

Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's)

Sixto Romero

Francisco J. Moreno

Isabel M. Rodríguez

Título de la obra original

*Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales
(EDP's)*

©Copyright: 2001. Autores

Sixto Romero, Francisco J. Moreno, Isabel M. Rodríguez

Reservados todos los derechos de publicación, reproducción, préstamo o cualquier otra
forma de expresión de este ejemplar, por los autores.

Universidad de Huelva

*Escuela Politécnica Superior de La Rábida
21819. Palos de la Frontera 8Huelva)*

Edita: Servicio de Publicaciones. Universidad de Huelva

Printed in Spain

ISBN:

DL:

Fotocomposición: Los autores

Impresión:

Índice general

1. Nociones sobre las ecuaciones en derivadas parciales (EDP's)	9
1.1. Introducción	11
1.2. Definición. Algunos conceptos fundamentales	12
1.3. Significado geométrico de las soluciones general y particular	15
1.4. EDP's que surgen de la eliminación de funciones arbitrarias	17
1.5. Ejercicios propuestos	19
1.6. Ejercicios resueltos	20
2. Ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales. Propiedades	25
2.1. Ecuación en derivadas parciales lineal	27
2.2. Propiedades de las soluciones de las EDP	27
2.3. Clasificación de las EDP's de segundo orden de dos variables independientes .	29
2.4. Condiciones	29
2.5. Casos particulares	31
2.5.1. Ecuaciones de tipo hiperbólico	31
2.5.2. Ecuaciones de tipo parabólico	31
2.5.3. Ecuaciones de tipo elíptico	32
2.6. Planteamiento de problemas para las EDP's de segundo orden	33

2.7. Método de separación de variables: caso práctico	33
2.8. Teoremas	34
2.8.1. Método de separación de variables	35
2.9. Ejercicios propuestos	38
2.10. Ejercicios resueltos	39
3. Ecuaciones de tipo hiperbólico	45
3.1. Introducción	47
3.2. Problemas que dan lugar a vibraciones u oscilaciones	47
3.2.1. Problema de la cuerda vibrante	47
3.2.2. Modelo matemático	48
3.2.3. Condiciones de frontera	51
3.2.4. Generalización del problema de la cuerda vibrante	52
3.3. Ecuación ondulatoria unidimensional	53
3.3.1. Solución del problema de Cauchy (problema inicial) para una cuerda ilimitada	54
3.3.2. Casos particulares de la fórmula de D' Alembert	58
3.3.3. ¿Cómo se debe plantear el problema de forma correcta ?	61
3.3.4. Ejemplo de Hadamard	63
3.3.5. Otro ejemplo	64
3.4. Ejercicios propuestos	65
3.5. Ejercicios resueltos	66
4. Vibraciones libres de una cuerda homogénea fijada en sus extremos	69
4.1. Método de Fourier	71
4.2. Problema de Sturm-Liouville	72

4.3. Teorema	75
4.4. Ejemplo resuelto	75
4.5. Ejercicios propuestos	78
5. Vibraciones forzadas de la cuerda homogénea de longitud L	81
5.1. Vibraciones forzadas de la cuerda fijada en los extremos	83
5.1.1. Método de resolución	84
5.2. Ejemplo resuelto	86
5.3. Vibraciones forzadas de la cuerda con extremos móviles	87
5.4. Ejemplo resuelto	89
5.5. Ejercicios propuestos	90
6. Ecuaciones de tipo parabólico	93
6.1. Introducción	95
6.2. Problemas que involucran conducción de calor	95
6.3. Problema de Cauchy para la conductibilidad térmica	99
6.4. Propagación del calor en una varilla finita	101
6.4.1. Planteamiento del problema	101
6.4.2. Problema mixto para la ecuación de conductibilidad térmica	102
6.5. Método de Fourier para la conductibilidad térmica	104
6.5.1. Solución de la ecuación homogénea	104
6.5.2. Solución de la ecuación no homogénea	107
6.5.3. Solución del problema con C.F. no homogéneas	109
6.6. Ejercicios propuestos	109
6.7. Ejercicios resueltos	110

7. Ecuaciones de tipo elíptico	115
7.1. Introducción	117
7.2. Problemas que involucran potencial eléctrico o gravitacional	117
7.3. Problemas de valor de frontera que involucran la ecuación de Laplace	119
7.3.1. Solución del problema de Dirichlet para el círculo empleando el método de Fourier	120
7.4. Funciones armónicas. Planteamiento de los problemas de contorno	124
7.4.1. Ecuación de Poisson	126
7.5. Soluciones fundamentales de la ecuación de Laplace	127
7.5.1. Ejemplos más usuales	127
7.5.2. Soluciones con simetría esférica o cilíndrica	127
7.6. Ejercicios propuestos	128
7.7. Ejercicios resueltos	130
8. Técnicas para resolver problemas de Valor de Frontera (I)	133
8.1. Introducción	135
8.2. La cuerda vibrante bajo la gravedad	135
8.3. Conducción de calor en una barra con condiciones no cero en los extremos	137
8.4. La cuerda vibrante con velocidad inicial no cero	139
8.5. Ejercicios propuestos	141
9. Técnicas para resolver problemas de Valor de Frontera(II)	143
9.1. Vibraciones de una piel de tambor: Series dobles de Fourier	145
9.2. Modos diferentes con la misma frecuencia	150
9.3. Conducción de calor con radiación	151
9.3.1. Planteamiento del problema	151

9.3.2. Formalización matemática	152
9.3.3. Solución del problema	152
10.Métodos de Diferencias Finitas (I)	157
10.1. Introducción	159
10.2. Ecuación de ondas	159
10.3. Construcción de la ecuación en diferencias	160
10.4. Valores iniciales	162
10.5. Cuando se conocen dos filas exactamente	163
10.5.1. La solución de D' Alembert	163
10.5.2. Cuando se conocen dos filas exactamente	164
10.5.3. Primer ejemplo	165
10.5.4. Segundo ejemplo	166
10.6. Ejercicios propuestos	166
11.Métodos de Diferencias Finitas (II). Ecuaciones parabólicas	169
11.1. Introducción. La ecuación de calor	171
11.2. Construcción de la ecuación en diferencias	171
11.3. Primer ejemplo	172
11.4. El método de Crank-Nicholson	174
11.5. Segundo ejemplo	176
11.6. Ejercicios propuestos	177
12.Métodos de diferencias finitas (III). Ecuaciones elípticas	179
12.1. Introducción	181
12.2. Ecuación en diferencias para la laplaciana	181

12.3. Construcción del sistema lineal	182
12.4. Primer ejemplo	184
12.5. Condiciones de contorno de Neumann	185
12.6. Segundo ejemplo	186
12.7. Métodos iterativos	189
12.8. Tercer ejemplo	190
Bibliografía	193

Capítulo 1

Nociones sobre las ecuaciones en derivadas parciales (EDP's)

"Una de las más importantes y fascinantes ramas de las matemáticas que proporcionó el medio para las formulaciones matemáticas y soluciones de una gran variedad de problemas, es sin duda el estudio de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales"

M.R.Spiegel

"Los científicos estudian la naturaleza no porque sea útil, sino porque encuentran placer en ello, y encuentran placer porque es hermosa"

H. Poincaré

Las tierras pertenecen a su dueño, pero el paisaje es de quien sabe apreciarlo"

U. Sinclair

1.1. Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) que involucran derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se estudian generalmente en un curso de Cálculo Infinitesimal. Aprendimos como surgen tales ecuaciones diferenciales, los métodos mediante los cuales se pueden obtener sus soluciones exactas y aproximadas, viendo algunas aplicaciones en el campo científico.

Con el uso de las EDO's para resolver problemas aplicados estamos simplificando mucho el modelo de la realidad física que conduce a tales problemas. Todo ello se debe a que en las fórmulas matemáticas aparece una sola variable independiente sobre la que dependen todas las otras variables pertinentes.

Sin lugar a dudas utilizar este tipo de ecuaciones diferenciales es útil aunque limita las clases de problemas que podamos investigar, ya que en la mayoría de los casos se necesitan varias variables independientes.

Modelar un problema de la vida real desde el punto de vista matemático en el que se haga intervenir dos o más variables independientes conduce a las **Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales** (¡ La aparición de varias variables independientes hace que este tema resulte mucho más complejo que el de las EDO's !).

El curso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que aquí se presenta —donde no hay que esperar contenidos originales en una materia tan trillada y tan clásica— pretende exclusivamente exponer los conocimientos que, a nuestro juicio, consideramos básicos para que un estudiante de ingeniería pueda entender sin grandes problemas los tres ejemplos clásicos:

- Ecuaciones de tipo Hiperbólico (problemas que refieren fenómenos oscilatorios: vibraciones de cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas).
- Ecuaciones de tipo Parabólico (problemas que se presentan al estudiar los procesos de conductibilidad térmica y difusión).
- Ecuaciones de tipo Elíptico (problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, o sea que no cambian con el tiempo).

El *Método de Separación de Variables*, también constituye un tema importante que nos permitirá conocer los problemas de Sturm-Liouville y sus autovalores.

Los tres ejemplos anteriores, y con desarrollos de mayor sofisticación, nos permitirán

estudiar las EDP's de segundo orden lineales e incluso algunos problemas no lineales.

1.2. Definición. Algunos conceptos fundamentales

Definición 1.1 (Ecuación diferencial en derivadas parciales) Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0 \quad (1.1)$$

que permite conexionar las variables independientes x_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$, la función que se busca y sus derivadas parciales.

Se cumple que: k_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$ son enteros no negativos tales que: $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$.

La función F es la función prefijada de sus argumentos.

Definición 1.2 (Orden) Se llama orden de una EDP el orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

Así, si x, y son variables independientes, $u = u(x, y)$ es la función buscada, entonces:

$$a) \quad y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{es una EDP de 1}^{er} \text{orden}$$

$$a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{es una EDP de 2}^o \text{orden}$$

Nota

También utilizaremos las notaciones:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \text{quad} \blacktriangle$$

Definición 1.3 (Solución) Sea la EDP definida en [1.1] de orden m , se llama solución de dicha EDP en cierta región D de variación de las x_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$ a una función cualquiera $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^m(D)$ (conjunto de funciones continuas en la región D junto con todas las derivadas de hasta orden m inclusive), tal que al sustituir u , y sus derivadas en [1.1] la última se convierte en la identidad respecto a x_i , $\forall i = 1, 2, \dots, n$ en la región D

Ejemplo 1.2.1 Hallar la solución $u = u(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Solución

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies u$ no depende de x , pero puede ser una función cualquiera de y , $u = \phi(y)$. Solución de la ecuación [1.2] que contiene una función arbitraria.

Ejemplo 1.2.2 Hallar la solución $u = u(x, y)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Solución

Si llamamos $v = \frac{\partial u}{\partial y} \implies \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, ya que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, entonces $v = \varphi(y)$. Como $v = \frac{\partial u}{\partial y}$, se tiene que $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(y)$.

Integrando respecto de y

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \varphi(y) dy \implies u(x, y) = \int \varphi(y) dy + g(x) \text{ siendo } g(x) \text{ arbitraria.}$$

Como $\varphi(y)$ es una función arbitraria, la integral de ésta también es una función arbitraria. Llamémosla $f(y)$. Por tanto

$$u(x, y) = f(y) + g(x) \text{ siendo } f(y) \text{ y } g(x) \text{ arbitrarias.} \quad (1.4)$$

Se llama *solución general* de la ecuación dada en el ejemplo [1.2.2], puesto que cualquier otra solución puede obtenerse de [1.4] si se eligen de forma adecuada las funciones $f(y)$ y $g(x)$.

Notas

- a) Los ejemplos anteriores ponen de manifiesto que las EDP's tienen familias enteras de soluciones.
- b) Existen EDP's que tienen conjuntos de soluciones muy pequeños y en algunos casos se obtiene incluso el \emptyset (conjunto vacío)
 - b.1) La ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ tiene por conjunto de soluciones $u(x, y) = \text{cte.}$

b.2) La ecuación $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales del todo.

c) Más adelante plantearemos el problema de como hallar las soluciones particulares o parciales haciendo intervenir condiciones adicionales que deben plantearse a la función.

En definitiva dada una EDP de orden n , una solución que contenga n funciones arbitrarias se llama, como se ha dicho antes, *la solución general*, y cualquier solución obtenida de esta solución general por selecciones particulares de las funciones arbitrarias se llama una *solución particular*.

Como en el caso de las EDO's con frecuencia necesitamos determinar soluciones de EDP's que satisfagan condiciones dadas.

Ejemplo 1.2.3 Sea la EDP $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y^3$. Resolverla si dicha ecuación está sometida a las condiciones siguientes:

$$u(1, y) = 2y^2 - 4y; \quad u(x, -2) = x + 8$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] &= x + y^3 \xRightarrow{\int_x} \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] dx = \int (x + y^3) dx = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + y^3 x + \phi(y) \\ &\xRightarrow{\int_y} \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + y^3 x + \phi(y) \right) dy \Rightarrow \\ u(x, y) &= \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{4} x y^4 + \int \phi(y) dy + \varphi(x). \end{aligned}$$

De aquí que como se ha indicado anteriormente se llega a que

$$u(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{4} x y^4 + \xi(y) + \varphi(x), \quad (1.5)$$

siendo $\xi(y) = \int \phi(y) dy$, que es la solución general. Sustituyendo en [1.5] $x = 1$, $u(1, y) =$

$$\frac{1}{2} 1^2 y + \frac{1}{4} 1 y^4 + \xi(y) + \varphi(1) = 2y^2 - 4y \Rightarrow \xi(y) = 2y^2 - 4y - \frac{y}{2} - \frac{y^4}{4} - \varphi(1)$$

ordenando, se tiene

$$\xi(y) = -\frac{1}{4} y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2} y - \varphi(1).$$

De modo que se llega a que

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}xy^4 - \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \varphi(1) + \varphi(x)$$

Usando la condición $u(x, -2) = x + 8$ se tiene que

$$u(x, -2) = \frac{1}{2}x^2(-2) + \frac{1}{4}x(-2)^4 - \frac{1}{4}(-2)^4 + 2(-2)^2 - \frac{9}{2}(-2) - \varphi(1) + \varphi(x).$$

Realizando las operaciones indicadas obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, -2) &= -x^2 + 4x - 4 + 32 + 9 - \varphi(1) + \varphi(x) = \\ &= -x^2 + 4x + 37 - \varphi(1) + \varphi(x) = x + 8. \end{aligned}$$

De donde $\varphi(x) = x + 8 + x^2 - 4x - 37 + \varphi(1) \Rightarrow \varphi(x) = x^2 - 3x - 29 + \varphi(1)$ que si sustituimos en la solución general nos queda:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}xy^4 - \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y - \varphi(1) + x^2 - 3x - 29 + \varphi(1)$$

es decir:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}xy^4 - \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 - \frac{9}{2}y + x^2 - 3x - 29. \quad (1.6)$$

Se puede utilizar la primera terminología de problemas de valor inicial y de frontera para las EDP's. Sin embargo, debido a que generalmente hay una combinación de condiciones de frontera e iniciales, con frecuencia nos referimos a tales problemas como *Problemas de Valor de Frontera* (PDVF) (Véase el concepto detallado en el ejercicio resuelto número 2)

1.3. Significado geométrico de las soluciones general y particular

Sea una EDP :

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0$$

Para fijar ideas tomamos sólo de dos variables independientes x e y . Si la solución de

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0, \text{ es por ejemplo,}$$

$u(x, y) = P(x, y) + \phi(y) + \varphi(x)$, utilicemos funciones particulares para $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, y reemplacemos la variables u por z . Entonces la expresión anterior toma la forma

$$z = f(x, y). \quad (1.7)$$

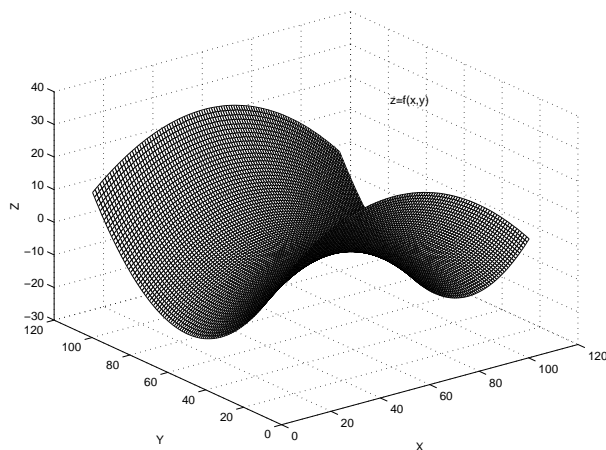


Figura 1.1:

Se interpreta, por tanto, como una superficie en un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z .

Para funciones arbitrarias $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, obtenemos una *familia de superficies* cada miembro de la cual corresponde a una selección particular de $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, esto es, una *solución particular*. La EDP que tenga esta como solución se llama *Ecuación Diferencial de la Familia de Superficies*.

Notas:

- a) Obsérvese las analogías con las EDO's en las que la solución general con constantes arbitrarias -en vez de funciones- representa una familia de curvas, donde cada miembro de ella corresponde a una solución particular.
- b) Estas ideas se pueden generalizar a los casos donde hay más de dos variables independientes. Así por ejemplo, tendríamos que si $u = f(x, y, z)$ ya no podríamos visualizar geométricamente: $p = f(x, y, x)$. Se trata de una superficie de cuatro dimensiones o **Hipersuperficie**.

Así por ejemplo: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ representa una esfera centrada en $(0, 0, 0)$ y radio R . Y la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$ representa una hiperesfera de centro $(0, 0, 0, 0)$ y radio R .

1.4. EDP's que surgen de la eliminación de funciones arbitrarias

Ya que las soluciones de las EDP's hacen intervenir funciones arbitrarias, parece lógico que se obtengan EDP por el proceso inverso de eliminar tales funciones. A modo de varios ejemplos veamos la utilidad de cómo se pueden resolver.

Ejemplo 1.4.1 Sea la solución de la EDP $u(x, y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$ con $\varphi(x)$ una función arbitraria de x . Encontrar una EDP de primer orden para esa solución general.

Solución

$u(x, y) = -3y^3\varphi(x) - 6x + y$. Si diferenciamos respecto a

$$y, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -9y^2\varphi(x) + 1,$$

, eliminando $\varphi(x)$ entre ambas

$$\begin{aligned} -3y^3\varphi(x) &= u(x, y) + 6x - y & \Rightarrow \quad \frac{-3y^3\varphi(x)}{-9y^2\varphi(x)} &= \frac{u(x, y) + 6x - y}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - 1} \\ -9y^2\varphi(x) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - 1 \\ \Rightarrow \frac{y}{3} &= \frac{u(x, y) + 6x - y}{\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - 1} \Rightarrow y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - y &= 3u(x, y) + 18x - 3y \\ & \Rightarrow y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - 3u(x, y) = 18x - 2y \end{aligned}$$

basta sustituir para comprobar que es la solución pedida.

Ejemplo 1.4.2 Encontrar una EDP de segundo orden que tenga como solución general $u(x, y) = x\phi(y) + y\varphi(x)$, ϕ, φ arbitrarias.

Solución

[PASO 1] $u(x, y) = x\phi(y) + y\varphi(x) \stackrel{\div x}{\Rightarrow} \frac{u(x, y)}{x} = \phi(y) + \frac{y}{x}\varphi(x).$

[PASO 2] Diferenciando con respecto a x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u(x, y)}{x} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi(y) + \frac{y}{x}\varphi(x) \right] \Rightarrow \\ -\frac{1}{x^2}u(x, y) + \frac{1}{x} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= 0 + \varphi'(x) \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}y\varphi(x) \end{aligned}$$

quitando denominadores:

$$\begin{aligned} -u(x, y) + x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= xy\varphi'(x) - y\varphi(x) \Rightarrow \\ x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - u(x, y) &= y[x\varphi'(x) - \varphi(x)] \end{aligned}$$

[PASO 3] Dividimos ambos lados por y , y derivamos con respecto a y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y} \left(x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - u(x, y) \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y(x - \varphi'(x) - \varphi(x))}{y} \right] = 0. \\ -\frac{1}{y^2} \left(x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - u(x, y) \right) &+ \frac{1}{y} \left(x \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

[PASO 4] Quitando denominadores

$$-\left(x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - u(x, y) \right) + y \left(x \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = 0.$$

Obtenemos la EDP que deseábamos

$$xy \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + u = 0.$$

Notas

- Al derivar las funciones arbitrarias admitimos que son diferenciables.
- La EDP obtenida en cada caso representa la EDP de la familia representada por la solución general.
- Si una solución tiene un número dado n de funciones arbitrarias, es frecuente escribir una ecuación diferencial de orden mayor que n teniendo esta solución

1.5. Ejercicios propuestos

1.1 Obtener soluciones a los siguientes problemas de valor de frontera

- a) $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \sin y; \quad u(0, y) = 0$
 b) $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = x^2 \cos y; \quad u(x, 0) = 0, u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.2 Obtener la EDP del menor orden eliminando las funciones arbitrarias en cada relación que se da. Comprobar en cada caso que se verifica que la relación dada es una solución de la ecuación obtenida

- a) $u(x, y) = x^2 \phi(y) + 3xy$
 b) $u(x, y) = \sqrt{x} \phi(y) + (\ln y) \varphi(x)$

1.3 Hallar n para que $z = x^3 \arctan\left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}\right)$ satisfaga $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

1.4 Resolver el problema de valor de frontera

$$x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2u(x, y); \quad u(1, y) = 20 \cos y$$

1.5 Mostrar que la función $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

1.6 a) Si $z = \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ demostrar que

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

b) Obtener una solución a la EDP anterior que satisfaga las condiciones $z = \cos y$ para $x = 1$ y $z = e^{-2y}$ para $x = \frac{1}{2}$.

1.7 a) Sea $F(u, v) = 0$, con F diferenciable arbitraria de u, v . Si u y v son funciones diferenciables de x, y, z , diferenciando con respecto a x e y probar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned}$$

- b) Eliminando $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ de las ecuaciones anteriores, demostrar que la EDP resultante tiene la forma $P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R$, siendo P, Q, R funciones conocidas de x, y, z (Este resultado es la EDP correspondiente a $F(u, v) = 0$).

1.8 Usando el método del ejercicio [1.7], encontrar las EDP's correspondientes a cada una de las siguientes, donde F es una función arbitraria:

- a) $F(2x + 3z, x - 2y) = 0$ b) $F(x^2 + y^2, yz) = 0$
 c) $F(z \sin x, z \cos y) = 0$ d) $F(x - y - z, x^2 - 2xy) = 0$.

Soluciones a los ejercicios propuestos

- 1.1** a) $u(x, y) = x \sin y$
 b) $u(x, y) = x^2(1 - \cos y) - 2x^2 \frac{y}{\pi}$
- 1.2** a) $x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - 2u(x, y) + 3xy = 0$
 b) $2xy(\ln y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - 2x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - y(\ln y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + u(x, y) = 0$.
- 1.3** $n = 3$
- 1.4** $u(x, y) = 20x^2 \cos(\frac{y}{x})$
- 1.6** b) $z = (2x - 1) \cos(\frac{y}{x}) + 2(1 - x)e^{-\frac{y}{x}}$
- 1.8** a) $6 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = -4$ b) $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$
 c) $(\tan x) \frac{\partial z}{\partial x} - (\cot y) \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$ d) $x \frac{\partial z}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = y$

1.6. Ejercicios resueltos

1.1 Obtener las soluciones de la EDP siguiente: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3x + 8y^2$.

Solución:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] = 3x + 8y^2. \text{ Integrando respecto de } x:$$

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] dx = \int (3x + 8y^2) dx \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}x^2 + 8xy^2 + \phi(y).$$

Integrando respecto de y : $\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 + 8xy^2 + \phi(y) \right) dy \Rightarrow$

$$u(x, y) = \frac{3}{2}x^2y + \frac{8}{3}xy^3 + \int \phi(y)dy + \varphi(x) \quad (1.8)$$

De aquí que como la integral de una función arbitraria de la variable y es otra función arbitraria de la variable y se tiene que $\int \phi(y)dy = \xi(y)$, y por tanto

$$u(x, y) = \frac{3}{2}x^2y + \frac{8}{3}xy^3 + \xi(y) + \varphi(x) \quad (1.9)$$

es la *solución general* de la EDP inicial. Si hacemos $\xi(y) = y^3$, $\varphi(x) = x^2 + 1$ se tiene una *solución particular*:

$$u(x, y) = \frac{3}{2}x^2y + \frac{8}{3}xy^3 + y^3 + x^2 + 1$$

1.2 Hallar una solución al problema de valor de frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + 8, \quad u(0, y) = 0, \quad u_x(x, 0)^1 = x^2$$

.

Solución:

Para una mejor comprensión escribamos la EDP así:

$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - u \right] = 8 \xRightarrow{\int_x} \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - u \right] dx = \int 8 dx \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} - u = 8x + \phi(y)$. Esta ecuación es una ecuación lineal con factor integrante e^{-y} . Por tanto

$$\frac{\partial}{\partial y} [e^{-y}u] = 8xe^{-y} + e^{-y}\phi(y).$$

De aquí: $u(x, y) = -8x + e^y \int e^{-y}\phi(y)dy + e^y\varphi(x)$, siendo $\varphi(x)$ arbitraria. Si escribimos $\xi(y) = e^y \int e^{-y}\phi(y)dy$, se tiene:

$$u(x, y) = -8x + \xi(y) + e^y\varphi(x).$$

Como $u(0, y) = 0$, se tiene que: $\xi(y) = -e^y\varphi(0)$. Por tanto:

$$u(x, y) = -8x - e^y\varphi(0) + e^y\varphi(x).$$

¹ u_x es la $\frac{\partial u}{\partial x}$

Diferenciando con respecto a x y haciendo $y = 0$

$$\left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right]_{y=0} = -8 + \varphi'(x) = x^2 \Rightarrow \varphi'(x) = x^2 + 8 \Rightarrow$$

$$\varphi(x) = \int (x^2 + 8) dx = \frac{1}{3}x^3 + 8x + K.$$

De donde:

$$u(x, y) = -8x - e^y \varphi(0) + e^y \left[\frac{1}{3}x^3 + 8x + K \right]$$

Puesto que $\varphi(0)$ es una constante igual a K , $\varphi(0) = \frac{1}{3}0^3 + 8 \cdot 0 + K$, y será

$$u(x, y) = -8x - e^y K + \frac{1}{3}x^3 e^y + 8x e^y + e^y K$$

En definitiva:

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^3 e^y + 8x e^y - 8x$$

1.3 Encontrar una EDP de primer orden que tenga como una solución general: $z = \phi(x + y)$ siendo ϕ arbitraria.

Solución:

[PASO 1] Llamemos $u = x + y \Rightarrow z = \phi(u)$

[PASO 2] Diferenciando respecto a x , tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \phi'(u), 1 = \phi'(u).$$

[PASO 3] Diferenciando respecto a y , tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \phi'(u), 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \phi'(u).$$

[PASO 4] Eliminando $\phi'(u)$ en los pasos (2) y (3) se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

1.4 Encontrar una EDP, de menor orden, eliminando las funciones arbitrarias en la relación dada:

$$\text{a) } z = \phi(xy) \quad \text{b) } z = \phi(x^2 - y^2) \quad \text{c) } z = \phi(e^{3y}(x - 2y)).$$

Solución:

Seguimos los mismos pasos que en el ejercicio [1.3] para cada una de las propuestas:

- a) Llamemos $u = xy \Rightarrow z = \phi(u)$. Diferenciando respecto a x , $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \phi'(u)y$.

Diferenciando con respecto a y , $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \phi'(u)x$.

Eliminando $\phi'(u)$ en las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \phi'(u)y \\ \Rightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} &= \frac{y}{x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \phi'(u)x$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

- b) Llamemos $u = x^2 - y^2 \Rightarrow z = \phi(u)$. Diferenciando respecto de x , y respecto de y y eliminando $\phi'(u)$ de entre ambas se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \phi'(u)2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = -\phi'(u)2y$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\phi'(u)2x}{-\phi'(u)2y} \Rightarrow -y \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$$

$$x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

- c) Llamemos $u = e^{3y}(x - 2y) = xe^{3y} - 2ye^{3y} \Rightarrow z = \phi(u)$. Diferenciando respecto de x , $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \phi'(u)e^{3y}$.
Análogamente respecto de y ,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \phi'(u) [3xe^{3y} - 2e^{3y} - 6y^2e^{3y}]$$

eliminando $\phi'(u)$ de entre ambas se tiene que:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\phi'(u)e^{3y}}{-\phi'(u)e^{3y}[3x - 2 - 6y^2]} \Rightarrow (3x - 6y^2 - 2) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$$

$$(3x - 6y^2 - 2) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales. Propiedades

*"Ninguna certeza existe allí donde
no es posible aplicar la Matemática o en
aquello que no pueda relacionarse con la Matemática"*

Leonardo da Vinci

"Hay otros mundos pero están en éste"

Paul Eluard

2.1. Ecuación en derivadas parciales lineal

Definición 2.1 La ecuación en derivadas parciales se llama lineal, si ésta es lineal respecto a la función buscada y todas sus derivadas que forman parte de la ecuación. En caso contrario se llama no lineal.

Ejemplos

- a) $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + e^{-x^2}$ es EDPL (Ecuación en Derivadas Parciales Lineal)
- b) $y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + [u(x, y)]^2 = 0$ es EDPNL (Ecuación en Derivadas Parciales No Lineal) \square

Definición 2.2 La EDP de segundo orden para la función de dos variables independientes x e y en el caso general tiene la forma

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \\ a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y) u(x, y) = f(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Siendo $A(x, y), B(x, y), C(x, y), a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ funciones de las variables x e y en una región $D \subset \mathbb{R}^2$, y la función incógnita $u = u(x, y)$.

Si $f(x, y) = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^2$, la ecuación [2.1] se llama homogénea (EDPH)

Notas

1. Si designamos el primer miembro de [2.1] por $L[u]$ tenemos:

$$L[u] = f(x, y) \text{ y su correspondiente homogénea } L[u] = 0 \quad (2.2)$$

2. El operador L es el operador diferencial definido en todo caso en el espacio lineal $\mathcal{C}^2(D)$ mediante $u = u(x, y)$. \blacktriangle

2.2. Propiedades de las soluciones de las EDP

Debido al carácter de linealidad del operador L los siguientes teoremas son válidos y representan las propiedades de las soluciones de las EDP's homogéneas.

Teorema 2.1 Si $u(x, y)$ es la solución de la EDPH $L[u] = 0$ entonces $ku(x, y)$ es también solución de la homogénea para $k \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2 Si $u_1(x, y), u_2(x, y)$ son las soluciones de la EDPH $L[u] = 0$ entonces $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ es también solución de esta ecuación.

Teorema 2.3 Si cada una de las funciones $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, k$ es la solución de $L[u] = 0$ entonces $\sum_{i=1}^k c_i u_i(x, y)$ es también solución de la ecuación homogénea, siendo $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Notas

- a) Este último teorema es un corolario de los dos anteriores.
- b) Las propiedades anteriores tienen lugar también para las EDPHL ordinarias. Sin embargo, la EDPHL ordinaria de n -ésimo orden tiene precisamente n soluciones parciales independientes linealmente, cuya combinación lineal nos da la solución general de esta ecuación.
- c) La EDP puede tener un conjunto infinito de soluciones parciales linealmente independientes. Veamos el siguiente ejemplo. Sea la EDP $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Tiene como solución general $u = \Phi(x)$, de tal manera que sus soluciones serán, por ejemplo, las funciones $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$. En correspondencia con eso, en los problemas lineales para las EDP's tendremos que operar no sólo con combinaciones lineales de un número finito de soluciones, sino también con las series $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y)$ cuyos términos son los productos de algunas constantes, c_n por las soluciones $u_n(x, y)$ de la ecuación diferencial. ▲

Teorema 2.4 Sea $L[u] = f(x, y)$

- a) Si $u(x, y)$ es solución de $L[u] = f$ y $v(x, y)$ es la solución de la homogénea $L[u] = 0$, entonces $u(x, y) + v(x, y)$ es la solución de $L[u] = f$.
- b) Si $u_1(x, y)$ es solución de $L[u] = f_1$ y $u_2(x, y)$ es solución de $L[u] = f_2$, entonces $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ es solución de la ecuación $L[u] = f_1 + f_2$ (Principio de Superposición)

Nota

La demostración en ambos casos es inmediata debido al carácter de linealidad del operador L . ▲

2.3. Clasificación de las EDP's de segundo orden de dos variables independientes

Definición 2.3 Sea la EDP de segundo orden

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y) u(x, y) = f(x, y)$$

en una cierta región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (plano OXY). Se dice:

1. **Hiperbólica** en Ω , si $\Delta = B^2 - AC > 0$ en Ω .
2. **Parabólica** en Ω , si $\Delta = B^2 - AC = 0$ en Ω .
3. **Elíptica** en Ω , si $\Delta = B^2 - AC < 0$ en Ω .

Ejemplos

- Las ecuaciones $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$ son hiperbólicas: $\forall x, y \in \Omega$.
- La ecuación $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ es parabólica: $\forall x, y \in \Omega$.
- La ecuación $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$ es elíptica: $\forall x, y \in \Omega$.
- La ecuación $y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$ es

Elíptica $\forall y > 0$

Parabólica en la línea $y = 0$

Hiperbólica en el semiplano $y < 0$ □

2.4. Condiciones

- I) Se puede mostrar que, observando determinadas condiciones para los coeficientes de la ecuación

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} +$$

$$a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c(x, y)u(x, y) = f(x, y) \quad (2.3)$$

puede hacerse un cambio no singular de las variables independientes

$$\xi = \varphi(x, y) \quad \text{y} \quad \eta = \phi(x, y) \quad \varphi, \eta \in \mathcal{C}^2.$$

Ayudándose del cual la ecuación [2.3] se transforma en el tipo canónico más simple que es propio para cada tipo de la ecuación. Si la ecuación [2.3] es del tipo hiperbólico ($\Delta > 0$), entonces ésta se transforma en la forma

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \xi \partial \eta} = \Psi \left(\xi, \eta, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} \right) \text{ ó } \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} \right)$$

(son dos formas canónicas de las ecuaciones de tipo hiperbólico).

Si la ecuación [2.3] es del tipo parabólico ($\Delta = 0$), entonces ésta se transforma en la forma

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} \right)$$

(es la forma canónica de la ecuación de tipo parabólico).

Si la ecuación [2.3] es del tipo elíptico ($\Delta < 0$), entonces ésta se transforma en la forma:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial \eta^2} = \Phi \left(\xi, \eta, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} \right)$$

(es la forma canónica de las ecuaciones de tipo elíptico).

Aquí Ψ y Φ son algunas funciones que dependen de la función buscada $u(x, y)$, de sus derivadas primeras $\frac{\partial u(x, y)}{\partial \xi}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta}$ y de las variables independientes ξ, η . La forma de las funciones Ψ, Φ se determinan por la ecuación inicial [2.3].

En algunos casos la forma canónica de la ecuación permite hallar la solución general de la ecuación inicial.

Nota

Como regla, la reducción de la ecuación [2.3] a la forma canónica cambiando variables independientes tiene carácter local, es decir, es realizable sólo en un entorno suficientemente pequeño del punto examinado. \blacktriangle

- II) Cuando el número n de las variables independientes es superior a dos, también se diferencian las ecuaciones de los tipos hiperbólico, parabólico y elíptico.

Por ejemplo, cuando $n = 4$, la forma canónica más simple de las ecuaciones semejantes tiene el aspecto de:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial z^2} &= 0 \text{ (Tipo hiperbólico)} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial z^2} &= 0 \text{ (Tipo parabólico)} \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial z^2} &= 0 \text{ (Tipo elíptico)}\end{aligned}$$

donde $u = u(x, y, z, t)$.

2.5. Casos particulares

Limitémonos al estudio de las EDPL de segundo orden. A semejantes ecuaciones puede reducirse un gran número de diferentes problemas físicos.

2.5.1. Ecuaciones de tipo hiperbólico

Los fenómenos *oscilatorios* de diferente naturaleza (vibraciones de cuerdas, membranas, oscilaciones acústicas del gas en los tubos, oscilaciones electromagnéticas) se describen por las ecuaciones del tipo *hiperbólico*.

La más simple es la ecuación de vibraciones de la cuerda (ecuación ondulatoria unidimensional)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t) \quad (2.4)$$

Siendo x la coordenada espacial, t el tiempo y $a^2 = \frac{T}{\rho}$, donde T es la tensión de la cuerda y ρ su densidad lineal.

2.5.2. Ecuaciones de tipo parabólico

Los procesos de *conductibilidad térmica* y de difusión conducen a las ecuaciones de tipo parabólico. En el caso unidimensional la ecuación más simple de conductibilidad térmica

tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t) \quad (2.5)$$

Aquí $a^2 = \frac{K}{c\rho}$, donde ρ es la densidad del medio, c es el calor específico y K es el coeficiente de conductibilidad térmica.

2.5.3. Ecuaciones de tipo elíptico

Los procesos a ciclo fijo, cuando la función buscada no depende del tiempo, se determinan por las ecuaciones de tipo elíptico, el representante típico de éstas es la ecuación de **Laplace**

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x, y) \quad (2.6)$$

Notas

1. Se puede comprobar directamente que la solución de la ecuación [2.4] es

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \quad \varphi(\xi) \wedge \psi(\eta) \in \mathcal{C}^2$$

2. Se puede mostrar que las soluciones de [2.5] son de la forma

$$u(x, t, \lambda) = A e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin(\lambda x + \alpha)$$

siendo $A, \alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarias y λ es el parámetro numérico.

Integrando la solución $u(x, t, \lambda) = e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x$ de la ecuación [2.5] respecto al parámetro λ dentro de los límites de $-\infty$ hasta $+\infty$, obtenemos la llamada solución fundamental de la ecuación de conductibilidad térmica

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

3. Las funciones de valor real $P_n(x, y), Q_n(x, y)$ que se determinan a partir de la relación $(x + i y)^n = P_n(x, y) + i Q_n(x, y)$ son las soluciones de la ecuación de Laplace [2.6] para $n = 0, 1, 2, \dots$. Este último resultado es un caso particular de la afirmación general que las partes real e imaginaria de la función analítica $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ de la variable compleja $z = x + i y$ son cada una de las soluciones de la ecuación de Laplace [2.6]. ▲

2.6. Planteamiento de problemas para las EDP's de segundo orden

Para describir completamente uno u otro proceso físico es insuficiente sólo la ecuación diferencial del proceso, hace falta plantear el estado inicial de este proceso (*Condiciones iniciales*) y el régimen en la frontera S de aquella región $\Omega \in \mathbb{R}^n$, en la cual tiene lugar el proceso (*Condiciones de frontera*). Esto se debe a la *No unicidad* de la solución de las ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, la solución general de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ tiene la forma $u(x, y) = f(x) + g(y)$, donde f y g son las funciones derivables arbitrarias. Por eso, para determinar la solución que describe el proceso físico dado, hace falta plantear condiciones adicionales.

Se distinguen tres tipos principales de problemas para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

- El problema de **Cauchy** para las ecuaciones de tipo hiperbólico y parabólico: se plantean las condiciones iniciales, la región Ω coincide con todo el espacio \mathbb{R}^n , las condiciones de frontera se omiten.
- El problema de contorno para las ecuaciones de tipo elíptico: se plantean las condiciones de la frontera S de la región Ω , las condiciones iniciales se omiten.
- El problema mixto para las ecuaciones de tipo hiperbólico y parabólico: se plantean las condiciones iniciales y las de frontera, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

2.7. Método de separación de variables: caso práctico

Veamos en este apartado la forma de resolver desde el punto de vista práctico las EDP's en los dos tipos señalados en apartados anteriores: lineal y no lineal. Si consideramos, por ejemplo, dos variables independientes x e y y la variable dependiente es $u = u(x, y)$, la ecuación lineal tiene la forma:

$$F \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] u(x, y) = \phi(x, y) \quad (2.7)$$

donde el operador $F \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]$ o $F[D_x, D_y]$ es un polinomio en los dos operadores

$D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ y los coeficientes son funciones de las variables x e y solamente.

- a) Si los coeficientes son constantes, la EDP se llama *Ecuación Lineal con Coeficientes Constantes*.
- b) En el caso de que los coeficientes sean variables, la EDP se llama *Ecuación Lineal con Coeficientes Variables*.

Ejemplos

1. Si $F = D_x^2 + 4D_xD_y - 2D_y^2 - 3D_x + 5$ y $\phi(x, y) = x^3 - e^y$, entonces podemos escribir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + 5u = x^3 - e^y$$

que es una EDPL con coeficientes constantes.

2. Si $F = xD_x + yD_y$ y $\phi(x, y) = 1$, entonces tendremos

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

que es una EDPL con coeficientes variables.

3. La ecuación

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 3x - 8y$$

es una EDP no lineal puesto que no puede expresarse en la forma [2.7]. \square

Notas

- a) La extensión a más de dos variables se generaliza sin grandes dificultades.
- b) Las ecuaciones no lineales son, en general difíciles, de estudiar. Por ello hablaremos de aquellas ecuaciones diferenciales parciales lineales que son más útiles en problemas aplicados. \blacktriangle

2.8. Teoremas

En analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) tenemos los siguientes teoremas.

Teorema 2.5 *Se considera la EDPL:*

$$F(D_x, D_y, \dots) u(x, y, \dots) = \phi(x, y, \dots) \quad (2.8)$$

donde x, y, \dots son variables independientes y $F(D_x, D_y, \dots)$ es un operador polinómico en D_x, D_y, \dots , entonces la solución general de [2.8] es la suma de la solución general u_h de la ecuación homogénea (ecuación complementaria)

$$F(D_x, D_y, \dots) u(x, y, \dots) = 0 \quad (2.9)$$

y cualquier solución particular u_p de [2.8]. Esto es:

$$u(x, y, \dots) = u_h(x, y, \dots) + u_p(x, y, \dots)$$

A la solución general $u_h(x, y, \dots)$ de [2.9] con frecuencia se denomina la solución complementaria de [2.8]

Teorema 2.6 Sean $u_1(x, y, \dots), u_2(x, y, \dots), \dots$ soluciones de la ecuación [2.12]. Entonces si $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ son constantes cualesquiera $u(x, y, z, \dots) = \alpha_1 u_1(x, y, \dots) + \alpha_2 u_2(x, y, \dots) + \dots$ es también una solución. (Se conoce con el nombre, como indicábamos anteriormente, de Principio de Superposición)

2.8.1. Método de separación de variables

Intentemos dar respuesta a la solución de la ecuación homogénea

$$F(D_x, D_y; \dots) = 0. \quad (2.10)$$

Supongamos el caso de una EDO (Ecuación Diferencial Ordinaria), $F(D)y = 0$, con coeficientes constantes. En este caso usamos la sustitución $y = e^{mx}$, la cual conducía a la ecuación auxiliar o ecuación característica para determinar la constante m .

En el caso de la ecuación [2.9] con coeficientes constantes, por analogía, deberíamos asumir como solución $u(x, y, z, \dots) = e^{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots}$ y tratar de determinar las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Aunque este método tiene éxito en algunos casos, un método con mejor enfoque es asumir una solución de la forma $u(x, y, z, \dots) = X(x).Y(y).Z(z). \dots$ o más brevemente $u = XYZ \dots$ esto es, una función sólo de x multiplicada por una función sólo de y , y así sucesivamente, como se sugiere al escribir $u = e^{\alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots}$ como $u = e^{ax} \cdot e^{by} \cdot e^{cz} \dots$. Este método de solución con frecuencia se llama el *Método de Separación de Variables* (MSV).

Este método es de gran utilidad para obtener soluciones de EDP's, en casos de coeficientes variables o constantes, representa el objetivo central de este tema.

Ejemplos que ilustran el Método de Separación de Variables (MSV)

Vamos a mostrar algunos ejemplos que nos ayuden a entender el MSV.

Ejemplo 1

Resolver el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = 4e^{-2y} + 3e^{-6y}.$$

Solución

Admitamos que existen soluciones de la forma $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$ ó $u = X \cdot Y$. Sustituyendo en la ecuación se tiene, llamando $X' = \frac{dX}{dx}$ e $Y' = \frac{dY}{dy}$, que

$$X'Y + 3XY' = 0 \Leftrightarrow \frac{X'}{3X} + \frac{Y'}{Y} = 0 \quad (2.11)$$

dividiendo ambos miembros por $3XY$ al suponerlo distinto de cero, se tiene que

$$\frac{X'}{3X} = -\frac{Y'}{Y}. \quad (2.12)$$

Se ve entonces que un lado de la igualdad sólo depende de x , mientras que el otro miembro sólo depende de y . Puesto que x e y son variables independientes, ellas no dependen entre sí, y por tanto [2.11] puede ser cierta si y sólo si cada miembro de [2.12] es igual a la misma constante, que llamaremos c . De [2.12] se tiene que

$$\begin{aligned} X' - 3cX &= 0 \\ Y' + cY &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

de ahí que las ecuaciones [2.13] tienen de soluciones, respectivamente,

$$X = a_1 e^{3cx}, \quad Y = a_2 e^{-cy} \quad (2.14)$$

Así como $u(x, y) = X \cdot Y$ sustituyendo,

$$u(x, y) = a_1 a_2 e^{c(3x-y)} = B e^{c(3x-y)} \quad (2.15)$$

siendo $B = a_1 a_2 \in \mathbb{R}$.

Si ahora usamos la condición que nos impone el problema de valor de frontera tendremos:

$$B e^{-cy} = 4e^{-2y} + 3e^{-6y}. \quad (2.16)$$

Desafortunadamente [2.16] no puede ser cierta para ninguna selección de las constantes B y c ; y parecería como si el método no funcionara. Por supuesto, si tuviéramos sólo uno de los términos a la derecha de [2.16] el método funcionaría.

Así, si tuviéramos sólo $4e^{-2y}$, por ejemplo, se tendría

$$Be^{-cy} = 4e^{-2y} \Rightarrow B = 4, \text{ y } c = 2$$

y conduciría a la solución deseada de [2.15]:

$$u(x, y) = 4e^{2(3x-y)}.$$

El problema sin aparente solución se salva aplicando el teorema [2.6]. Se tiene de [2.15] que

$$u_1(x, y) = b_1 e^{c_1(3x-y)}$$

$$u_2(x, y) = b_2 e^{c_2(3x-y)}$$

son ambas soluciones, y se debe tener también como solución

$$u(x, y) = b_1 e^{c_1(3x-y)} + b_2 e^{c_2(3x-y)}.$$

La condición de frontera de inicial nos conduce a

$$b_1 e^{-c_1 y} + b_2 e^{-c_2 y} = 4e^{-2y} - 3e^{-6y}$$

que se satisface si elegimos $b_1 = 4, c_1 = 2 \wedge b_2 = -3, c_2 = 6$. Por tanto la solución deseada viene dada por

$$u(x, y) = 4e^{2(3x-y)} - 3e^{6(3x-y)}. \quad \square$$

Notas

- a) Podemos preguntarnos porqué no trabajamos el problema resuelto anterior encontrando primero la solución general y luego la solución particular. Una razón la encontramos en que excepto en casos muy sencillos la solución general es difícil de encontrar, y aún cuando se pueda encontrar, puede ser difícil determinar la solución particular a partir de ella.

Sin embargo el cocktail del MSV con el Principio de Superposición de Variables (PSV) resulta de gran utilidad.

- b) Un ejemplo más complicado del método de separación de variables lo podemos ver más adelante en el ejercicio resuelto número uno. \blacktriangle

2.9. Ejercicios propuestos

2.1 Hallar la solución general de la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

2.2 Hallar la solución general de la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial x}$.

2.3 Hallar la solución general de la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+y}$.

2.4 Hallar la solución general de la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x + y$.

2.5 Hallar la solución general de la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

2.6 Hallar la solución general de la ecuación: $\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$.

2.7 Hallar la solución general de la ecuación: $\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0$.

2.8 Considerando $u = u(x, y, z)$, hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$.

2.9 Hallar las regiones de la hiperbolicidad, parabolicidad y la elipticidad de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ b) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u + 1. \end{aligned}$$

2.10 Usar el MSV para obtener las soluciones a los problemas de valor de la frontera:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + u = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad u(x, 0) = 4e^{-3x} \\ b) \quad & 4 \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = 3y; \quad y(x, 0) = 4e^{-x} - e^{-5x}. \end{aligned}$$

Soluciones a los ejercicios propuestos

2.1 $u(x, y) = \phi_1(x) + \phi_2(x)e^y$.

2.2 $u(x, y) = \phi_1(x)e^{y^2} + \phi_2(x)$.

$$\mathbf{2.3} \quad u(x, y) = e^{x+y} + \phi_1(x)y + \phi_2(x).$$

$$\mathbf{2.4} \quad u(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{x} + \phi_1(x)y + \phi_2(x).$$

$$\mathbf{2.5} \quad u(x, y) = \frac{\phi_1}{x} + \phi_2(x).$$

$$\mathbf{2.6} \quad u(x, y) = \phi_1(x)y^{n-1} + \phi_2(x)y^{n-2} + \cdots + \phi_n(x).$$

$$\mathbf{2.7} \quad u(x, y) = \phi_1(y)x^{n-1} + \phi_2(y)x^{n-2} + \cdots + \phi_n(y).$$

$$\mathbf{2.8} \quad u(x, y, z) = \phi_1(x, y) + \phi_2(x, z) + \phi_3(y, z).$$

2.9 a) La ecuación es hiperbólica en todas las partes. b) En la región $x^2 - y > 0$ la ecuación es hiperbólica, en la región $x^2 - y < 0$ la ecuación es elíptica y la curva $y = x^2$ está formada por los puntos de parabolicidad.

$$\mathbf{2.10} \quad \text{a) } u(x, y) = 4e^{-3x-2y}; \quad \text{b) } y(x, t) = 4e^{-x+t} - e^{-5x+2t}.$$

2.10. Ejercicios resueltos

2.1 Resolver el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(10, t) = 0, \quad u(x, 0) = 50 \sin \frac{3\pi x}{2} + 20 \sin \pi x - 10 \sin 4\pi x.$$

Solución

Las variables independientes son x y t .

[PASO 1] Apliquemos el MSV. Sustituimos $u(x, t) = X(x).T(t) \Rightarrow u = X.T$ en la ecuación diferencial dada. Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(XT) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT) \Rightarrow X.T' = 2X''.T \quad (2.17)$$

$$\text{siendo } X'' = \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad T' = \frac{dT}{dt}.$$

Escribimos [2.17] como $\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X}$. Cada miembro de esta igualdad debe ser una constante. Denotémosla por c :

$$\frac{T'}{2T} = c \wedge \frac{X''}{X} = c, \text{ de ahí:}$$

$$T' - 2cT = 0, \quad X'' - cX = 0 \quad (2.18)$$

[PASO 2] Ahora para escribir la solución de la segunda ecuación en [2.18], debemos saber si c es positiva, negativa o nula. Consideremos los tres casos.

[PASO 3]

$$\boxed{c = 0}.$$

En este caso las soluciones a $T' - 2cT = 0$; $X'' - cX = 0$ están dadas por $T = c_1$, $X = c_2x + c_3$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Por tanto

$$u(x, t) = X(x).T(t) = c_1(c_2x + c_3) \quad (2.19)$$

De la dos primeras condiciones de frontera se tiene

$$c_1c_3 = 0 \quad (2.20)$$

$$c_1(10c_2 + c_3) = 0 \quad (2.21)$$

estas se satisfacen si $c_1 = 0$, pero en tal caso la solución es la trivial $u(x, t) = 0$, la cual no puede satisfacer la tercera condición de frontera. Por tanto, $c_1 \neq 0$. Sin embargo, en tal caso se ve que de [2.20] que $c_3 = 0$, y así $c_2 = 0$, dando de nuevo $u(x, t) = 0$. Se tiene por tanto así que c no puede ser cero.

$$\boxed{c > 0}.$$

Aquí las soluciones de $T' - 2cT = 0$, $X'' - cX = 0$ están dadas por $T = c_1e^{2ct}$, $X = c_2e^{\sqrt{c}x} + c_3e^{-\sqrt{c}x}$, y por tanto

$$u(x, t) = X(x).T(t) = e^{2ct} \left(Ae^{\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x} \right)$$

de la primera condición de frontera $A = c_1c_2$, $B = c_1c_3$. De la segunda condición se tiene $u(10, t) = Be^{2ct} \left(e^{10\sqrt{c}} - e^{-10\sqrt{c}} \right) = 0$. Como $e^{2ct} \neq 0 \Rightarrow B = 0$ ó $e^{10\sqrt{c}} - e^{-10\sqrt{c}} = 0 \Rightarrow e^{20\sqrt{c}} = 1$. Ahora si $B = 0$, la solución $u(x, t) = Be^{2ct} \left(e^{\sqrt{c}x} - e^{-\sqrt{c}x} \right)$ es la trivial $u(x, t) = 0$, que por supuesto no puede satisfacer la tercera condición de frontera, la cual ni siquiera ha sido considerada aún. También es imposible tener $e^{20\sqrt{c}} = 1$ para $c > 0$, puesto que para $c > 0 \Rightarrow e^{20\sqrt{c}} > 1$, esto nos indica que no puede ser $c > 0$.

$$\boxed{c < 0}.$$

En este caso es conveniente escribir $c = -\lambda^2$ para mostrar que c es negativo. Entonces $T' - 2cT = 0$, $X'' - cX = 0$ llega a ser:

$$\begin{aligned} T' + 2\lambda^2 T &= 0 & T &= c_1 e^{-2\lambda^2 t} \\ &\Rightarrow & & \\ X'' + \lambda^2 X &= 0 & X &= c_2 \cos \lambda x + c_3 \sin \lambda x, \end{aligned} \quad (2.22)$$

y por tanto $u(x, t) = X(x) \cdot T(t) = e^{-2\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$, donde $A = c_1 c_2$, $B = c_1 c_3$.

De la primera condición de frontera se tiene, $u(0, t) = A e^{-2\lambda^2 t} = 0$ ó $A = 0$ puesto que $e^{-2\lambda^2 t} \neq 0$.

La solución hasta ahora es $u(x, t) = B e^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x$.

De la segunda condición de frontera se tiene $u(10, t) = B e^{-2\lambda^2 t} \sin 10\lambda = 0$. Puesto que $B \neq 0$ (de otra manera sería $u = 0$), debemos tener que $\sin 10\lambda = 0 \Leftrightarrow 10\lambda = \arcsen 0 = m\pi$ ó $\lambda = \frac{m\pi}{10} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

De aquí que

$$u(x, t) = B e^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

llega a ser

$$u(x, t) = B e^{-\frac{m^2 \pi^2 t}{50}} \sin \left(\frac{m\pi x}{10} \right).$$

La última condición de frontera produce

$$u(x, 0) = B \sin \frac{m\pi x}{10} = 50 \sin \frac{3\pi x}{2} + 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 4\pi x.$$

Sin embargo, no podemos encontrar un solo par de constantes m y B que satisfagan esta condición. El principio de superposición viene en nuestra ayuda, puesto que sabemos que sumas de soluciones del tipo $u(x, t) = B e^{-\frac{m^2 \pi^2 t}{50}} \sin \frac{m\pi x}{10}$ para diferentes valores de B y enteros m también serán una solución. Puesto que sólo necesitamos tres términos con la forma anterior, consideramos la solución:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= b_1 e^{-\frac{m_1^2 \pi^2 t}{50}} \sin \left(\frac{m_1 \pi x}{10} \right) + b_2 e^{-\frac{m_2^2 \pi^2 t}{50}} \sin \left(\frac{m_2 \pi x}{10} \right) + \\ &+ b_3 e^{-\frac{m_3^2 \pi^2 t}{50}} \sin \left(\frac{m_3 \pi x}{10} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

de modo que la última condición de frontera da

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= b_1 \sin \left(\frac{m_1 \pi x}{10} \right) + b_2 \sin \left(\frac{m_2 \pi x}{10} \right) + b_3 \sin \left(\frac{m_3 \pi x}{10} \right) = \\ &= 50 \sin \left(\frac{3\pi x}{2} \right) + 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 4\pi x. \end{aligned}$$

Esto se puede satisfacer si elegimos

$$b_1 = 50, \frac{m_1\pi}{10} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ó} \quad m_1 = 15, \quad b_2 = 20, \frac{m_2\pi}{10} = 2\pi \quad \text{ó}$$

$$m_2 = 20, \quad b_3 = -10, \frac{m_3\pi}{10} = 4 \quad \text{ó} \quad m_3 = 40$$

usando éstas en [2.23] se obtiene la solución:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 50e^{-\frac{9\pi^2 t}{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \\ &+ 20e^{-8\pi^2 t} \sin 2\pi x - 10e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Notas

- Para la mayoría de problemas podemos anticipar el hecho de que debemos hacer la selección $c = -\lambda^2$, puesto que de otra manera no obtenemos los términos no presentes en la última condición de frontera del ejemplo anterior.
- De esta manera no necesitamos preocuparnos con cualquier otra selección por la constante distinta de $-\lambda^2$. \blacktriangle

2.2 Usar el método de separación de variables para obtener soluciones al valor de la frontera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u(0, y) = e^{2y}.$$

Solución

Ensayemos $u(x, y) = X(x).Y(y)$. Sustituyendo: $X'.Y = Y'.X \Leftrightarrow \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$, un miembro depende de x mientras que el otro depende sólo de y . Puesto que x e y son variables independientes: $\frac{X'}{X} = c$; $\frac{Y'}{Y} = c$ siendo c la misma.
Resolviendo ambas: $X = a_1 e^{cx}$, $Y = a_2 e^{cy}$. De aquí que

$$u(x, y) = a_1 e^{cx} \cdot a_2 e^{cy} = a_1 a_2 e^{c(x+y)}.$$

Usando la condición inicial de frontera $u(0, y) = e^{2y}$ resulta $u(0, y) = a_1 a_2 e^{c(x+y)} = e^{2y}$. Tomando $a_1 a_2 = 1$ y $c = 2$ se tiene que la solución general es:

$$u(x, y) = e^{2(x+y)} = e^{2x+2y}.$$

2.3 Obtener la solución del PVF (Problema de Valor de Frontera)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u, \quad u(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

Solución

Aplicando el MSV, ensayamos con $u(x, y) = X(x).Y(y)$. De ahí $Y.X' + X.Y' = X.Y$, dividiendo por $X.Y$

$$\frac{Y.X'}{X.Y} + \frac{X.Y'}{X.Y} = \frac{X.Y}{X.Y} \Rightarrow \frac{X'}{X} + \frac{Y'}{Y} = 1$$

por tanto $\frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y}$. Se tiene que cumplir, por las mismas razones expuestas en el ejercicio anterior que

$$\frac{X'}{X} = c; \left[1 - \frac{Y'}{Y} = c \Leftrightarrow \frac{Y'}{Y} = 1 - c \right]$$

resolviendo ambas

$$\begin{aligned} X &= a_1 e^{cx} \\ Y &= a_2 e^{(1-c)y} \end{aligned}$$

entonces $u(x, y) = X(x).Y(y) = a_1 e^{cx} a_2 e^{(1-c)y} \Rightarrow$

$$u(x, y) = a_1 a_2 e^{cx+(1-c)y} = b e^{cx+(1-c)y} \text{ siendo } b = a_1 a_2.$$

De la condición de frontera $u(0, y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y} = b e^{(1-c)y}$, desafortunadamente no puede ser cierta para ninguna selección de las constantes b y c , por tanto usemos el principio de superposición. Utilicemos para ello

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= b_1 e^{c_1 x + (1-c_1)y} \\ u_2(x, y) &= b_2 e^{c_2 x + (1-c_2)y} \end{aligned}$$

como soluciones particulares, entonces: $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ también es solución. Por tanto

$$b_1 e^{c_1 x + (1-c_1)y} + b_2 e^{c_2 x + (1-c_2)y} = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

que para $x = 0$ es

$$b_1 e^{(1-c_1)y} + b_2 e^{(1-c_2)y} = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

, es decir,

$$b_1 = 2, b_2 = 3, 1 - c_1 = -1 \Rightarrow c_1 = 2, 1 - c_2 = -2 \Rightarrow c_2 = 3.$$

En definitiva la solución general será

$$u(x, y) = 2e^{2x-y} + 3e^{3x-2y}.$$

Capítulo 3

Ecuaciones de tipo hiperbólico

"Las matemáticas proporcionan a la física un lenguaje propio, las formas de expresión son claras y elegantes y le dan el señorío necesario sobre los fenómenos naturales y su debido aprovechamiento "

G. Arfken

"E pur, si muove"

Galilei

3.1. Introducción

Ya afirmábamos en el capítulo anterior que a las ecuaciones de tipo hiperbólico conducen los problemas referentes a los fenómenos de tipo oscilatorio (problemas de la cuerda, membrana, de oscilaciones electromagnéticas, etc.). La particularidad característica de los procesos descritos por las ecuaciones de tipo hiperbólico es la velocidad finita de propagación de las perturbaciones.

3.2. Problemas que dan lugar a vibraciones u oscilaciones

3.2.1. Problema de la cuerda vibrante

Uno de los problemas más simples en vibraciones u oscilaciones que conducen a problemas de valor de frontera dando lugar a EDP's es el *problema de una cuerda vibrante*, por ejemplo una cuerda de violín. Supongamos que tal cuerda esté tensa fuertemente entre dos puntos $x = 0$ y $x = L$, figura [3.1]

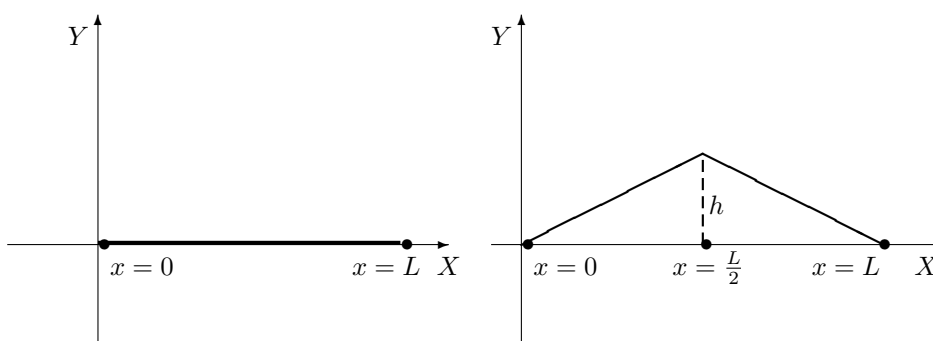


Figura 3.1: Cuerda tensa y cuerda alzada

En el tiempo $t = 0$ la cuerda se alza por el punto medio, según la figura [3.1], una distancia que designamos por h . A continuación la cuerda se suelta. El problema, que involucra la vibración que se produce, es describir el movimiento resultante.

Para estudiar con rigor este problema debemos atender a muchos supuestos:

1. Puede suceder que la cuerda esté demasiado tensa cuando la alzamos por la mitad una altura h , y la cuerda se rompe. (Este caso es demasiado simple y no lo consideramos)
2. Suponemos que la cuerda es flexible y elástica
3. Para simplificar consideramos que h es suficientemente pequeño frente a L .
4. Otros supuestos (que iremos incorporando con el desarrollo del temario).

3.2.2. Modelo matemático

Veamos a continuación el modelo matemático que rige la vibración de la cuerda.

Supongamos que en algún tiempo t la cuerda tiene la forma de la figura [3.2].

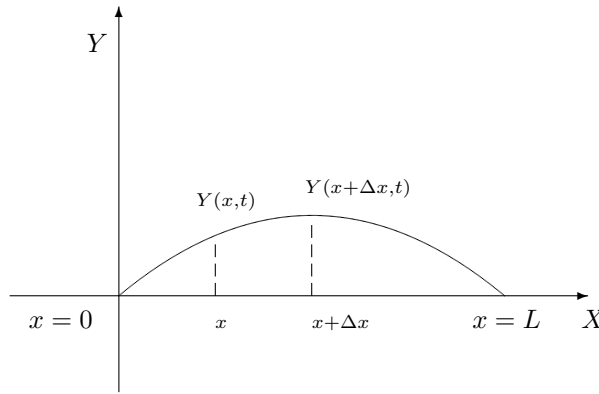


Figura 3.2:

Llamemos $Y(x, t)$ el desplazamiento del punto x en la cuerda (medido desde la posición de equilibrio la cual tomamos como el eje OX) en el tiempo t . El desplazamiento, en el tiempo t , en un punto cercano $x + \Delta x$ vendrá dado por $Y(x + \Delta x, t)$.

Para describir el movimiento resultante, consideraremos las fuerzas que actúan sobre el pequeño elemento de cuerda de longitud Δs entre x y $x + \Delta x$ como se muestra en la figura [3.3].

Habrán dos fuerzas actuando sobre el elemento, la tensión $\tau(x)$ debida a la porción de cuerda a la izquierda, y a la tensión $\tau(x + \Delta x)$ debida a la porción de la derecha. (Nótese que hemos asumido por el momento que la tensión depende de la posición).

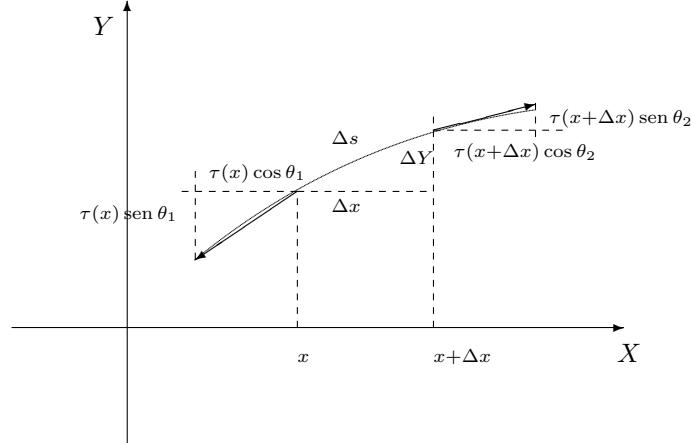


Figura 3.3: Cuerda alzada

Descomponiendo estas fuerzas en componentes se tiene

$$\text{Fuerza neta vertical (hacia arriba)} = \tau(x + \Delta x) \sin \theta_2 - \tau(x) \sin \theta_1$$

$$\text{Fuerza neta horizontal (hacia la derecha)} = \tau(x + \Delta x) \cos \theta_2 - \tau(x) \cos \theta_1$$

Suponemos ahora que no hay movimiento a la izquierda ni a la derecha; es decir, la fuerza neta horizontal neta es cero (es una muy buena aproximación de la situación física). La fuerza vertical neta produce una aceleración del elemento. Asumiendo que la cuerda tiene densidad ρ (masa por unidad de longitud), la masa del elemento es $\rho \Delta s$. La aceleración vertical de la cuerda está dada aproximadamente por $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$ (más exactamente es $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \varepsilon$ donde $\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$).

Por tanto según la ley de Newton $F = ma$

$$\tau(x + \Delta x) \sin \theta_2 - \tau(x) \sin \theta_1 = \rho \Delta s \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

con un alto grado de precisión.

Si llamamos θ al ángulo que forma la tangente en cualquier punto del elemento con el eje positivo de las X , entonces θ es una función de la posición, y escribimos

$$\theta_1 = \theta(x); \quad \theta_2 = \theta(x + \Delta x)$$

sustituyendo en la expresión [3.1] y dividiendo por Δx ,

$$\frac{\tau(x + \Delta x) \sen \theta(x + \Delta x) - \tau(x) \sen \theta(x)}{\Delta x} = \rho \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

Ahora bien, la pendiente de la tangente en cualquier punto de la cuerda está dada por $\tan \theta(x) = \frac{\partial Y}{\partial x}$ de aquí que

$$\sen \theta(x) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2}} \quad (3.3)$$

Así, si asumimos que la pendiente es pequeña comparada con 1, podemos despreciar $\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2$ en el denominador de [3.3] lo cual equivale a la aproximación:

$$\sen \theta(x) = \tan \theta(x) = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

usando este resultado en [3.2] y tomando límites cuando $\Delta x \rightarrow 0$ tendremos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau(x + \Delta x) \sen \theta(x + \Delta x) - \tau(x) \sen \theta(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [\tau(x) \tan \theta(x)] &= \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau(x) \frac{\partial Y}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau(x) \frac{\partial Y}{\partial x} \right] &= \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

la cual se denomina *Ecuación de la cuerda vibrante*.

Caso particular: Consideremos que $\tau(x) = \tau$ es una constante

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\tau(x) \frac{\partial Y}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \Rightarrow \tau \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

siendo $a^2 = \frac{\tau}{\rho}$.

Mientras no se diga lo contrario consideraremos τ constante.

3.2.3. Condiciones de frontera

Como la cuerda está fija en los puntos $x = 0$ y $x = L$ se tiene que $Y(0, t) = 0$, $Y(L, t) = 0$, $\forall t \geq 0$. Estas condiciones establecen que los desplazamientos en los extremos de la cuerda son siempre cero. Si nos referimos a la figura [3.1], cuando la cuerda está alzada, se ve que

$$Y(x, 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{L} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2h}{L}(L - x) & \text{si } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

nos refleja las ecuaciones de los dos segmentos de recta de esa figura, siendo $Y(x, 0)$ el desplazamiento de cualquier punto en $t = 0$. Puesto que la cuerda se suelta desde el reposo, su velocidad inicial en cualquier parte es cero.

Denotando por Y_t la velocidad $\frac{\partial Y}{\partial t}$ podemos escribir $Y_t(x, 0) = 0$ lo cual dice que la velocidad en cualquier lugar x en el tiempo $t = 0$ es cero.

Hay otros muchos problemas de frontera que se pueden formular usando la misma ecuación diferencial parcial [3.5]. Por ejemplo:

- a) Si L' no es el punto medio

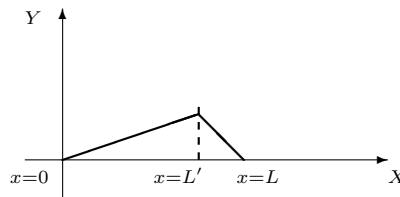


Figura 3.4:

- b) Podríamos también tener una cuerda con uno de sus extremos fijo mientras que el otro se mueve arriba y abajo de acuerdo a alguna ley de movimiento.
- c) L' y L'' varios puntos

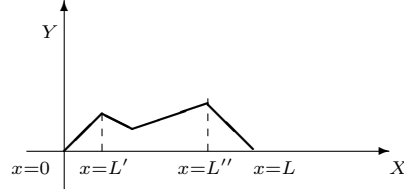


Figura 3.5:

3.2.4. Generalización del problema de la cuerda vibrante

Podemos generalizar la ecuación de la cuerda vibrante [3.5]. Sea una membrana o piel de tambor con la forma de un cuadrado en el plano OXY cuya frontera está fija según se contempla en la siguiente figura [3.6].

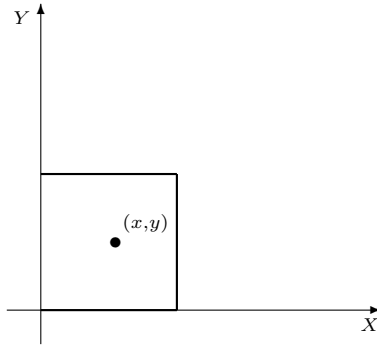


Figura 3.6:

Si se pone a vibrar, a la manera de como se golpea un tambor, cada punto (x,y) del cuadrado se pone en movimiento en una dirección perpendicular al plano.

Si se denota por Z el desplazamiento de su punto (x,y) a partir del plano, el cual es la posición de equilibrio, en cualquier tiempo t , entonces la ecuación diferencial parcial para la vibración está dada por

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = \frac{\tau}{\rho}. \quad (3.6)$$

En la que ρ es la densidad (masa por unidad de área), τ es la tensión por unidad de

longitud a lo largo de cualquier curva en la piel del tambor (se asume como constante) y $Z = Z(x, y, t)$. Se puede obtener la generalización a tres dimensiones, dando como resultado

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (3.7)$$

Se podría pensar que esta ecuación tiene aplicaciones a las vibraciones de una superficie esférica o de otra forma.

La ecuación [3.7] aparece también en la teoría electromagnética en relación a la propagación de ondas tales como ondas de radio o televisión. Por esta razón con frecuencia llamamos a [3.7], o cualesquiera de los casos [3.5] o [3.6], la *Ecuación de onda*.

A modo de resumen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\equiv \text{E. de Onda de una dimensión} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &\equiv \text{E. de Onda de dos dimensiones} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &\equiv \text{E. de Onda de tres dimensiones} \end{aligned}$$

Si introducimos el operador derivada parcial $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ la ecuación [3.7] se puede escribir

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

En el caso de que u no dependa de t , la ecuación [3.8] se convierte en $\nabla^2 u = 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9)$$

llamada **Ecuación de Laplace**.

3.3. Ecuación ondulatoria unidimensional

Comencemos el estudio de las ecuaciones hiperbólicas por la ecuación de onda unidimensional - ecuación de vibración de la cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.10)$$

Definición 3.1 *Llamemos cuerda a un hilo fino, elástico e idealmente flexible sólo cuando éste está tensado y opone resistencia al estiramiento.*

Supóngase que la cuerda vibra en el plano OXU y el vector de desplazamiento \vec{u} es perpendicular en cualquier momento t al eje OX . Entonces, como ya hemos visto en el apartado anterior, el proceso de vibración puede describirse por una función $u(x, t)$ que caracteriza el desplazamiento vertical de la cuerda.

Examinemos las vibraciones pequeñas de la cuerda si la densidad lineal de la cuerda ρ es constante, y están ausentes las fuerzas exteriores, la ecuación de oscilaciones libres de una cuerda homogénea tiene la forma ya conocida, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $a = \frac{\tau}{\rho}$.

3.3.1. Solución del problema de Cauchy (problema inicial) para una cuerda ilimitada

a) Método de onda móvil. Solución de d' Alembert

- a.1) Vamos a integrar la ecuación de onda unidimensional $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Aquí $u(x, t)$ es el desplazamiento de los puntos de la cuerda respecto a la posición de equilibrio en el momento de tiempo t . Para cada valor fijo de la t la gráfica de la función $u = u(x, t)$ da la forma de cuerda en el momento de tiempo t .

Hagamos el cambio de variable siguiente:

$$\begin{aligned}\xi &= x - at \\ \eta &= x + at\end{aligned}\tag{3.11}$$

Entonces la ecuación [3.10] en las nuevas variables adopta la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, ya que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[a \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación [3.10] se llega a que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Y esta ecuación, como se ha demostrado en el tema anterior se integra de una manera muy simple. Se llega a que $u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$ que deshaciendo los cambios se obtiene

$$u = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \quad (3.12)$$

Que es la solución general de la ecuación [3.10], puesto que una solución cualquiera de la ecuación [3.10] puede representarse en forma de la ecuación [3.12], eligiendo correspondientemente las funciones θ_1 y θ_2 . Esta ecuación se denomina la *solución de D' Alembert*, y cada sumando en la ecuación [3.12] también es solución de la ecuación [3.10].

- a.2) Veamos el sentido físico de $u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)$. Para $t = 0$ esta solución adopta la forma $u(x; 0) = \theta_1(x) + \theta_2(x)$.

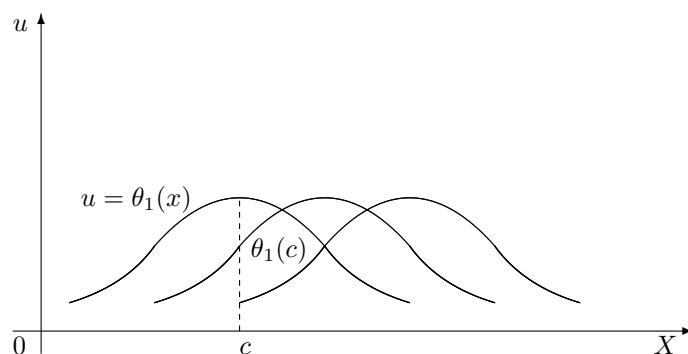


Figura 3.7:

Supongamos un observador que, saliendo en $t = 0$ del punto $x = 0$ del eje OX , se mueve en la dirección positiva con velocidad a , de tal manera que para su abscisa se tiene $\frac{dx}{dt} = a$, de donde $x = at + c \Rightarrow x - at = c$.

Por consiguiente, para $u = \theta_1(x - at) = \theta_1(c) = \text{cte}$. En otras palabras, para tal observador el desplazamiento u de la cuerda, que viene determinado por la expresión $u = \theta_1(x - at)$, será constante todo el tiempo e igual a $\theta_1(c)$. De esta manera, la solución $\theta_1(x - at)$ representa la *Onda Directa* que se propaga en sentido positivo del

eje OX con velocidad a . Si por $\theta_1(\xi)$ se toma, por ejemplo, $\sin \xi$, entonces tendremos la onda sinusoidal.

La solución $u = \theta_2(x + at)$ representa la *Onda Inversa* que se propaga en dirección negativa del eje OX con velocidad a .

En definitiva, la solución $u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)$ es la suma de las ondas directa e inversa.

Esto conduce al siguiente procedimiento gráfico para construir la forma de cuerda en un momento cualquiera de tiempo t

1. Se construyen las curvas $u = \theta_1(x)$, $u = \theta_2(x)$ en $t = 0$.
2. Sin cambiar su forma, las desplazamos simultáneamente en magnitud $at > 0$ en sentidos opuestos
 - La curva $u = \theta_1(x)$ a la derecha
 - La curva $u = \theta_2(x)$ a la izquierda

Para obtener la gráfica de la cuerda es suficiente construir la suma algebraica de ordenadas de las curvas desplazadas.

b) Solución del problema de Cauchy para la cuerda ilimitada

El problema de Cauchy consiste en hallar una función $u(x, t) \in \mathcal{C}^2$ que satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.13)$$

y las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.14)$$

donde $\varphi_0(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; $\varphi_1(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ son las dos funciones tales que $\varphi_0(x)$ determina la forma de la cuerda en el instante inicial $t = 0$; $\varphi_1(x)$ plantea la distribución de las velocidades $\frac{\partial u}{\partial t}$ a lo largo de la cuerda en $t = 0$.

Supongamos que la solución del problema examinado existe, entonces se tendremos

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at).$$

Determinemos las funciones θ_1 y θ_2 de tal manera que se satisfagan las condiciones iniciales [3.14]

$$u(x; 0) = \theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} = -a[\theta'_1(x) - \theta'_2(x)] = \varphi_1(x). \quad (3.16)$$

De aquí, $\theta'_1(x) - \theta'_2(x) = -\frac{1}{a}\varphi_1(x)$. Si integramos con respecto a x

$$\int_0^x [\theta'_1(\alpha) - \theta'_2(\alpha)] d\alpha = -\frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + C : \quad C \in \mathbb{R} \text{ (arbitraria)}$$

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + C$$

pero por otro lado, $\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2} \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Introduciendo en la ecuación [3.12] las expresiones para θ_1 y θ_2 , obtendremos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \varphi_1(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2}\varphi_0(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \varphi_1(\alpha) d\alpha \\ u(x, t) &= \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

que denominamos *Fórmula de D' Alembert*.

c) Dominio de dependencia

La fórmula de D' Alembert [3.17] muestra que el valor de la solución $u(x, t)$ en el punto $P(x; t)$ depende sólo de los valores de las funciones φ_0 y φ_1 en los puntos del segmento $\Upsilon_p : [x - at, x + at]$ del eje OX .

En realidad los valores de φ_1 forman parte de la solución en todo el segmento Υ_p , mientras que los valores de φ_0 sólo en los extremos de este segmento. Se dice que la solución $u(p)$ no **advierde** los datos fuera de Υ_p . El segmento Υ_p del eje OX se llama *Dominio de dependencia* para el punto $P(x; t)$ (véase la figura [3.8]).

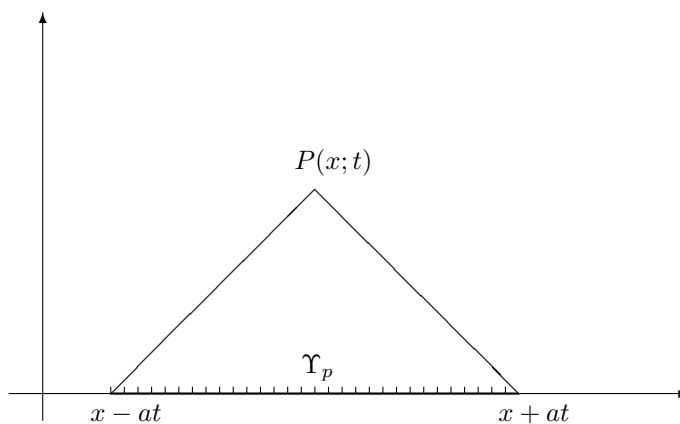


Figura 3.8:

3.3.2. Casos particulares de la fórmula de D' Alembert

Estudiemos dos casos particulares que permiten figurar el comportamiento de la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en el caso general.

I) Caso Primero

Sea $\varphi_1(x) = 0$, mientras que la gráfica de la función $\varphi_0(x)$ tiene la forma de la siguiente figura

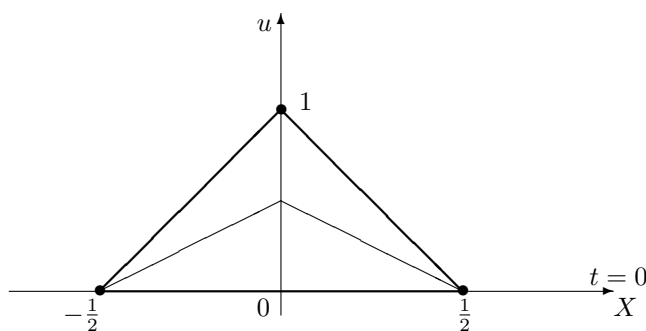


Figura 3.9:

Sin pérdida de generalidad y para simplificar consideremos que $a = 1$. Entonces la fórmula de D' Alembert (FDA) adopta la expresión

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x - t) + \varphi_0(x + t)}{2}$$

Para obtener la gráfica de la función $u(x, t)$ considerada como función de $x, \forall t \in \mathbb{R}^+$ (fijo), operemos así

- Inicialmente trazamos dos gráficas que coinciden, cada una de las cuales se obtiene a partir de la gráfica $\varphi_0(x)$, reduciendo las ordenadas dos veces (línea de trazo fino de la figura [3.9]).
- A continuación una de estas gráficas se desplaza, como un todo único, en t a la derecha en sentido positivo $= X$, mientras que la otra, en t a la izquierda.
- Después de estos dos pasos se construye una gráfica nueva, en la cual la ordenada para cada valor de x es igual a la suma de ordenadas de dos gráficas desplazadas.

Ejercicio para el lector

Ayudándose de este procedimiento comprobar que las gráficas $u(x; 0), u(x; 1/4), u(x; 1/2), u(x; 1)$ se corresponden, respectivamente, con la figura [3.10].

Nota

Se observa que para las condiciones iniciales elegidas en cada punto de la cuerda, después de que pasen ambas ondas (y para los puntos que se hallan fuera de la región del desplazamiento inicial, después de que pase sólo una onda), se establece el estado de reposo. ▲

II) Caso Segundo

Sean

$$\varphi_0(x) \equiv 0, \quad \varphi_1(x) \equiv \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

y sigamos considerando $a = 1$. La visualización gráfica es la que corresponde a la figura siguiente

En este caso se dice que la cuerda tiene sólo un impulso inicial. Y la expresión [3.17] toma la forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(\alpha) d\alpha.$$

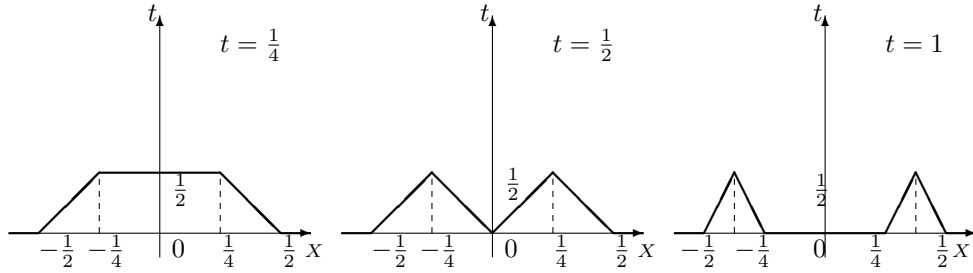


Figura 3.10:

- Para cada x fijo la solución $u(x, t)$ será igual a cero hasta que la intersección del intervalo $(x - t, x + t)$ con el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, donde $\varphi_1(x) \neq 0$, sea vacío.
- $u(x, t)$ cambiará mientras $(x - t, x + t)$ cubra cada vez mayor parte del intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- Después de que el intervalo $(x - t, x + t)$ tendrá en su interior el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $u(x, t)$ permanecerá invariable e igual a

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_1(\alpha) d\alpha. \quad (3.18)$$

Para obtener la gráfica que represente la forma de la cuerda para valores diferentes de t , hagamos lo siguiente. Designemos por $\phi(z)$ una función primitiva cualquiera para $\varphi_1(z)$. Entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + t) - \phi(x - t)]. \quad (3.19)$$

Para construir la gráfica de [3.19] tracemos las gráficas de las funciones $\frac{1}{2}\phi(x)$ y $-\frac{1}{2}\phi(x)$ y después cada una de estas gráficas se desplaza, como un todo único, a una distancia t a lo largo del eje OX .

- La primera gráfica, a la izquierda.
- La segunda gráfica, a la derecha

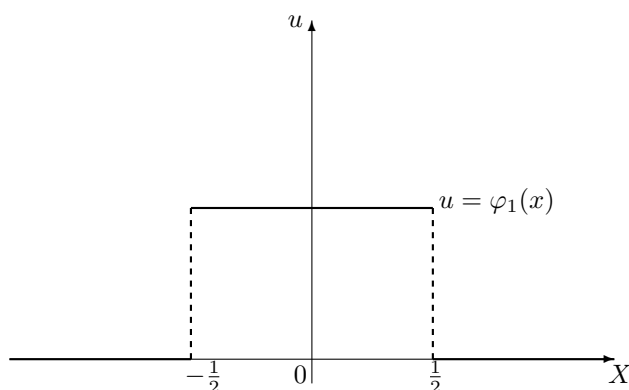


Figura 3.11:

Al sumar las ordenadas de las gráficas desplazadas, obtendremos la gráfica de la función $u(x, t)$. Veamos para diferentes valores de t , las gráficas correspondientes

Al pasar un intervalo suficientemente grande de tiempo, cada punto de la cuerda se desplazará y tendrá la desviación estacionaria u_{est} que se determina por integral $\frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_1(\alpha) d\alpha$. En este caso tenemos la deformación residual (*Histéresis*).

3.3.3. ¿Cómo se debe plantear el problema de forma correcta ?

Al estudiar determinados problemas físicos debemos introducir el concepto *forma correcta* de introducir el problema.

Definición 3.2 Sea un problema $\mathcal{P}(x)$. Se dice que $\mathcal{P}(x)$ se plantea de forma correcta en Matemáticas si

- a) La solución del problema $\mathcal{P}(x)$ existe para cierta clase de funciones \mathcal{F}_1 .
- b) La solución del problema $\mathcal{P}(x)$ es única para cierta clase de funciones \mathcal{F}_2 .
- c) La solución del problema $\mathcal{P}(x)$ depende de forma ininterrumpida de los datos del problema (condiciones iniciales y de frontera, coeficientes de la ecuación), es decir, la solución posee **estabilidad**.

Al conjunto $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ se denomina **Clase del Planteamiento Correcto** del problema.

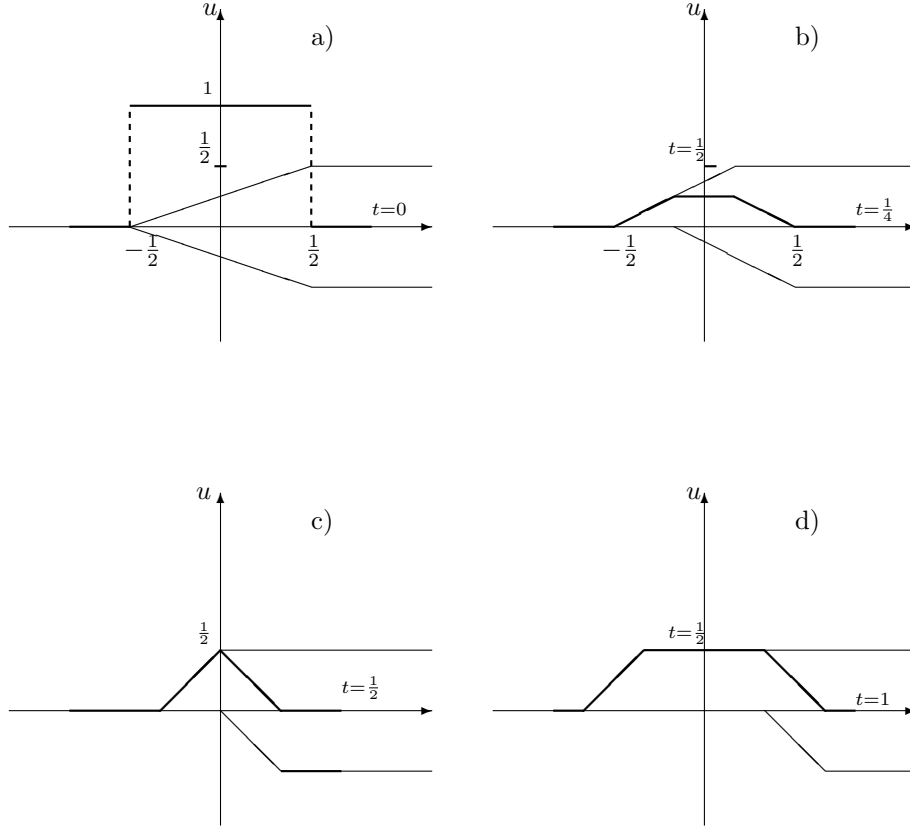


Figura 3.12:

Teorema 3.1 Sea el problema de Cauchy para la cuerda ilimitada:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \\
 u(x, t)|_{t=0} &= \varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \\
 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi_1(x), \quad \varphi_1(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

suponiendo que la solución existe y es única.

Cualquiera que sea el intervalo $[0, t_0]$, $\forall t \in [0, t_0]$, y cualquiera que sea $\epsilon > 0$, se encontrará un $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal, que para dos soluciones cualesquiera $u_1(x; t), u_2(x; t)$ de la

ecuación [3.20] que corresponden a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u_1(x; t) &= \varphi_0^1(x) \quad ; \quad u_2(x; t) = \varphi_0^2(x) \\ \frac{\partial u_1(x; 0)}{\partial t} &= \varphi_1^1(x) \quad ; \quad \frac{\partial u_2(x; 0)}{\partial t} = \varphi_1^2(x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

se cumple $|u_2(x; t) - u_1(x; t)| < \epsilon$, $0 \leq t \leq t_0$, $-\infty < x < +\infty$, cuando $|\varphi_0^1(x) - \varphi_0^2(x)| < \delta$, $|\varphi_1^1(x) - \varphi_1^2(x)| < \delta$ con $-\infty < x < +\infty$, es decir, un pequeño cambio de las condiciones iniciales lleva a una pequeña variación de las soluciones.

Nota

Consecuentemente para la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ el Problema de Cauchy está planteado de forma correcta. ▲

3.3.4. Ejemplo de Hadamard

Examinemos el siguiente problema de Cauchy para la ecuación de Laplace.

Sea la situación siguiente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.22)$$

que satisface para $t = 0$ las condiciones

$$u(x, t)|_{t=0} = 0 : \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx : \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es fácil comprobar que la solución de este problema es la función

$$u(x, t) = \frac{1}{n^2} \operatorname{senh} nt \operatorname{sen} nx. \quad (3.23)$$

Puesto que $\left| \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} \right| = \left| \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \right| \leq \frac{1}{n}$, entonces, para n suficientemente grande, $\left| \frac{\partial u(x; 0)}{\partial t} \right|$ será en todas las partes tan pequeño como se desee. Al mismo tiempo, como muestra la fórmula [3.23], la solución $u(x, t)$ del problema examinado, tomará magnitudes tan grandes en valor absoluto como se desee, cuando $t > 0$ arbitrariamente pequeño y n es suficientemente grande.

Supongamos que hemos hallado la solución $u_0(x; t)$ del problema de Cauchy para la ecuación [3.22] para ciertas condiciones iniciales $u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x).$

Entonces para las condiciones iniciales

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x) \wedge \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) + \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$$

la solución del problema de Cauchy será la función

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \frac{1}{n^2} \operatorname{senh} nt \operatorname{sen} nx.$$

De aquí se deduce que una pequeña variación de las condiciones iniciales puede llevar a cambios tan grandes como se desee en la solución del problema de Cauchy, además, en una proximidad cualquiera de la línea de los valores iniciales $t = 0$.

En definitiva, el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace (tipo elíptico) está planteado incorrectamente.

3.3.5. Otro ejemplo

Sea la ecuación hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.24)$$

Hallar la solución $u(x, y)$ de la ecuación [3.24] en el rectángulo \mathcal{R} dado en la siguiente figura:

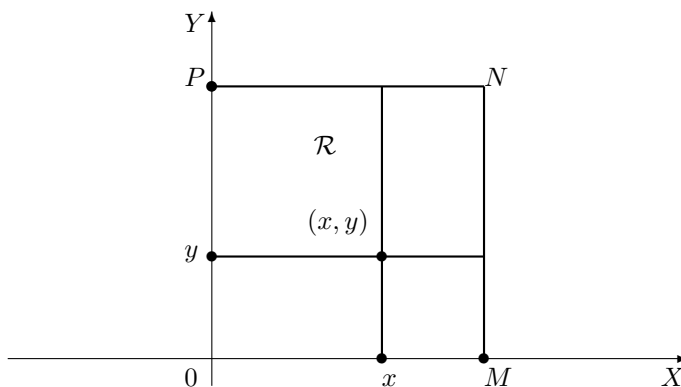


Figura 3.13:

\mathcal{R} es un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas que toma en la frontera γ de \mathcal{R} los valores de contorno prefijados (la frontera γ de \mathcal{R} está cerrada). Este problema de contorno, hablando en general, no tiene solución.

Como se sabe la solución general de [3.24] tiene la forma $u(x, y) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$, con $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}^1$ arbitrarias.

Tampoco podemos fijar arbitrariamente los valores de contorno, puesto que la derivada $\frac{\partial u}{\partial y} = \phi_2'(y)$ ha de tomar los valores iguales en puntos opuestos correspondientes de los lados $x = k$ (cte).

A análoga conclusión llegamos para $\frac{\partial u}{\partial x} = \phi_1'(x)$, si se toman los puntos opuestos correspondientes en los lados $y = \text{cte}$. Los valores de la función $u(x, y)$ pueden fijarse arbitrariamente sólo en dos lados contiguos del rectángulo (por ejemplo, en OM y OP), pero no en toda la frontera de este rectángulo —, de tal manera que para la ecuación hiperbólica el problema de contorno planteado debe ser determinado de nuevo.

Notas

1. De esta manera no podemos subordinar la solución de la ecuación dada a las condiciones de frontera de forma arbitraria.
2. Los problemas planteados de forma incorrecta se encuentran con frecuencia en las aplicaciones. ▲

3.4. Ejercicios propuestos

3.1 Aprovechar la fórmula de D' Alembert para solucionar el problema de Cauchy $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$t > 0, \quad -\infty < x < +\infty; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

para mostrar que si ambas funciones $\varphi(x), \psi(x)$ son impares

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \text{ y si estas son pares, } \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

3.2 Hallar la solución de los problemas iniciales siguientes:

$$\text{a) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$u(x, t)|_{t=0} = e^{-x^2}; \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos x$$

$$\text{b) } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$u(x, t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$$

3.3 Hallar la solución del problema inicial siguiente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \sinh x; \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \ln x$$

3.4 Hallar la solución del problema inicial siguiente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$u(x, t)|_{t=0} = 2^{x^2-5x+1}; \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos^2 x$$

Soluciones a los ejercicios propuestos

$$\text{3.2 a) } u(x, t) = \frac{1}{2} \left[e^{-(x-at)^2} + e^{-(x+at)^2} \right] + \frac{\sin at}{a} \cos x.$$

$$\text{b) } u(x, t) = \frac{1}{2a} [\arctan(x+at) - \arctan(x-at)].$$

$$\text{3.3 } u(x, t) = \sinh x \cosh \sqrt{13}t + \ln \left[(x + \sqrt{13}t)^{\frac{x+\sqrt{13}t}{2\sqrt{13}}} (x - \sqrt{13}t)^{\frac{x-\sqrt{13}t}{2\sqrt{13}}} \right] + C.$$

$$\text{3.4 } u(x, t) = 2^{(x-5t)^2+5(5t-x)} [1 + 2^{20tx-50t}] + \frac{1}{20} [10t + \sin 10t \cos 2x] + C.$$

3.5. Ejercicios resueltos

3.1 Demostrar que cada sumando de la expresión $u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)$ es solución de la ecuación de oscilaciones libres de una cuerda homogénea.

Solución:

Recuérdese que la ecuación diferencial es : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ donde $u(x, t)$ representa el desplazamiento de los puntos de la cuerda respecto de la posición de equilibrio en el tiempo t .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [\theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)] = \theta'_1(x - at)(-a) + \theta'_2 a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [-a\theta'_1(x - at) + a\theta'_2(x + at)] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-a)^2 \theta''_1(x - at) + a^2 \theta''_2(x + at) = a^2 [\theta''_1(x - at) + \theta''_2(x + at)].$$

Por otro lado: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)] = \theta'_1 + \theta'_2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [\theta'_1(x - at) + \theta'_2(x + at)] = \theta''_1(x - at) + \theta''_2(x + at)$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 [\theta''_1(x - at) + \theta''_2(x + at)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3.2 Demostrar el teorema [3.1].**Solución:**

Las funciones $u_1(x; t)$, $u_2(x; t)$ están ligadas con sus condiciones iniciales mediante la fórmula de D' Alembert de tal manera, que:

$$u_2(x; t) - u_1(x; t) = \frac{\varphi_0^2(x - at) - \varphi_0^1(x - at)}{2} + \frac{\varphi_0^2(x + at) - \varphi_0^1(x + at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} (\varphi_1^2(\alpha) - \varphi_1^1(\alpha)) d\alpha.$$

de aquí:

$$|u_2(x; t) - u_1(x; t)| \leq \frac{|\varphi_0^2(x - at) - \varphi_0^1(x - at)|}{2} + \frac{|\varphi_0^2(x + at) - \varphi_0^1(x + at)|}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\varphi_1^2(\alpha) - \varphi_1^1(\alpha)| d\alpha.$$

Aprovechando las condiciones del teorema:

$$|u_2(x; t) - u_1(x; t)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} 2at \leq \delta(1 + t_0)$$

haciendo $\delta = \frac{\epsilon}{1 + t_0}$, de la última desigualdad se tendrá $|u_2(x; t) - u_1(x; t)| < \epsilon$, con $0 \leq t \leq t_0$, $-\infty < x < +\infty$ como se quería demostrar.

Capítulo 4

Vibraciones libres de una cuerda homogénea fijada en sus extremos

*"La Física Teórica, en gran medida, se formula en
términos de ecuaciones diferenciales, frecuentemente
en la forma de ecuaciones diferenciales
en derivadas parciales "*

G. Arfken

"Dios no juega a los dados"

A.Einstein

4.1. Método de Fourier

El método de Fourier también conocido como el método de separación de variables es uno de los procedimientos más usados en la resolución de EDP's.

Estudiemos con detalle este método comenzando por el problema más simple que se refiere a las vibraciones libres de una cuerda homogénea de longitud fija L en sus extremos.

Formalmente, significa, encontrar la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (4.1)$$

siendo las condiciones de frontera

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.2)$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in [0, L]. \quad (4.3)$$

Este problema se denomina *Problema mixto*, puesto que contiene las Condiciones de Frontera (CF) y las Condiciones Iniciales (CI).

Vamos a encontrar las soluciones particulares de la ecuación [4.1] que no sean idénticamente nulas y satisfagan las condiciones de frontera [4.2] en la forma

$$u(x, t) = T(t).X(x). \quad (4.4)$$

Al sustituir $u(x, t)$ según [4.4] en la ecuación [4.1], obtenemos

$$T''(t).X(x) = a^2 T(t).X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

En esta igualdad el primer miembro depende sólo de t ; para que se produzca la igualdad ambos miembros deben de representar a la misma constante. Designémosla por $-\lambda$. Se suele llamar a esta constante, *constante de separación*:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (4.5)$$

De aquí surgen las ecuaciones

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (4.6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (4.7)$$

Las CF dan

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = X(L)T(t) = 0.$$

Como $T(t) \neq 0$ se deduce que la función $X(x)$ debe satisfacer las condiciones de frontera

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (4.8)$$

La ecuación [4.7] tiene la solución evidente $X(x) \equiv 0$ (solución trivial) con las CF [4.8]. Para obtener las no triviales de $u(x, t)$ en forma de [4.4] que satisfagan las CF [4.2] hace falta hallar las soluciones no triviales de

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

De esta manera llegamos al problema siguiente

Hallar los valores del parámetro λ , para los que existen las soluciones no triviales del problema [4.7] y [4.8], así como estas mismas soluciones.

Todos los valores del parámetro λ se llaman *valores propios* y las soluciones del problema [4.7]- [4.8] no triviales, *funciones propias*.

4.2. Problema de Sturm-Liouville

El problema enunciado anteriormente se denomina Problema de Sturm-Liouville. A continuación, veamos como se calculan los valores propios y las funciones propias.

Estudiemos tres casos correspondientes a los valores de λ .

Caso I $\lambda < 0$.

Cuando $\lambda < 0$, la solución general de la ecuación [4.7] tiene la forma

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}.$$

Como se tienen que cumplir las condiciones de frontera [4.8]

$$X(0) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}0} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}0} = 0$$

$$X(L) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}L} = 0$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ \Rightarrow C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}L} &= 0. \end{aligned}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas C_1 y C_2 .

Puesto que el determinante de la matriz de los coeficientes de este sistema es distinto de cero, $C_1 = C_2 = 0$. Por consiguiente, $X(x) = 0$, es decir, para $\lambda < 0$, no existen soluciones no triviales del problema.

Caso II $\lambda = 0$.

Cuando $\lambda = 0$, la solución general de la ecuación [4.7] tiene la forma

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

La C.F. [4.8] nos dan

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 \cdot L + C_2 \cdot 0 &= 0 \\ \Rightarrow C_1 = C_2 = 0, \end{aligned}$$

y, por consiguiente $X(x) = 0$, es decir, cuando $\lambda = 0$ tampoco existen las soluciones no triviales del problema [4.7]-[4.8].

Caso III $\lambda > 0$.

Cuando $\lambda > 0$, la solución general de la ecuación [4.7] tiene la forma

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Como se tienen que cumplir las condiciones [4.8], obtenemos

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 &= 0 \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}L + C_2 \sin \sqrt{\lambda}L &= 0. \end{aligned}$$

El sistema anterior tiene las soluciones no triviales, si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es igual a cero:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}L & \sin \sqrt{\lambda}L \end{vmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \sin \sqrt{\lambda}L = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = \arcsen 0 &\Rightarrow \sqrt{\lambda}L = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De esta forma las soluciones no triviales del problema [4.7]- [4.8] son posibles sólo para los valores

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 : \forall k \in \mathbb{Z}$$

que son los denominados **valores propios** del problema [4.7]- [4.8].

A partir de la primera ecuación del sistema [4.9] obtenemos $C_1 = 0$ y, por consiguiente, las funciones

$$X_k(x) = \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x$$

serán las **funciones propias** del problema que se determinan con exactitud de hasta el factor constante, el cual hemos elegido $C_2 = 1$ (sin pérdida de generalidad).

Nota

A los valores positivos y negativos de k que son iguales en valor absoluto, corresponden las funciones propias, las cuales se diferencian sólo en el factor constante. Por eso para k es suficiente tomar solamente los valores positivos $k \in \mathbb{Z}^+$.

Cuando $\lambda = \lambda_k$ la solución general de [4.6] tiene la forma

$$T_k(t) = A_k \cos \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t + B_k \sin \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t$$

donde A_k, B_k son constantes arbitrarias, $A_k^2 + B_k^2 > 0$. De este modo la función

$$u_k(x, t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = \left[A_k \cos \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t + B_k \sin \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t \right] \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x$$

satisface la ecuación [4.1] y las CF [4.2] para A_k y B_k cualesquiera, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. ▲

Notas

- a) En virtud de la linealidad y homogeneidad de la ecuación [4.1] una suma finita cualquiera de soluciones será también solución de la ecuación [4.1].
- b) Lo mismo es válido para la suma de la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t + B_k \sin \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t \right] \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x \quad (4.9)$$

si ésta converge uniformemente y puede derivarse dos veces término a término respecto a x y t . Puesto que cada sumando en la serie [4.9] satisface las CF [4.2], también

satisfará estas condiciones la suma $u(x, t)$ de esta serie. Nos queda por determinar las constantes A_k y B_k , en [4.9] de tal manera que se satisfagan las condiciones iniciales [4.3]. Para ello derivamos formalmente la serie [4.9] respecto a t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{L} \left[-A_k \sin\left(\frac{k\pi a}{L}\right) t + B_k \cos\left(\frac{k\pi a}{L}\right) t \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) x. \quad (4.10)$$

Haciendo $t = 0$ en [4.9] y [4.10], en virtud de las condiciones iniciales [4.3] obtenemos

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) x \quad (4.11)$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi a}{L}\right) B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) x \quad (4.12)$$

Las fórmulas anteriores representan los desarrollos de las funciones dadas $\varphi_0(x)$ y $\varphi_1(x)$ en la serie de Fourier respecto a los senos en el intervalo $(0, L)$.

Los coeficientes de los desarrollos anteriores se calculan

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) x dx \quad (4.13)$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^L \varphi_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) x dx \quad \blacktriangle \quad (4.14)$$

4.3. Teorema

Teorema 4.1 Si $\varphi_0(x) \in C^3[0, L]$ y satisface las condiciones $\varphi_0(0) = \varphi_0(L) = 0$, $\varphi_0''(0) = \varphi_0''(L) = 0$ mientras que $\varphi_1(x) \in C^2[0, L]$ y satisface las condiciones de $\varphi_1(0) = \varphi_1(L) = 0$, entonces la suma $u(x, t)$ de la serie [4.9], donde A_k y B_k se determinan por [4.13] y [4.14], tiene las derivadas parciales continuas de hasta el segundo orden inclusive en la región $\{0 < x < L, t > 0\}$, satisface la ecuación [4.1], a las condiciones de frontera [4.2] e iniciales [4.2], es decir, $u(x, t)$ es la solución del problema [4.1]-[4.3].

4.4. Ejemplo resuelto

Hallar la ley de vibraciones de una cuerda homogénea de longitud L , fijada en los extremos, si en el momento inicial $t = 0$, la cuerda tiene la forma de parábola $hx(L - x)$, $h > 0$ es constante, con velocidad inicial ausente.

Solución

Formalmente el problema es equivalente a resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \quad (4.15)$$

con las condiciones de frontera

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.16)$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, t)|_{t=0} = hx(L - x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, L] \quad (4.17)$$

Apliquemos el método de Fourier buscando las soluciones no triviales que satisfagan las CF [4.16], en la forma

$$u(x, t) = T(t) \cdot X(x) \quad (4.18)$$

que sustituyendo [4.18] en [4.15] y separando las variables

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \quad (4.19)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (4.20)$$

Además, en virtud de [4.16], $X(0) = X(L) = 0$, sabemos que

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 : k = 1, 2, 3, \dots \\ X_k(x) &= \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x : k = 1, 2, 3, \dots \\ T_k(t) &= A_k \cos \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t + B_k \sin \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t. \end{aligned}$$

De aquí, buscamos la solución del problema de partida en forma de la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t + B_k \sin \left(\frac{k\pi a}{L} \right) t \right] \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x. \quad (4.21)$$

Para determinar A_k y B_k utilizamos las condiciones iniciales [4.17]

$$u(x, t)|_{t=0} = hx(L - x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x \quad (4.22)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 = \frac{a\pi}{L} = \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} \right) x \quad (4.23)$$

es fácil deducir que $B_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$.

A partir de [4.22] se obtiene

$$A_k = \frac{2\pi}{L} \int_0^L x(L-x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} \right) x dx$$

que integrando dos veces por partes

$$A_{2p+1} = \frac{8L^2 h}{\pi^3 (2p+1)^3}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Introduciendo los valores hallados de A_k y B_k en [4.21], obtenemos la solución del problema planteado

$$u(x, t) = \frac{8L^2 h}{\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^3} \cos \left(\frac{(2p+1)\pi a}{L} t \right) \operatorname{sen} \frac{(2p+1)\pi}{L} x.$$

Notas

I) Cada una de las funciones

$$u(x, t) = T_k(t) \cdot X_k(x) = \left[A_k \cos \left(\frac{k\pi a}{L} t \right) + B_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi a}{L} t \right) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right)$$

determina las llamadas **vibraciones propias** de la cuerda fija en sus extremos. Cuando las vibraciones propias de la cuerda fijada en sus extremos corresponde a $k = 1$, la cuerda emite el tono fundamental que es el más bajo.

Cuando las vibraciones son superiores a 1, ella emite los tonos más altos, denominados **sobretonos**.

Al escribir $u(x, t) = M_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} x \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi a}{L} t + \alpha_k \right)$ concluimos que las vibraciones propias (naturales) de la cuerda son las ondas estacionarias (fijas), para las cuales los puntos de la cuerda realizan las oscilaciones armónicas con:

$$\mathbf{Amplitud:} \quad M_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L}; \quad \mathbf{Frecuencia:} \quad \omega_k = \frac{k\pi a}{L}; \quad \mathbf{Fase:} \quad \alpha_k$$

II) Se ha examinado con detalles el caso de las vibraciones libres de una cuerda homogénea fijada en sus extremos. Si sometemos a la cuerda a otras condiciones de frontera, obtendremos resultados análogos.

Sea el caso de la cuerda fijada al extremo izquierdo fijo, $u(0, t) = 0$, mientras que el extremo derecho $x = L$ está ligado elásticamente con su posición de equilibrio. Esto quiere decir que para $h > 0$, constante

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = -hu(L, t).$$

Se propone buscar, con estas condiciones, la solución no trivial $u(x, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (4.24)$$

Compruébese que se tiene para las funciones propias la expresión

$$X_k(x) = \text{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2L} x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

para los valores propios

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \blacktriangle$$

4.5. Ejercicios propuestos

4.1 Aplicar el método de Fourier a los problemas siguientes

- a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $x \in (0, L)$
 $u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0$; $u(x, t)|_{t=0} = \text{sen} \left(\frac{3\pi}{L} x \right)$; $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $x \in (0, L)$
 $u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0$; $u(x, t)|_{t=0} = 0$; $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \text{sen} \left(\frac{\pi}{L} x \right)$.

4.2 resolver los siguientes problemas mixtos aplicando el método de Fourier de separación de variables:

- a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $x \in (0, \pi)$
 $u(x, t)|_{t=0} = u(x, t)|_{x=\pi} = 0$; $u(x, t)|_{t=0} = \text{sen } x$; $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \text{sen } x$
- b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0$, $x \in (0, L)$
 $u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0$; $u(x, t)|_{t=0} = 0$;
 $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ L - x & \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$

Soluciones a los ejercicios propuestos

4.1 a) $u(x, t) = \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi}{L} \right) x \cdot \cos \left(\frac{3\pi a}{L} \right) t$

b) $u(x, t) = \frac{1}{\pi a} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{L} \right) x \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi a}{L} \right) t$

4.2 a) $u(x, t) = (\operatorname{sen} t + \cos t) \operatorname{sen} x$

b) $u(x, t) = \frac{4L^2}{a\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{L} x \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi a}{L} t$

Capítulo 5

Vibraciones forzadas de la cuerda homogénea de longitud L

*"Nuestra época se caracteriza por una amplia
utilización de los métodos matemáticos a base
de ordenadores en diferentes esferas de la actividad humana.
No obstante, las máquinas de calcular no funcionan sin el hombre.
Su uso está vinculado a la simulación de modelos matemáticos y
algoritmos numéricos"*
Y. Zeldovich

5.1. Vibraciones forzadas de la cuerda fijada en los extremos

El problema que vamos a tratar en este capítulo es el estudio de las vibraciones de una cuerda homogénea de longitud L fijada en los extremos, pero sometida a la acción de una fuerza exterior $f(x, t)$ calculada por unidad de longitud.

Formalmente significa encontrar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (5.1)$$

para las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (5.2)$$

y las C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (5.3)$$

Para ello busquemos la solución $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ donde $v(x, t)$ es la solución de la ecuación no homogénea

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (5.4)$$

que satisfaga las C.F.

$$v(x, t)|_{x=0} = v(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (5.5)$$

y las C.I.

$$v(x, t)|_{t=0} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (5.6)$$

y $w(x, t)$ es la solución de la ecuación homogénea

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.7)$$

que satisfaga a las C.F.

$$w(x, t)|_{x=0} = w(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (5.8)$$

y las C.I.

$$w(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (5.9)$$

La solución $v(x, t)$ representa las **vibraciones forzadas** de la cuerda, es decir, las vibraciones que se engendran por una fuerza perturbadora exterior $f(x, t)$, cuando las perturbaciones iniciales se ausentan.

La solución $w(x, t)$ representa las **vibraciones libres** de la cuerda, es decir, las vibraciones que tienen lugar sólo a consecuencia de las perturbaciones iniciales.

5.1.1. Método de resolución

El método para hallar las vibraciones libres se estudió con detalle en el capítulo anterior. Nos queda, por tanto estudiar sólo las vibraciones forzadas $v(x, t)$, o sea, la solución de la ecuación no homogénea [5.4].

Para ello vamos a aplicar el método de desarrollo respecto a las funciones propias que es uno de los métodos más efectivos para solucionar las ecuaciones lineales no homogéneas en derivadas parciales.

La idea fundamental del método consiste en descomponer la fuerza exterior $f(x, t)$ en la serie

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cdot X_k(x)$$

respecto a las funciones propias $\{X_n(x)\}$ del problema de contorno correspondiente y en hallar las respuestas $v_k(x, t)$ del sistema a la acción de cada $f_k(t) \cdot X_k(x)$. Al sumar todas las respuestas semejantes, obtendremos la solución del problema inicial

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, t).$$

Busquemos la solución $v(x, t)$ del problema [5.5]-[5.6] en la forma

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi}{L} x. \quad (5.10)$$

Recuérdese que aquí $\{\sin(\frac{k\pi}{L})x\}$ son las **funciones propias** del problema de contorno homogéneo y las condiciones de frontera [5.5] se satisfacen automáticamente.

Determinemos las $T_k(t)$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots$ de tal modo que $v(x, t)$ satisfaga la ecuación [5.4] y las condiciones iniciales [5.6].

Si escribimos $v(x, t)$ en forma de [5.10] en la ecuación [5.4], se obtiene

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t) + \frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2} T_k(t) \right] \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x. \quad (5.11)$$

Desarrollando la función $f(x, t)$ en $(0, L)$ en la serie de Fourier respecto a las funciones propias (respecto a los senos)

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \left(\frac{k\pi}{L} \right) x \quad (5.12)$$

donde

$$f_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi, t) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} \right) \xi \, d\xi. \quad (5.13)$$

Comparando los desarrollos [5.11] y [5.12] para la función $f(x, t)$ obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$T_k''(t) + \frac{k^2\pi^2 a^2}{L^2} T_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

para las funciones desconocidas $T_k(t)$.

Para que la solución $v(x, t)$ definida por la serie [5.10] satisfaga las C.I. nulas [5.6], es suficiente hacer que las $T_k(t)$ satisfagan las condiciones

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.15)$$

Aprovechando, por ejemplo, el método de variación de las constantes, obtendremos que las soluciones de las ecuaciones [5.14] por las C.I. [5.15] tienen la forma

$$T_k(t) = \frac{L}{k\pi a} \int_0^L f_k(\sigma) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi a}{L} \right) (t - \sigma) \, d\sigma \quad (5.16)$$

donde las $f_k(t)$ se determinan según las fórmulas [5.13].

Al sustituir las expresiones halladas [5.16] en la serie [5.10] obtenemos la solución $v(x, t)$ del problema [5.4]-[5.6], si la serie [5.10] y las series obtenidas de ésta derivando término a término respecto a x y t dos veces, convergen uniformemente.

Nota

La convergencia uniforme de las series estará asegurada si $f(x, t)$ es continua, tiene derivadas parciales continuas respecto de x de hasta el segundo orden inclusive y para todos los valores de t se cumple la condición $f(0, t) = f(L, t) = 0$.

La solución $u(x, t)$ del problema de partida [5.1]-[5.3] se representa de la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a}{L} t + B_k \operatorname{sen} \frac{k\pi a}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} x \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} x \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde

$$\begin{aligned} T_k(t) &= \frac{L}{k\pi a} \int_0^t f_k(\sigma) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi a}{L} \right) (t - \sigma) \, d\sigma \\ A_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \varphi_0(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} \right) x \, dx \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ B_k &= \frac{2}{k\pi a} \int_0^L \varphi_1(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} \right) x \, dx \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

5.2. Ejemplo resuelto

Obtener la solución del problema mixto

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + t \operatorname{sen} x, \quad t > 0, \quad x \in (0, \pi) \quad (5.18)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.19)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad x \in [0, \pi] \quad (5.20)$$

Solución

Obsérvese como al ausentarse las perturbaciones iniciales se tiene un problema *puro* de **oscilaciones forzadas** de una cuerda homogénea de longitud π , y fijada en los extremos.

El sistema de funciones $\{\operatorname{sen}(nx)\}$ es ortogonal en $[0, \pi]$ y el sistema de las funciones propias del problema de contorno $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$.

Busquemos la solución del problema [5.18]-[5.20] en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} nx \quad (5.21)$$

donde $T_n(t)$ son desconocidas.

Si sustituimos $u(x, t)$ en la forma de [5.21] en [5.18], se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n''(t) + n^2 T_n(t)] \operatorname{sen}(nx) = t \operatorname{sen} x$$

de donde

$$T_1''(t) + T_1(t) = t \quad (5.22)$$

$$T_n''(t) + T_n(t) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.23)$$

Aprovechando la fórmula [5.21], en virtud de las C.I. [5.20] se obtiene

$$u(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen}(nx); \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) \operatorname{sen} nx$$

de donde $T_n(0) = T'_n(0) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

De tal manera, para $T_1(t)$ tenemos

$$T''_1(t) + T_1(t) = 0 \quad (5.24)$$

$$T_1(0) + T'_1(0) = 0. \quad (5.25)$$

La solución general de la ecuación anterior es

$$T_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t + t,$$

que al exigirle que cumpla las condiciones dadas, hallamos $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, de tal manera que

$$T_1(t) = t - \operatorname{sen} t.$$

Para $n \geq 2$, se tiene que

$$T''_n(t) + n^2 T_n(t) = 0 \quad (5.26)$$

$$T_n(0) = T'_n(0) = 0 \quad (5.27)$$

de donde $T_n(t) \equiv 0$, $n = 2, 3, \dots$ Por tanto

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} nx = T_1(t) \operatorname{sen} nx + 0 + \dots \Rightarrow u(x, t) = (t - \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x.$$

5.3. Vibraciones forzadas de la cuerda con extremos móviles

El problema que vamos a resolver ahora es el de las vibraciones forzadas en una cuerda homogénea de longitud L originadas por una fuerza exterior $f(x, t)$, calculada por la unidad de longitud, pero con los extremos de la cuerda no fijados, sino que se mueven según una ley determinada.

Formalmente este problema se reduce a encontrar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (0, L) \quad (5.28)$$

que satisfaga a las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = \psi_1(t), \quad u(x, t)|_{x=L} = \psi_2(t), \quad t \geq 0 \quad (5.29)$$

y las C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x); \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in [0, L] \quad (5.30)$$

El método de Fourier es imposible aplicarlo directamente para resolver este problema, puesto

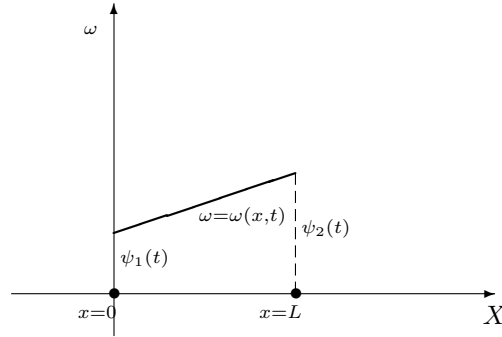


Figura 5.1:

que las C.F.[5.29] no son homogéneas (no son nulas). Sin embargo, este problema se reduce fácilmente al problema con las C.F. nulas (homogéneas).

Para ello vamos a introducir la función auxiliar

$$\omega(x, t) = \psi_1(t) + [\psi_2(t) - \psi_1(t)] \frac{x}{L}. \quad (5.31)$$

Es fácil ver que

$$\omega(x, t)|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \omega(x, t)|_{x=L} = \psi_2(t). \quad (5.32)$$

De esta manera la función $\omega(x, t)$ en los extremos del intervalo $[0, L]$ satisface las condiciones [5.29], mientras que en el interior de este segmento es lineal respecto de x como se muestra en la figura [5.1].

Busquemos la solución del problema [5.28]-[5.30] en la forma $u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t)$ donde $v(x, t)$ es una función desconocida.

En virtud de la elección de $\omega(x, t)$ se tiene que $v = u - \omega$, satisface las condiciones de frontera nulas

$$v(x, t)|_{x=0} = u(x, t) - \omega(x, t)|_{x=0} = 0,$$

$$v(x, t)|_{x=L} = u(x, t) - \omega(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (5.33)$$

y las C.I.

$$\begin{aligned} v(x, t)|_{t=0} &= u(x, t)|_{t=0} - \omega(x, t)|_{t=0} = \\ &= \varphi_0(x) - \psi_1(0) - [\psi_2(0) - \psi_1(0)] \frac{x}{L} = \Phi_0(x) \\ \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \\ &= \varphi_1(x) - \psi_1'(0) - [\psi_2'(0) - \psi_1'(0)] \frac{x}{L} = \Phi_1(x). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Introduciendo $u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t)$ en la ecuación [5.28], obtenemos

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2}$$

o, tomando en consideración la expresión para $\omega(x, t)$

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + f_1(x, t)$$

siendo $f_1(x, t) = f(x, t) - \psi_1''(t) - [\psi_2''(t) - \psi_1''(t)] \frac{x}{L}$. De esta manera si $\psi_1(t), \psi_2(t) \in \mathcal{C}^2$, llegamos al problema siguiente para la función $v(x, t)$.

Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + f_1(x, t)$$

que satisface las C.F.

$$v(x, t)|_{x=0} = v(x, t)|_{x=L} = 0$$

y las C.I.

$$v(x, t)|_{t=0} = \Phi_0(x), \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi_1(x)$$

es decir, el *problema mixto con las C.F. nulas*. Recuérdese que le método usado para solucionarlo fue expuesto anteriormente.

5.4. Ejemplo resuelto

Resolvamos el ejercicio mixto siguiente

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, 1) \quad (5.35)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = t; \quad u(x, t)|_{x=1} = 2t, \quad t \geq 0 \quad (5.36)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 1 + x, \quad x \in [0, 1] \quad (5.37)$$

Solución

Las C.F. no son homogéneas (los extremos de la cuerda son móviles), $\psi_1(t) = t$, $\psi_2(t) = 2t$. Introduzcamos la función auxiliar $\omega(x, t)$

$$\omega(x, t) = t + tx = t(1 + x). \quad (5.38)$$

La solución del problema que buscamos será de la forma $u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t)$ donde $v(x, t)$ es una nueva función desconocida.

Para ésta se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, 1) \quad (5.39)$$

las C.F.

$$v(x, t)|_{x=0} = v(x, t)|_{x=1} = 0 \quad (5.40)$$

y las C.I.

$$v(x, t)|_{t=0} = 0 = \left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (5.41)$$

El problema [5.39]-[5.41] tiene, evidentemente, la solución trivial $v(x, t) \equiv 0$ y, sólo esta solución. Entonces será

$$u(x, t) = v(x, t) + \omega(x, t) \Rightarrow u(x, t) = t(1 + x).$$

5.5. Ejercicios propuestos

5.1 Resolver el problema mixto siguiente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \pi x, \quad t > 0, \quad x \in [0, 1]$$

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=1} = 0; \quad u(x, t)|_{t=0} = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

5.2 Encontrar la solución al problema mixto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (4t - 8) \sin 2x, \quad t > 0, \quad x \in (0, \pi)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=\pi} = 0; \quad u(x, t)|_{t=0} = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Soluciones a los ejercicios propuestos

5.1 $u(x, t) = \frac{1}{\pi^2}(1 - \cos \pi t) \operatorname{sen} \pi x.$

5.2 $u(x, t) = \left(2 \cos 2t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + t - 2\right) \operatorname{sen} 2x$

Capítulo 6

Ecuaciones de tipo parabólico

”Los objetos y las teorías puramente matemáticas pueden ser concebidos, en todo caso y en una primera aproximación, como puramente ideales. Pero es indudable que en toda experiencia colaboran tanto la experiencia como el pensamiento”

G. Frey

6.1. Introducción

En capítulos anteriores hemos visto como se resuelven problemas de valor de frontera que involucran ecuaciones diferenciales parciales, y más concretamente hemos estudiado, en los capítulos 3,4 y 5, con detalle las ecuaciones de tipo hiperbólico que aparecen en problemas relacionados con vibraciones u oscilaciones.

Análogo estudio vamos a abordar a continuación con los problemas que aparecen en el estudio de la **conducción o difusión del calor**.

6.2. Problemas que involucran conducción de calor

Supongamos una barra delgada de metal de longitud L que se coloca en el eje OX según aparece en la figura [6.1].

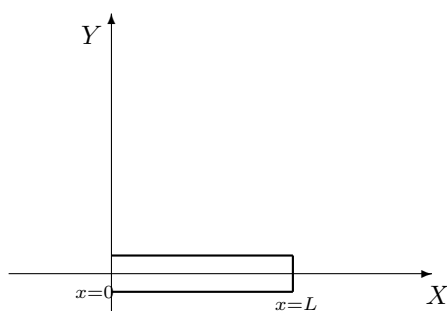


Figura 6.1:

A continuación se sumerge en agua hirviendo de modo que su temperatura es de 100°C . Luego se saca y los extremos $x = 0$ y $x = L$ se mantienen en hielo para que la temperatura en los extremos sea de 0°C . Vamos a suponer que no hay fugas de calor en la superficie de la barra, esto significa, y vamos a admitirlo, que la barra está aislada.

¿Cual será la temperatura de la barra en cualquier lugar y en cualquier tiempo ?

Si denotamos por u la temperatura de la barra fácilmente se deduce que u depende de la posición x de la barra, como también del tiempo t (medida del tiempo cero cuando la barra está a 100°C) de observación. Por tanto $u = u(x, t)$.

Veamos el modelo matemático que rige el anterior proceso. Visualicemos la situación

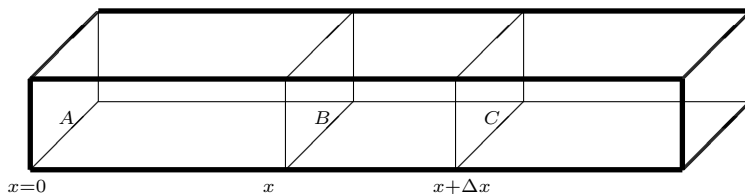


Figura 6.2:

tomando una sección transversal constante A (véase la figura [6.2], donde la sección transversal es rectangular, aunque pudiera tener cualquier forma como la de un cilindro). Consideremos el elemento de volumen de la barra incluido entre los dos planos vecinos, paralelos a A y que hemos notado por B y C a distancias x y $x + \Delta x$, respectivamente, de A . Denotemos la temperatura en el plano B en el tiempo t por $u(x, t)$. Entonces en C en el tiempo t estará dada por $u(x + \Delta x, t)$.

Para poder continuar en la obtención de la formulación matemática necesitamos tener en cuenta las dos leyes físicas correspondientes a la transferencia del calor

Ley I *La cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un objeto de masa m en una cantidad Δu es $ms\Delta u$, donde s es una constante que depende del material usado y se llama **calor específico** .*

Ley II *La cantidad de calor que fluye a través de un área (B o C) por unidad de tiempo es proporcional a la tasa de cambio de la temperatura con respecto a la distancia perpendicular al área. Si tomamos como positiva la dirección de izquierda a derecha en la figura [6.2], podemos escribir*

$$Q = -KA\Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.1)$$

siendo

$Q \equiv$ cantidad de calor que fluye a la derecha.

$\Delta t \equiv$ cantidad de tiempo durante el cual ocurre el flujo.

$K \equiv$ constante de proporcionalidad llamada **conductividad térmica** (depende del material usado)

Nota

El signo menos en [6.1] muestra que Q es positivo (esto es, el flujo es a la derecha) cuando $\frac{\partial u}{\partial x}$ es negativo (esto es, cuando la temperatura está decreciendo a medida que vamos a la derecha). De forma similar Q es negativo cuando $\frac{\partial u}{\partial x}$ es positivo. Esto va en sintonía con los hechos físicos. ▲

Usando [6.1] podemos decir que la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano B de la figura [6.2], es

$$-KA\Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x.$$

Similarmente, la cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través del plano C de la figura [6.2] es

$$-KA\Delta t \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}.$$

De aquí se tiene que la *cantidad neta* de calor que se acumula en el volumen entre C y B es la cantidad que entra por B menos la cantidad que sale por C , esto es

$$\begin{aligned} \left[-KA\Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \right]_x - \left[-KA\Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x+\Delta x} = \\ KA\Delta t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Esta cantidad de calor acumulado eleva o baja la temperatura del elemento de volumen si [6.2] es positivo o negativo. Por la Ley I

$$KA\Delta t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = ms\Delta u = \rho A\Delta x s\Delta u \quad (6.3)$$

ya que la masa del elemento de volumen es $\rho A\Delta x$.

Debería mencionar que [6.3] es sólo aproximadamente cierta siendo el grado de aproximación mejor, cuanto más pequeños sean los valores Δx , Δu y Δt .

Dividiendo ambos lados de [6.3] por $A\Delta x\Delta t$ y haciendo que $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ se obtiene

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.4)$$

que podemos escribir así

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\rho s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.5)$$

siendo $\kappa = \frac{K}{\rho s}$ el coeficiente de difusividad del material. La ecuación [6.5] se llama **ecuación de flujo de calor o de conducción de calor en una dimensión**.

Nota

Si la superficie no estuviera aislada tendríamos que considerar un término extra en [6.3] que sería la *cantidad de calor que escapa (o fluye dentro) del elemento*, y cuya ecuación en este caso será

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(u - u_0) \quad (6.6)$$

siendo c constante y u_0 la temperatura de los alrededores. \blacktriangle

Tomando el caso especial donde los extremos se mantienen a 0°C y donde la temperatura inicial de la barra es 100°C , resultan las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, u(L, t) = 0, t > 0 \\ u(x, 0) &= 100, 0 < x < L \end{aligned} \quad (6.7)$$

Tenemos así que el problema de valor de frontera (PVF) es el de determinar la solución de la EDP [6.5] que satisfaga las condiciones [6.7].

Es fácil generalizar la ecuación [6.5] al caso donde el calor puede fluir en más de una dirección.

Por ejemplo, si tenemos conducción de calor en tres direcciones la ecuación es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.8)$$

donde κ tiene el mismo significado que antes, y la ecuación se denomina **ecuación de conducción de calor tridimensional**, siendo la temperatura u tal que $u = u(x, y, z, t)$.

Si u por alguna razón, por ejemplo simetría, es $u = u(x, y, t)$ entonces se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6.9)$$

y se llama **ecuación de conducción de calor bidimensional**. La ecuación [6.8] se puede escribir en términos del operador Laplaciano como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 u. \quad (6.10)$$

Y si u no depende del tiempo, u se llama **temperatura de estado estacionario**, y se tiene que

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (6.11)$$

que es la **ecuación de Laplace**.

Nota

De lo anterior es fácilmente deducible, o por lo menos nos invita a pensar, que la conducción de calor es debida al movimiento aleatorio de las partículas de materia tales como átomos y moléculas; cuanto mayor sea la velocidad mayor será la temperatura. El flujo de calor desde posiciones de alta o baja temperatura es debida a la dispersión o difusión de tales partículas desde lugares donde su concentración o densidad es alta a lugares donde es baja.

Estos problemas son comunes en Química y Biología. Por ejemplo, en Biología se puede tener la difusión de drogas desde la corriente sanguínea a células u órganos. La misma ecuación derivada antes para la conducción de calor se puede aplicar para la difusión. La única diferencia esencial es que u denota la densidad o concentración de las partículas que se mueven. La interpretación de difusión de la conducción de calor ha sido sugerida anteriormente cuando nos referimos a κ como la **difusividad**. ▲

6.3. Problema de Cauchy para la conductibilidad térmica

Consideremos la ecuación de conductibilidad térmica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (6.12)$$

donde $a^2 = \kappa$, para $f(x, t) = 0$ se tiene la ecuación homogénea, es decir, las fuentes están ausentes.

El Problema de Cauchy se plantea de la siguiente manera

Hallar la función $u(x, t)$ que satisfaga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (6.13)$$

y las C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (6.14)$$

El sentido físico del problema consiste en determinar la temperatura de una varilla homogénea ilimitada en cualquier $t > 0$ según su temperatura conocida $\varphi(x)$ en el instante

$t = 0$. Se considera que la superficie lateral de la varilla está termoaislada de tal manera que a través de ella el calor no se evacúa.

La expresión

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} d\lambda, \quad t > 0 \quad (6.15)$$

nos da la solución del problema inicial de Cauchy, y se llama **Integral de Poisson**.

La expresión [6.15] conseguida (consultar cualquier manual especializado de EDP) nos lleva a afirmar que se puede mostrar que para una función continua y acotada cualquiera $\varphi(x)$ la función $u(x, t)$ determinada por la fórmula [6.15] tiene derivadas de cualquier orden respecto a x y t , cuando $t > 0$, y satisface la ecuación [6.13] siendo $t > 0$ y x cualquiera.

En efecto, veamos que la expresión [6.15] satisface la condición inicial

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Hagamos $\frac{x-\lambda}{2a\sqrt{t}} = \mu \Rightarrow \lambda = x - 2a\sqrt{t}\mu \Rightarrow d\lambda = -2a\sqrt{t}d\mu$.

Por lo tanto

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2a\sqrt{t}\mu) e^{-\mu^2} d\mu$$

de donde para $t \rightarrow 0^+$ se obtendrá

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\mu^2} d\mu = \varphi(x)$$

ya que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \sqrt{\pi}$.

Nota

En la clase de las funciones acotadas

$$\mathcal{C}_{u(x,t)} = \{u(x, t) / |u(x, t)| < M, x \in (-\infty, +\infty), t > 0\}$$

la solución del problema de Cauchy planteado es única y depende continuamente de los datos iniciales.

6.4. Propagación del calor en una varilla finita

6.4.1. Planteamiento del problema

Si la varilla tiene longitud finita L y ocupa el segmento $0 \leq x \leq L$ del eje OX , entonces para plantear el problema de propagación del calor en tal varilla, además de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (6.16)$$

y la C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (6.17)$$

hace falta fijar también el régimen de temperaturas en los extremos de la varilla, o sea, en $x = 0$, $x = L$, es decir, plantear las condiciones de frontera. Las condiciones de frontera pueden ser diferentes en función del régimen de temperaturas en los extremos de la varilla. Se examinan tres tipos principales de las condiciones de frontera.

A.- En los extremos de la varilla se fija la temperatura

$$u(0, t) = \mu_1(t); \quad u(L, t) = \mu_2(t)$$

donde $\mu_1(t), \mu_2(t)$ son funciones planteadas para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$, en el cual se examina el proceso.

B.- En los extremos de la varilla se fijan los valores de la derivada

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \beta_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = \beta_2(t).$$

Estas condiciones surgen, si se da la magnitud del flujo calorífico Q que circula a través de la sección de tope de la varilla. Por ejemplo, si para $x = L$ se da la magnitud $Q(L, t)$, entonces

$$Q(L, t) = -K \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L}$$

de donde $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = \beta_2(t)$, y $\beta_2(t) = -\frac{Q(L, t)}{K}$. Si $\beta_1(t)$ ó $\beta_2(t)$ son idénticamente nulos, entonces se dice que el extremo correspondiente de la varilla está térmicamente aislado.

C.- En los extremos de la varilla vienen dadas las relaciones lineales entre la función y su derivada

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda[u(0, t) - \theta(t)]; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = -\lambda[u(L, t) - \theta(t)]$$

donde $\theta(t)$ es conocida y representa la *función temperatura del medio ambiente*, y λ es el *coeficiente de intercambio térmico*. Esta condición de frontera corresponde al intercambio térmico, según la ley de Newton, en la superficie del cuerpo con el medio ambiente, cuya temperatura es $\theta(t)$.

Aprovechándose de dos expresiones para el flujo calorífico que circula a través de la sección $x = L$

$$Q = h(u - \theta), \quad Q = -K \frac{\partial u}{\partial x}$$

obtenemos el enunciado de la tercera condición de frontera en forma de

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = -\lambda[u(L, t) - \theta(t)], \quad \lambda = \frac{h}{K}$$

Para la sección $x = 0$ de la varilla la tercera condición de frontera tiene la forma de

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda[u(0, t) - \theta(t)]$$

puesto que para el flujo calorífico $-K \frac{\partial u}{\partial \mu}$ para $x = 0$ tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

(normal exterior a la varilla en el extremo $x = 0$ que tiene la dirección opuesta respecto al eje OX).

Nota

Las tareas limitadas o enumeradas anteriormente en los tres casos no agotan ni mucho menos las posibilidades de los problemas de contorno por la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Así, en diferentes extremos de la varilla pueden plantearse condiciones de diferentes tipos. ▲

6.4.2. Problema mixto para la ecuación de conductibilidad térmica

El problema que se plantea es el problema del caso **A** anterior:

Hallar la solución $u(x, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{6.18}$$

en la región $0 < x < L$, $u(x, t) \in \mathcal{C}^2\{0 < x < L, t > 0\}$ que satisface la C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (6.19)$$

y las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u(x, t)|_{x=L} = \mu_2(t), \quad t > 0. \quad (6.20)$$

Consideremos que $u(x, t)$ es continua en la región cerrada $D = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ de

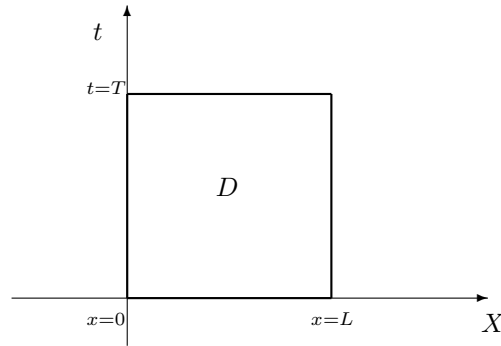


Figura 6.3:

la figura [6.3] para lo cual es necesario que las funciones $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ sean continuas y que se cumplan las condiciones de concordancia $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(L) = \mu_2(0)$.

Nota

De la misma manera que para las ecuaciones de tipo hiperbólico, la función $u(x, t)$ se busca sólo para $0 < x < L$ y $t > 0$, pero no cuando $t = 0$ y no cuando $x = 0$, $x = L$, donde los valores de $u(x, t)$ se plantean de antemano por las C.I. y C.F. ▲

Teorema 6.1 (Principio del valor máximo) Si $u(x, t) \in \mathcal{C}(D)$ satisface la ecuación de conductibilidad térmica $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en la región $D = \{0 < x < L, 0 < t \leq T\}$, entonces los valores máximo y mínimo de $u(x, t)$ se obtienen o bien en el momento inicial del tiempo $t = 0$, o bien en los puntos de frontera $x = 0$ ó $x = L$.

La interpretación física de este teorema es evidente. Si la temperatura de un cuerpo en los puntos de frontera o en el momento inicial no supera cierto valor M , entonces en el interior del cuerpo (en ausencia de fuentes $f(x, t)$) no puede generarse la temperatura superior a M .

Teorema 6.2 *La solución del problema*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (6.21)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (6.22)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u(x, t)|_{x=L} = \mu_2(t), \quad t \geq 0 \quad (6.23)$$

en el rectángulo $D = \{0 < x < L, 0 \leq t \leq T\}$ es única y depende continuamente de las condiciones iniciales y de frontera.

6.5. Método de Fourier para la conductibilidad térmica

Resolvamos el primer problema mixto para la ecuación de conductibilidad térmica; o sea hallemos la solución $u(x, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (6.24)$$

que satisface la C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (6.25)$$

y las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u(x, t)|_{x=L} = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (6.26)$$

6.5.1. Solución de la ecuación homogénea

Calculemos la solución de la ecuación homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.27)$$

que satisface la C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (6.28)$$

y las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (6.29)$$

a) Busquemos las soluciones no triviales de la ecuación [6.27] que satisfacen las condiciones de frontera [6.29] en la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (6.30)$$

sustituyendo $u(x, t)$ en forma de [6.30] en la ecuación [6.27], obtendremos

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) \Rightarrow$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow \quad (6.31)$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (6.32)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (6.33)$$

Para obtener las soluciones no triviales $u(x, t)$ de la forma [6.30], que satisfagan las condiciones de frontera [6.29], hace falta hallar las soluciones no triviales de la ecuación [6.33] que satisfagan las C.F.

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (6.34)$$

De tal modo para determinar la función $X(x)$ llegamos al problema de valores propios:

Hallar aquellos valores del parámetro λ , para los cuales existen las soluciones no triviales del problema

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

Este problema ya se ha estudiado con anterioridad, con

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

existen las soluciones no triviales

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{L}\right)x,$$

del problema [6.33]-[6.34]. Cuando $\lambda = \lambda_n$, la solución general de la ecuación [6.32] tiene la forma

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \quad (a_n \equiv \text{ctes. arbitrarias})$$

Las funciones

$$u_n(x, t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right)x, \quad n = 1, 2, \dots$$

satisfacen la ecuación [6.27] y las C.F. [6.29].

b) Construyamos la serie formal

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \quad (6.35)$$

Si se requiere que la función $u(x, t)$ de [6.35] satisfaga la C.I. $u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x)$, obtendremos

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) x. \quad (6.36)$$

La serie [6.36] representa el desarrollo de la función dada $\varphi(x)$ en la serie de Fourier respecto a los senos en el intervalo $(0, L)$. Los coeficientes a_n del desarrollo se determinan por las fórmulas ya conocidas

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx, \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (6.37)$$

Supongamos que $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2[0, L]$ y que además $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, entonces la serie [6.36] con los coeficientes a_n determinados por [6.37], convergerá a la función $\varphi(x)$ absoluta y uniformemente. Puesto que para $t \geq 0$, $0 < e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} \leq 1$ entonces la serie [6.35] para $t \geq 0$ también converge absoluta y uniformemente. Por eso la función $u(x, t)$, o sea, la suma de la serie [6.35], es continua en la región $0 < x < L$, $t > 0$ y satisface las C.I. y C.F.

- c) Nos queda por demostrar que la función $u(x, t)$ satisface la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en la región $0 < x < L$, $t > 0$. Para esto es suficiente demostrar que las series obtenidas a partir de [6.35] mediante derivación término a término respecto a t una vez y respecto a x dos veces, también convergen absoluta y uniformemente, cuando $0 < x < L$, $t > 0$. Pero esto se deduce de ser

$$0 < \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} < e^{-(\frac{n\pi a}{L})^2 t} < 1$$

si n es suficientemente grande y $t > 0$.

La unicidad de la solución del problema mixto planteado [6.27]-[6.29] y la dependencia continua entre la solución y $\varphi(x)$ está asegurada. Por lo tanto el problema [6.27] está planteado correctamente para $t > 0$. Al contrario, para $t < 0$, este problema no es correcto.

Notas

- a) La ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es asimétrica respecto al tiempo t , mientras que la ecuación ondulatoria $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ si es simétrica respecto del tiempo.

- b) La ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ describe **procesos irreversibles**. Podemos pronosticar cuál será el valor dado de u dentro del tiempo t , pero no podemos decir con certeza cuál fue u el tiempo t antes. Esta diferencia entre la fase futura y la fase pasada es típica para la ecuación parabólica y no tiene lugar, por ejemplo, cuando se trata de la ecuación ondulatoria. En el caso de la última es fácil ver tanto el desarrollo pasado, como el futuro del proceso. ▲

6.5.2. Solución de la ecuación no homogénea

Calculemos la solución de la ecuación no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L \quad (6.38)$$

que satisface la C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (6.39)$$

y las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=L} = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.40)$$

Supongamos que $f(x, t)$ es continua, tiene la $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua, y para todo $t > 0$, $f(0, t) = f(L, t) = 0$

- a) Buscamos la solución del problema en la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) \quad (6.41)$$

donde $v(x, t)$ la determinamos como solución del problema

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (6.42)$$

$$v(x, t)|_{t=0} = 0 \quad (6.43)$$

$$v(x, t)|_{x=0} = v(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (6.44)$$

y $w(x, t)$ como solución del problema

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6.45)$$

$$w(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (6.46)$$

$$w(x, t)|_{x=0} = w(x, t)|_{x=L} = 0 \quad (6.47)$$

El problema [6.45]-[6.47] se ha examinado en el problema anterior.

b) Busquemos la solución del problema [6.42]-[6.44] en la forma de la serie

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) x \quad (6.48)$$

según las funciones propias $\left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) x \right\}$ del problema de contorno

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ X(0) &= X(L) = 0. \end{aligned}$$

Introduciendo $v(x, t)$ en forma de [6.48] en la ecuación [6.42], obtendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} T_n(t) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) x = f(x, t). \quad (6.49)$$

Desarrollamos la función $f(x, t)$ en la serie de Fourier respecto a los senos

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) x. \quad (6.50)$$

donde

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi, t) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) \xi d\xi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.51)$$

Comparando los desarrollos [6.49] y [6.50] de la forma $f(x, t)$ en la serie de Fourier, obtendremos

$$T_n'(t) + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} T_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.52)$$

Aprovechándose de la condición inicial para $v(x, t)$,

$$v(x, 0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) x, \quad x \in [0, L]$$

resulta que $T_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Las soluciones de las ecuaciones [6.52] para las condiciones iniciales anteriores tienen la forma

$$T_n(t) = \int_0^L f_n(\alpha) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 (t-\alpha)} d\alpha, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Introduciendo las expresiones que hemos hallado para $T_n(t)$ en la serie [6.48], obtendremos la solución $v(x, t)$ del problema [6.42]-[6.44]

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L f_n(\alpha) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 (t-\alpha)} d\alpha \right] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \right) x. \quad (6.53)$$

En definitiva $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$ será la solución del problema mixto inicial [6.38]-[6.40].

6.5.3. Solución del problema con C.F. no homogéneas

Sea el problema siguiente en la región $\{0 < x < L, t > 0\}$, busquemos la solución $u(x, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (6.54)$$

que satisface la C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x) \quad (6.55)$$

y las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u(x, t)|_{x=L} = \mu_2(t) \quad (6.56)$$

El método de Fourier no es aplicable directamente a causa de la heterogeneidad de las condiciones [6.56].

Para su resolución, hacemos $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ donde $w(x, t) = \mu_1(t) + [\mu_2(t) - \mu_1(t)] \frac{x}{L}$. La solución del problema [6.54]-[6.56] se reduce a la solución del problema anterior, para $v(x, t)$.

6.6. Ejercicios propuestos

- 6.1** Supongamos una varilla homogénea infinita. Demostrar que si la temperatura inicial es $\varphi(x) = u_0 e^{-\sigma^2 x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, ($u_0 > 0$, $\sigma > 0$ constantes) en un momento cualquiera $t > 0$, la temperatura es

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + 4a^2\sigma^2 t}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{1 + 4a^2\sigma^2 t}}$$

- 6.2** Los extremos de una varilla de longitud π se mantienen a temperatura nula. La temperatura inicial se determina por la fórmula $u(x, 0) = 2 \sin 3x$. Determinar la temperatura de la varilla en un instante cualquiera $t > 0$.
- 6.3** Los extremos de una varilla de longitud L se mantienen a temperatura nula. La temperatura inicial de la varilla se determina por la fórmula $u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{L} - 5 \sin \frac{2\pi x}{L}$. Determinar la temperatura de la varilla en un instante cualquiera $t > 0$.
- 6.4** Estudiar el ejemplo 1 de los ejercicios resueltos cuando los extremos $x = 0$, $x = 100$ están aislados en vez de estar mantenidos a 0°C .
- 6.5** Una barra metálica de 100 cm de longitud tiene sus extremos $x = 0$, $x = 100$ mantenidos a 0°C . Inicialmente, la mitad derecha de la barra está a 0°C , mientras que la otra mitad está a

80°C. Asumiendo un coeficiente de difusividad de 0.2 unidades c.g.s. y un entorno aislado, encontrar la temperatura en cualquier posición de la barra en cualquier tiempo.

Soluciones a los ejercicios propuestos

$$6.2 \quad u(x, t) = 2e^{-9a^2t} \sin 3x$$

$$6.3 \quad u(x, t) = 3e^{-\frac{a^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{\pi x}{L} - 5e^{-\frac{4a^2\pi^2}{L^2}t} \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

$$6.4 \quad u(x, t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{40}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) e^{-16,10^{-6}n^2\pi^2t} \cos \frac{n\pi x}{100}$$

$$6.5 \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{160}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) e^{-0,2\frac{n^2\pi^2}{100^2}t} \sin \frac{n\pi x}{100}.$$

6.7. Ejercicios resueltos

- 6.1 Una barra metálica de 100 cm de longitud tiene sus extremos $x = 0$, $x = 100$ mantenidos a 0°C. Inicialmente, la mitad de la barra está a 60°C, mientras que la otra mitad está a 40°C. Asumiendo un coeficiente de difusividad de 0.16 unidades c.g.s. y un entorno aislado, encontrar la temperatura en cualquier posición de la barra en cualquier tiempo.

Solución.-

La ecuación de conducción del calor es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.57)$$

siendo $u = u(x, t)$ es la temperatura en el lugar x^o al tiempo t .

Las C.F. son

$$u(0, t) = 0, \quad u(100, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 60, & 0 < x < 50 \\ 40, & 50 < x < 100 \end{cases} \quad (6.58)$$

Asumiendo una solución $u = X.T$ en [6.57] se encuentra

$$XT' = 0,16X''T \Rightarrow \frac{T'}{0,16T} = \frac{X''}{X}$$

Haciendo iguales a una constante la cual, como aportación ya dada en capítulos anteriores, denotamos por $-\lambda^2$ y por tanto

$$T' + 0,16\lambda^2T = 0; \quad X'' + \lambda^2X = 0$$

y así obtenemos la solución

$$u(x, t) = e^{-0,16\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x).$$

Las dos primeras condiciones de [6.58] muestran que $A = 0$, $\lambda = \frac{n\pi}{100}$. Para satisfacer la última condición usamos la superposición de las soluciones para obtener

$$u(x, t) = b_1 e^{-16,10^{-6}\pi^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{100} + b_2 e^{-64,10^{-6}\pi^2 t} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{100} + \dots \quad (6.59)$$

Para $t = 0$ $b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{100} + b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{100} = u(x, 0)$
Así, tenemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{100} \int_0^{100} u(x, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{100} dx \\ &= \frac{2}{100} \int_0^{50} 60 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{100} dx + \frac{2}{100} \int_{50}^{100} 40 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{100} dx \\ &= \frac{120}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right). \end{aligned}$$

Así $b_1 = \frac{200}{\pi}$, $b_2 = \frac{40}{\pi}$, \dots

De aquí se tiene que [6.59] adopta la forma

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} e^{-16,10^{-6}\pi^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{100} + \frac{40}{\pi} e^{-64,10^{-6}\pi^2 t} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{100} + \dots$$

y es la solución única.

6.2 Hallar la solución del problema de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Solución

Aprovechándose de la fórmula de Poisson, obtenemos $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $a = 1$

$$u(x, t) = \frac{2}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda. \quad (6.60)$$

La integral del segundo miembro la resolvemos de la siguiente forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t} + \frac{x\lambda}{2t} - \frac{\lambda^2}{4t}} d\lambda =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(1+2t)}{2t} \left(\lambda - \frac{x}{1+2t}\right)^2} d\lambda. \quad (6.61)$$

Llamando $\frac{\sqrt{1+2t}}{\sqrt{2t}} = \left(\lambda - \frac{x}{1+2t}\right) = \alpha$, la integral del segundo miembro de [6.61] tomará la forma

$$\frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{1+2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}}.$$

(Hemos utilizado la igualdad $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{2\pi}$). Por eso de [6.60] se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4t}} d\lambda = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}$$

Así la solución $u(x, t)$ del problema dado se determina por la expresión

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2(1+2t)}}, \quad t > 0$$

Nota

De la integral de Poisson se deduce que el calor se propaga a lo largo de la varilla instantáneamente. \blacktriangle

- 6.3** Hallar la distribución de temperaturas en una varilla de longitud π , si la temperatura inicial de la varilla $u(x, t)|_{t=0} = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, y en los extremos de la varilla se mantiene la temperatura cero.

Solución

I) Formalmente el problema consiste en resolver el problema mixto

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (6.62)$$

que satisface la C.I.

$$u(x, t)|_{t=0} = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (6.63)$$

y las C.F.

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0 \quad (6.64)$$

II) Apliquemos el método de Fourier, buscando las soluciones no triviales de la ecuación [6.62] que satisfacen las C.F. [6.64] en la forma $u(x, t) = T(t) \cdot X(x)$.

Como ya sabemos, introduciendo $u(x, t)$ en forma de la expresión anterior en la ecuación [6.62] y separando las variables, se obtiene

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

de donde

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0 \quad (6.65)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (6.66)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0 \quad (6.67)$$

Los valores propios del problema [6.66]-[6.67] son $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$, y las funciones propias son $X_n(x) = \sin nx$. Cuando $\lambda = \lambda_n$, la solución general de [6.65] es $T_n(t) = a_n e^{-a^2 n^2 t}$, por lo que

$$u(x, t) = a_n e^{-(na)^2 t} \sin nx.$$

La solución del problema [6.62]-[6.64] está en la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(na)^2 t} \sin nx.$$

Al exigir el comportamiento de la condición inicial $u(x, t)_{t=0} = \sin x$, se obtiene

$$u(x, 0) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

de donde $a_1 = 1$, $a_k = 0$, $k = 2, 3, \dots$.

III) De aquí que la solución del problema sea

$$u(x, t) = e^{-a^2 t} \sin x$$

Capítulo 7

Ecuaciones de tipo elíptico

*"El análisis numérico es una ciencia,
la computación un arte"*

C.E.Fröberg

"La naturaleza tiene horror al vacío"

R. Descartes

7.1. Introducción

La ecuación diferencial en derivadas parciales lineal general de segundo orden con $u = u(x, y)$

$$\begin{aligned} & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \end{aligned} \quad (7.1)$$

en cierta región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es **elíptica** si $B^2 - AC < 0, \forall (x, y) \in \Omega$.

Así por ejemplo

- a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ es **elíptica** $\forall (x, y) \in \Omega$.
- b) $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ es **elíptica** para $x < 0$, **parabólica** para $x = 0$ e **hiperbólica** para $x > 0$.

Estudio análogo realizamos en este tema con los problemas que se plantean al estudiar el potencial eléctrico o gravitacional.

7.2. Problemas que involucran potencial eléctrico o gravitacional

Sea una región \mathcal{M} del espacio \mathbb{R}^3 como la que aparece en la figura [7.1]. La región \mathcal{M} supongamos que representa una distribución continua de cargas eléctricas (o una distribución continua de masa). Sea ρ la densidad de carga (o densidad de masa), es decir, la carga por unidad de volumen (o masa por unidad de volumen).

El potencial eléctrico en P debida a la carga que denominaremos por q en Q (o potencial gravitacional en P debido a la masa m en Q) está definido por $\frac{q}{r} \left(\frac{m}{r} \right)$ siendo $r \equiv d(P, Q)$, $r = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$.

Si dV representa el potencial, eléctrico o gravitacional, debido a la carga (masa) dada por $\rho dX dY dZ$, entonces

$$dV = \frac{\rho dX dY dZ}{r} = \frac{\rho dX dY dZ}{\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}} \quad (7.2)$$

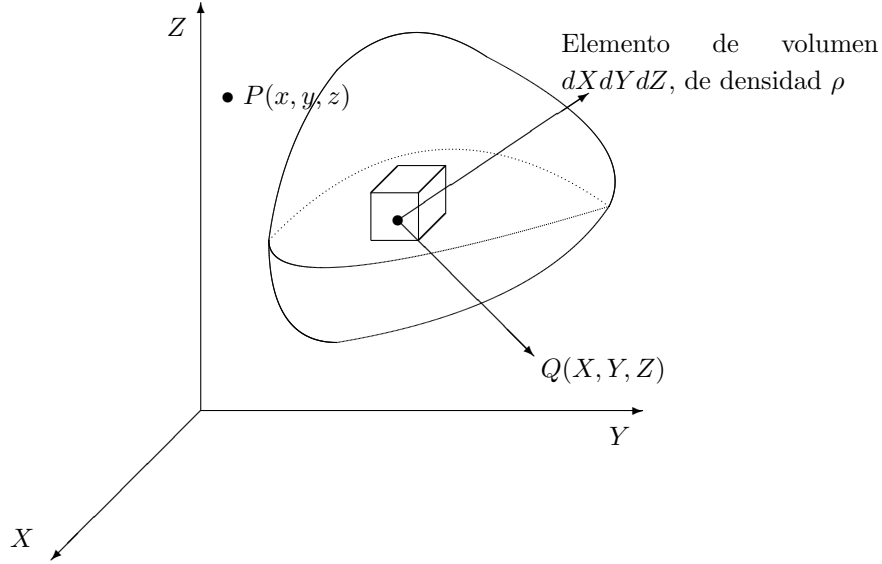


Figura 7.1:

De aquí sigue que el potencial total V debido a la carga o distribución de masa en la región $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ se puede calcular por medio de la integral de [7.2] sobre la región \mathcal{M} para obtener

$$V = \iiint_{\mathcal{M}} \frac{\rho dXdYdZ}{\sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}}. \quad (7.3)$$

Al estudiar problemas de potencial es conveniente encontrar una E.D.P. que sea satisfecha por V . Para obtener tal ecuación diferencial, tomemos las derivadas parciales con respecto a x, y y z , y vemos si se puede eliminar la integral en [7.3]. Al tomar las derivadas segundas con respecto a x, y y z , respectivamente, y luego sumarlas encontramos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (\nabla^2 V = 0) \quad (7.4)$$

que ya sabemos que es la ecuación de Laplace, citada en los temas anteriores.

Nota

- a) El resultado [7.4] no es difícil de establecer. Para ello tomamos ∇^2 en ambos lados de [7.3]. Intercambiando el orden de la derivación e integración, el resultado equivale a mostrar que el Laplaciano de $\frac{1}{r}$ es cero. Pero por diferenciación ordinaria se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{2(x-X)^2 - (y-Y)^2 - (z-Z)^2}{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{2(y-Y)^2 - (y-Y)^2 - (x-X)^2}{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{2(z-Z)^2 - (x-X)^2 - (y-Y)^2}{[(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2]^{\frac{5}{2}}}$$

donde para ahorrar trabajo podemos obtener los dos últimos resultados a partir del primero por simetría.

Es obvio que al sumar se obtiene el cero.

- b) Este resultado de $\nabla^2 V = 0$ se ha obtenido al usar el concepto de potencial eléctrico o gravitacional para llegar a la ecuación de Laplace, sucede que esta ecuación también aparece en otros campos tales como, por ejemplo, en el movimiento de un fluido incompresible de aerodinámica o hidrodinámica. En tal caso V es un **potencial de velocidad**.
- c) Para llegar a la ecuación [7.4], se asumió que el potencial se va a encontrar en puntos no ocupados por materia o carga eléctrica. En el caso de que queramos encontrar el potencial en puntos ocupados por materia o carga, se obtiene que la ecuación está dada por $\nabla^2 V = -4\pi\rho$ que se llama **Ecuación de Poisson**. El caso especial $\rho = 0$ da [7.4]. ▲

7.3. Problemas de valor de frontera que involucran la ecuación de Laplace

Anteriormente se ha deducido que el potencial eléctrico o gravitacional debido a una distribución de carga eléctrica o de masa satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (7.5)$$

que es el caso tridimensional. En el caso bidimensional es

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.6)$$

Cuando se generaliza a más de tres dimensiones se pierde la visualización geométrica. Las ecuaciones [7.5] ó [7.6] se pueden también interpretar como una ecuación de conducción de calor para la determinación de temperatura de estado estacionario, esto es, temperatura independiente del tiempo.

Ya hemos estudiado el problema que involucra la ecuación de Laplace al tratar el caso de la temperatura de estado estacionario en una placa semi-infinita.

Teorema 7.1 *Sea D una región de \mathbb{R}^2 acotada por una curva cerrada \mathcal{C} la cual no se interseca a si misma en ningún punto de la misma. Entonces existe una solución única V de la ecuación de Laplace en la región la cual toma valores prescritos en la frontera \mathcal{C} , esto es, V es alguna función especificada en la curva \mathcal{C} . (El teorema se puede generalizar a regiones acotadas por superficies cerradas).*

Notas

- a) El problema de valor de frontera que busca determinar la solución V descrita en este teorema con frecuencia se refiere como un problema de Dirichlet. Una función que es una solución de la ecuación de Laplace con frecuencia se llama **función armónica** (¡ya la estudiaremos con más detalles más adelante !)
- b) Desde un punto de vista práctico es fácil entender porqué el teorema anterior [7.1] debería ser cierto. Supongamos que la región representa una placa metálica de espesor despreciable cuyas caras están aisladas de modo que el calor no puede entrar ni escapar a través de ellas. Decir específicamente el valor de V en la frontera \mathcal{C} equivale a mantener esta frontera a alguna distribución de temperatura prescrita, y esperaríamos que cada punto de la placa finalmente alcanzara algún equilibrio único o temperatura de estado estacionario y permanecería a esta temperatura siempre que las condiciones se mantengan.
- c) El teorema anterior [7.1] se puede extender a regiones no acotadas por procedimientos de límites apropiados. ▲

7.3.1. Solución del problema de Dirichlet para el círculo empleando el método de Fourier

Obtener la solución de la ecuación de Laplace en una región $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^2$ acotada por una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio la unidad, si V es una función especificada en la frontera \mathcal{C} .

[PASO 1] Aplicando el teorema [7.1] se ve que este es un problema de Dirichlet para el cual existe una solución única.

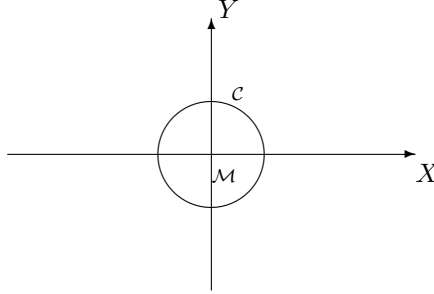


Figura 7.2:

[PASO 2] Formalicemos el problema.

- a) Para simplificar recurramos a las coordenadas polares, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Con esta transformación la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ toma la forma, en función de r y ϕ , descrita por $V(r, \phi)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (7.7)$$

- b) Para completar el problema de valores de frontera necesitamos conocer las condiciones de frontera. Una condición involucra la especificación de V sobre el círculo unitario, $r = 1$, dicho valor en \mathcal{C} está dado por $V(1, \phi)$ con $\phi \in [0, 2\pi]$.

Asumiendo que esta es alguna función prescrita de ϕ , que denominamos $f(\phi)$, tenemos la C.F.

$$V(1, \phi) = f(\phi) \quad (7.8)$$

Además queremos que V esté acotada

$$\forall (r, \phi) \in M \subset \mathbb{R}^2 \quad |V(r, \phi)| < K, \quad K = cte$$

independiente de r y ϕ .

[PASO 3] Encontremos por tanto soluciones de [7.7] que tengan variables separables. Y este es un método ya conocido. Supongamos que $V = R \cdot \Phi$ siendo $R = R(r)$, $\Phi = \Phi(\phi)$.

Sustituyendo $V = R \cdot \Phi$ en [7.7] se obtiene

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = 0. \quad (7.9)$$

Podemos escribir [7.9] de esta forma

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = -\frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (7.10)$$

Obsérvese que el lado izquierdo sí depende sólo de r pero el lado derecho no. Basta con multiplicar [7.10] por r^2 , en ambos lados de la igualdad

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (7.11)$$

Haciendo cada lado de [7.11], como ya sabemos, igual a λ^2 , se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R &= 0 \\ \Phi'' + \lambda^2 \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Tenemos por tanto el problema reducido a resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias [7.12].

La primera ecuación de [7.12], $r^2 R'' + r R' - \lambda^2 R = 0$, es una ecuación de Euler (¡Recuérdese que se transforma en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes haciendo el cambio $r = e^z$, y después aplicamos el método de operadores para resolver la EDO lineal con coeficientes constantes !)

Las soluciones de [7.12] vienen dadas por

$$\begin{cases} R = c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda} \\ \Phi = c_3 \cos \lambda \phi + c_4 \sin \lambda \phi \end{cases} \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

$$\begin{cases} R = c_5 + c_6 \ln r \\ \Phi = c_7 + c_8 \phi \end{cases} \quad \text{si } \lambda = 0$$

Por tanto, en este paso 3 concluimos diciendo que las posibles soluciones de V son

$$\begin{aligned} i) \quad V(r, \phi) &= (c_1 r^\lambda + c_2 r^{-\lambda}) (c_3 \cos \lambda \phi + c_4 \sin \lambda \phi) \\ ii) \quad V(r, \phi) &= (c_5 + c_6 \ln r) (c_7 + c_8 \phi) \end{aligned} \quad (7.13)$$

[PASO 4] Estudiemos con detalle estas soluciones.

- En primer lugar es evidente que una solución debe estar acotada en $r = 0$.
- Tomando $\lambda \geq 0$, debe ser $c_2 = 0$ y $c_6 = 0$ en [7.13]. Además si cambiamos ϕ por $\phi + 2\pi$ en cualquier solución, ésta no debería cambiar puesto que los puntos (r, ϕ) y $(r, \phi + 2\pi)$ son el mismo. Esta periodicidad de ϕ requiere que escojamos $c_8 = 0$ y λ entero, $\lambda = n$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

- Por tanto nos podemos restringir a las soluciones de la forma

$$V(r, \phi) = r^n (A \cos n\phi + B \sin n\phi), \quad A, B \text{ constantes arbitrarias} \quad (7.14)$$

[PASO 5] Para satisfacer la C.F. $V(1, \phi) = f(\phi)$, apliquemos el principio de superposición a [7.14] correspondientes a las soluciones $n = 1, 2, \dots$ para obtener la solución

$$V(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi). \quad (7.15)$$

Imponiendo la C.F. $V(1, \phi) = f(\phi)$

$$\begin{aligned} V(1, \phi) = f(\phi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 1^n (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) \Rightarrow \\ f(\phi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi) \end{aligned} \quad (7.16)$$

con

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi \end{aligned} \quad (7.17)$$

Llegamos por tanto que [7.15] con los coeficientes [7.17] nos da la solución que buscamos

$$\begin{aligned} V(r, \phi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left\{ \left[\pi \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi \right] \cos n\phi + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi \right] \sin n\phi \right\} \end{aligned}$$

$$\text{siendo } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi.$$

Notas

- a) Como en el ejemplo resuelto número 2, podemos dar al resultado del ejercicio número 5 (propuesto) una interpretación de temperatura de estado estacionario. Para dar tal interpretación, consideramos una placa conductora infinita (o prácticamente hablando,

muy grande) representada por el plano \mathbb{R}^2 con sus caras aisladas. Si una parte de esta placa representada por el interior de un círculo unitario se remueve de la placa, y si la distribución de temperatura dada por $f(\phi)$ se aplica a esta frontera, entonces la temperatura de estado estacionario está dada por

$$V(r, \phi) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \left[\frac{\sin \phi}{r} + \frac{\sin 3\phi}{3r^3} + \frac{\sin 5\phi}{5r^5} + \cdots \right]. \quad (7.18)$$

- b) El resultado anterior se puede considerar como un caso especial del teorema [7.1], en el cual \mathcal{C} es la frontera de la región representada por $r > 1$, y así también tenemos en este caso un problema de Dirichlet. \blacktriangle

7.4. Funciones armónicas. Planteamiento de los problemas de contorno

Naturalmente con las limitaciones que impone un curso de estas características en primer año ingeniería veamos, a modo de introducción, como el planteamiento de los problemas de contorno (elíptico) conducen a las funciones armónicas. A las ecuaciones de tipo elíptico conduce al estudio de los procesos estacionarios (o sea que no cambian en el tiempo) de diferente naturaleza física.

Como sabemos la más simple ecuación de tipo elíptico es la ecuación de Laplace

$${}^1\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (7.19)$$

y caracteriza (como hemos comprobado en apartados anteriores) los potenciales gravitacionales y electrostáticos en los puntos del espacio libre; ésta describe el potencial de velocidad del flujo no turbulento de un líquido incompresible y es válida también para la temperatura del medio isótropo homogéneo si el movimiento del calor es estacionario.

Para $n = 2$, $u = u(x, y)$, la ecuación de Laplace tiene la forma

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7.20)$$

Es la base de la teoría de las funciones analíticas de variable compleja (funciones complejas, $w = f(z)$, $w \in \mathbb{C}$ derivables en una cierta región $D \subset \mathbb{R}^2$). Sus soluciones son partes real e imaginaria de las funciones $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analíticas en cierta región D .

¹Hemos utilizado Δ en lugar de ∇^2 , se puede utilizar dicho símbolo conocido como laplaciano. Aunque es más frecuente ∇^2 para evitar confusiones con el incremento de una función

En el caso de que se tenga $u = (x)$ se tiene

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (7.21)$$

cuyas soluciones son funciones $u(x) = C_1 x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Definición 7.1 (Función armónica) La función $u = u(x, y, z)$ se llama armónica en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ en la región Ω .

Supongamos que la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ está acotada por la superficie \mathcal{S} Fig.[7.3].

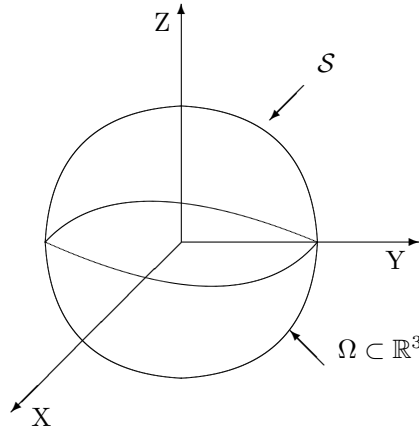


Figura 7.3:

Para la ecuación de Laplace es típico el siguiente problema

Hallar la función $u(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \subset \Omega$, armónica en Ω y que satisface en \mathcal{S} la condición de frontera que puede tomarse en una de las siguientes formas

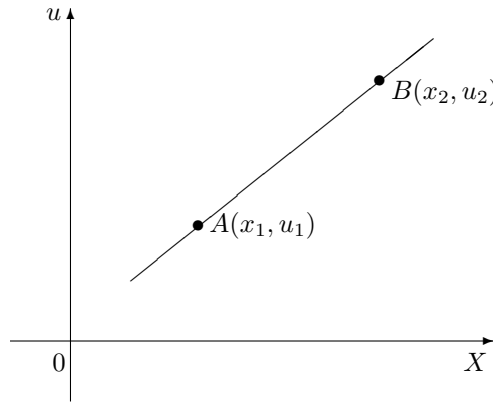
- $u(x, y, z)|_{\mathcal{S}} = f_1(P)$, $P \in \mathcal{S}$ es el primer problema de contorno o problema de Dirichlet.
- $\left. \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial \eta} \right|_{\mathcal{S}} = f_2(P)$, $P \in \mathcal{S}$ es el segundo problema de contorno o problema de Neumann.
- $\left. \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial \eta} + hu(x, y, z) \right|_{\mathcal{S}} = f_3(P)$, $P \in \mathcal{S}$ es el tercer problema de contorno.

Aquí f_1, f_2, f_3, h son funciones dadas y $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ es la derivada según la dirección normal exterior a la superficie \mathcal{S} .

Notas

El sentido geométrico del problema de Dirichlet para la ecuación unidimensional de Laplace es trivial. Las funciones armónicas unidimensionales $u(x) = C_1x + C_2$ son líneas rectas y el problema de Dirichlet se reduce al siguiente

"Por dos puntos $A(x_1, u_1), B(x_2, u_2)$ hay que trazar una recta"



▲

Figura 7.4:

7.4.1. Ecuación de Poisson

Otro representante de las ecuaciones de tipo elíptico es

$$\nabla^2 u = g(x, y, z) \quad (7.22)$$

que corresponde al estado de equilibrio originado por una fuerza exterior con densidad proporcional a $g(x, y, z)$.

Se trata de un ejemplo más. Examinemos una ecuación ondulatoria

$$\nabla^2 u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (7.23)$$

Busquemos la solución de la ecuación [7.23] de la forma

$$u(x, y, z, t) = e^{i\omega t} v(x, y, z) \quad (7.24)$$

Introduciendo la función $u(x, y, z, t)$ anterior en la ecuación [7.23] tendremos

$$e^{i\omega t} \Delta v + \frac{\omega^2}{a^2} v e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow \Delta v + k^2 v = 0$$

donde $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$. De esta manera para la función $v(x, y, z)$ hemos obtenido la ecuación de tipo elíptico $\Delta v + k^2 v = 0$ que se llama **Ecuación de Helmholtz**.

7.5. Soluciones fundamentales de la ecuación de Laplace

7.5.1. Ejemplos más usuales

Las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas se usan más que otras. El operador de Laplace en las coordenadas

a) Cartesianas, se determina por la fórmula, ya conocida,

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

b) Cilíndricas, análogamente

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

c) Esféricas. (Véase ejercicio propuesto n° 4)

7.5.2. Soluciones con simetría esférica o cilíndrica

Gran interés representan las soluciones de la ecuación de Laplace que poseen simetría esférica o cilíndrica, es decir, que dependen sólo de una variable r .

I Aprovechándonos de las coordenadas esféricas, hallamos que la solución $u = u(r)$, que posee la simetría esférica, se determina de una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0.$$

Integrando esta ecuación, hallamos

$$u = \frac{C_1}{r} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes}$$

y si hacemos $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, se obtiene la función $u_0(r) = \frac{1}{r}$ que se llama **solución fundamental** de la ecuación de Laplace en el espacio.

La función $u_0 = \frac{1}{r}$ satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en todos los puntos, a excepción del punto $r = 0$, donde $u_0 \rightarrow \infty$. Si examinamos el campo de la carga puntual \mathbf{e} situada en el origen de coordenadas, el potencial de este campo será igual a $u(r) = \frac{\mathbf{e}}{r}$.

II Utilizando las coordenadas cilíndricas, hallamos que la solución $u = u(r)$, que tiene simetría cilíndrica o circular (en el caso de dos variables independientes) se determina a partir de la EDO

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0$$

de donde integrando resulta $u = C_1 \ln r + C_2$. Tomando $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ se tiene $u_0(r) = \ln \left(\frac{1}{r} \right)$.

La función $u_0(r)$ se llama solución fundamental de la ecuación de Laplace en el plano. Esta función satisface la ecuación de Laplace en todos los puntos a excepción del punto $r = 0$ donde $u = \ln \left(\frac{1}{r} \right)$ se hace infinito.

7.6. Ejercicios propuestos

7.1 Mostrar que una solución a la ecuación de Laplace bidimensional está dada por $V = \ln r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.2 Encontrar una interpretación física al ejercicio resuelto 2.

7.3 Demostrar que con la transformación a coordenadas polares $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$ la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 V = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0.$$

Idem para con las coordenadas cilíndricas

$x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$,

$$\nabla^2 V = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

- 7.4** Comprobar que con la transformación a coordenadas esféricas $x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi$, $y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$, $z = r \cos \theta$, la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 V = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

- 7.5** Obtener la expresión equivalente para encontrar el potencial por fuera del círculo unitario $r = 1$, del ejercicio resuelto número 2.

- 7.6** Encontrar el potencial a) Dentro y b) Fuera del círculo unitario, $r = 1$, si el potencial sobre el círculo está dado por

$$f(\phi) = \begin{cases} V_0 & 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \\ -V_0 & \frac{\pi}{2} < \phi < \pi \\ 0 & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

- 7.7** Hallar la función armónica en el interior del círculo de radio r_o con centro en el origen de coordenadas y tal que $f(\phi)|_{r=r_o} = 3 + 5 \cos \phi$.

- 7.8** Hallar la función armónica en el interior de un círculo de radio r_o con centro en el origen de coordenadas y tal que, $f(\phi)|_{r=r_o} = 2 + 3 \operatorname{sen} \phi$.

- 7.9** Idem para $f(\phi) = \operatorname{sen}^2 \phi$.

- 7.10** Hallar la función armónica, en el interior del círculo de radio r_o con centro en el origen de coordenadas y tal que

a) $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_o} = A \cos \phi$, A constante.

b) $\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_o} = 2 \operatorname{sen}^2 \phi$.

Soluciones a los ejercicios propuestos

- 7.1** Basta probar que $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.

7.6 a) $V(r, \phi) = \frac{V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\frac{2 \operatorname{sen}(n \frac{\pi}{2})}{n} \cos n \phi + \frac{1 - 2 \cos(n \frac{\pi}{2}) + \cos n \pi}{n} \operatorname{sen} n \pi \right]$.

b) $V(r, \phi) = \frac{V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left[\frac{2 \operatorname{sen}(n \frac{\pi}{2})}{n} \cos n \phi + \frac{1 - 2 \cos(n \frac{\pi}{2}) + \cos n \pi}{n} \operatorname{sen} n \pi \right]$.

7.7 El problema consiste en solucionar el problema interior de Dirichlet, $\Delta u = 0$, $0 \leq r < r_0$, con las C.F. $f(\phi)]_{r=r_0} = 3 + 5 \cos \phi$. La solución buscada es $u(r, \phi) = 3 + \frac{5}{r_0} r \cos \phi$ ó $u(x, y) = 3 + \frac{5}{r_0} x$.

7.8 $u(r, \phi) = 2 + \frac{3}{r_0} \sin \phi$.

7.9 $u(r, \phi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \cos 2\phi$.

7.10 a) $u(r, \phi) = A_0 + Ar \cos \phi$, A_0 constante arbitraria. b) No tiene solución.

7.7. Ejercicios resueltos

7.1 Puesto que $V = \frac{1}{r}$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, es una solución de la ecuación de Laplace en tres dimensiones, esto es, la ecuación [7.4], podríamos pensar que cuando $V = \frac{1}{r}$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, es una solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones, esto es, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$. Mostrar que este hecho no es cierto.

Solución

La ecuación de Laplace es $\nabla^2 V = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{-\sqrt{x^2 + y^2} + x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \\
 &= \frac{-2(x^2 + y^2) + 2x^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)} = \frac{-2y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{-y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \\
 \text{b) } \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{-2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{-\sqrt{x^2 + y^2} + y \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \\
 &= \frac{-2(x^2 + y^2) + 2y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)} = \frac{-2x^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{-x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Por tanto $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{-y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = -(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \neq 0$.

- 7.2** Hallar la solución de la ecuación de Laplace dentro del círculo de radio $r = 1$ que tenga valores dados en la frontera por

$$f(\phi) = \begin{cases} V_0, & 0 < \phi < \pi \\ 0, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

siendo V_0 una constante.

Solución

Sabemos que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi$$

representan los coeficientes de Fourier de la expresión

$$V(r, \phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\phi + b_n \sin n\phi].$$

Veamos los casos siguientes para los coeficientes a_n

Para $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_0 d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 d\phi = \frac{1}{\pi} V_0 |\phi|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} V_0 \pi = V_0 \Rightarrow a_0 = V_0.$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_0 \cos n\phi d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos n\phi d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_0 \cos n\phi d\phi = \\ &= \frac{V_0}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin n\phi \right]_0^{\pi} = \frac{V_0}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin n\pi - \frac{1}{n} 0 \right] = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Análogamente para los coeficientes b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_0 \sin n\phi d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 \sin n\phi d\phi = \frac{V_0(1 - \cos n\pi)}{n\pi}.$$

Por tanto

$$V(r, \phi) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n} \right) r^n \sin n\phi$$

$$V(r, \phi) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \left[r \sin \phi + \frac{r^3}{3} \sin 3\phi + \frac{r^5}{5} \sin 5\phi + \dots \right]$$

$$V(r, \phi) = V_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(r \sin \phi + \frac{r^3}{3} \sin 3\phi + \frac{r^5}{5} \sin 5\phi + \dots \right) \right]$$

Capítulo 8

Técnicas para resolver problemas de Valor de Frontera (I)

*"Los urbanistas hacen canales, los arqueros tiran
flechas, los carpinteros trabajan la madera,
el hombre sabio se modeló a sí mismo"*

Sidharta Gantama

8.1. Introducción

En temas anteriores hemos resuelto algunos tipo de problemas de valor de frontera a través del uso de series de Fourier. En esta sección extendemos las técnicas para trabajar varios problemas que son algo más complicados por la naturaleza de las condiciones de frontera o por las ecuaciones diferenciales parciales que involucran.

Deberíamos enfatizar sobre los métodos que se pueden aplicar a diferentes campos, de modo que, por ejemplo no significa que porque usamos un problema de conducción de calor para ilustrar un procedimiento particular no se pueda también aplicar a algún problema de vibraciones, potencial eléctrico, gravitacional, etc.

Veamos cinco casos particulares para ilustrar lo dicho anteriormente.

8.2. La cuerda vibrante bajo la gravedad

Este caso ya fue estudiado con detalle en los temas 3 y 4, pero se despreciaron los efectos de la gravedad sobre la cuerda.

Veamos ahora como se pueden tener en cuenta tales efectos. Consideremos la misma cuerda del tema 3 y supongamos que está horizontal a lo largo del eje OX con sus extremos fijos como antes en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. También vamos a asumir que a la cuerda se le da alguna forma inicial por ejemplo alzándola y luego soltándola.

Si g es la aceleración debida a la gravedad, la EDP para la cuerda vibrante es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g \quad (8.1)$$

siendo $Y = Y(x, t)$ el desplazamiento del punto x de la cuerda desde la posición de equilibrio (eje OX) en cualquier tiempo t .

Escojamos como C.F.

$$\begin{aligned} Y(0, t) &= 0, & Y(x, 0) &= f(x) \\ Y(L, t) &= 0, & \left. \frac{\partial Y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Si intentamos aplicar el método de separación de variables para $Y = X(x) \cdot T(t)$ en [8.1], es fácil demostrar que el método no se cumple. Y esto se debe a la presencia de g .

¿Como resolvemos el problema para poder aplicar el método de separación de variables, es decir, eliminar g ?

Para ello, hagamos $Y(x, t) = W(x, t) + \Psi(x)$, donde $W(x, t)$ es una variable dependiente y $\Psi(x)$ es una función desconocida de x que debemos hallar para poder eliminar g en [8.1]. Sustituyendo en [8.1] la última igualdad, se obtiene

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a^2 \Psi''(x) - g. \quad (8.3)$$

Eliminamos g si escogemos Ψ en [8.3] de modo que $\Psi''(x) = \frac{g}{a^2}$. De aquí

$$\Psi(x) = \frac{gx^2}{2a^2} + px + q \quad (8.4)$$

siendo p, q constantes arbitrarias.

En tal caso [8.3] llega a ser

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (8.5)$$

Las condiciones de frontera [8.2] en términos de W y Ψ se convierte en

$$\begin{aligned} W(0, t) &= -\Psi(0), & W(x, 0) &= f(x) - \Psi(x) \\ W(L, t) &= -\Psi(L), & \left. \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

La ecuación [8.5] tiene ahora la misma forma como la ecuación de la cuerda vibrante sin la gravedad, la cual por supuesto es separable. El único inconveniente ahora es que las dos primeras condiciones en [8.6] son complicadas por el hecho de que los lados derechos no son cero. Sin embargo, esto no ofrece dificultad porque podemos hacer el lado derecho a través de las selecciones

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi(L) = 0. \quad (8.7)$$

De hecho estas dos selecciones son justo las que necesitamos para determinar las dos constantes p y q en [8.4]. Usando las condiciones [8.7] en [8.4] conducen a

$$q = 0, \quad \frac{gL^2}{2a^2} + pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{gL}{2a^2}, \quad q = 0$$

de modo que

$$\Psi(x) = -\frac{gx(L-x)}{2a^2}. \quad (8.8)$$

8.3. CONDUCCIÓN DE CALOR EN UNA BARRA CON CONDICIONES NO CERO EN LOS EXTREMOS

Nuestras condiciones de frontera [8.6] llegan a ser

$$\begin{aligned} W(0, t) = 0, \quad W(L, t) = 0, \quad W(x, 0) = f(x) - \Psi(x), \\ \left. \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Ahora para resolver el problema recurrimos al problema ya estudiado en capítulos anteriores, sobre los problemas de V.F. que involucran movimiento vibratorio (problema de la cuerda vibrante) excepto que tenemos aquí $W(x, t)$, y $f(x) - \Psi(x)$.

Por tanto la solución es

$$W(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L [f(x) - \Psi(x)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) \quad (8.10)$$

de la cual obtenemos el desplazamiento requerido $Y(x, t)$ usando [8.2]

Nota

Naturalmente podemos obtener [8.10] usando el método de separación de variables y satisfaciendo las C.F. como antes. ▲

8.3. Conducción de calor en una barra con condiciones no cero en los extremos

En el enunciado del problema de Fourier, los extremos de la barra en $x = 0$ y $x = L$ se mantuvieron ambos a 0°C . Desde un punto de vista físico no hay razón de no haber escogido otras dos condiciones, tales como por ejemplo el extremo $x = 0$ mantenido a 20°C y el extremo $x = L$ a 60°C .

El problema de Valor de Frontera revisado en este caso sería

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.11)$$

$$u(0, t) = 20, \quad u(L, t) = 60, \quad u(x, 0) = 100. \quad (8.12)$$

Sabemos que aplicando la separación de variables en la ecuación [8.11] produce la solución

$$u(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \quad (8.13)$$

pero desde el punto de vista matemático no se puede satisfacer aún la primera condición en [8.12] porque no se puede sacar ninguna conclusión a menos que el lado derecho en esta

condición sea cero. Nuestra primera idea podría ser, ya que la temperatura es un concepto relativo, introducir una nueva escala de temperatura en la cual todas las temperaturas se reduzcan a 20°C. Esto ayudaría con la primera condición, pero la segunda condición en [8.12] serviría sólo para no satisfacer nuestro interés por hallar la solución.

Con un razonamiento análogo al tratado en la sección [8.2] podríamos realizar la transformación

$$u(x, t) = W(x, t) + \Psi(x) \quad (8.14)$$

donde hay que calcular $\Psi(x)$ de modo que satisfaga nuestras necesidades. Usando [8.14], el problema de valor de frontera anterior llega a ser

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \kappa \Psi'' \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} W(0, t) &= 20 - \Psi(0); \quad W(x, 0) = 100 - \Psi(x); \\ W(L, t) &= 60 - \Psi(L). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Para que podamos aplicar el método de separación de variables debemos escoger Ψ de modo que

$$\Psi'' = 0 \Rightarrow \Psi = px + q \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (8.18)$$

también sería deseable que los lados derechos de las dos primeras condiciones de [8.16] fueran ambos cero. Esto se conseguiría si eligiéramos Ψ de modo que

$$\Psi(0) = 20, \quad \Psi(L) = 60. \quad (8.19)$$

Afortunadamente, las dos constantes arbitrarias p y q son suficientes para satisfacer las dos condiciones en [8.20]. Usando estas condiciones en [8.17] nos da

$$q = 20; \quad 60 = pL + 20 \Rightarrow p = \frac{40}{L}; \quad q = 0$$

de aquí

$$\Psi(x) = \frac{40}{L}x + 20. \quad (8.20)$$

Aquí podemos llegar a que las condiciones de frontera [8.16] pueden escribirse

$$W(0, t) = 0, \quad W(L, t) = 0, \quad W(x, 0) = 100 - \Psi(x). \quad (8.21)$$

Para el problema de valor de frontera dado por [8.18] y [8.21] usamos el mismo procedimiento como el problema de Fourier. Así de [8.18] encontramos por el método de separación de variables la solución

$$W(x, t) = e^{-\kappa \lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x). \quad (8.22)$$

Las dos primeras condiciones en [8.21] llevan a

$$A = 0, \quad \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

de modo que

$$W(x, t) = B e^{-\kappa \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.23)$$

Para satisfacer la última condición en [8.21] primero usamos el principio de superposición en [8.23] para obtener la solución

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.24)$$

Entonces de la última condición en [8.21] tenemos $100 - \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ de modo que

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [100 - \psi(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (8.25)$$

Usando estos valores de [8.24] nos da $W(x, t)$, y la solución requerida $u(x, t)$ se obtiene entonces de [8.14]

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L [100 - \psi(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] e^{-\kappa \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{40x}{L} + 20. \quad (8.26)$$

Nota

Es interesante encontrar una **interpretación física** a la función Ψ . Esto se logra teniendo en cuenta que cuando transcurre mucho tiempo, esto es, cuando $t \rightarrow \infty$, $W(x, t) \rightarrow 0$, y $u(x, t) \rightarrow \Psi(x)$. Esto significa que $\Psi(x)$ es la **temperatura de estado estacionario**. Esto también es claro desde el punto de vista matemático, puesto que para una temperatura independiente del tiempo t , [8.11] se reduce a [8.17], lo cual conduce a [8.20]. ▲

8.4. La cuerda vibrante con velocidad inicial no cero

En el problema sobre la cuerda vibrante, la pregunta que surge ahora es

¿Como influye en la solución en el caso de que la velocidad inicial no sea cero mientras que las otras condiciones no cambian ?

La E.D.P. para el movimiento de la cuerda vibrante es

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (8.27)$$

y las C.F. son

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(L, t) = 0, \quad Y(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad (8.28)$$

(aparte de la acostumbrada sobre acotamiento).

Para calcular la solución ya sabemos aplicando el método de separación de variables

$$Y(x, t) = X(x) \cdot T(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(A \sin \frac{n\pi at}{L} + B \cos \frac{n\pi at}{L} \right). \quad (8.29)$$

Aplicando la superposición nos conduce a la solución.

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(a_n \sin \frac{n\pi at}{L} + b_n \cos \frac{n\pi at}{L} \right). \quad (8.30)$$

Las dos últimas condiciones de frontera conducen entonces a exigir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (8.31)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.32)$$

Estas son dos series en la forma *seno* de Fourier para determinar a_n y b_n , respectivamente.

Encontramos

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$\frac{n\pi a}{L} a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

De aquí

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x L \left[\left(\frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{n\pi at}{L} + \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \cos \frac{n\pi at}{L} \right]. \quad (8.33)$$

8.5. Ejercicios propuestos

- 8.1** Una barra de metal de 50cm de longitud cuya superficie está aislada tiene una temperatura de 60°C. En $t = 0$ se aplica a un extremo una temperatura de 30°C y al otro una temperatura de 80°C manteniéndose ambas. Hallar la temperatura de la barra en cualquier tiempo si $\kappa = 0,15$ unidades *c.g.s.*
- 8.2** Una lámina de material de difusividad κ está acotada por los planos $x = 0, x = L$. Si las caras planas se mantienen a temperaturas U_1 y U_2 respectivamente, mientras que la temperatura inicial es U_0 , encontrar la temperatura en cualquier punto en cualquier tiempo posterior.
- 8.3** Una cuerda tiene sus extremos fijos en $x = 0, x = L$. Supongamos que inicialmente la cuerda tiene una forma parabólica y que cada punto se mueve en la misma dirección con la misma velocidad. Encontrar el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda en cualquier tiempo.
- 8.4** Resolver el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 1 + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1; t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x$$

- 8.5** Resolver el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$Y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial Y(L, t)}{\partial x} = K, \quad Y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial Y(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

- 8.6** Resolver el problema de valor de frontera

$$\frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial t^2} = 1 + \frac{\partial^2 Y(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$$

$$Y(0, t) = 1, \quad \frac{\partial Y(\frac{\pi}{2}; t)}{\partial x} = -\frac{\pi}{2}, \quad Y(x, 0) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\pi x, \quad \frac{\partial Y(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Soluciones a los ejercicios propuestos

8.1 $u(x, t) = 30 + x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{60 + 40 \cos n\pi}{n\pi} \right) e^{-0,15(\frac{n\pi}{50})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{50}.$

$$\mathbf{8.2} \quad u(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad \text{con}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [U_0 - U_1 + (U_2 - U_0) \cos n\pi].$$

$$\mathbf{8.3} \quad Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{L} + b_n \cos \frac{n\pi at}{L} \right) \quad \text{con}$$

$$a_n = \frac{2v_0 L}{n^2 \pi^2 a} (1 - \cos n\pi), \quad v_0 = \text{velocidad, y } b_n = \frac{4\alpha L^3}{n^3 \pi^3} (1 - \cos n\pi), \quad \alpha = \text{cte.}$$

$$\mathbf{8.4} \quad u(x, t) = \frac{1}{2}x(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^3 \pi^3} \right] e^{-n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x.$$

$$\mathbf{8.5} \quad Y(x, t) = Kx + \frac{2KL}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{L} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{L} x.$$

$$\mathbf{8.6} \quad Y(x, t) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)\pi \cos n\pi + 2}{(2n-1)^3} \right] \operatorname{sen}(2n-1)x \cos(2n-1)t.$$

Capítulo 9

Técnicas para resolver problemas de Valor de Frontera(II)

*"Uno mismo es el amor a la técnica
y el amor a la humanidad"*
Hipócrates

9.1. Vibraciones de una piel de tambor: Series dobles de Fourier

En el capítulo 3 describimos un problema relacionado con las vibraciones de una piel de tambor cuadrada. La ecuación de estas vibraciones está dada por

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (9.1)$$

siendo z el desplazamiento de un punto (x, y) a partir del plano, el cual es la posición de

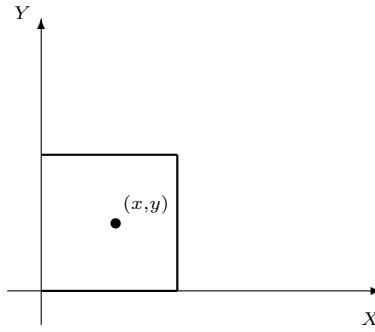


Figura 9.1:

equilibrio, en cualquier tiempo t y $a^2 = \frac{\tau}{\rho}$, siendo τ la tensión por unidad de longitud a lo largo de cualquier curva en la piel de tambor que se asume constante y ρ la densidad (masa por unidad de área).

Consideremos que la piel de tambor está situada como en la figura [9.1], y que las aristas están fijas y son de longitud unitaria. Asumimos también que la piel de tambor se pone a vibrar al darle alguna forma inicial, como se describe por ejemplo, con la ecuación de la superficie $z = f(x, y)$, y luego se suelta.

I Formalicemos desde el punto de vista matemático el problema. La EDP para el movimiento viene dada por la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \quad (9.2)$$

Que las aristas estén fijas implica tener las cuatro condiciones de frontera

$$z(0, y, t) = 0; \quad z(1, y, t) = 0; \quad z(x, 0, t) = 0; \quad z(x, 1, t) = 0. \quad (9.3)$$

El hecho de que a la piel de tambor se le de una forma inicial especificada conduce a

$$z(x, y, 0) = f(x, y). \quad (9.4)$$

Finalmente, el hecho de que pueda soltar la piel de tambor después de haberle dado esta forma nos dice que

$$\frac{\partial z(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0. \quad (9.5)$$

Naturalmente partimos del hecho de que z debe estar acotada.

II A continuación demos solución a la ecuación [9.2]. Partamos de la condición de que [9.2] admite una solución de la forma

$$Z(x, y, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t).$$

Sustituyendo en [9.2] se obtiene

$$XYT'' = a^2(X''YT + XY''T) \Rightarrow \frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \quad (9.6)$$

Nota

Se ha obtenido [9.6] dividiendo por a^2XYT . ▲

En [9.6] el lado izquierdo depende sólo de t ; y el lado derecho de x e y . Se tiene, como ya sabemos por capítulos anteriores, que cada lado debe ser una constante, la cual denotamos por $-\lambda^2$, esto es

$$\frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2; \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2. \quad (9.7)$$

En [9.7], escribámosla así

$$\frac{X''}{X} = -\left(\frac{Y''}{Y} + \lambda^2\right) \quad (9.8)$$

que a su vez cada lado debe ser una constante, denotémosla por $-\mu^2$. Entonces

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2; \quad \frac{Y''}{Y} = -(\lambda^2 - \mu^2). \quad (9.9)$$

Si hacemos $\lambda^2 - \mu^2 = \beta^2 \Rightarrow \lambda^2 = \mu^2 + \beta^2$.

De las ecuaciones [9.9] y de la primera ecuación de [9.7] tenemos

$$\begin{aligned} X'' + \mu^2 X &= 0 \\ Y'' + \beta^2 Y &= 0 \\ T'' + a^2(\mu^2 + \beta^2)T &= 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Resolviendo las EDO's correspondientes se obtiene

$$\begin{aligned} X &= c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x \\ Y &= c_3 \cos \beta y + c_4 \sin \beta y \\ T &= c_5 \cos a\sqrt{\mu^2 + \beta^2}t + c_6 \sin a\sqrt{\mu^2 + \beta^2}t. \end{aligned} \quad (9.11)$$

De la primera y tercera condiciones en [9.3] encontramos $c_1 = c_3 = 0$, de ahí que

$$Z = c_2 c_4 \sin \mu x \sin \beta y \left(c_5 \cos a\sqrt{\mu^2 + \beta^2}t + c_6 \sin a\sqrt{\mu^2 + \beta^2}t \right). \quad (9.12)$$

De la segunda y cuarta condiciones en [9.3] encontramos $\mu = m\pi$
 $\beta = n\pi$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$, de modo que

$$Z = c_2 c_4 \sin m\pi x \sin n\pi y \left(c_5 \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\pi t + c_6 \sin a\sqrt{m^2 + n^2}\pi t \right).$$

La condición [9.5] conduce a $c_6 = 0$ de modo que

$$Z = B \sin m\pi x \sin n\pi y \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\pi t, \quad B = c_2 c_4 c_5. \quad (9.13)$$

Para satisfacer [9.4] tendremos que usar el principio de superposición, esto es, la sumatoria de soluciones de la forma [9.13] sobre todos los valores enteros de m y n . Esto conduce a la solución de serie doble

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\pi t \quad (9.14)$$

donde hemos reemplazado B en [9.13] por B_{mn} puesto que cada solución puede tener un coeficiente diferente. Esto satisfará la condición [9.13] si

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y. \quad (9.15)$$

Podemos escribir [9.15]

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin n\pi y \right) \sin m\pi x \quad (9.16)$$

esto es

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\pi x, \quad (9.17)$$

con

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin n\pi y. \quad (9.18)$$

Puesto que [9.17] representa una serie de Fourier en x se tiene por los métodos ya conocidos

$$b_m = \frac{2}{1} \int_0^1 f(x, y) \operatorname{sen} m\pi x dx. \quad (9.19)$$

Puesto que [9.18] representa una serie de Fourier en y , se tiene de forma similar

$$B_{mn} = \frac{2}{1} \int_0^1 b_m \operatorname{sen} n\pi y dy. \quad (9.20)$$

Sustituyendo [9.19] en [9.20] encontramos

$$B_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y dx dy. \quad (9.21)$$

Reemplazando [9.21] en [9.14] se obtiene la solución deseada

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y dx dy \right] \cdot \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\pi t. \quad (9.22)$$

Nota

Por razones obvias la serie [9.15] con coeficientes en [9.21] se llama una serie *seno doble* de Fourier correspondiente a $f(x, y)$. Podríamos haber obtenido en forma similar series *coseno doble* de Fourier o series dobles de Fourier involucrando *senos* y *cosenos*. Naturalmente la generalización a dimensiones superiores conducen a series triples, cuádruples, etc. de Fourier.

III Es muy interesante estudiar, aunque brevemente, el posible significado físico de varios términos en la serie

$$Z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi y \cos a\sqrt{m^2 + n^2}\pi t.$$

Para ello, asumimos que $f(x, y)$ es tal que todos los términos de la serie anterior son cero excepto en aquel para la cual $m = 3$, $n = 3$. Entonces este término es

$$B_{33} \operatorname{sen} 3\pi x \operatorname{sen} 3\pi y \cos a\sqrt{3^2 + 3^2}\pi t. \quad (9.23)$$

Como en el caso de la cuerda, llamamos esto un **nodo de vibración**. Se notará que, para todos los valores de tiempo t , el desplazamiento [9.23] será cero a lo largo de las líneas $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ como se indica en la siguiente figura. Si pudiéramos

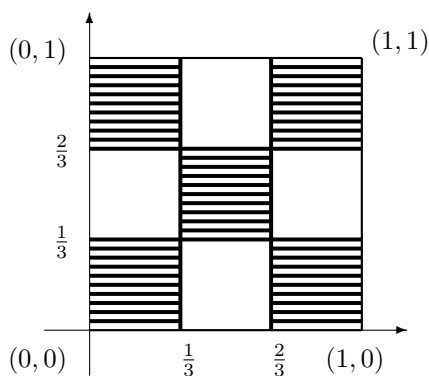


Figura 9.2:

tomar una película de la vibración que ocurre en un intervalo de tiempo, observaríamos que los segmentos de piel de un tambor dentro de los pequeños cuadrados acotados por estas líneas nodales vibran cada uno, algunas veces en una dirección y luego en la otra. Por ejemplo, en la figura [9.2] hemos indicado este movimiento usando sombra para indicar el movimiento en una dirección y sin sombra para el movimiento en la dirección opuesta donde los movimientos ocurren simultáneamente.

El hecho de que dos cuadrados adyacentes estén vibrando en direcciones opuestas en un tiempo dado a menudo se indica diciendo que las vibraciones de estas regiones están **fuera de fase** entre sí.

Nota

Lo que se ha mostrado en la figura [9.2] es, por supuesto, una fotografía en un tiempo particular. En otro tiempo la fotografía podría cambiar de modo que las direcciones de vibración se invierten. ▲

Al observar el factor tiempo en [9.23] es evidente que existe una periodicidad en las fotografías, esto es, si encontramos la piel de tambor en un estado particular de movimiento en un instante de tiempo, entonces estará exactamente en el mismo estado en algún tiempo mínimo más tarde llamado período.

La frecuencia correspondiente, la cual es el recíproco de este período, está dada para el caso [9.23] por

$$f_{33} = \frac{\pi a \sqrt{3^2 + 3^2}}{2\pi} = \frac{3}{2} \sqrt{2} a = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2\tau}{\rho}}.$$

IV De una manera similar, cada término de [9.14] correspondiente a un par de valores m y n representa un modo particular de vibración teniendo una frecuencia característica dada por

$$f_{mn} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (9.24)$$

Por brevedad podemos hablar del modo (m, n) o la **frecuencia del modo** (m, n) .

9.2. Modos diferentes con la misma frecuencia

Puede suceder que existan dos o más modos diferentes con la misma frecuencia. Sean dos términos solamente del desarrollo [9.14] correspondientes a los modos $(1, 2)$, $(2, 1)$. Encontramos que la suma de estos términos es

$$(B_{12} \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y) \cos \sqrt{5}\pi a t. \quad (9.25)$$

Se ve de inmediato que para todas las selecciones de los coeficientes B_{12} y B_{21} la frecuencia está dada por

$$f_{12} = \frac{\sqrt{5}\pi a}{2\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5\tau}{\rho}}.$$

Si en particular $B_{12} = B_{21}$, entonces el desplazamiento para este caso está dado por

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= B_{12} \cos \sqrt{5}\pi a t (\sin \pi x \sin 2\pi y + \sin 2\pi x \sin \pi y); \\ Y(x, t) &= B_{12} \cos \sqrt{5}\pi a t \{ (\sin \pi x (2 \sin \pi y \cos \pi x) + \\ &\quad + (2 \sin \pi x \cos \pi x) \sin \pi y) \}; \\ Y(x, t) &= 2B_{12} \cos \sqrt{5}\pi a t \sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi x + \cos \pi y). \end{aligned}$$

De lo cual se puede concluir que las líneas nodales son $x \pm y = 1$ (para lo cual $\cos \pi x + \cos \pi y = 0$), como se indica por las líneas sombreadas en la figura [9.3].

También se indican en la figura sombreadas y sin sombrear las direcciones de las vibraciones de las regiones triangulares acotadas por estas líneas en un instante particular del tiempo, invirtiéndose éstas a medio período más tarde.

Algunas veces nos referimos a dos o más modos diferentes que tienen la misma frecuencia como **modos degenerados**. Como hemos visto anteriormente, todos los modos correspondientes a los casos $m \neq n$ son degenerados. La serie [9.14] muestra que el desplazamiento generado en una piel de tambor se puede considerar como una suma o superposición de desplazamientos correspondientes a los varios modos.

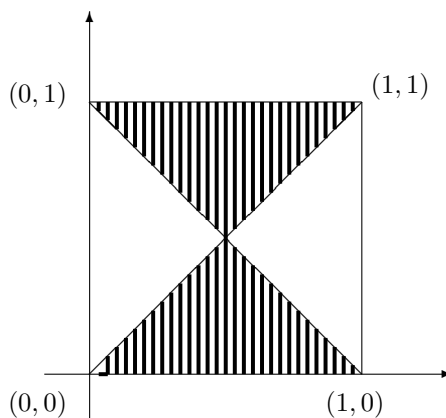


Figura 9.3:

¿Una piel de tambor cuadrada puede crear un tono musical -¡ en analogía con la cuerda vibrante!- ?

Recordemos que en el caso de la cuerda vibrante tenemos una frecuencia más pequeña o fundamental, y que hemos definido música como el estado donde todas las frecuencias más altas o armónicas son múltiplos enteros de esta frecuencia fundamental. Si usamos la misma definición aquí, resulta que tenemos una mezcla de música y ruido (esto es, no música), puesto que hay frecuencias que son enteros múltiplos de una frecuencia fundamental como también frecuencias que no lo son. Una consideración importante a este respecto son las magnitudes de los coeficientes B_{mn} , los cuales sirven para indicar aquellos modos y correspondientes frecuencias de gran importancia.

9.3. Conducción de calor con radiación

9.3.1. Planteamiento del problema

En el problema de Fourier que involucra una barra de metal de longitud L , las condiciones de frontera en los extremos $x = 0$, $x = L$ consideradas hasta ahora asumen que los extremos se mantienen a ciertas temperaturas o están aislados, o una combinación de éstas. Una posibilidad distinta, pero interesante, que puede surgir es el caso donde uno de los extremos, digamos $x = 0$, mientras que el otro extremo $x = L$ irradia a un medio circundante,

el cual asume que está también a la temperatura 0°C . Podemos asumir que la distribución de temperatura inicial está especificada por $f(x)$.

9.3.2. Formalización matemática

Como en el problema de Fourier, asumimos que la superficie convexa de la barra está aislada de modo que la ecuación de calor está dada como antes por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9.26)$$

La única cuestión que podemos plantearnos en relación a las condiciones de frontera, es saber la formulación matemática de la condición de radiación en el extremo $x = L$. Para obtener la expresión matemática, recordemos primero que el flujo de calor a través del extremo $x = L$ está dado por $-\kappa u_x(L, t)$, donde κ es la conductividad térmica la cual se asume como constante.

Teniendo en cuenta la ley de Newton del tipo de enfriamiento de radiación (esto es, donde el flujo es proporcional a la diferencia entre la temperatura $u(x, t)|_{x=L}$ y la temperatura del medio circundante tomada como cero) obtenemos la condición de frontera requerida.

$$u_x(L, t) = -hu(L, t), \quad h > 0 \quad (9.27)$$

las demas C.F.

$$u(0, t) = 0; \quad u(x, 0) = f(x). \quad (9.28)$$

9.3.3. Solución del problema

Sabemos por el método de separación de variables que

$$u(x, t) = e^{-\kappa\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sen \lambda x). \quad (9.29)$$

Para satisfacer la primera condición de frontera en [9.26], requerimos $A = 0$, de modo que

$$u(x, t) = B e^{-\kappa\lambda^2 t} \sen \lambda x.$$

De la C.F. [9.25] vemos que $B e^{-\kappa\lambda^2 t} \cos \lambda L = -h B e^{-\kappa\lambda^2 t} \sen \lambda L$, esto es $\tan \lambda L = -\frac{\lambda}{h}$.

Para determinar los valores de λ que satisfacen esta última ecuación, escribimos $\alpha = \lambda L$, por tanto

$$\tan \lambda L = \tan \alpha = -\frac{\lambda}{h} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\alpha}{Lh} \quad (9.30)$$

¿Como resolvemos esta ecuación ?

La ecuación [9.30] está expresada en forma trigonométrica, y de la cual hay que obtener los valores de α . Sus raíces se pueden obtener de la intersección de

$$\begin{aligned} y &= \tan \alpha \\ y &= -\frac{\alpha}{hL} \end{aligned} \quad (9.31)$$

que representamos en la figura [9.4]

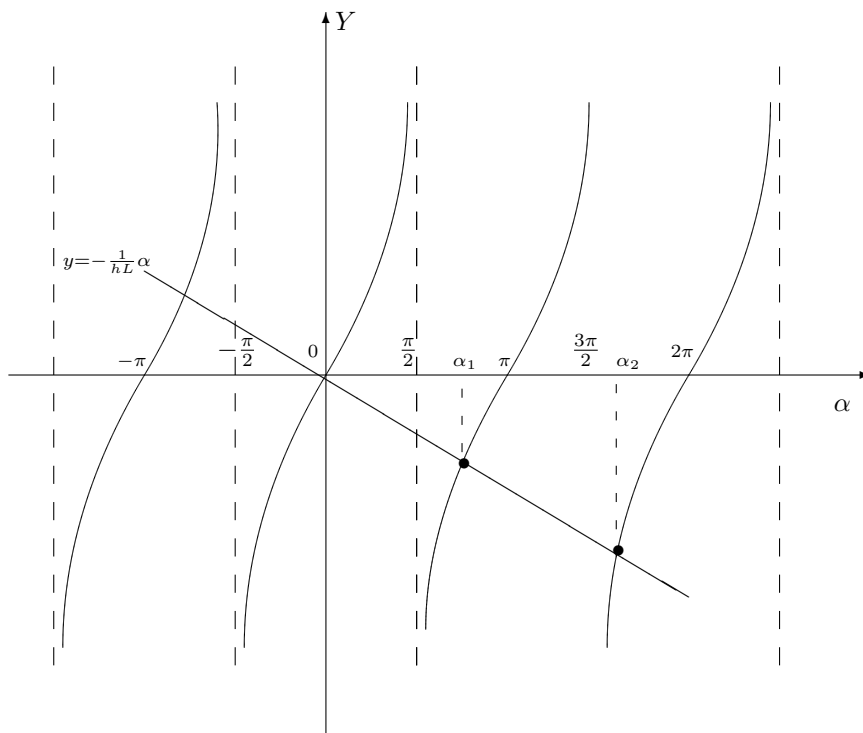


Figura 9.4:

Las raíces α_i obtenidas por la intersección de la recta $y = -\frac{1}{hL}\alpha$ y la función tangente $y = \tan \alpha$ son infinitas (positivas) y por ende hay infinitos valores positivos de λ correspondientes, denotadas por $\lambda_1, \lambda_2 \dots$. De aquí se sigue que existan infinitas soluciones dadas

por

$$u(x, t) = B e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \text{sen } \lambda_n x. \quad (9.32)$$

Para satisfacer la segunda condición de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

superponemos las soluciones [9.32] para obtener

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \text{sen } \lambda_n x. \quad (9.33)$$

La segunda condición nos lleva a requerir

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa \lambda_n^2 0} \text{sen } \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } \lambda_n x \quad (9.34)$$

lo cual como en el problema de Fourier, requiere la expansión de $f(x)$ en una serie de funciones trigonométricas. La serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } \lambda_n x$ se asemeja mucho a la serie *seno* de Fourier excepto por el hecho de que los valores de λ_n no están igualmente espaciados -¡ allí los $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$!

El mismo método usado en la serie *seno* de Fourier para hallar los coeficientes también funcionará en este caso si se cumple que

$$\int_0^L \text{sen } \lambda_m x \text{sen } \lambda_n x dx = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m. \quad (9.35)$$

No importa el método que utilicemos. Si multiplicamos ambos lados de [9.34] por $\text{sen } \lambda_m x$, y luego integrando entre $x = 0$ y $x = L$ encontramos

$$\int_0^L f(x) \text{sen } \lambda_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \text{sen } \lambda_m x \text{sen } \lambda_n x dx$$

usando [9.35]

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x) \text{sen } \lambda_n x dx &= b_n \int_0^L (\text{sen } \lambda_n x)(\text{sen } \lambda_n x) dx \Rightarrow \\ b_n &= \frac{\int_0^L f(x) \text{sen } \lambda_n x dx}{\int_0^L (\text{sen } \lambda_n x)^2 dx} \end{aligned} \quad (9.36)$$

el denominador de [9.36] es

$$\int_0^L (\text{sen } \lambda_n x)^2 dx = \frac{Lh + \cos^2 \lambda_n L}{2h} \quad (9.37)$$

de aquí que

$$b_n = \frac{2h}{Lh + \cos^2 \lambda_n L} \int_0^L f(x) \text{sen } \lambda_n x dx. \quad (9.38)$$

Sustituyendo [9.38] en $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \text{sen } \lambda_n x$ se tiene que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2h}{Lh + \cos^2 \lambda_n L} \right) \int_0^L f(x) \text{sen } \lambda_n x dx \cdot e^{-\kappa \lambda_n^2 t} \text{sen } \lambda_n x. \quad (9.39)$$

Capítulo 10

Métodos de Diferencias Finitas (I)

*"Los métodos numéricos de resolución de EDP's funcionan,
aunque con limitaciones. Esto constituye un reto que conlleva
el análisis del error y la legibilidad"*

T.H. Mathews

H.D.Fink

" A la naturaleza se la domina obedeciéndola"

F. Bacon

10.1. Introducción

Ya sabemos por los capítulos anteriores que muchos problemas en ciencia aplicada, física e ingeniería se modelan matemáticamente mediante ecuaciones en derivadas parciales. Comenzamos con este capítulo los métodos de la diferencias finitas que se basan en las fórmulas para aproximar las derivadas primera y segunda de una función.

Recordemos algunas consideraciones teóricas ya tratadas, antes de desarrollar lo que denominaremos la construcción de la ecuación en diferencias.

Comenzamos clasificando -como se hizo en los capítulos 1 y 2 con más detalle- los tres tipos de ecuaciones que investigaremos y resolveremos un problema físico de cada clase.

Una EDP de la forma

$$A\Phi_{xx} + B\Phi_{xy} + C\Phi_{yy} = f(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y)$$

siendo $A, B, C \in \mathbb{R}$, se llama casi-lineal y hay tres tipos

- a) Si $B^2 - 4AC < 0$, se llama EDP Elíptica.
- b) Si $B^2 - 4AC = 0$, se llama EDP Parabólica.
- c) Si $B^2 - 4AC > 0$, se llama EDP Hiperbólica

En este capítulo estudiaremos los métodos en diferencias finitas para las ecuaciones hiperbólicas.

10.2. Ecuación de ondas

Como ejemplo de una EDP hiperbólica ya conocemos por los capítulos 3,4 y 5 la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < b \quad (10.1)$$

con las C.F.

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq b$$

y las C. I.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) &= g(x), \quad 0 < x < L \end{aligned} \quad (10.2)$$

La ecuación de ondas modela el desplazamiento $u(x, t)$ desde su posición de equilibrio de una cuerda elástica vibrante cuyos extremos, de coordenadas $x = 0, x = L$ están fijos.

En los capítulos 3, 4 y 5 hemos determinado la solución exacta de la ecuación de ondas por medio de las series de Fourier, aquí vamos a usar este problema como prototipo de la situación que se da en las EDP's hiperbólicas a través de los métodos en diferencias.

10.3. Construcción de la ecuación en diferencias

Hagamos una partición del rectángulo

$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq b\}$$

en una malla que consta de $n - 1$ por $m - 1$ rectángulos de lados $\Delta x = h, \Delta t = k$, como se muestra en la figura [Fig. 10.1]

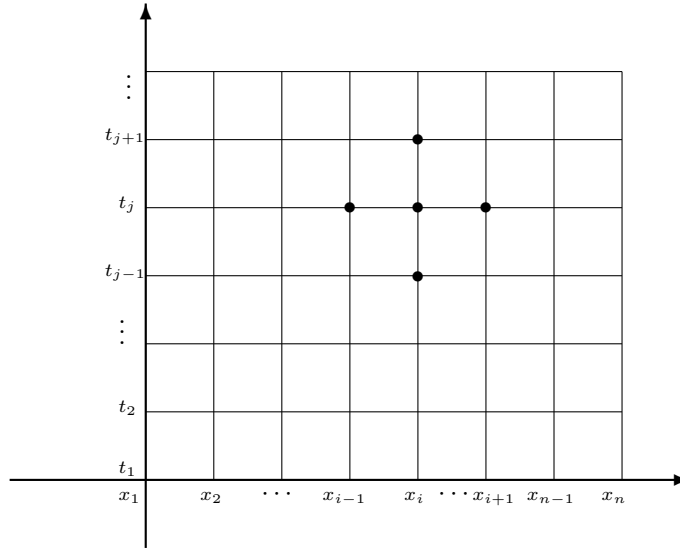


Figura 10.1:

Empezamos por la fila de abajo donde $t = t_1 = 0$, ya sabemos que la solución es $f(x_i) = u(x_i, t_1)$. Ahora vamos a usar una ecuación en diferencias para calcular en las filas sucesivas, las aproximaciones a la solución exacta, que en los puntos de la malla son $u(x_i, t_j)$. O sea, para cada $j = 2, 3, 4, \dots$, calcularemos $\{u_{i,j} \simeq u(x_i, t_j), i = 1, 2, 3, \dots\}$.

La fórmulas de diferencias centradas para aproximar $u_{tt}(x, t)$ y $u_{xx}(x, t)$

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + o(k^2) \quad (10.3)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + o(h^2). \quad (10.4)$$

El espacio entre los puntos de la malla es uniforme en todas las filas $x_{i+1} = x_i + h$; $x_{i-1} = x_i - h$; y también es uniforme en todas las columnas $t_{j+1} = t_j + k$ ($t_{j-1} = t_j - k$).

Teniendo esto en cuenta, obtenemos la ecuación en diferencias eliminando los términos de orden $o(k^2)$ y $o(h^2)$ de las relaciones [10.3] y [10.4], usando la aproximación $u_{i,j}$ en vez de $u(x_i, t_j)$ en dichas relaciones [10.3] y [10.4] y sustituyendo en [10.1] nos da

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (10.5)$$

que es la ecuación en diferencias que usaremos como aproximación a la ecuación diferencial [10.1].

Si escribimos [10.5] así

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{k^2 a^2}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}),$$

y llamando $r = \frac{ka}{h}$ se tiene

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = r^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \quad (10.6)$$

reordenando los términos de [10.6], podemos determinar las aproximaciones a la solución en los puntos de la fila $(j+1)$ -ésima de la malla, supuesto que conocemos las aproximaciones a la solución en los puntos de las filas anteriores j -ésima y $(j-1)$ -ésima

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1. \quad (10.7)$$

para mayor comprensión didáctica mostramos en la Fig. [10.2] la posición en la malla de los cuatro valores conocidos que aparecen en el miembro derecho de la expresión [10.7], los que se usan para determinar la aproximación $u_{i,j+1}$.

Nota

Hay que tener cuidado al usar la fórmula [10.7] si el error cometido en una etapa de los cálculos no se amplifica en las etapas posteriores, entonces se dice que el método es estable. Para garantizar la estabilidad de la fórmula [10.7] es necesario que

$$r = \frac{ak}{h} \leq 1.$$

Hay otros esquemas, llamados métodos implícitos, que son de desarrollo más complejo pero no imponen restricciones sobre r para que se tenga estabilidad. ▲

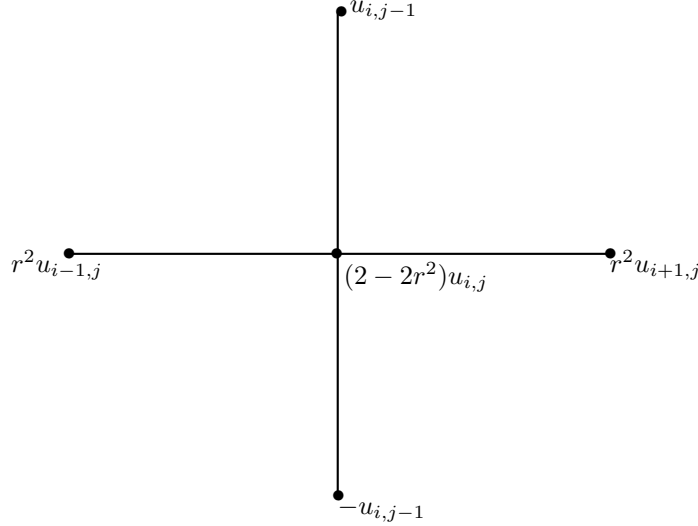


Figura 10.2: Esquema de la Ecuación en Diferencias (EED) para la ecuación de ondas

10.4. Valores iniciales

Si queremos usar la fórmula [10.7] para calcular las aproximaciones en los puntos de la tercera fila de la malla, es necesario disponer de las aproximaciones en los puntos de las filas primera y segunda.

Los valores de la 1ª fila, vienen dados por la función f . Sin embargo, los valores de la 2ª fila no se suelen proporcionar, por ello se usa la función $g(x)$, dada en el contorno para conseguir las aproximaciones en los puntos de esta 2ª fila. Fijemos $x = x_i$ en la frontera interior de \mathcal{R} y apliquemos la fórmula de Taylor de orden uno para desarrollar $u(x, t)$ alrededor de $(x_i, 0)$; para el valor $u(x_i, k)$ se verifica

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + o(k^2) \quad (10.8)$$

como $u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i$; $u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i$. Usemos estos valores en [10.8] para obtener la fórmula con que conseguimos las aproximaciones numéricas en los puntos de la

segunda fila (recordemos que $t_2 = k$)

$$u_{i,2} = f_i + kg_i, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1. \quad (10.9)$$

Normalmente $u_{i,2} \neq u(x_i, t_2)$, así que el error introducido al usar la fórmula [10.9] se propagará a toda la malla sin atenuarse cuando usemos el esquema dado por la fórmula [10.7]. Por consiguiente, para evitar que los valores $u_{i,2}$ calculados por [10.9] introduzcan en el proceso un error de tratamiento apreciable, es aconsejable que se tome un tamaño de peso k muy pequeño.

A menudo se da el caso de que la función $f(x)$ dada en el contorno es dos veces derivable en el intervalo, con lo cual tenemos que $u_{xx}(x, 0) = f''(x)$, igualdad que nos permite usar la fórmula de Taylor de orden $n = 2$ para obtener una aproximación mejorada a los valores de la segunda fila de la malla. Para hacer esto, volvemos a la ecuación de ondas y, usando la relación entre las derivadas parciales segundas, obtenemos

$$u_{tt}(x_i, 0) = a^2 u_{xx}(x_i, 0) = a^2 f''(x) = a^2 \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + o(h^2). \quad (10.10)$$

Recordando que la fórmula de Taylor de orden dos es

$$u(x, k) = u(x, 0) + u_t(x, 0)k + \frac{u_{tt}(x, 0)k^2}{2} + o(k^3). \quad (10.11)$$

Aplicando [10.11] en el punto $x = x_i$, junto a las expresiones [10.9] y [10.10] se obtiene

$$u(x_i, k) = f_i + kg_i + \frac{a^2 k^2}{2h^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + o(h^2)o(k^2) + o(k^3) \quad (10.12)$$

ya que $r = \frac{ak}{h}$, podemos simplificar [10.12] y obtener la siguiente fórmula de diferencias que nos proporciona aproximaciones sucesivas numéricas mejoradas a los elementos de la segunda fila

$$u_{i,2} = (1 - r^2)f_i + kg_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} - f_{i-1}), \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1. \quad (10.13)$$

10.5. Cuando se conocen dos filas exactamente

10.5.1. La solución de D' Alembert

El matemático francés Jean Le Rond D' Alembert (1717-1783) descubrió que

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \quad (10.14)$$

es la solución de la ecuación de ondas [10.1] en el intervalo $[0, L]$, si ambas funciones θ_1 y θ_2 son dos veces derivables. Ya en el apartado [3.3.2] del capítulo 3 pudimos comprobar que [10.14] satisface [10.1].

La solución particular que verifica las C.I. y las C.C.

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

viene dada por las extensiones impares y periódicas de período $2L$ definidas para $x \in [0, L]$ por $\theta_2(x) = \theta_1(x) = \frac{f(x)}{2}$, como se demostró en el apartado citado anteriormente.

10.5.2. Cuando se conocen dos filas exactamente

La precisión de las aproximaciones numéricas mediante la fórmula [10.7] depende del error de truncamiento de las fórmulas que se utilizan para convertir la EDP en una ecuación en diferencias. Aunque es raro que se conozcan los valores de la solución exacta en la segunda fila, si esto fuera posible entonces, tomando como incremento $k = ah$ en el eje de la variable t , el proceso generaría la relación exacta en todos los demás puntos de la malla.

Teorema 10.1 *Supongamos que los valores en las dos primeras filas de la malla $u_{i,1} = u(x_i, 0)$, $u_{i,2} = u(x_i, k)$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, son los que toma la solución exacta de la ecuación de ondas [10.1]. Si el tamaño del paso en el eje de la variable t es $k = \frac{h}{a}$, entonces $r = 1$ y la fórmula [10.7] se transforma en*

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (10.15)$$

Además, en este caso, las soluciones obtenidas mediante el método de las diferencias finitas [10.15] son exactas (¡ no tenemos en cuenta los errores de redondeo introducidos por el ordenador !) en todos los nodos de la malla.

Nota

El teorema [10.1], anterior no da la garantía de que las soluciones numéricas sean exactas cuando los cálculos se realizan usando las fórmulas

$$u_{i,2} = f_i + kg_i, \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1 \quad (10.16)$$

$$u_{i,2} = (1 - r^2)f_i + kg_i + \frac{r^2}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}), \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1 \quad (10.17)$$

como aproximaciones de los $u_{i,2}$ de la segunda fila. De hecho, se introduce un error de truncamiento si $u_{i,2} \neq u(x_i, k)$ para algún i , $1 \leq i \leq n$.

Por esta razón, es conveniente hacer los cálculos de las mejores aproximaciones posibles a los valores de la segunda fila usando las aproximaciones de Taylor de segundo orden dadas por la expresión [10.17]. \blacktriangle

10.5.3. Primer ejemplo

Utilizar el método de las diferencias finitas (MDF) para resolver la ecuación de ondas de una cuerda vibrante

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0,5$$

con las C.F.

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 0,5$$

y las C.I.

$$u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Solución

Elegimos convenientemente $h = 0,1; k = 0,05$. Puesto que $a = 2$, entonces $r = \frac{ak}{h} = \frac{2 \cdot 0,05}{0,1} = 1$. Como $g(x) = 0$, y $r = 1$ la fórmula [10.17] para calcular los valores de la segunda fila queda

$$u_{i,2} = \frac{f_{i-1} + f_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 9. \quad (10.18)$$

Sustituyendo $r = 1$ en la ecuación [10.17], obtenemos la ecuación en diferencias, ya simplificada

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (10.19)$$

Usando las fórmulas dadas en [10.18] y, sucesivamente, en [10.19] generamos las aproximaciones a los valores $u(x, t)$ que se recogen en la tabla [10.1] para $0 < x_i < 1$, y $0 \leq t_j \leq 0,5$.

Los valores numéricos dados en la tabla [10.1] coinciden en más de seis cifras decimales con los correspondientes a la solución exacta

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(2\pi t) + \sin(2\pi x) \cos(4\pi t)$$

t_j	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\cdots	x_{10}
0.00	0.896802	1.538842					-0.27876
0.05	0.769421	1.328438					-0.18163
0.10	0.431636	0.769421					.
0.15	0.000000	0.051599					.
\vdots	\vdots	\vdots					\vdots
0.50	0.278768	0.363271					-0.89680

Cuadro 10.1: Solución de la ecuación de ondas $4u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$ del ejemplo 1

10.5.4. Segundo ejemplo

Usar el método de las diferencias finitas para resolver la ecuación de ondas de una cuerda vibrante

$$u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0,5$$

con las C.F.

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

y las C.I.

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ 1,5 - 1,5x & \frac{3}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Solución

Elegimos convenientemente $h = 0,1$, $k = 0,05$. Puesto que $a = 2$ entonces tenemos que $r = 1$. Usando las fórmulas ya citadas en le ejercicio anterior generamos las aproximaciones a los valores $u(x, t)$ que se recogen en la tabla [10.2] para $0 \leq x_i \leq 1$, $0 \leq t_j \leq 0,5$.

10.6. Ejercicios propuestos

10.1 Demostrar por sustitución directa que $u(x, t) = \sin(n\pi x) \cos(2n\pi t)$ es una solución de la ecuación de ondas $u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t)$ para cada $n = 1, 2, 3, \dots$

10.2 Demostrar por sustitución directa que $u(x, t) = \sin(n\pi x) \cos(an\pi t)$ es una solución de la ecuación de ondas $u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$ para cada $n = 1, 2, 3, \dots$

t_j	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\dots	x_10
0.00	0.100	0.200					0.150
0.05	0.100	0.200					0.150
	\dots	\dots					\dots
\dots	\dots						\dots
\vdots	\vdots	\vdots					\vdots
0.45	-0.150	-0.300					-0.100
0.50	-0.150	-0.300					-0.100

Cuadro 10.2: Solución de la ecuación de ondas $4u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t)$ del ejemplo 2

- 10.3** Supongamos que la posición y velocidad iniciales de la cuerda son $u(x, 0) = f(x)$; $u_t(x, 0) = 0$, respectivamente. Demostrar que la solución de D'Alembert para este caso es

$$u(x, t) = \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2}$$

- 10.4** Usar el método de las diferencias finitas para calcular las tres primeras filas de la solución aproximada de la ecuación de ondas dada, realizando las operaciones a mano o con calculadora

a) $u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t)$, para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,5$ con

las C.F. $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $0 \leq t \leq 0,5$ y

las C.I. $u(x, 0) = f(x) = \sin \pi x$, $0 \leq x \leq 1$

$u_t(x, 0) = g(x) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

Tomar $h = 0,2$, $k = 0,1$.

b) $u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t)$, para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 0,5$ con

las C.F. $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $0 \leq t \leq 0,5$ y

las C.I. $u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{2} & 0 \leq x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{15-15x}{4} & \frac{3}{5} \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Tomar $h = 0,2$, $k = 0,1$.

- 10.5** En la ecuación $u_t(x, t) = 9u_{xx}(x, t)$ ¿Qué relación debe existir entre h y k para que la ecuación en diferencias que se obtenga venga dada por $u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$?

- 10.6** ¿Qué dificultad puede aparecer cuando usemos el MDF para resolver $u_{tt}(x, t) = 4u_{xx}(x, t)$ tomando $k = 0,02$, $h = 0,003$?

Soluciones a los ejercicios propuestos**10.4** a)

t_j	x_2	x_3	x_4	x_5
0.0	0.587785	0.951057	0.951057	0.587785
0.1	0.475528	0.769421	0.769421	0.475528
0.2	0.181636	0.293893	0.293893	0.181636

b)

t_j	x_2	x_3	x_4	x_5
0.0	0.500	1.000	1.500	0.750
0.1	0.500	1.000	0.875	0.800
0.2	0.500	0.375	0.300	0.125

10.5 (Utilizar el teorema [10.1]) $k = \frac{h}{3}$

Capítulo 11

Métodos de Diferencias Finitas (II). Ecuaciones parabólicas

"La formación del estudiante de ingeniería pasa necesariamente por el estudio profundo de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y la implementación de algoritmos numéricos para su resolución "

S. Romero

"¿Quién se atreverá a poner límites al ingenio de los hombres ?

Galilei

11.1. Introducción. La ecuación de calor

Como ejemplo de EDP parabólica consideramos la ecuación del calor unidimensional.

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 < t < b \quad (11.1)$$

con C.I.

$$u(x, 0) = f(x), \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (11.2)$$

y C.F.

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_1(t) = c_1, \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq b \\ u(L, t) &= g_2(t) = c_2, \quad x = L, \quad 0 \leq t \leq b. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Como sabemos la ecuación del calor modela la distribución de temperaturas en un alambre aislado, cuyos extremos se mantienen a temperaturas constantes c_1 y c_2 , a partir de una distribución inicial de temperaturas a lo largo del alambre $f(x)$. Ya sabemos como calcular las soluciones exactas -¡ usando series de Fourier ! -. En este caso utilizaremos esta ecuación para resolverlo numéricamente.

11.2. Construcción de la ecuación en diferencias

Dividamos el rectángulo $\mathcal{R} = \{(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq b\}$ en $n - 1$ por $m - 1$ rectángulos de lados $\Delta x = h$, $\Delta t = k$. Como se muestra en la Figura [11.1]. Empezando en la fila de más abajo, donde $t = t_1 = 0$ y la solución es $u(x_i, t_1) = f(x_i)$, desarrollaremos un método para calcular las aproximaciones a los valores exactos $u(x, t)$ en los puntos de la malla $\{u_{i,j} \approx u(x_i, t_j), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ para $j = 2, 3, \dots, m$.

Las fórmulas en diferencias que usamos para $u_t(x, t)$ y $u_{xx}(x, t)$ son, respectivamente

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + o(k) \quad (11.4)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)}{h^2} + o(h^2). \quad (11.5)$$

Teniendo en cuenta que el tamaño de los rectángulos de la malla es uniforme en cada fila, $x_{i+1} = x_i + h$ ó $x_{i-1} = x_i - h$, y en cada columna, $t_{j+1} = t_j + k$ despreciando los términos $o(k)$, $o(h^2)$, usando la aproximación $u_{i,j}$ en vez de $u(x_i, t_j)$ en las ecuaciones [11.4] y [11.5] y sustituyendo lo que se obtiene en la ecuación del calor [11.1] tendremos

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \quad (11.6)$$

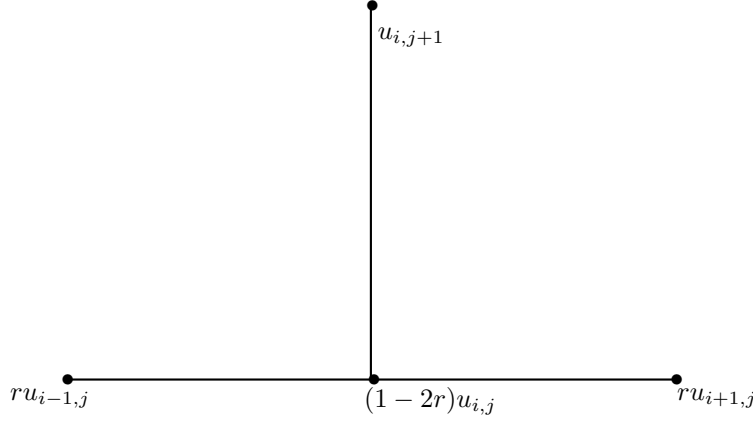


Figura 11.1: Esquema de las diferencias progresivas

que es una aproximación a la relación [11.1]. Por comodidad llamamos $r = \frac{a^2 k}{h^2}$ en [11.6] y reordenamos

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}). \quad (11.7)$$

La ecuación en diferencias [11.7] se emplea para calcular las aproximaciones en la fila $(j + 1)$ -ésima de la malla a partir de las aproximaciones de la fila anterior; hagamos notar que esta fórmula proporciona explícitamente el valor $u_{i,j+1}$ en función de $u_{i-1,j}$, $u_{i,j}$ y $u_{i+1,j}$.

La fórmula [11.7] es muy sencilla y nos invita a usarla rápidamente, sin embargo es importante usar técnicas numéricas estables y la fórmula [11.7] no siempre lo es. La fórmula [11.7] es estable si, y sólo si, $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$. Esto significa que el tamaño de paso k debe cumplir $k \leq \frac{h^2}{2a^2}$. Si esto no se cumple, entonces puede ocurrir que los errores introducidos en la fila $\{u_{i,j}\}$ se amplifiquen en alguna fila posterior $\{u_{i,p}\}$ para algún $p > j$.

11.3. Primer ejemplo

Usemos el método de las diferencias progresivas para resolver la ecuación del calor

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0,20, \quad (11.8)$$

con C.I.

$$u(x, 0) = f(x) = 4x - 4x^2, \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (11.9)$$

y C.F.

$$\begin{aligned} u(0, t) &= g_1(t) = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq 0,20 \\ u(1, t) &= g_2(t) = 0, \quad x = 1, \quad 0 \leq t \leq 0,20. \end{aligned} \quad (11.10)$$

La primera vez usamos tamaños de $\Delta x = h = 0,2$, $\Delta t = k = 0,02$ y $a = 1$ de manera que $r = 0,5$. La malla tendrá $n = 6$ columnas de ancho y $m = 11$ filas de alto. En este caso [11.7] queda así

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}. \quad (11.11)$$

La fórmula [11.1] es estable para $r = 0,5$ y puede ser usada con garantía de éxito para generar aproximaciones razonablemente precisas a $u(x, t)$. En la tabla adjunta se recogen las aproximaciones en las filas sucesivas de la malla.

t	$x_1=0,00$	$x_2=0,20$	$x_3=0,40$	$x_4=0,60$	$x_5=0,80$	$x_6=1,00$
$t_1= 0.00$	0.0000	0.640000	0.960000	0.960000	0.640000	0.000000
$t_2= 0.02$	0.0000	0.480000	0.800000	0.800000	0.480000	0.000000
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$t_{10}= 0.20$	0.0000	0.072812	0.117813	0.117813	0.072812	0.000000

Cuadro 11.1: Solución de la ecuación del calor $u_{xx}(x, t) = u_t(x, t)$ del ejemplo 1

La segunda vez, tomamos como tamaños de paso $\Delta x = h = 0,2$ y $\Delta t = k = \frac{1}{30} \simeq 0,0333333 \Rightarrow r = 0,833333$. En este caso la fórmula [11.7] queda

$$u_{i,j+1} = -0,666665u_{i,j} + 0,8333333(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) \quad (11.12)$$

y la tabla [11.2] nos muestra la inestabilidad de la fórmula [11.12] ya que $r > \frac{1}{2}$, y los errores introducidos en una fila se amplificarán en las filas posteriores. Los valores numéricos que se obtienen, que son aproximaciones a $u(x, t)$ bastante poco precisos para $0 \leq t \leq 0,333333$, se recogen en la citada tabla [11.2]

Nota

La precisión de la EDF [11.7] es de orden $o(k) + o(h^2)$ y, como el término $o(k)$ tiende a cero linealmente, no es sorprendente que k deba tomarse muy pequeño para obtener buenas aproximaciones. Aún así, la necesidad de que el método sea estable **plantea consideraciones adicionales**. Supongamos que las aproximaciones obtenidas en la malla no son suficientemente precisas y que debemos reducir los tamaños de paso $\Delta x = h_0$, $\Delta t = k_0$.

t	$x_1=0,00$	$x_2=0,20$	$x_3=0,40$	$x_4=0,60$	$x_5=0,80$	$x_6=1,0$
$t_1=0.0000$	0.0000	0.640000	0.960000	0.960000	0.640000	0.00000
$t_2=0.03333$	0.0000	0.373333	0.693333	0.693333	0.373333	0.00000
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$t_{10}=0.3333$	0.0000	0.192511	-0.089601	-0.089601	0.192511	0.00000

Cuadro 11.2:

Si tomamos como nuevo tamaño de paso la coordenada x , simplemente $\Delta x = h_1 = \frac{h_0}{2}$, y queremos mantener el mismo valor del cociente r , entonces k_1 , debe cumplir

$$k_1 = \frac{r(h_1)^2}{a^2} = \frac{r(h_0)^2}{4a^2} = \frac{k_0}{4}.$$

En consecuencia: Hay que doblar el número de nodos de la malla en el eje de la variable x y cuadruplicarlo en el eje de la variable t , con lo cual el esfuerzo de ordenador se multiplica por ocho. Este esfuerzo extra, nos obliga a buscar métodos más eficaces que no estén sujetos a restricciones de estabilidad tan exigentes.

11.4. El método de Crank-Nicholson

Este método es un método implícito, no explícito, donde el incremento en el nivel de complejidad de cálculos tendrá como contrapartida la garantía de estabilidad sin condiciones adicionales.

Este esquema implícito, inventado por John Crank y Phyllis Nicholson, se basa en la construcción de una aproximación numérica al valor de la solución de la ecuación del calor [11.1] en $(x, t + \frac{k}{2})$ que es un punto situado entre dos filas de la malla. Concretamente, para $u_t(x, t + \frac{k}{2})$ usamos la aproximación que se obtiene a partir de la fórmula de diferencias centradas

$$u_t \left(x, t + \frac{k}{2} \right) = \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} + o(k^2) \quad (11.13)$$

y para $u_{xx}(x, t + \frac{k}{2})$ usamos como aproximación el valor medio de las aproximaciones a $u_{xx}(x, t)$ y $u_{xx}(x, t + k)$; este valor medio tiene una precisión del orden de $o(h^2)$

$$\begin{aligned} u_{xx} \left(x, t + \frac{k}{2} \right) &= \frac{1}{2h^2} [u(x - h, t + k) - 2u(x, t + k) + u(x + h, t + k) + \\ &+ u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)] + o(h^2). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Análogamente a como lo hicimos para obtener el esquema de diferencias progresivas, sustituimos las expresiones [11.13] y [11.14] en la ecuación del calor [11.1] y despreciamos los términos del error $o(h^2)$ y $o(k^2)$. Entonces, manteniendo la notación $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$, obtenemos la ecuación en diferencias

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2h^2}. \quad (11.15)$$

Volvemos a tomar $r = \frac{a^2 k}{h^2}$ en [11.15] y despejamos los tres valores **aún por calcular** $u_{i-1,j+1}$, $u_{i,j+1}$ y $u_{i+1,j+1}$ escribiéndolos en el miembro de la izquierda de la ecuación. Esta reordenación de los términos de la ecuación [11.15] produce la siguiente ecuación en diferencias implícita

$$-ru_{i-1,j+1} + (2+2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = (2-2r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}), \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (11.16)$$

Los términos del miembro derecho de la ecuación [11.16] son todos conocidos, así que estas ecuaciones forman un sistema lineal tridiagonal $AX = B$.

En la figura [11.2] se muestran los seis puntos que se usan en la fórmula [11.16] de Crank-Nicholson así como el punto intermedio en el que se basan las aproximaciones numéricas.

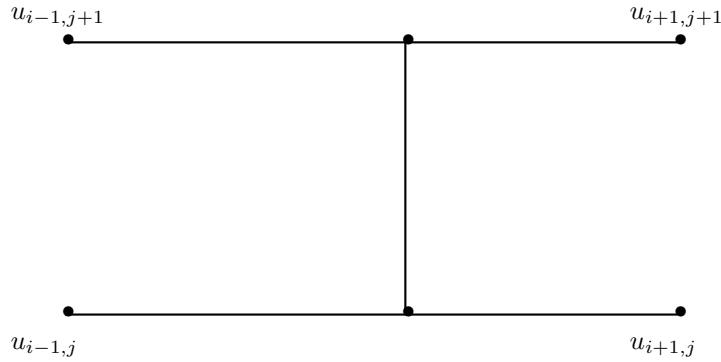


Figura 11.2: Esquema de Crank-Nicholson

Cuando se trabaja con la fórmula [11.16] se suele tomar como cociente $r = 1$. En este caso, el tamaño de paso en el eje de la variable es $\Delta t = k = \frac{h^2}{a^2}$ y las ecuaciones [11.16] se escriben así

$$u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (11.17)$$

En la primera y en la última de estas ecuaciones hay que usar las condiciones de contorno, es decir

$$u_{1,j} = u_{1,j+1} = C_1$$

$$u_{n,j} = u_{n,j+1} = C_2.$$

Las ecuaciones de [11.17] se escriben de forma especialmente atractiva en su forma tridigonal $AX = B$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{i,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \vdots \\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \\ \vdots \\ u_{n-2,j} + 2C_2 \end{pmatrix}.$$

Cuando se utiliza un ordenador para llevar a cabo el método de Crank-Nicholson, el sistema lineal tridigonal $AX = B$ puede resolverse bien por métodos directos, bien de forma iterativa.

11.5. Segundo ejemplo

Usar el método de Crank-Nicholson para resolver la ecuación

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0,1 \quad (11.18)$$

con C.I.

$$u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x), \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (11.19)$$

y C.F.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g_1(t) = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq 0,1 \\ u(1, t) &= g_2(t) = 0, \quad x = 1, \quad 0 \leq t \leq 0,1 \end{aligned} \quad (11.20)$$

Solución

Para mayor simplificación, tomamos como tamaños de paso $\Delta x = h = 0,1, \Delta t = k = 0,01$ de manera que el cociente es $r = 1$. La malla tendrá $n = 11$ columnas de ancho y $m = 11$

filas de alta. En la tabla [11.4] se muestran los resultados obtenidos con el algoritmo para $0 < x_i < 1$, $0 \leq t_j \leq 0,1$.

Las aproximaciones obtenidas con el método de Crank-Nicholson son buenas aproximaciones de los valores exactos

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x) \mathbf{e}^{-\pi^2 t} + \text{sen}(3\pi x) \mathbf{e}^{-9\pi^2 t}$$

que, en la última fila, son

t_{11}	0.115285	0.219204	\cdots	0.115285
----------	----------	----------	----------	----------

Cuadro 11.3:

La tabla de los valores $u(x_i, t_i)$ obtenidos por este método para $t_j = \frac{(j-1)}{100}$

t_j	$x_2 = 0,1$	$x_3 = 0,2$	\cdots	\cdots	$x_{10} = 0,9$
$t_1=0.00$	1.118034	1.538842			1.118034
$t_2=0.01$	0.616905	0.928778			0.610905
\vdots	\vdots	\vdots			\vdots
$t_{11}=0.10$	0.116144	0.220827			0.116144

Cuadro 11.4: Método de Crank-Nicholson para $t_j = \frac{j-1}{100}$

11.6. Ejercicios propuestos

- 11.1** Verificar, sustituyendo, directamente en la ecuación, que, para cada número natural $n = 1, 2, 3, \dots$ la función $u(x, t) = \text{sen}(n\pi x) \mathbf{e}^{-4n^2\pi^2 t}$ es una solución de la ecuación del calor $u_t(x, t) = 4u_{xx}(x, t)$.
- 11.2** Idem con la función $u(x, t) = \text{sen}(n\pi x) \mathbf{e}^{-(an\pi)^2 t}$ es una solución de la ecuación del calor $u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$.
- 11.3** ¿Qué dificultades podrían aparecer si se usa $\Delta t = k = \frac{h^2}{a^2}$ en la fórmula [11.7] ?
- 11.4** Usar el método de las diferencias progresivas para calcular las tres primeras filas de la malla que se construye para la ecuación del calor que se da (!'calcular a mano o con calculadora !)

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0,1$$

con C.I.

$$u(x, 0) = f(x) = \text{sen}(\pi x), \quad t = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

y C.F.

$$u(0, t) = C_1 = 0, \quad x = 0, \quad 0 \leq t \leq 0,1$$

$$u(1, t) = C_2 = 0, \quad x = 1, \quad 0 \leq t \leq 0,1$$

Tomar $h = 0,2$, $k = 0,02$ y $r = 0,5$.

11.5 Considerar la solución exacta

$$u(x, t) = \text{sen}(\pi x)\mathbf{e}^{-\pi^2 t} + \text{sen}(3\pi x)\mathbf{e}^{-3\pi^2 t}.$$

Fijando x , calcular el valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

11.6 Probar que $u(x, t) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{e}^{-(j\pi)^2} \text{sen}(j\pi x)$ es una solución de la ecuación

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

que cumple las condiciones de contorno $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ y valores iniciales $u(x, 0) = \sum_{j=1}^n a_j \text{sen}(j\pi x)$.

Soluciones a los ejercicios propuestos

11.4

$x_1 = 0,0$	$x_2 = 0,20$	$x_3 = 0,4$	$x_4 = 0,6$	$x_5 = 0,8$	$x_6 = 1,0$
0.0	0.587785	0.951057	0.951057	0.587785	0.0
0.0	0.475528	0.769421	0.769421	0.475528	0.0
0.0	0.184710	0.6224745	0.622475	0.384710	0.0

Capítulo 12

Métodos de diferencias finitas (III). Ecuaciones elípticas

*"El problema de la posibilidad de matematizar significa, hasta qué
punto es posible descubrir las experiencias
mediante estructuras formales"*
G. Frey

12.1. Introducción

Como ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales elípticas, consideremos las ecuaciones de Laplace, Poisson y Helmholtz. Recordemos que la laplaciana de una función $u(x, y)$ es

$$\nabla^2 u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y). \quad (12.1)$$

Con esta notación, las ecuaciones de Laplace, Poisson y Helmholtz pueden expresarse de la siguiente manera

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \quad \text{Ecuación de Laplace,} \quad (12.2)$$

$$\nabla^2 u(x, y) = g(x, y) \quad \text{Ecuación de Poisson,} \quad (12.3)$$

$$\nabla^2 u(x, y) + f(x, y)u(x, y) = g(x, y) \quad \text{Ecuación de Helmholtz.} \quad (12.4)$$

Si se conocen los valores que debe tomar la función $u(x, y)$ (problema de Dirichlet) o su derivada normal $\frac{\partial u(x, y)}{\partial \eta} = 0$ (problema de Neumann) en la frontera de una región rectangular \mathcal{R} del plano, entonces cada uno de estos problemas puede resolverse mediante la técnica numérica conocida como el método de las diferencias finitas. Por razones obvias, sólo, estudiaremos con detalles la ecuación en diferencias para la laplaciana.

12.2. Ecuación en diferencias para la laplaciana

El primer paso consiste en obtener una versión discretizada del operador de Laplace que nos permita usarlo numéricamente. La fórmula para $f''(x)$ es

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2) \quad (12.5)$$

así que, al aplicar esta fórmula a la función $u(x, y)$ para aproximar $u_{xx}(x, y)$ y $u_{yy}(x, y)$ y sumar los resultados obtenemos

$$\nabla^2 u = \frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} + o(h^2). \quad (12.6)$$

Ahora dividimos el rectángulo $\mathcal{R} \equiv \{(x, y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ en $n-1 \times m-1$ cuadrados de lado h (o sea, $a = nh$ y $b = mh$), como se muestra en la figura [12.1].

Para resolver la ecuación de Laplace, imponemos la aproximación

$$\frac{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)}{h^2} + o(h^2) = 0 \quad (12.7)$$

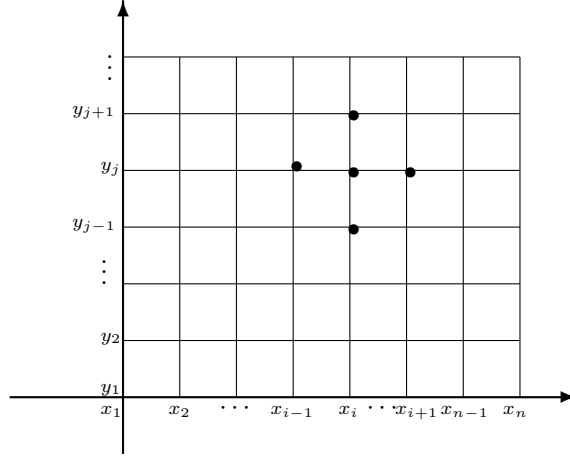


Figura 12.1: La malla usada en la ecuación en diferencias de Laplace

que tiene una precisión de orden $o(h^2)$ en los puntos interiores de la malla $(x, y) = (x_i, y_j)$ para $i = 2, 3, \dots, n-1$ y $j = 2, 3, \dots, m-1$. Como los puntos de la malla están espaciados uniformemente

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad x_{i-1} = x_i - h, \quad y_{i+1} = y_i + h \text{ e } y_{i-1} = y_i - h,$$

denotando por $u_{i,j}$ la aproximación al valor $u(x_i, y_j)$, la ecuación [12.7] queda

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{h^2} = 0 \quad (12.8)$$

expresión que se conoce como la **fórmula de diferencias con cinco puntos** para la laplaciana. Esta fórmula relaciona el valor de la función $u_{i,j}$ con sus cuatro valores adyacentes $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j+1}$ y $u_{i,j-1}$, como se muestra en la figura [12.2]. Eliminando de la expresión [12.8] el denominador h^2 obtenemos la fórmula de aproximación para la ecuación de Laplace

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0. \quad (12.9)$$

12.3. Construcción del sistema lineal

Supongamos que tenemos un problema de Dirichlet, es decir, que conocemos los valores de la función $u(x, y)$ en la frontera de la región \mathcal{R}

$$u(x_1, y_j) = u_{1,j} \quad \text{para } 2 \leq j \leq m-1 \quad (\text{a la izquierda}),$$

$$\begin{aligned}
u(x_i, y_1) &= u_{i,1} \quad \text{para } 2 \leq i \leq n-1 \quad (\text{abajo}), \\
u(x_n, y_j) &= u_{n,j} \quad \text{para } 2 \leq j \leq m-1 \quad (\text{a la derecha}), \\
u(x_i, y_m) &= u_{i,m} \quad \text{para } 2 \leq i \leq n-1 \quad (\text{arriba}).
\end{aligned}$$

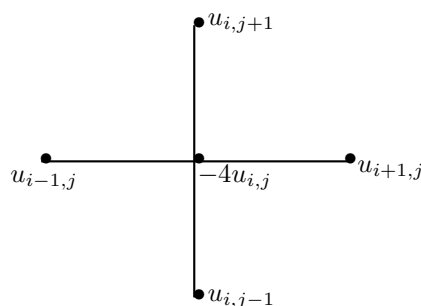
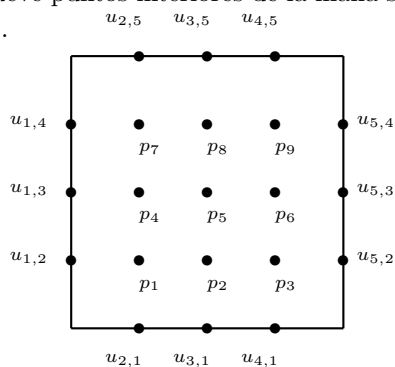


Figura 12.2: Esquema de la para la ecuación de Laplace

Al aplicar la fórmula [12.9] en cada uno de los puntos de la malla que son interiores a \mathcal{R} , obtenemos un sistema de $n-2$ ecuaciones lineales con $n-2$ incógnitas, cuya solución nos proporciona las aproximaciones a $u(x, y)$ en los puntos interiores de \mathcal{R} . Por ejemplo, supongamos que la región es un cuadrado, que $n = m = 5$ y que los valores desconocidos $u(x_i, y_j)$ en los nueve puntos interiores de la malla se etiquetan p_1, p_2, \dots, p_9 como se indica en la figura [12.3].

Figura 12.3: Una malla de orden 5×5 para un problema de contorno

Aplicando la fórmula [12.9] de aproximación a la ecuación de Laplace en cada uno de

los puntos interiores de la malla, obtenemos el sistema de nueve ecuaciones lineales $AP = B$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 -4p_1 + p_2 & & & +p_4 & & & & & & = -u_{2,1} - u_{1,2} \\
 p_1 & -4p_2 + p_3 & & & +p_5 & & & & & = -u_{3,1} \\
 & p_2 & -4p_3 & & & p_6 & & & & = -u_{4,1} - u_{5,2} \\
 p_1 & & & -4p_4 + p_5 & & +p_7 & & & & = -u_{1,3} \\
 & p_2 & & +p_4 & -4p_5 + p_6 & & +p_8 & & & = 0 \\
 & & p_3 & & +p_5 & -4p_6 & & +p_9 & & = -u_{5,3} \\
 & & & p_4 & & & -4p_7 + p_8 & & & = -u_{2,5} - u_{1,4} \\
 & & & & p_5 & & +p_7 & -4p_8 + p_9 & & = -u_{3,5} \\
 & & & & & p_6 & & +p_8 & -4p_9 & = -u_{4,5} - u_{5,4}
 \end{array}$$

12.4. Primer ejemplo

Vamos a determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en el rectángulo $\mathcal{R} \equiv \{(x, y), 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$, donde $u(x, y)$ denota la temperatura en un punto (x, y) , los valores en la frontera son

$$u(x, 0) = 20 \quad \text{y} \quad u(x, 4) = 180 \quad \text{para} \quad 0 < x < 4,$$

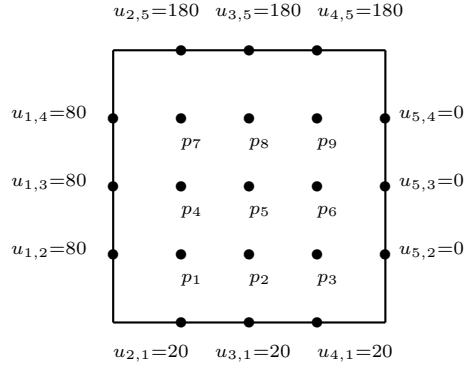
y

$$u(0, y) = 80 \quad \text{y} \quad u(4, y) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < y < 4$$

y la malla que se usa es la que muestra la figura [12.4]

Al aplicar la fórmula [12.9] en este caso, el sistema $AP = B$ que se obtiene es

$$\begin{array}{ccccccccc}
 -4p_1 + p_2 & & & +p_4 & & & & & & = -100 \\
 p_1 & -4p_2 + p_3 & & & +p_5 & & & & & = -20 \\
 & p_2 & -4p_3 & & & p_6 & & & & = -20 \\
 p_1 & & & -4p_4 + p_5 & & +p_7 & & & & = -80 \\
 & p_2 & & +p_4 & -4p_5 + p_6 & & +p_8 & & & = 0 \\
 & & p_3 & & +p_5 & -4p_6 & & +p_9 & & = 0 \\
 & & & p_4 & & & -4p_7 + p_8 & & & = -260 \\
 & & & & p_5 & & +p_7 & -4p_8 + p_9 & & = -180 \\
 & & & & & p_6 & & +p_8 & -4p_9 & = -180
 \end{array}$$

Figura 12.4: La malla de orden 5×5 para el ejemplo del apartado [12.4]

El vector solución P puede obtenerse mediante el método de eliminación de Gauss (también pueden diseñarse esquemas más eficientes, como la extensión del algoritmo tridiagonal a sistemas pentadiagonales). Las temperaturas en los puntos interiores de la malla, es decir, el vector P solución es

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9)^t = \\ = (55,7143, 43,2143, 27,1429, 79,6429, 70,0000, 45,3571, 112,857, 111,786, 84,2857)^t.$$

12.5. Condiciones de contorno de Neumann

Cuando se especifican los valores de la derivada direccional $u(x, y)$ en la dirección perpendicular al contorno de \mathcal{R} , se dice que tenemos un problema con condiciones de contorno de Neumann. Como ejemplo vamos a resolver un caso en el que la derivada normal es nula

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = 0. \quad (12.10)$$

En el contexto de los problemas de distribución de temperaturas, esto significa que el contorno está aislado y que no hay flujo de calor a través de él.

Supongamos que fijamos $x = x_n$, de manera que consideramos el lado derecho $x = a$ del rectángulo $\mathcal{R} \equiv \{(x, y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. La condición de contorno sobre la derivada normal en este lado es, entonces,

$$\frac{\partial u(x_n, y_j)}{\partial x} = u(x_n, y_j) = 0. \quad (12.11)$$

La ecuación de diferencias de Laplace en el punto (x_n, y_j) es

$$u_{n+1,j} + u_{n-1,j} + u_{n,j+1} + u_{n,j-1} - 4u_{n,j} = 0, \quad (12.12)$$

en la que el valor $u_{n+1,j}$ es desconocido porque el punto correspondiente está fuera de la región \mathcal{R} . Sin embargo, podemos usar la fórmula de derivación numérica

$$\frac{u_{n+1,j} - u_{n-1,j}}{2h} \approx u_x(x_n, y_j) = 0 \quad (12.13)$$

y obtener la aproximación $u_{n+1,j} \approx u_{n-1,j}$, cuyo orden de precisión es $o(h^2)$. Al usar esta aproximación en la expresión [12.12], el resultado es

$$2u_{n-1,j} + u_{n,j+1} + u_{n,j-1} - 4u_{n,j} = 0.$$

En esta fórmula se relaciona el valor de la función $u_{n,j}$ con sus tres valores adyacentes $u_{n-1,j}$, $u_{n,j+1}$ y $u_{n,j-1}$.

Los esquemas computacionales de Neumann para los puntos de los demás lados se deducen de forma parecida, figura [12.5], de manera que los cuatro casos son

$$2 \quad u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1} = 0 \quad (\text{lado inferior}), \quad (12.14)$$

$$2 \quad u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m} = 0 \quad (\text{lado superior}), \quad (12.15)$$

$$2 \quad u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{1,j} = 0 \quad (\text{lado izquierdo}), \quad (12.16)$$

$$2 \quad u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j} = 0 \quad (\text{lado derecho}). \quad (12.17)$$

Podemos abordar también problemas mixtos, en los que se usa la condición sobre la derivada normal $\frac{\partial u(x,y)}{\partial \eta} = 0$ en una parte de la frontera de \mathcal{R} y valores de contorno $u(x,y)$ especificados en el resto de la frontera. Las ecuaciones para determinar las aproximaciones a $u(x,y)$ en la parte del contorno en la que se aplica la condición sobre la derivada normal son las dadas por el esquema de Neumann [12.14]-[12.17] apropiado. Para las aproximaciones a $u(x_i, y_j)$ en los puntos interiores a \mathcal{R} seguimos usando la fórmula [12.9] de aproximación a la ecuación de Laplace.

12.6. Segundo ejemplo

Vamos a calcular una solución aproximada de la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en el rectángulo $\mathcal{R} \equiv \{(x,y), 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$, donde $u(x,y)$ denota la temperatura en el

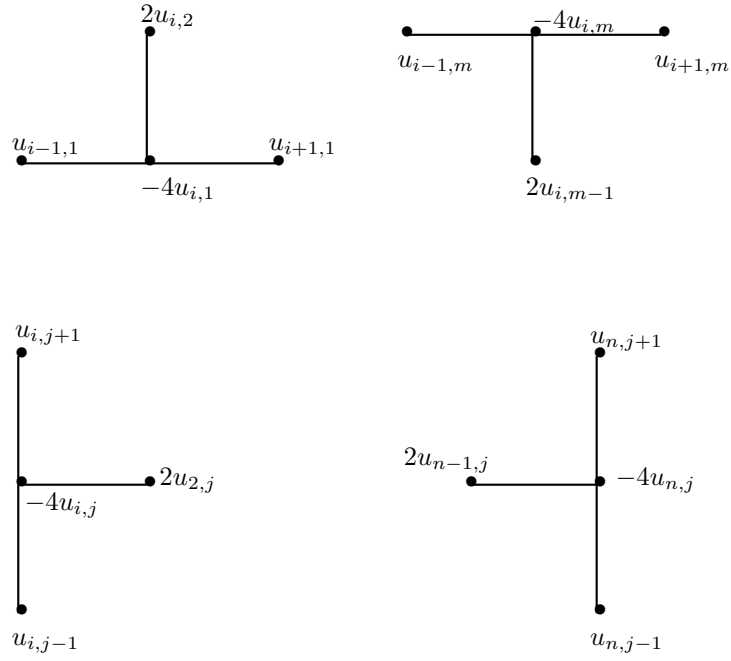


Figura 12.5: Los esquemas para la condición de contorno de Neumann

punto (x, y) y las condiciones de contorno son las que se muestran en la figura [12.6]

$$\begin{aligned}
 u(x, 4) &= 180 && \text{para } 0 < x < 4, \\
 u_y(x, 0) &= 0 && \text{para } 0 < x < 4, \\
 u(0, y) &= 80 && \text{para } 0 \leq y < 4, \\
 u(4, y) &= 0 && \text{para } 0 \leq y < 4.
 \end{aligned}$$

En los puntos q_1, q_2 y q_3 del contorno aplicamos la fórmula de Neumann [12.14] y en los puntos q_4, q_5, \dots, q_{12} aplicamos el esquema de Laplace [12.9]. Lo que obtenemos es un

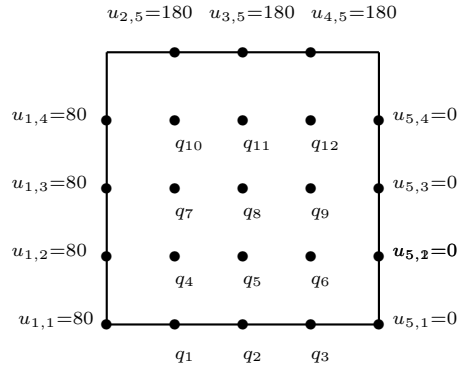


Figura 12.6: La malla de orden 5×5 para el ejemplo del apartado [12.6]

sistema lineal $AQ = B$ de 12 ecuaciones con 12 incógnitas.

$$\begin{array}{rcl}
 -4q_1 + q_2 & +2q_4 & = -80 \\
 q_1 & -4q_2 + q_3 & +2q_5 = 0 \\
 q_2 & -4q_3 & +2q_6 = 0 \\
 q_1 & & -4q_4 + q_5 & +q_7 = -80 \\
 q_2 & & +q_4 & -4q_5 + q_6 & +q_8 = 0 \\
 q_3 & & +q_5 & -4q_6 & +q_9 = 0 \\
 q_4 & & & -4q_7 + q_8 & +q_{10} = -260 \\
 q_5 & & & +q_7 & -4q_8 + q_9 & +q_{11} = 0 \\
 q_6 & & & +q_8 & -4q_9 & +q_{12} = 0 \\
 & & & +q_7 & & -4q_{10} + q_{11} = -260 \\
 & & & +q_8 & +q_{10} & -4q_{11} + q_{12} = -180 \\
 & & & +q_9 & +q_{11} & -4q_{12} = -180
 \end{array}$$

El vector solución Q puede obtenerse mediante el método de eliminación de Gauss (también pueden diseñarse esquemas más eficientes, como la extensión del algoritmo tridiagonal a sistemas pentadiagonales). Las temperaturas en los puntos interiores de la malla y en los puntos del borde inferior, expresadas en forma vectorial, son

$$\begin{aligned}
 Q &= (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})^t = \\
 &= (71,8218, 56,8543, 32,2342, 75,2165, 61,6806, 36,0412, \\
 &87,3636, 78,6103, 50,2502, 115,628, 115,147, 86,3492)^t.
 \end{aligned}$$

12.7. Métodos iterativos

Acabamos de ver cómo podemos resolver la ecuación en diferencias de Laplace construyendo un cierto sistema de ecuaciones lineales y resolviéndolo. El inconveniente que presenta este método es el almacenamiento. Puesto que para obtener resultados mejores hay que trabajar con una malla más fina, es posible que el número de ecuaciones sea muy elevado. Por ejemplo, el cálculo numérico de la solución de un problema de Dirichlet requiere la resolución de un sistema de $(n-2)(m-2)$ ecuaciones; si dividimos \mathcal{R} en un número modesto de cuadrados, digamos 10 por 10, entonces tenemos un sistema de 91 ecuaciones con 91 incógnitas. En consecuencia, parece sensato trabajar con técnicas que reduzcan la cantidad de datos que se deben almacenar; así, un método iterativo sólo requeriría que se almacenaran las 100 aproximaciones numéricas $\{u_{i,j}\}$ correspondientes a los puntos de la malla.

Empecemos por la ecuación en diferencias de Laplace

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0 \quad (12.18)$$

y supongamos que conocemos los valores de $u(x, y)$ en el contorno

$$\begin{aligned} u(x_1, y_j) &= u_{1,j} \quad \text{para } 2 \leq j \leq m-1 \quad (\text{a la izquierda}), \\ u(x_i, y_1) &= u_{i,1} \quad \text{para } 2 \leq i \leq n-1 \quad (\text{abajo}), \\ u(x_n, y_j) &= u_{n,j} \quad \text{para } 2 \leq j \leq m-1 \quad (\text{a la derecha}), \\ u(x_i, y_m) &= u_{i,m} \quad \text{para } 2 \leq i \leq n-1 \quad (\text{arriba}). \end{aligned} \quad (12.19)$$

Ahora escribimos la ecuación [12.18] de forma adecuada para iterar

$$u_{i,j} = u_{i,j} + r_{i,j}, \quad (12.20)$$

siendo

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{4} \\ & \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad \text{y} \quad 2 \leq j \leq m-1. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Es necesario disponer de los valores iniciales en los puntos interiores de la malla; para ello puede valer la constante K , definida como la media de los $2n+2m-4$ valores en el contorno dado por [12.19]. Cada paso de la iteración consiste en hacer un barrido de todos los puntos interiores de la malla con la fórmula recursiva [12.20] hasta que el término residual $r_{i,j}$ que aparece en el miembro derecho de [12.20] se **reduzca a cero** (o sea, hasta que se tenga $|r_{i,j}| < \varepsilon$ para cada $2 \leq i \leq n-1$ y $2 \leq j \leq m-1$, siendo ε la tolerancia prefijada).

Podemos aumentar la velocidad de convergencia a cero de los términos residuales $\{r_{i,j}\}$ usando el método conocido como método de sobrerelajación sucesiva. Este método es el que resulta de aplicar la fórmula recursiva

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= u_{i,j} + \omega \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{4} \right) \\ &= u_{i,j} + \omega r_{i,j}, \end{aligned} \quad (12.22)$$

en la que el parámetro ω verifica $1 \leq \omega < 2$. En el método de sobrerelajación sucesiva, cada paso de la iteración consiste en hacer un barrido de la malla con la fórmula recursiva [12.22] hasta que se tenga $|r_{i,j}| < \varepsilon$. Para elegir el valor óptimo del parámetro ω hay que estudiar los autovalores de la matriz que caracteriza el método iterativo que estamos usando para resolver un sistema lineal; en nuestro caso, dicho valor óptimo viene dado por la fórmula

$$\omega = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{n-1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m-1}\right) \right)^2}}. \quad (12.23)$$

Si lo que se especifica en algún trozo de la frontera es una condición de Neumann, entonces tenemos que escribir las expresiones [12.14]-[12.17] de forma adecuada para iterar; los cuatro casos, incluyendo ya el parámetro de sobrerelajación ω son

$$u_{i,1} = u_{i,1} + \omega \left(\frac{2u_{i,2} + u_{i-1,1} + u_{i+1,1} - 4u_{i,1}}{4} \right) \quad (\text{lado inferior}), \quad (12.24)$$

$$u_{i,m} = u_{i,m} + \omega \left(\frac{2u_{i,m-1} + u_{i-1,m} + u_{i+1,m} - 4u_{i,m}}{4} \right) \quad (\text{lado superior}), \quad (12.25)$$

$$u_{i,j} = u_{i,j} + \omega \left(\frac{2u_{2,j} + u_{1,j-1} + u_{1,j+1} - 4u_{1,j}}{4} \right) \quad (\text{lado izquierdo}), \quad (12.26)$$

$$u_{n,1} = u_{n,1} + \omega \left(\frac{2u_{n-1,j} + u_{n,j-1} + u_{n,j+1} - 4u_{n,j}}{4} \right) \quad (\text{lado derecho}). \quad (12.27)$$

12.8. Tercer ejemplo

Vamos a usar un método iterativo para hallar una solución aproximada de la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en el cuadrado \mathcal{R} definido por $\mathcal{R} \equiv \{(x, y), 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$, con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(x, 4) &= 180 & \text{y} & & u(x, 4) &= 180 & \text{para } 0 < x < 4, \\ u(0, y) &= 80 & \text{y} & & u(4, y) &= 0 & \text{para } 0 < y < 4. \end{aligned}$$

Dividimos el cuadrado en 64 cuadrados de lado $\Delta x = \Delta y = h = 0,5$ y tomamos como valor inicial en los puntos interiores de la malla $u_{i,j} = 70$, $i = 2, 3, \dots, 8$ y $j = 2, 3, \dots, 8$. Usamos el método de sobrerrelajación sucesiva con el parámetro $\omega = 1,44646$ (que se obtiene al sustituir $n = 9$ y $m = 9$ en la fórmula [12.23]); después de 19 iteraciones, los valores residuales son todos menores que una milésima (de hecho, $|r_{i,j}| \leq 0,000606 < 0,1$). Las aproximaciones que se obtienen se muestran en la tabla. Puesto que las funciones de contorno son discontinuas en las esquinas y los valores correspondientes no se utilizan en los cálculos, hemos tomado $u_{1,1} = 50$, $u_{9,1} = 10$, $u_{1,9} = 130$ y $u_{9,9} = 90$ para completar la tabla.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
y_9	130.0	180.000	180.000	180.000	180.000	180.000	180.000	180.000	90.0
y_8	80.0	124.821	141.172	145.414	144.005	137.478	122.642	88.607	0.0
y_7	80.0	102.112	113.453	116.479	113.126	103.266	84.4844	51.7856	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
y_2	80.0	51.3931	40.5195	35.1691	31.2899	27.2335	21.9900	14.1791	0.0
y_1	50.0	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	10.00

Cuadro 12.1: Solución aproximada e la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet

Bibliografía

- [1] ARFKEN, G. *Métodos matemáticos para físicos*
Ed. Diana, 1981.
- [2] AYRES, F. *Ecuaciones Diferenciales*
Ed. Mc Graw-Hill, 1991.
- [3] APARICIO, E. *Teoría de funciones de variable compleja*
Ed. U P V , 1998.
- [4] CHURCHILL, R.V, BRAON, J.W. *Variable compleja y aplicaciones*
Ed. Mc Graw-Hill, 1996.
- [5] ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*
Ed. Mir, 1992.
- [6] FRAILE, V. *Ecuaciones Diferenciales. Métodos de integración y cálculo numérico.*
Ed. Teba Flores, 1991.
- [7] FRÖBERG, C.E. *Introducción al análisis numérico.*
Ed. Vicens Universidad, 1977.
- [8] HORNBECK, ROBERT W. *Numerical Methods*
Quantum. New York.
- [9] JOHNSON, L.W; RIESS, R. D. *Numerical Analysis.*
Ed. Addison Wesley. Reading. Massachusset.

- [10] KINCAID, D; CHENEY, W *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*
Ed. Addison Wesley, 1994.
- [11] KLAMKIN, M.S. *Mathematical Modeling; Classroom Notes in Applied Mathematics*
SIAM. Filadelfia
- [12] KREYSZIG, E. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*
Ed. Limusa, (1999).
- [13] MAKI, D.P; MAYNARD T. *Mathematical Models and Applications*
Ed. Prentice Hall. Englewood Cliffs. New York.
- [14] MATHEWS, J.H; FINK, K.D. *Métodos Numéricos con Matlab*
Ed. .1999
- [15] Ed.
- [16] MARCELLAN, F. ET AL. *Ecuaciones Diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones*
Ed. Mc Graw-Hill, (1991).
- [17] NOVO, S. ET AL. *Ecuaciones y sistemas diferenciales*
Ed. Mc Graw-Hill, (1995).
- [18] OÑEIL, P.V. *Advanced Engineering Mathematics. Tercera edición.*
Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, (1988).
- [19] ORTEGA, J.M. Y POOLE, W.G. *Introduction to Numerical Methods for Differential Equations.*
Ed. Pitman. Manshfield. Massachusetts, (1981).
- [20] RICE J. R. *Numerical Methods, Software and Analysis*
Ed. Mac.Graw-Hill, (1983).
- [21] SEWEEL, G. *The Numerical Solution to Ordinary and Partial Differential Equations.*
Ed. H.B.J. New York, (1975).
- [22] SIMMONS, G.F. *Ecuaciones Diferenciales (con aplicaciones y notas históricas)*
Ed. Mc Graw-Hill, (1998).

- [23] WUNSCH, A.D. *Variable compleja con aplicaciones*
Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, (1997).
- [24] ZELDÓVICH, Y; YAGLON, I. *Matemáticas superiores*
Ed. Mir, 1982.
- [25] ZILL, D. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*
Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, (1988).