

IA. 2008

## Inteligencia Artificial

## Inteligencia Artificial

## 2 Búsqueda sin información

- Búsqueda en Amplitud
- Búsqueda en profundidad
- Búsqueda hacia atrás
- Búsqueda bidireccional
- Búsqueda con costes no uniformes
- Otros algoritmos de búsqueda
- Análisis de complejidad

### 3 Búsqueda heurística

- Heurística
- Técnica de escalada
- Técnicas de mejor-primero
- Otros algoritmos



## Inteligencia Artificial

- Algoritmo Minimax

# Introducción

- Espacio de problemas
  - Conjunto de estados
  - Conjunto de operadores
  - Estado(s) inicial(es)
  - Meta(s)
- Representable por un grafo
- Resolución de problemas = búsqueda en el grafo
- Normalmente, la búsqueda genera un árbol
- Parámetros importantes
  - Factor de ramificación
  - Profundidad del árbol de búsqueda
- Diferencia con OR: el grafo en OR es explícito. En muchos problemas es imposible

# Introducción

- Espacio de problemas
  - Conjunto de estados
  - Conjunto de operadores
  - Estado(s) inicial(es)
  - Meta(s)
- Representable por un grafo
- Resolución de problemas = búsqueda en el grafo
- Normalmente, la búsqueda genera un árbol
- Parámetros importantes
  - Factor de ramificación
  - Profundidad del árbol de búsqueda
- Diferencia con OR: el grafo en OR es explícito. En muchos problemas es imposible

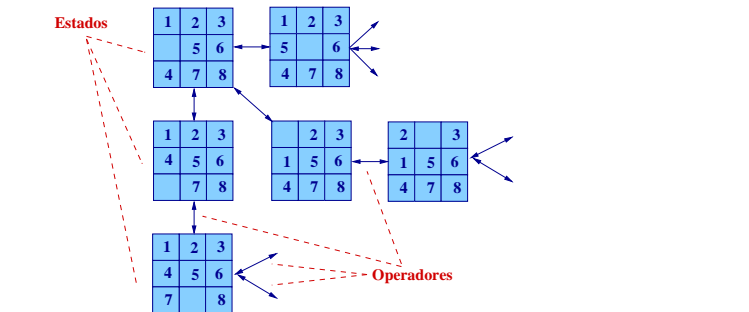


◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

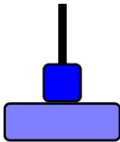
# Introducción

- Espacio de problemas
  - Conjunto de estados
  - Conjunto de operadores
  - Estado(s) inicial(es)
  - Meta(s)
- Representable por un grafo
- Resolución de problemas = búsqueda en el grafo
- Normalmente, la búsqueda genera un árbol
- Parámetros importantes
  - Factor de ramificación
  - Profundidad del árbol de búsqueda
- Diferencia con OR: el grafo en OR es explícito. En muchos problemas es imposible

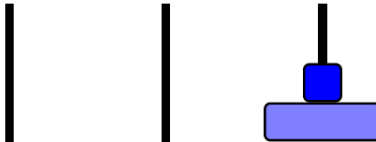
◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡



## Ejemplo: Las torres de Hanoi (3,2)

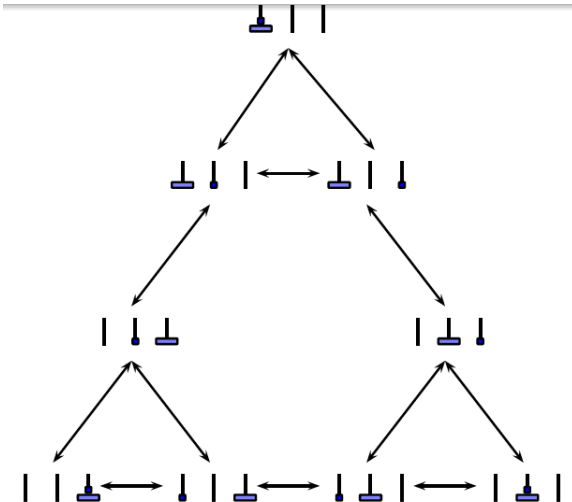


## Estado inicial



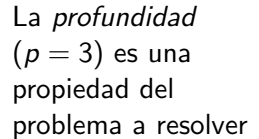
## Estado final

## Ejemplo: Las torres de Hanoi (3,2)



El *factor de ramificación* ( $fr = \frac{8}{3}$ ) es una propiedad del grafo de estados

## Inteligencia Artificial



## 16





## Operadores

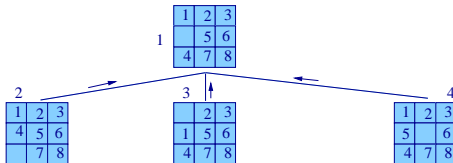
Verter en pequeña : Si  $(x > 0) \rightarrow (x - \min\{x, 3 - y\}, y + \min\{x, 3 - y\})$

## Inteligencia Artificial

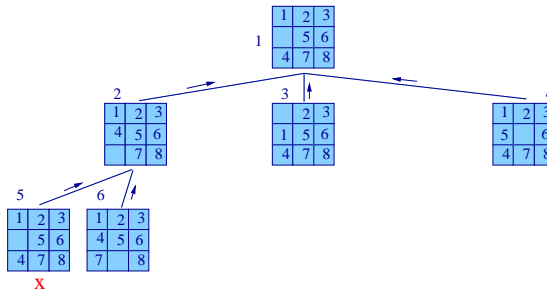
◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

## Inteligencia Artificial

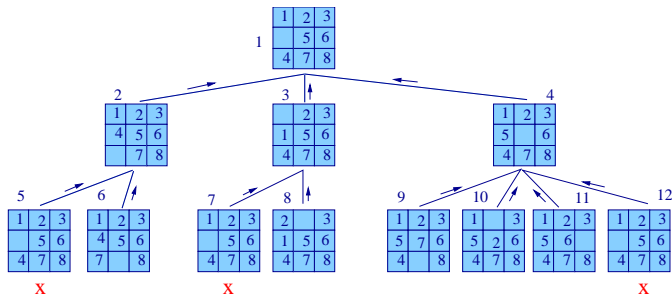
- Algoritmo Minimax



## 8-Puzzle – Amplitud











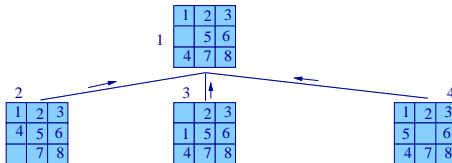
# Búsqueda en amplitud

## Procedimiento Amplitud (Estado-inicial Estado-Final)

- 1 Crear lista ABIERTA con el nodo inicial, I, (estado-inicial)
- 2 EXITO=False
- 3 Hasta que ABIERTA esté vacía O EXITO  
    Quitar de ABIERTA el primer nodo, N  
    Si N tiene sucesores  
    Entonces Generar los sucesores de N  
        Crear punteros desde los sucesores hacia N  
        Si algún sucesor es nodo meta  
        Entonces EXITO=Verdadero  
        Si no Añadir los sucesores al final de ABIERTA
- 4 Si EXITO  
    Entonces Solución=camino desde I a N por los punteros  
    Si no, Solución=fracaso

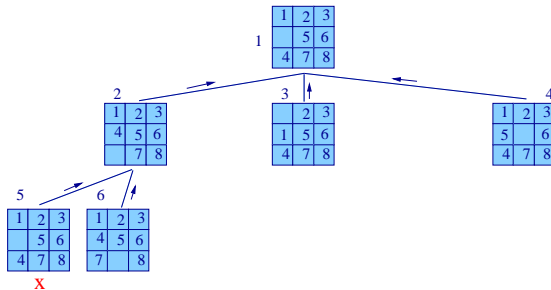
- **Completo:** encuentra solución si existe y el factor de ramificación es finito en cada nodo
- **Optimalidad:** si todos los operadores tienen el mismo coste, encontrará la solución óptima
- **Eficiencia:** buena si las metas están cercanas
- Problema: consume memoria exponencial

## 8-Puzzle – Profundidad

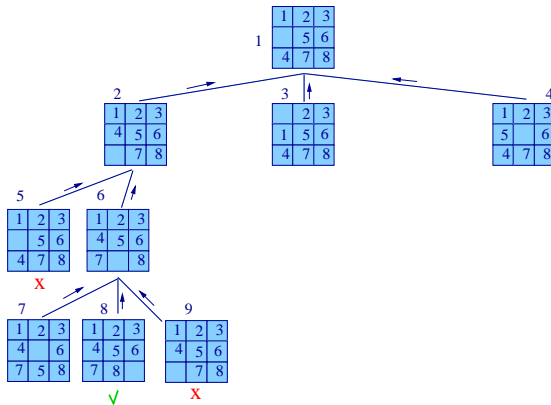


## Búsqueda en profundidad

## 8-Puzzle – Profundidad



## 8-Puzzle – Profundidad





- Requiere técnica de retroceso (“backtracking”)
- Razones para retroceso:
  - Se ha llegado al límite de profundidad
  - Se han estudiado todos los sucesores de un nodo y no se ha llegado a la solución
  - Se sabe que el estado no conduce a la solución
  - Se genera un estado repetido
- **Complejidad:** no asegura encontrar la solución
- **Optimalidad:** no asegura encontrar la solución óptima
- **Eficiencia:** bueno cuando metas alejadas de estado inicial, o problemas de memoria
- No es bueno cuando hay ciclos



- Requiere técnica de retroceso (“backtracking”)
- Razones para retroceso:
  - Se ha llegado al límite de profundidad
  - Se han estudiado todos los sucesores de un nodo y no se ha llegado a la solución
  - Se sabe que el estado no conduce a la solución
  - Se genera un estado repetido
- **Completitud:** no asegura encontrar la solución
- **Optimalidad:** no asegura encontrar la solución óptima
- **Eficiencia:** bueno cuando metas alejadas de estado inicial, o problemas de memoria
- No es bueno cuando hay ciclos

- Requiere técnica de retroceso (“backtracking”)
- Razones para retroceso:
  - Se ha llegado al límite de profundidad
  - Se han estudiado todos los sucesores de un nodo y no se ha llegado a la solución
  - Se sabe que el estado no conduce a la solución
  - Se genera un estado repetido
- **Complejidad:** no asegura encontrar la solución
- **Optimalidad:** no asegura encontrar la solución óptima
- **Eficiencia:** bueno cuando metas alejadas de estado inicial, o problemas de memoria
- No es bueno cuando hay ciclos

# Búsqueda no informada con costes

- Dijkstra: amplitud, pero eligiendo aquel nodo que tenga menor coste desde el nodo raíz
- *Branch and bound, B&B*
  - búsqueda (normalmente en profundidad)
  - cuando encuentra una solución, su coste se convierte en un límite (superior o inferior) para los siguientes nodos
  - si un nodo posterior tiene un coste desde el nodo raíz mayor/menor (o igual) que el límite, se termina la búsqueda por él
  - si se tiene un límite inicial, se puede utilizar la misma idea para amplitud/Dijkstra

# Análisis de complejidad

- Si se dispone de:
  - factor de ramificación medio  $fr$
  - profundidad del árbol de búsqueda  $p$
- ¿Cuál sería, en el peor de los casos, el número de nodos que examinaría cada técnica?
  - Unidireccional
- Pista:
  - supóngase que  $fr=3$ , y vaya incrementándose la  $p$
  - calcular de forma inductiva el número de nodos

## Análisis de complejidad

Técnica de Búsqueda	Número máximo de nodos
Unidireccional	$\sum_{i=0}^P fr^i$

## Análisis de complejidad

Técnica de Búsqueda	Complejidad	
	Temporal	Espacial
Amplitud	$O(fr^p)$	$O(fr^p)$
Profundidad	$O(fr^p)$	$O(p)$

- Cuando complejidad en tiempo es igual a la de espacio, se agota la memoria antes que el tiempo

100

## 2 Búsqueda sin información

- Búsqueda en Amplitud
- Búsqueda en profundidad
- Búsqueda hacia atrás
- Búsqueda bidireccional
- Búsqueda con costes no uniformes
- Otros algoritmos de búsqueda
- Análisis de complejidad

- Heurística
- Técnica de escalada
- Técnicas de mejor-primero
- Otros algoritmos

#### 4 Búsqueda con múltiples agentes

- Algoritmo Minimax

# Heurística

- Si se tiene conocimiento perfecto → algoritmo exacto
- Si no se tiene conocimiento → búsqueda sin información
- En la mayor parte de los problemas que resuelven los humanos, se está en posiciones intermedias
- Heurística: (del griego “*heurisko*” (εὕρισκω): “**yo encuentro**”) conocimiento parcial sobre un problema/dominio que permite resolver problemas eficientemente en ese problema/dominio
- Representación de las heurísticas
  - funciones  $h(n)$
  - metareglas
- Las funciones heurísticas se **descubren** resolviendo modelos *simplificados* del problema real



# Heurística

- Si se tiene conocimiento perfecto → algoritmo exacto
- Si no se tiene conocimiento → búsqueda sin información
- En la mayor parte de los problemas que resuelven los humanos, se está en posiciones intermedias
- **Heurística:** (del griego “*heurisko*” (εὕρισκω): “**yo encuentro**”) conocimiento parcial sobre un problema/dominio que permite resolver problemas eficientemente en ese problema/dominio
- Representación de las heurísticas
  - funciones  $h(n)$
  - metareglas
- Las funciones heurísticas se **descubren** resolviendo modelos *simplificados* del problema real

# Heurística

- Si se tiene conocimiento perfecto → algoritmo exacto
- Si no se tiene conocimiento → búsqueda sin información
- En la mayor parte de los problemas que resuelven los humanos, se está en posiciones intermedias
- **Heurística:** (del griego “*heurisko*” (εὕρισκω): “**yo encuentro**”) conocimiento parcial sobre un problema/dominio que permite resolver problemas eficientemente en ese problema/dominio
- Representación de las heurísticas
  - funciones  $h(n)$
  - metareglas
- Las funciones heurísticas se **descubren** resolviendo modelos *simplificados* del problema real

# Heurística

- Si se tiene conocimiento perfecto → algoritmo exacto
- Si no se tiene conocimiento → búsqueda sin información
- En la mayor parte de los problemas que resuelven los humanos, se está en posiciones intermedias
- **Heurística:** (del griego “*heurisko*” (εὕρισκω): “**yo encuentro**”) conocimiento parcial sobre un problema/dominio que permite resolver problemas eficientemente en ese problema/dominio
- Representación de las heurísticas
  - funciones  $h(n)$
  - metareglas
- Las funciones heurísticas se **descubren** resolviendo modelos *simplificados* del problema real

# Problemas relajados. 8-puzzle

- Restricciones:
  - sólo se puede mover el blanco
  - el movimiento sólo se puede hacer a casillas adyacentes horizontal o vertical
  - en cada paso, se intercambian los contenidos de dos casillas
- Relajaciones:
  - si quitamos las dos primeras restricciones, generamos la heurística de número de casillas mal colocadas
  - si quitamos la primera restricción, generamos la heurística de la distancia de Manhattan

- Restricciones:
  - sólo se puede mover el blanco
  - el movimiento sólo se puede hacer a casillas adyacentes horizontal o vertical
  - en cada paso, se intercambian los contenidos de dos casillas
- Relajaciones:
  - si quitamos las dos primeras restricciones, generamos la heurística de número de casillas mal colocadas
  - si quitamos la primera restricción, generamos la heurística de la distancia de Manhattan

# Algoritmo de escalada

Procedimiento escalada (Estado-inicial Estado-final)

N=Estado-inicial; EXITO=Falso

Hasta que Camino-Sin-Salida(N) O EXITO

    Generar los sucesores de N

    Si algún sucesor es Estado-final

        ENTONCES EXITO=Verdadero

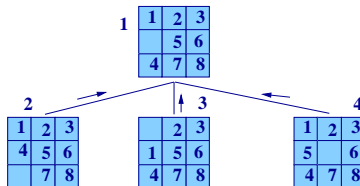
    Si NO, Evaluar cada nodo con la función de evaluación,  $f(n)$

        N=mejor sucesor

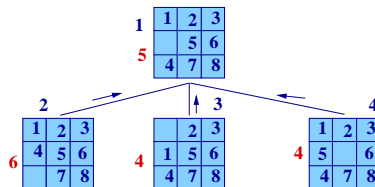
Si EXITO

Entonces Solución=camino desde nodo del Estado-inicial  
                                    al nodo N por los punteros

Si no, Solución=fracaso

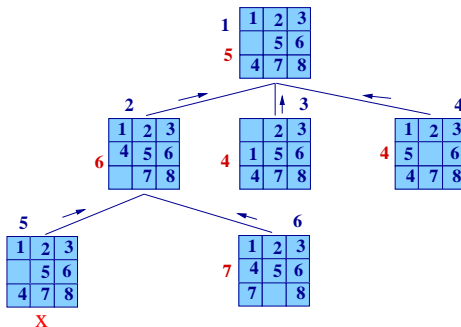


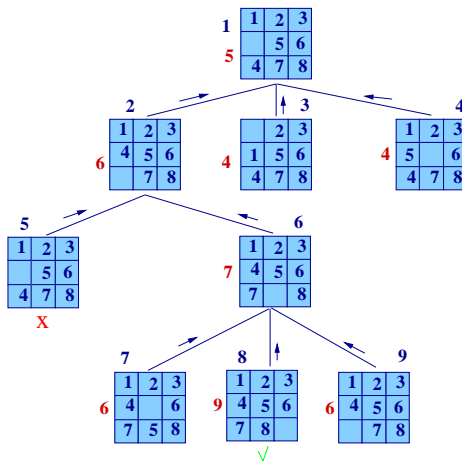
## 8-Puzzle – Búsqueda en escalada





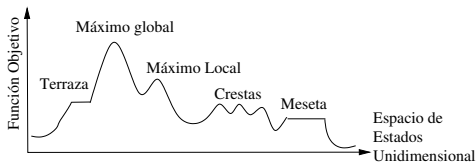
# 8-Puzzle – Búsqueda en escalada





# Características

- Problemas de los métodos *avariciosos*
  - **Máximos (o mínimos) locales:** pico que es más alto que cada uno de sus estados vecinos, pero más bajo que el máximo global
  - **Mesetas:** zona del espacio de estados con función de evaluación plana
  - **Crestas:** zona del espacio de estados con varios máximos (mínimos) locales



# Características

- Soluciones
  - Retroceso
  - Dar más de un paso
  - Reinicio aleatorio
- Método local
  - **Compleitud**: no tiene porqué encontrar la solución
  - **Admisibilidad**: no siendo completo, aún menos será admisible
  - **Eficiencia**: rápido y útil si la función es monótona (de)creciente

# Técnicas de mejor primero

## Procedimiento Mejor-primero (Estado-inicial Estado-final)

Crear grafo de búsqueda  $G$ , con el nodo inicial,  $I$  (Estado-inicial)

ABIERTA= $I$ , CERRADA=Vacío, EXITO=Falso

Hasta que ABIERTA esté vacía O EXITO

    Quitar el primer nodo de ABIERTA,  $N$  y meterlo en CERRADA

    SI  $N$  es Estado-final ENTONCES EXITO=Verdadero

    SI NO Expandir  $N$ , generando el conjunto  $S$  de sucesores de  $N$ ,  
        que no son antecesores de  $N$  en el grafo

        Generar un nodo en  $G$  por cada  $s$  de  $S$

        Establecer un puntero a  $N$  desde aquellos  $s$  de  $S$  que no estuvieran ya en  $G$

        Añadirlos a ABIERTA

        Para cada  $s$  de  $S$  que estuviera ya en ABIERTA o CERRADA

            decidir si redirigir o no sus punteros hacia  $N$

        Para cada  $s$  de  $S$  que estuviera ya en CERRADA

            decidir si redirigir o no los punteros de los nodos en sus subárboles

        Reordenar ABIERTA según  $f(n)$

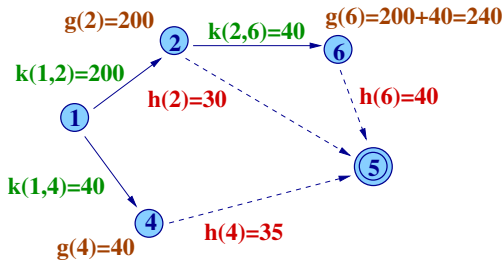
Si EXITO Entonces Solución=camino desde  $I$  a  $N$  a través de los punteros de  $G$

Si no Solución=Fracaso

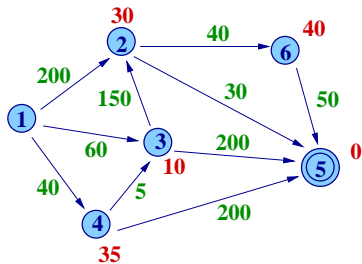
# A\* (Hart, Nilsson y Rafael, 1968)

- Función de ordenación de nodos:  $f(n) = g(n) + h(n)$ 
  - $f(n)$ : función de evaluación
  - $g(n)$ : función de coste de ir desde el nodo inicial al nodo  $n$
  - $h(n)$ : función heurística que mide la distancia estimada desde  $n$  a algún nodo meta
- $g(n)$  se calcula como la suma de los costes de los arcos recorridos,  $k(n_i, n_j)$
- Los valores reales sólo se pueden conocer al final de la búsqueda
  - $f^*(n)$ : coste real para ir desde el nodo inicial a algún nodo meta a través de  $n$
  - $g^*(n)$ : coste real para ir desde el nodo inicial al nodo  $n$
  - $h^*(n)$ : coste real para ir desde el nodo  $n$  a algún nodo meta

# Definición de términos

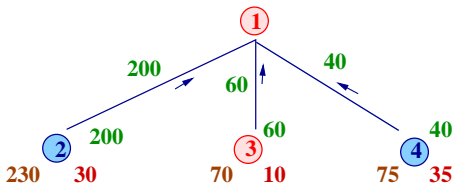


## Ejemplo A\*

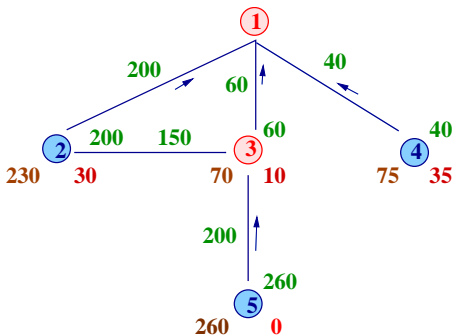




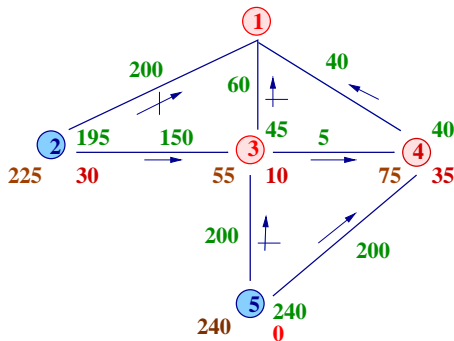
## Ejemplo A\*



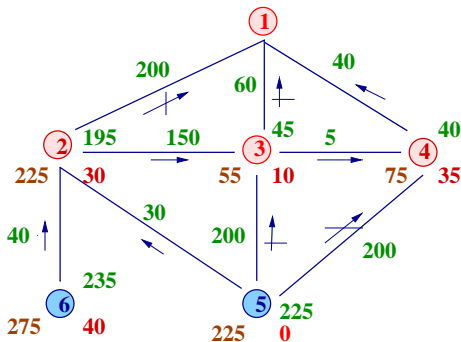
## Ejemplo A\*



## Ejemplo A\*



## Ejemplo A\*



# Características

- **Compleitud:** si existe solución, la encuentra
- **Admisibilidad:** si hay una solución óptima, la encuentra si
  - el número de sucesores es finito para cada nodo,
  - $k(n_i, n_j) > \epsilon > 0$  en cada arco, y
  - La función  $h(n)$  es admisible:  $h(n) \leq h^*(n) \forall n$

# Consideraciones sobre la heurística

- Si  $h_1(n) \leq h_2(n) \forall n$ ,  $h_2(n)$  está más informada que  $h_1(n)$  y servirá para expandir menos nodos
  - Ejemplo: distancia de Manhattan está más informada que número de casillas mal colocadas (problema de Manhattan es menos relajado que el del número de casillas)
- Extremos
  - $h(n) = 0$  para cada nodo: no se tiene información (Dijkstra)
  - $h(n) = h^*(n)$  para cada nodo: se tiene información perfecta
- No tiene sentido dedicar más coste computacional a calcular una buena  $h(n)$  que a realizar la búsqueda equivalente: equilibrio

# Técnicas mejor-primero

- No informadas:
  - Búsqueda en amplitud:  $f(n) = \text{profundidad}(n)$
  - Dijkstra:  $f(n) = g(n)$
- Informadas (heurísticas):
  - A, A\*, IDA\*, ...:  $f(n) = g(n) + h(n)$
  - Ponderadas:  $f(n) = g(n) + \omega h(n), \omega > 1$ 
    - Es completo, pero no es admisible
    - La solución óptima tiene un coste menor o igual que  $(1 + \omega)$  veces la generada

# IDA\* (Korf, 1985)

## Procedimiento IDA\* (Estado-inicial Estado-final)

EXITO=Falso

$$\eta = h(s)$$

Mientras que EXITO=Falso

    EXITO=Profundidad (Estado-inicial,  $\eta$ )

$$\eta = \min_{i=1,n} \{f(i)\} = \min_{i=1,n} \{g(i) + h(i)\}$$

Solución=camino desde nodo del Estado-inicial  
al Estado-final por los punteros

## Profundidad (Estado-inicial, $\eta$ )

    Expande todos los nodos cuyo coste  $f(n)$  no excede  $\eta$



# Características

- **Compleitud:** es completo
- **Admisibilidad:** es admisible
- **Eficiencia:** la complejidad de tiempo es exponencial, pero la complejidad de espacio es lineal en la profundidad del árbol de búsqueda
- Aunque pudiera parecer lo contrario, el número de *re-expansiones* es sólo mayor en un pequeño factor que el número de expansiones de los algoritmos de el mejor primero
- Fue el primer algoritmo que resolvió óptimamente 100 casos generados aleatoriamente en el 15-Puzzle

10

## 2 Búsqueda sin información

- Búsqueda en Amplitud
- Búsqueda en profundidad
- Búsqueda hacia atrás
- Búsqueda bidireccional
- Búsqueda con costes no uniformes
- Otros algoritmos de búsqueda
- Análisis de complejidad

- Heurística
- Técnica de escalada
- Técnicas de mejor-primero
- Otros algoritmos

#### 4 Búsqueda con múltiples agentes

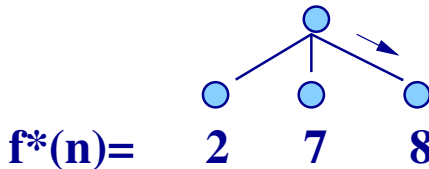
- Algoritmo Minimax

# Características de los problemas

- **Suma nula:** lo que gana uno, lo pierde el otro
- **Dos agentes** (se puede generalizar,  $\text{Max}^n$ )
- **Información completa:** se conoce en cada momento el estado completo del juego
- **Deterministas** o de **información perfecta:** no entra en juego el azar (se puede generalizar)
- **Alternados:** las decisiones de cada agente se toman de forma alternada

# Algoritmo Minimax

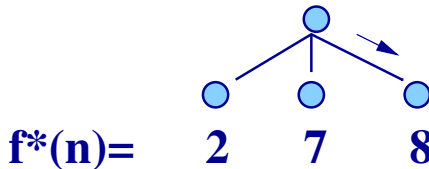
Función de evaluación perfecta



- Problema: no se conoce dicha función

# Algoritmo Minimax

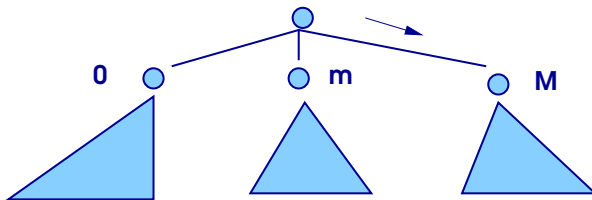
**Función de evaluación perfecta**



- Problema: no se conoce dicha función

# Algoritmo Minimax

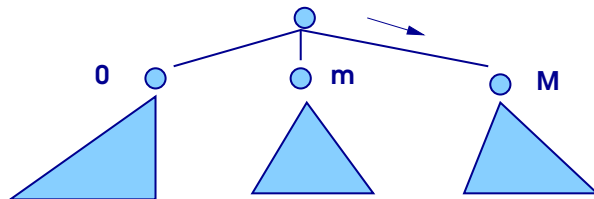
## Búsqueda completa



- Nodos hojas: ganamos ( $M=\infty$ ), perdemos ( $m=-\infty$ ) o empatamos (0)
- Problema: es intratable; no se puede realizar en un tiempo razonable

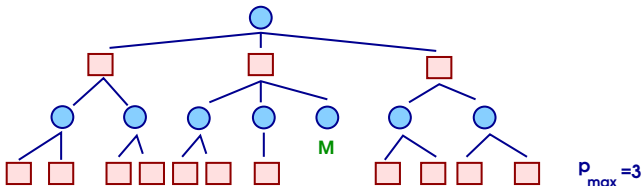
# Algoritmo Minimax

## Búsqueda completa



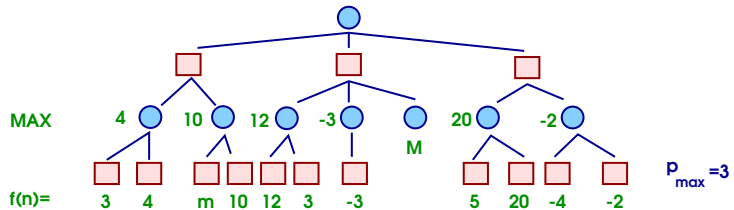
- Nodos hojas: ganamos ( $M=\infty$ ), perdemos ( $m=-\infty$ ) o empatamos (0)
- Problema: es intratable; no se puede realizar en un tiempo razonable

# Algoritmo Minimax

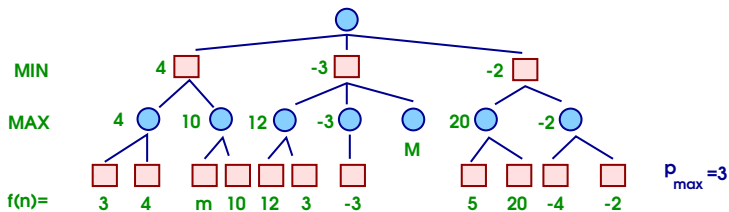




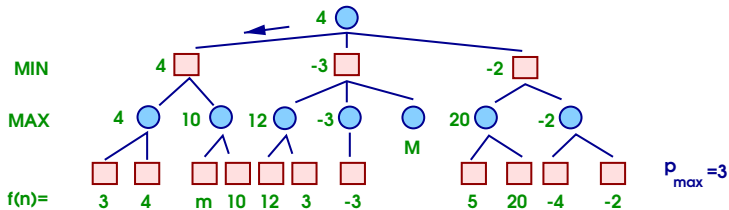




# Algoritmo Minimax



# Algoritmo Minimax



# Procedimiento Minimax

## Procedimiento Minimax (Situación Profundidad)

SI Profundidad =  $p_{max}$

ENTONCES devolver evaluación (Situación)

SI NO SI ganadora (Situación)

ENTONCES devolver  $+\infty$

SI NO SI perdedora (Situación)

ENTONCES devolver  $-\infty$

SI NO SI empate (Situación)

ENTONCES devolver 0

SI NO

$S$  = sucesores (Situación)

$L$  = lista de llamadas al MINIMAX ( $S_i \in S$ , Profundidad + 1)

SI nivel-max (Profundidad)

ENTONCES devolver max ( $L$ )

SI NO devolver min ( $L$ )

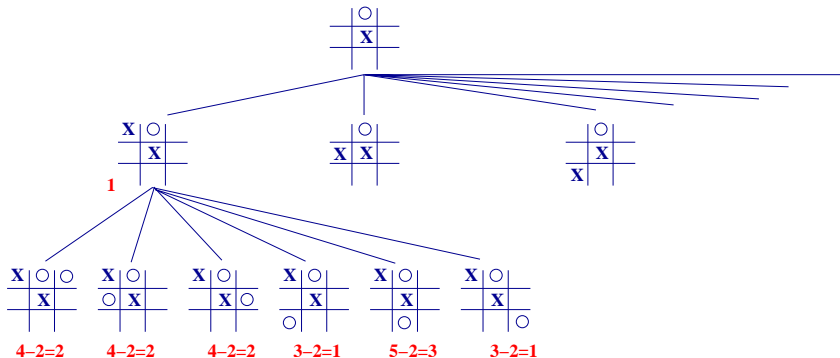
# Cálculo del valor de cada nodo

$$f(n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es una situación ganadora para computadora} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es una situación perdedora para computadora} \\ 0 & \text{si } n \text{ es una situación de empate} \\ f_{ev}(n) & \text{si } p = \text{Profundidad máxima} \\ \max_{S_i \in S(n)} f(S_i) & \text{si } n \text{ es nodo max y } p < p_{max} \\ \min_{S_i \in S(n)} f(S_i) & \text{si } n \text{ es nodo min y } p < p_{max} \end{cases}$$

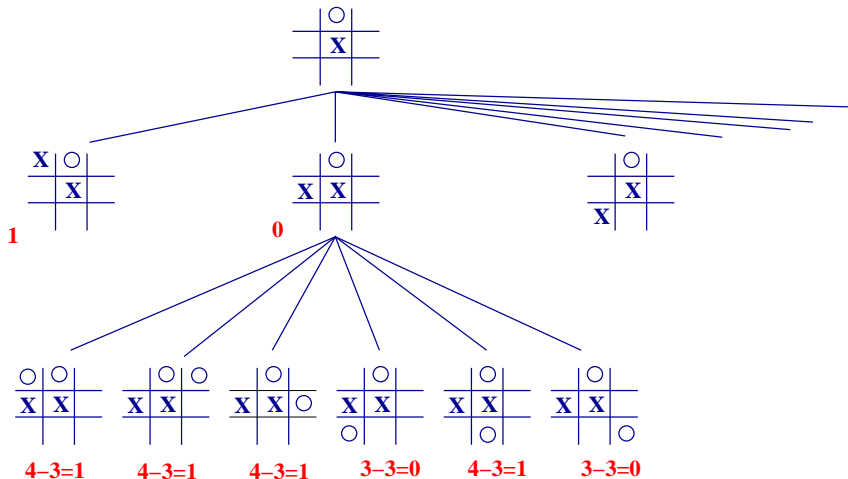
## Negamax

$$f(n) = \begin{cases} f_{ev}(n) & \text{si } d = 0 \\ \max(-f(S_1), \dots, -f(S_d)) & \text{si } d > 0 \end{cases}$$

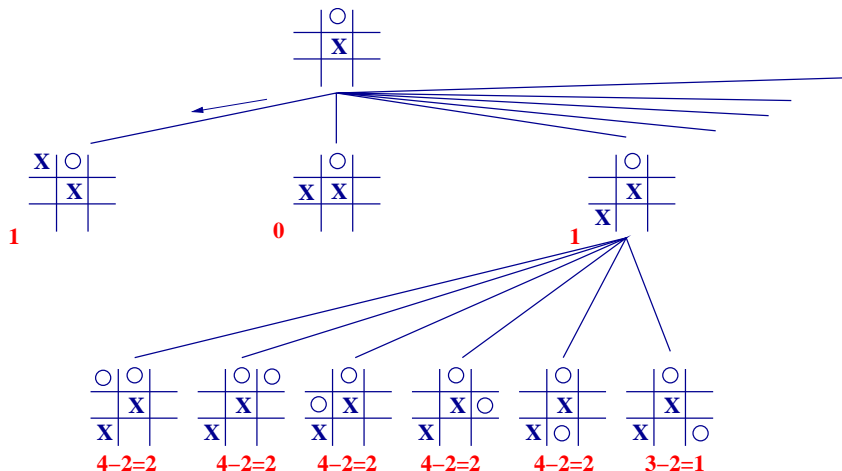
## Ejemplo en el tic-tac-toe



## Ejemplo en el tic-tac-toe







# Poda Alfa-beta

- Nodos MAX: se utiliza el parámetro  $\alpha$  para guardar el valor máximo de los sucesores encontrado hasta el momento.

$$\alpha_0 = -\infty$$

- Nodos MIN: se utiliza el parámetro  $\beta$  para guardar el valor mínimo de los sucesores encontrado hasta el momento.

$$\beta_0 = +\infty$$

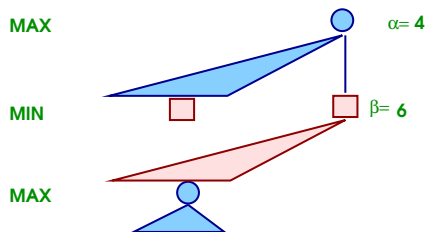
- Poda en los nodos MAX:

$$\alpha_p \geq \beta_{p-1}$$

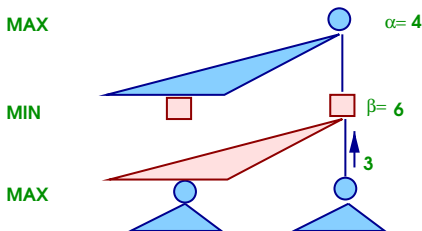
- Poda en los nodos MIN:

$$\beta_p \leq \alpha_{p-1}$$

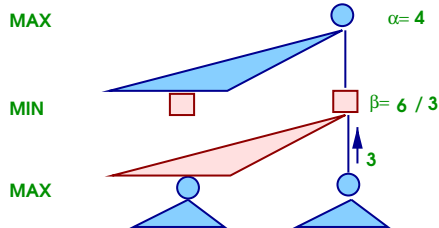
## Poda en los nodos MIN



# Poda en los nodos MIN

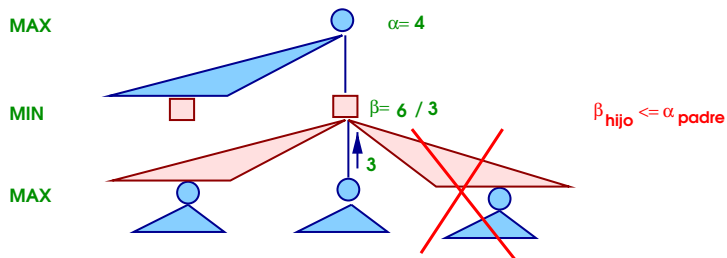


## Poda en los nodos MIN

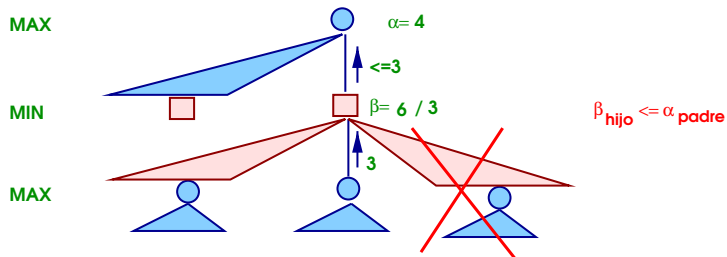


$$\beta_{\text{hijo}} \leq \alpha_{\text{padre}}$$

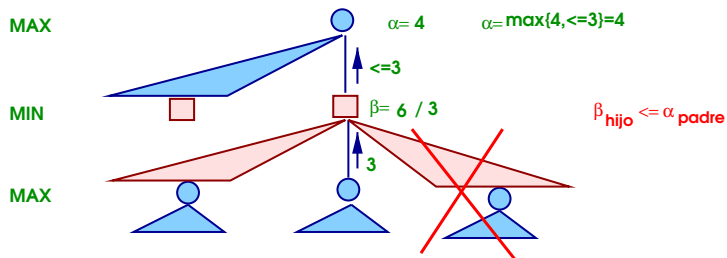
## Poda en los nodos MIN



## Poda en los nodos MIN



## Poda en los nodos MIN





# Algoritmo Alfa-beta

## Procedimiento Alfa-Beta (Situación Alfa Beta Profundidad)

Si Situación está considerada como empate, Devolver 0

Si Situación es ganadora, Devolver mayor-numero

Si Situación es perdedora, Devolver menor-numero

SI Profundidad = Profundidad-maxima, Devolver evaluacion (Situación)

SI nivel-max-p

para todo  $s_i$  sucesor de Situación y  $\text{Alfa} < \text{Beta}$

$$\text{Alfa-beta} = \text{ALFA-BETA}(s_i, \text{Alfa}, \text{Beta}, \text{Profundidad}+1)$$
$$\text{Alfa} = \max(\text{Alfa}, \text{Alfa-beta})$$

## Devolver Alfa

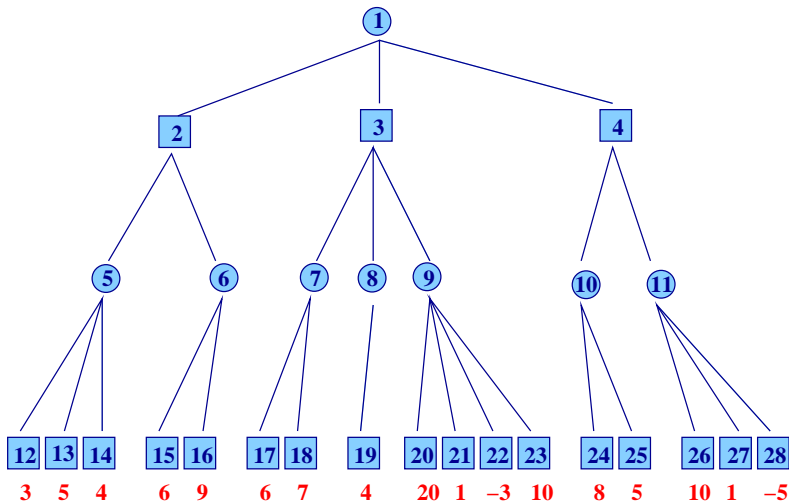
SI NO

para todo  $s_i$  sucesor de Situación y  $\text{Beta} > \text{Alfa}$

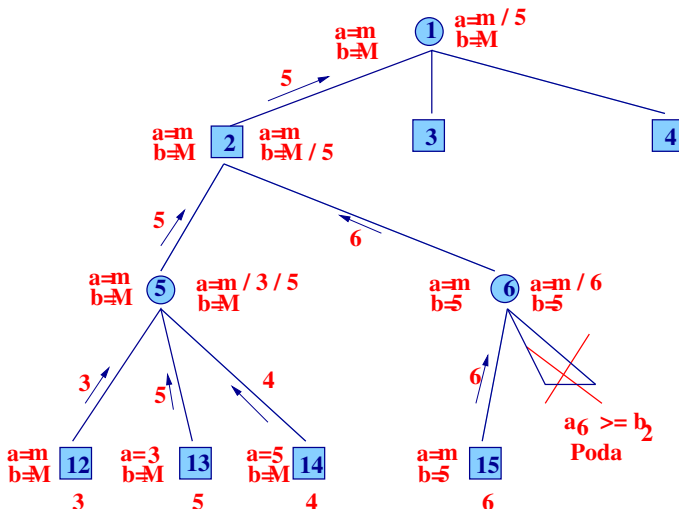
$$\text{Alfa-beta} = \text{ALFA-BETA}(s_i, \text{Alfa}, \text{Beta}, \text{Profundidad}+1)$$
$$\text{Beta} = \min(\text{Beta}, \text{Alfa-beta})$$

Devolver Beta

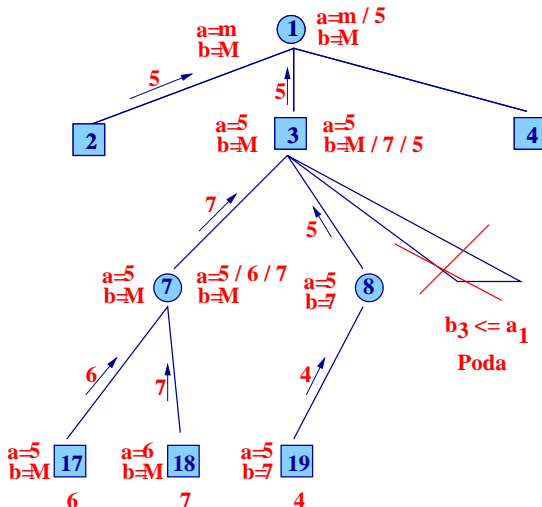
# Ejemplo del alfa-beta



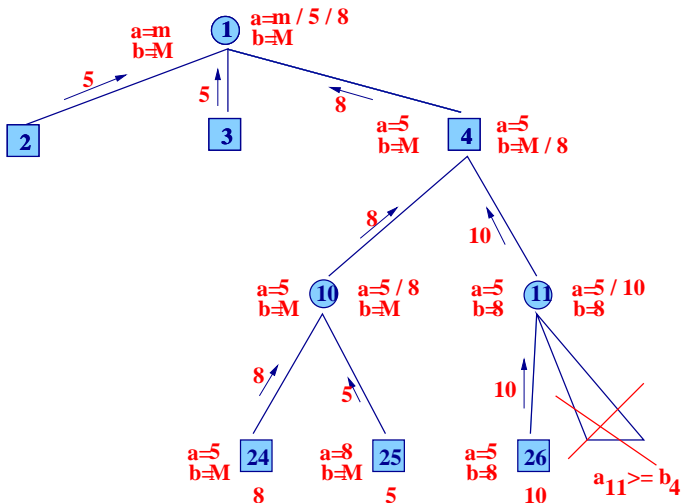
# Ejemplo del alfa-beta



# Ejemplo del alfa-beta



# Ejemplo del alfa-beta



- Ajedrez: HiTech, Deep Thought-Blue, Fritz
- Backgammon: NeuroGammon
- Damas: Chinook
- Othello: Logistello
- Juegos resueltos: Tic-Tac-Toe, Cuatro en Raya, Qubic, Go-Moku, **Damas (oficialmente desde 2007)**, ...
- IA en juegos actuales: estrategia