos que el número de movimientos para volver a la misma posición es necesariamente par. En consecuencia, ¡es imposible! y por lo tanto, el estado de la figura 3(b) es inalcanzable.

Como el número de permutaciones posibles, 9! se dividen en $\frac{9!}{2}$ con un número de inversiones par y otros tantos con inversiones impar, sólo la primera mitad es alcanzable desde el estado de la figura 3(a). Por lo tanto, el tamaño del espacio de estados del 8-puzle es:

$$\frac{9!}{2} = 181{,}440$$

2. Por los mismos motivos de antes, el tamaño del espacio de estados del 15-puzle será ahora de:

$$\frac{16!}{2} = 10_{2}461{,}394_{1}944{,}000$$

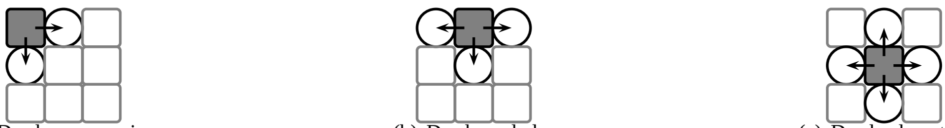
puesto que consiste en todas las permutaciones con un número par de inversiones que pueden obtenerse con 15 números y el blanco, □

3. Y en términos generales, el número de permutaciones con N símbolos y el blanco, □, que tengan un número par de inversiones es:

$$\frac{(1+N)!}{2}$$

y que es un excelente ejemplo de la importancia de la *explosión combinatoria*

4. Considérese primero el caso más sencillo: el 8-Puzle.



(a) Desde una esquina (b) Desde un lado (c) Desde el centro

Figura 4: Posibles desplazamientos del blanco en el 8-puzle

Como puede verse en la figura 4, existen hasta tres formas diferentes de desplazar el blanco: desde una esquina (figura 4(a)), un lado (figura 4(b)) o desde el centro —figura 4(c). En cada caso, el número de posiciones alcanzables es, respectivamente, 2, 3 y 4.

Por lo tanto, el factor de ramificación **en el grafo** del espacio de estados del 8-puzle es:

$$b = \frac{\overbrace{4\times 2}^{esquina} + \overbrace{4\times 3}^{lado} + \overbrace{1\times 4}^{centro}}{9} = 2,66$$

que resulta, simplemente, de calcular el número medio de descendientes desde cada una de las posibles localizaciones del blanco.

Si se generaliza el mismo cálculo al caso de un N-puzle arbitrariamente grande, resulta que el factor de ramificación es:

$$b = \frac{\overbrace{4\times 2}^{esquina} + \overbrace{4(n-2)\times 3}^{lado} + \overbrace{(n-2)^2\times 4}^{centro}}{n^2} = 4\frac{(n-1)}{n}$$

puesto que en un N-puzle cualquiera, de lado n[1], hay siempre cuatro esquinas, hasta $4(n-2)$ posiciones con tres descendientes, y hasta $(n-2)^2$ posiciones en el centro del tablero. En total, suman n^2 posibles localizaciones del blanco.

5. La figura 5 muestra el caso del nuevo problema en un tablero de 3×3 posiciones con el blanco en la esquina superior izquierda.

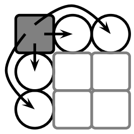


Figura 5: Operadores del Macro N-puzle desde una esquina

Como puede verse, el blanco puede desplazarse ahora directamente hasta cualesquiera de las cuatro posiciones que están en la misma fila o columna en la que se encuentra actualmente el blanco, $\square$.

En este caso, puesto que la reformulación de los operadores no sirve ni para alcanzar nuevos estados que antes fueran inalcanzables, ni para deshabilitar el acceso a posiciones accesibles antes, puede concluirse que el tamaño del espacio de estados del Macro N-puzle es exactamente el mismo que el calculado para el N-puzle en la pregunta 3

6. Sin embargo, el factor de ramificación cambiará necesariamente puesto que desde la misma posición pueden alcanzarse ahora muchos más estados. En concreto:

   - Desde una cualquiera de las cuatro esquinas pueden alcanzarse hasta $2(n-1)$ casillas, $(n-1)$ horizontalmente y otras tantas verticalmente[2].
   - Desde cualquiera de las $4(n-2)$ casillas que hay en los lados (excluyendo las esquinas), pueden alcanzarse también $2(n-1)$ casillas, $(n-1)$ horizontalmente y otras tantas verticalmente.
   - Asimismo, desde cada una de las $(n-2)^2$ casillas que hay en el centro del N-puzle pueden alcanzarse también hasta $2(n-1)$ casillas.

   Por lo tanto, el nuevo factor de ramificación es:

$$b = 2(n-1)$$

   puesto que ése es el número de posiciones que pueden alcanzarse desde cualquier posición del blanco.

   El nuevo factor de ramificación es hasta $\frac{2(n-1)}{4(n-1)/n} = \frac{n}{2}$ mayor que el calculado en el apartado 4. Aparentemente, esto hará que los problemas sean más difíciles en el Macro N-puzle (puesto que el factor de ramificación, b, aumenta con el tamaño del N-puzle) sin embargo, resulta obvio que, por otra parte, la profundidad, d (o nivel en el que se encuentra la primera solución) decrece ahora significativamente.

   Por lo tanto, a la vista de la relación que hay entre los factores de ramificación y los valores de profundidad entre el N-puzle y el Macro N-puzle, no puede concluirse nada sobre la dificultad de cada problema. Esto es así aunque, normalmente, unir varios operadores como se ha hecho aquí en uno solo (puesto que ahora es posible llegar hasta una posición lejos de un solo golpe, en vez de hacerlo con la aplicación sucesiva de varios operadores) suele ser una técnica que ofrece muy buenos resultados. Los operadores resultantes se denominan *macro-operadores*.

Solución ejercicio 3

1. Este problema pertenece a la clase denominada de *satisfacción de restricciones*. Por lo tanto, en este tipo de problemas es preciso prestar especial atención a la formulación de restricciones que normalmente restringe severamente las posibles asignaciones de valor a las varibles del problema.

   En este caso son variables, v_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$, el contenido de cada casilla (i, j), donde i representa la fila y j la columna. Y tal y como establece el enunciado, cada variable puede tomar valores del dominio $\mathcal{D} = \{1, \ldots, n^2\}$, de tal modo que:

   Restricción 1 Nunca puede haber dos variables con el mismo valor: $v_{ij} \neq v_{i'j'}$ si $i \neq i'$ o $j \neq j'$

[1] De modo que $n^2 = N + 1$
[2] De modo que, nuevamente, $n^2 = N + 1$

Restricción 2 La suma de todas las filas debe ser igual a un mismo valor $\mathcal{S}$:

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} = \mathcal{S}, \quad \forall i$$

Restricción 3 La suma de todas las columnas debe ser igual al mismo valor $\mathcal{S}$:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ij} = \mathcal{S}, \quad \forall j$$

Restricción 4 La suma de los números en la diagonal principal $(n, 1) \rightarrow (1, n)$ debe ser igual a $\mathcal{S}$:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{i(n+1-i)} = \mathcal{S}$$

Restricción 5 La suma de los números sobre la segunda diagonal $(1, 1) \rightarrow (n, n)$ debe ser igual asimismo a $\mathcal{S}$:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ii} = \mathcal{S}$$

Ahora es posible formalizar, por partes, el *espacio de problemas*:

- El espacio de estados consiste, de una parte, en los estados del problema que, en este caso, pueden describirse como un conjunto (parcial o no) de asignaciones v_{ij} diferentes.

8		
		9
	2	

(a) Un estado intermedio

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(b) Una solución final

Figura 6: Estados del cuadrado mágico con $n = 3$

  Por ejemplo, el estado representando en la figura 6(a) representa un estado del problema a partir del cual, por cierto, no puede encontrarse ninguna solución. Este estado puede describirse como el conjunto de asignaciones siguiente: $\{v_{1,1} = 8, v_{2,3} = 9, v_{3,2} = 2\}$. Análogamente, la solución de la figura 6(b) se representaría computacionalmente como sigue: $\{v_{1,1} = 8, v_{1,2} = 1, v_{1,3} = 6, v_{2,1} = 3, v_{2,2} = 5, v_{2,3} = 7, v_{3,1} = 4, v_{3,2} = 9, v_{3,3} = 2\}$.

  De otra parte, el espacio de estados se modeliza con los operadores con los que es posible transitar desde un estado hasta otro.

  En este caso, hay una única acción, y consiste en asignar un valor c a la variable que representa el contenido de la casilla (i, j):

  `Asignar` (i, j, c):

  SI $v_{ij} = 0$
  ENTONCES $v_{ij} = c$
  k = 1

  En general, cualquier variable v_{ij} tendrá un valor asignado. Precisamente, la asignación a la constante 0 significará que la variable en cuestión, está aún disponible[3] por lo que es preciso comprobar este valor antes de hacer una nueva asignación. Nótese que, además, **es preciso indicar explícitamente cuál es el coste de la aplicación del operador** —en este caso, $k = 1$.

- Sin embargo, ningún espacio de problemas está completo si no se distinguen, del espacio de estados, uno o más nodos iniciales y uno o más nodos finales. En este caso, resulta claro que habrá un único nodo inicial y un número arbitrario de nodos finales:

[3] En realidad, las casillas vacías de la figura 6(a) se modelizan precisamente con asignaciones de este tipo

- El estado inicial consiste en el cuadrado vacío de tamaño n:

$$v_{ij} = 0 \quad \forall i, j, 1 \le i, j \le n$$

- El estado final consiste en una asignación de valor a las variables del problema que sea consistente con todas las restricciones identificadas. Esta formulación de los estados finales se conoce como *definición implícita*. Una *definición explícita* consistiría en describir, explícitamente, los contenidos de cada variable para una solución particular como, por ejemplo, la que se muestra en la figura 6(b), cuya formulación es: $\{v_{1,1} = 8, v_{1,2} = 1, v_{1,3} = 6, v_{2,1} = 3, v_{2,2} = 5, v_{2,3} = 7, v_{3,1} = 4, v_{3,2} = 9, v_{3,3} = 2\}$.

2. Puesto que cualquier solución al problema del cuadrado mágico consiste necesariamente en n^2 aplicaciones del operador `Asignar`, las soluciones se encontrarán **siempre** a profundidad $d = n^2$.

   El factor de ramificación será un poco más difícil de calcular. Considerando la aplicación rigurosa del operador `Asignar`, existirán hasta n^2 asignaciones posibles para la primera variable; a partir de ella, sólo quedarán $(n^2 - 1)$ asignaciones posibles para la segunda variable en el segundo nivel del árbol de búsqueda; $(n^2 - 2)$ valores posibles para la tercera variable en el tercer nivel y así sucesivamente hasta que sólo quede una asignación factible a profundidad n^2. La figura 7 muestra el caso de una asignación (que casualmente no resuelve el problema) para $n = 2$.

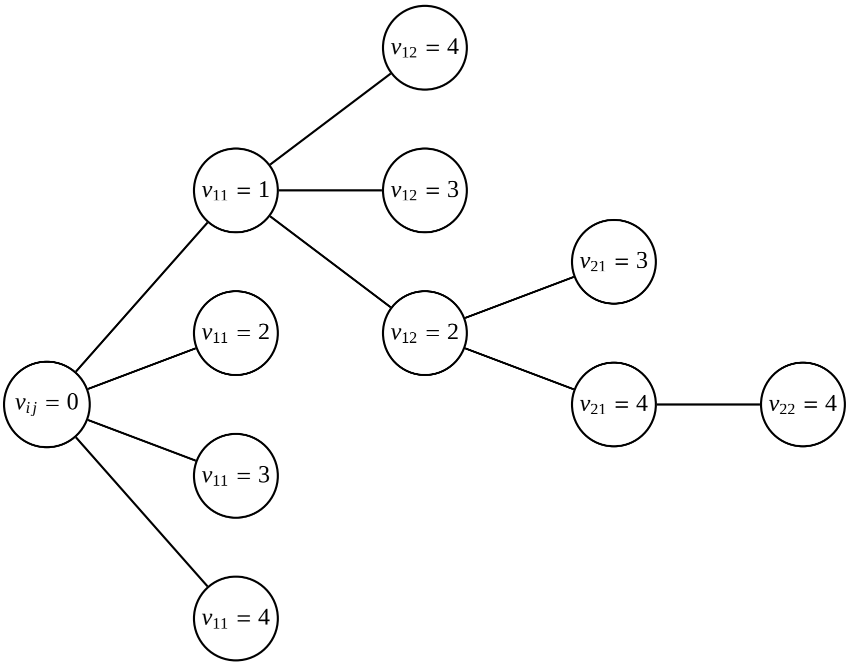


Figura 7: Cálculo del factor de ramificación en un cuadrado mágico con $n = 2$

   Por lo tanto, en cualquier camino desde el nodo inicial hasta un nodo terminal del árbol de búsqueda desarrollado de esta manera, el número medio de descendientes será siempre:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{i=n^2} (n^2 - i - 1)}{n^2} = \frac{\frac{1}{2} n^2 (1 + n^2)}{n^2} = \frac{1}{2}(1 + n^2)$$

   puesto que el primer sumatorio se resuelve como la suma de los términos de una progresión aritmética: $\{1, 2, \dots, n^2\}$ y el factor de ramificación medio se calcula dividiendo entre el número de asignaciones que deben hacerse en cualquier camino hasta un nodo terminal, n^2.

   Como puede verse, el factor de ramificación crece polinomialmente con el tamaño del cuadrado mágico.

3. La figura 7 ya muestra un árbol de búsqueda para el caso más pequeño posible, $n = 2$. Sin embargo, el caso mostrado allí consiste, únicamente, en la propagación de la restricción 1, $v_{ij} \neq v_{i'j'}$ si $i \neq i'$ o $j \neq j'$

   Normalmente es una excelente idea modelizar la mayor cantidad de restricciones del problema, con el propósito de anticiparse a asignaciones infactibles. De este modo, es posible eliminar por anticipado muchos nodos que, con toda seguridad, no llevarían a una solución o, en otras palabras, a un nodo donde se cumplen simultáneamente todas las restricciones. Para modelizar las restricciones 2–5, sólo falta determinar cuál es el valor $\mathcal{S}$ que suman las diferentes series de números.

En concreto, la suma de los números del 1 al n^2 es igual a:

$$S_{1,n^2} = n^2\frac{(1+n^2)}{2}$$

y puesto que habra hasta n filas diferentes, cada una de las cuales agrupa hasta n números diferentes, un buen candidato para $\mathcal{S}$ sería:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{n}S_{1,n^2} = n\frac{(1+n^2)}{2} \tag{1}$$

Por los mismos motivos, el mismo valor se verificará, forzosamente, para todas las columnas.

Ahora que ya se sabe el valor que sumarán filas, columnas y diagonales, es posible refinar el operador `Asignar` para evitar asignaciones que conducen a nodos terminales infactibles. En particular, la asignación $v_{ij} = c$ es inválida si:

a) La suma de las asignaciones en la fila i (incluyendo $v_{ij} = c$) excede $\mathcal{S}$. Análogamente para columnas y ambas diagonales[4] La tabla 1 muestra las expresiones matemáticas para las comprobaciones debidas a esta restricción.

Filas	$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \leq \mathcal{S}$
Columnas	$\sum_{i=1}^{n} v_{ij} \leq \mathcal{S}$
Diagonal principal	$\sum_{i=1}^{n} v_{i(n-i+1)} \leq \mathcal{S}$
Diagonal secundaria	$\sum_{i=1}^{n} v_{ii} \leq \mathcal{S}$

Cuadro 1: Restricciones sobre las asignaciones máximas

Para $n = 3$, esta restricción resolvería que si $v_{11} = 9$, la asignación $v_{12} = 8$ es infactible, puesto que la suma de las asignaciones en la primera fila ($i = 1$), $v_{11} + v_{12} = 9 + 8 = 17$, excede el máximo valor de $\mathcal{S}$, ya que para $n = 3$, $\mathcal{S} = 15$, según la ecuación (1)

b) Una restricción análoga a la anterior establece que si los valores mínimos que deben escribirse en el resto de las casillas de la fila i, para que la suma resultante sea $\mathcal{S}$, son mayores que el mayor valor en el dominio $\mathcal{D}$, n^2, entonces la nueva asignación es infactible. Esta restricción se describe matemáticamente como sigue:

$$\left\lceil \frac{\mathcal{S} - \sum_{j=1}^{n} v_{ij}}{\mathcal{V}(i)_{=0}} \right\rceil \leq n^2$$

donde $\mathcal{V}(i)_{=0}$ es el número de casillas vacías que hay en la fila i.

Análogamente para columnas y diagonales[5]. La tabla 2 muestra las caracterizaciones matemáticas para el caso de las asignaciones mínimas donde $\mathcal{V}(j)_{=0}$, $\mathcal{V}(i, n-i+1)_{=0}$ y $\mathcal{V},\rangle(i)_{=0}$ son, respectivamente, el número de casillas vacías en la columna j, en la diagonal principal y la secundaria.

Por ejemplo, en el cuadrado mágico con $n = 4$, $\mathcal{S} = 34$, de acuerdo con la ecuación (1). Si $v_{12} = 1$, y $v_{22} = 2$, cualesquiera de las asignaciones $v_{32} = \{3, 4, 5, \ldots, 14\}$ son infactibles puesto que en el mejor caso, la suma de los elementos de la columna 2 ($j = 2$) sería $1 + 2 + 14 = 17$ de modo que la última casilla tendría que ser 17 para sumar $\mathcal{S} = 34$. Sin embargo, 17 es mayor que el mayor valor permitido, que para $n = 4$ es $4^2 = 16$

Solución ejercicio 4

1. A partir de la definición de cada estado, y los operadores que consisten en rotar independientemente cada uno de los triángulos en una dirección u otra, resulta que el espacio de estados consiste en los 12 estados mostrados a continuación, donde cada arco resulta de la aplicación de un operador diferente.

[4] Si (i, j) no está en una de las diagonales, la comprobación sería redundante, pero no incorrecta.

[5] Como en el caso anterior, esta comprobación podría ser redundante en este caso, pero nunca incorrecta.

Filas	$\left\lceil \frac{\mathcal{S}-\sum_{j=1}^{n} v_{ij}}{\mathcal{V}(i)_{=0}} \right\rceil \leq n^2$
Columnas	$\left\lceil \frac{\mathcal{S}-\sum_{i=1}^{n} v_{ij}}{\mathcal{V}(j)_{=0}} \right\rceil \leq n^2$
Diagonal principal	$\left\lceil \frac{\mathcal{S}-\sum_{i=1}^{n} v_{i(n-i+1)}}{\mathcal{V}(i,n-i+1)_{=0}} \right\rceil \leq n^2$
Diagonal secundaria	$\left\lceil \frac{\mathcal{S}-\sum_{i=1}^{n} v_{i(n-i+1)}}{\mathcal{V}(i,i)_{=0}} \right\rceil \leq n^2$

Cuadro 2: Restricciones sobre las asignaciones mínimas

Como puede verse, el grafo del espacio de estados resultante es *no dirigido*, esto es, por cada arco que relaciona dos vértices v_i y v_j (o equivalentemente estados) existe un operador para transitar de v_i a v_j y viceversa.

2. Si ahora sólo se permiten los giros en el sentido de las agujas del reloj, ya no será cierto que al transitar del estado v_i al estado v_j (gracias a un giro a favor de las agujas del reloj), sea posible transitar inmediatamente de v_j a v_i puesto que para hacerlo, el giro sería ahora en contra de las agujas del reloj. Por lo tanto, el espacio de estados resultante es el grafo *dirigido* de la figura 9

Solución ejercicio 5

El espacio de estados se puede representar con una tupla de 8 posiciones: $< x_1, \ldots, x_8 >$, donde cada posición hace referencia a la posición de un asiento en el coche. x_1 y x_2 son los asientos del piloto y copiloto respectivamente. En la segunda fila de asientos, estarían x_3, x_4 y x_5, que corresponden con la ventanilla izquierda, el asiento central, y la ventanilla derecha respectivamente. Por último, tendríamos x_7 y x_8 en la tercera fila de asientos. Cada elemento de la tupla puede tomar un valor en el conjunto $\{n, a, d\}$, donde n significa posición normal, a significa abatido, y d significa desplazado. A esta tupla se le podría unir el valor del espacio de carga disponible, aunque dado que es directamente calculable desde la configuración, no es necesario.

Dada esta representación cabría la duda de si incluir o no en cada estado la información sobre la capacidad de carga disponible. Sin embargo, este valor es calculable a partir de cada estado como una función, por lo que es preferible no gastar memoria con esa información, que se sabe es redundante.

Hay tres posibles acciones (donde x puede tomar un valor entre 1 y 8):

- $abatir(i)$: abatir el asiento x_i
  - Condiciones: $x_i = n$. Para $i = 2$ también se debe cumplir que $x_4 = x_5 = a$.
  - Efecto: $x_i = a$
  - Coste: constante (2)
  - En una representación basada en reglas:

    `Abatir` (i):

    SI $x_i = n \wedge (i \neq 2 \vee (x_4 = a \wedge = x_5 = a))$
    ENTONCES $x_i = a \wedge coste = coste + 2$
    k = 2

- $desplazar(i)$: desplazar el asiento x_i
  - Condiciones: $x_i = n$. Para $i = 2$ también se debe cumplir que $x_4 = x_5 = a$.
  - Efecto: $x_i = d$
  - Coste: constante (1)
  - En una representación basada en reglas:

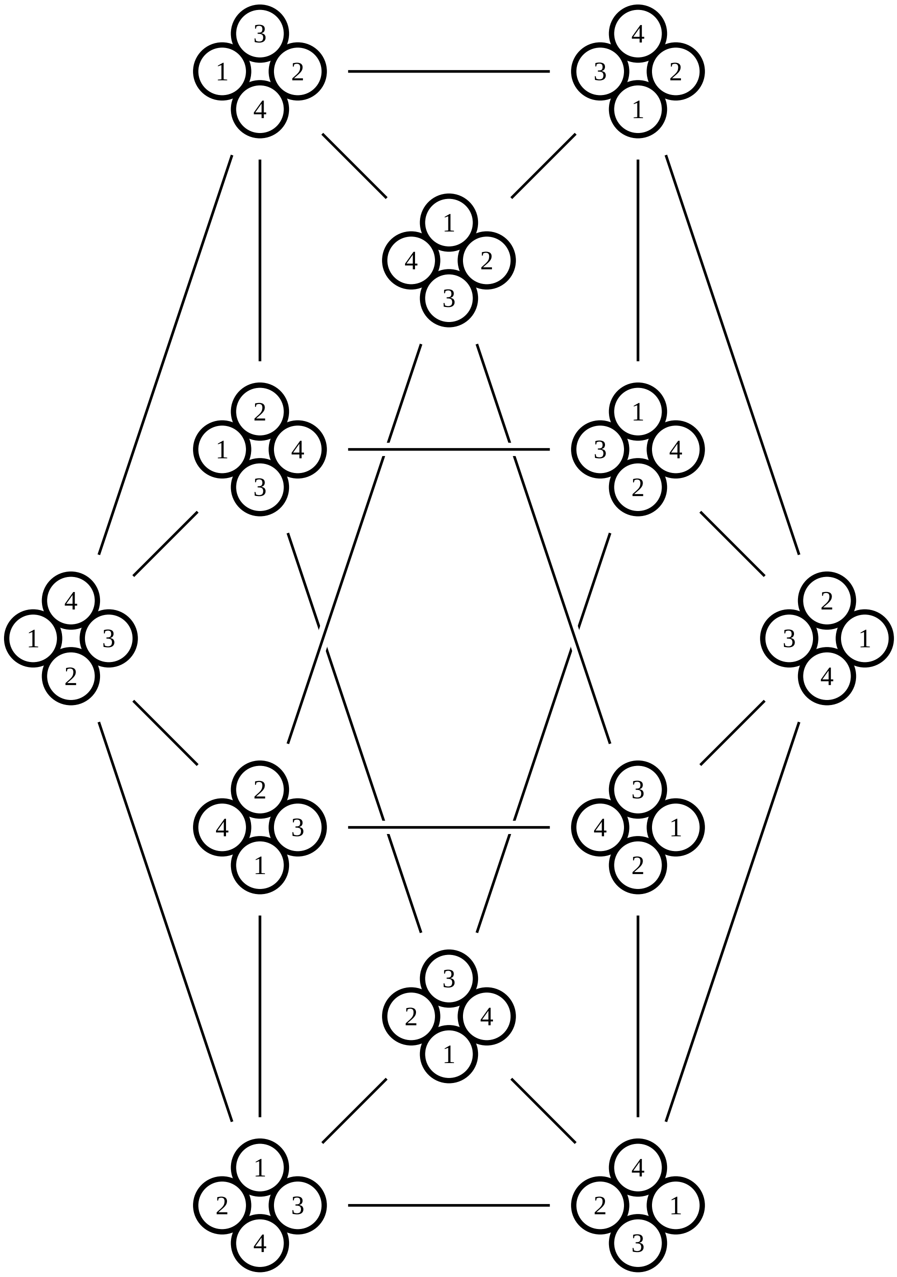


Figura 8: Espacio de estados representado con un grafo no dirigido

`Desplazar` (i):

SI $x_i = n \wedge (i \neq 2 \vee (x_4 = a \wedge = x_5 = a))$
ENTONCES $x_i = d \wedge coste = coste + 1$
k = 1

- *normal*(i): devolver a posición normal el asiento i
  - Condiciones: $x_i \neq n$. Para $i = 4$ e $i = 5$ también se debe cumplir que $x_2 = n$.
  - Efecto: $x_i = n$
  - Coste: depende de la situación de partida de x_i. Si inicialmente $x_i = d$, entonces el coste es 1. Si inicialmente $x_i = a$, el coste es 2.

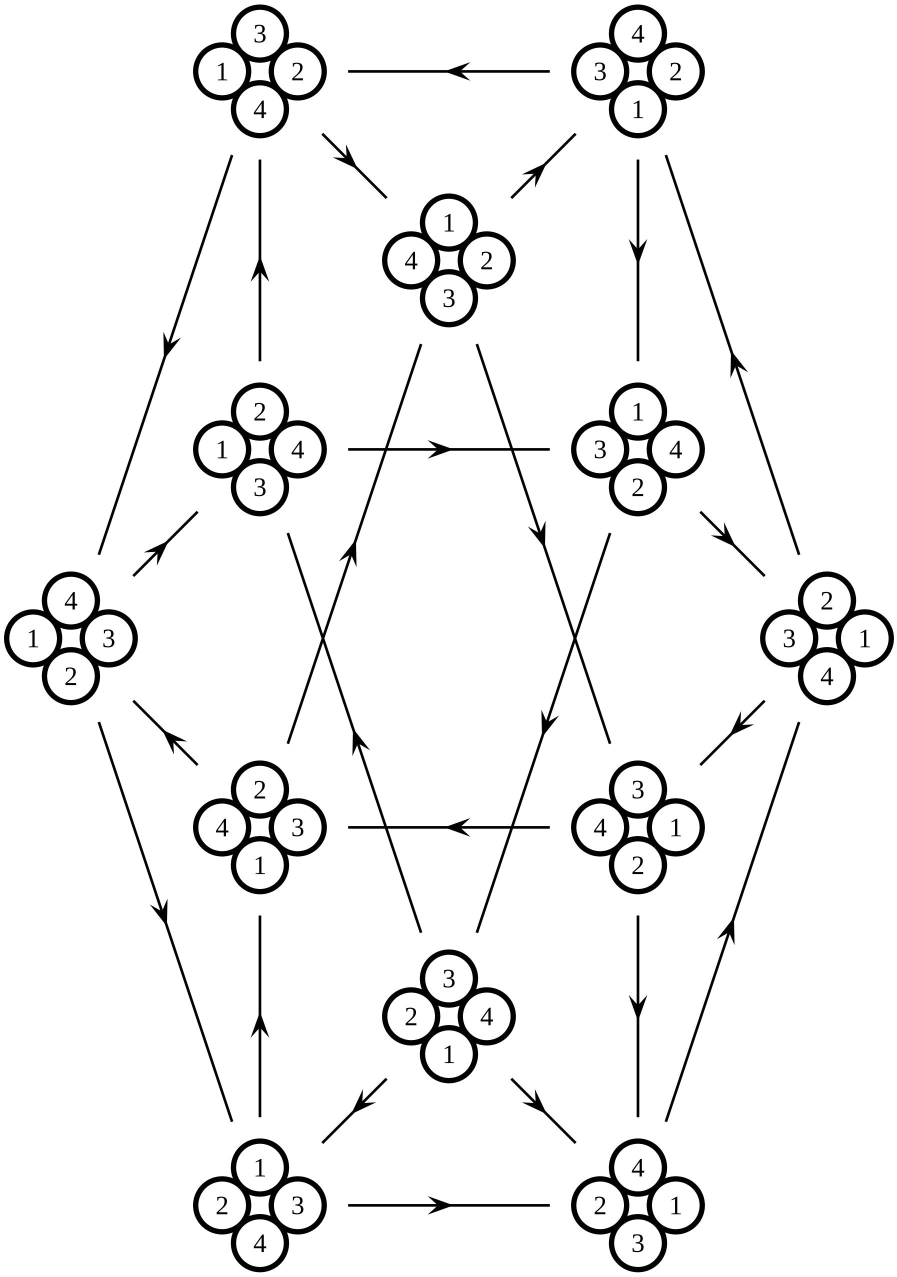


Figura 9: Espacio de estados representado como un grafo dirigido

- En una representación basada en reglas:

`Normal` (i):

SI $x_i \neq n \wedge (i \neq 4 \vee i \neq 5 \vee x_2 = n$
ENTONCES $x_i = d \wedge coste = coste + 1$
$k = 1 + (x_i == a)$

Nótese que la acción $normal(x_i)$ se podría haber dividido en dos (una que desabatiese, y otra que eliminara el desplazamiento).

El estado inicial es $< n, n, n, n, a, a$¿

El tamaño del espacio de estados es menor que 7^3 (todas las posibles combinaciones de los asientos), dado que hay configuraciones que no son aceptables. En concreto, hay que contar sólo las configuraciones en que se cumpla que $x_2 = n$ y en su defecto, que $x_4 = x_5 = a$. En total, cumplen esa condición 11×5^3 estados. Este valor viene de tener en cuenta que de las 33 posibles posiciones que pueden ocupar x_2, x_4 y x_5, no hay problemas en los 9 casos en que $x_2 = n$. De los 18 casos restantes (2 posibles valores de x_2 por las 2^3 combinaciones de x_4 y x_5), no hay problema en 2 de ellos (cuando $x_4 = x_5 = a$). Por tanto, el espacio de estados tiene un tamaño de $11 * 5^3$