# Projeto OH *

Jose Braz

26/08/2018

## 1 Resumo

Uso de Programação linear para resolver o problema da melhor alocação de moradores para a limpeza das áreas do andar superior da Casa III da instituição CEUPA (Casa Estudantil Universitária de Porto Alegre). As áreas são divisões da casa nomeadas com uma letra e divididas em dois grupos:

- Áreas comuns. $C = A, C, D$
- Áreas especias. $E = B, E, F$

O problema consiste em escolher os moradores para cada área de forma que todas as áreas sejam distribuídas o mais uniformemente possível, ou seja, não deve haver moradores que fizeram muito uma determinada área, mas pouco outra. É preciso garantir, ainda, que todas as áreas sejam limpas duas vezes na semana e todos os moradores devem limpar exatamente uma área na semana (com excessão da Área F). A distribuição das áreas se dá em duas etapas:

1. Uma fila circular de moradores para as áreas B, E e F
2. Uma alocação para as restantes áreas comuns A, C e D

O foco será na segunda etapa. Uma vez que a primeira é só a aplicação de um estrutura de dados simples.

## 2 Modelo

Objective

$$Max \sum_{j \in L} \sum_{i \in C} P(Q_j, i) * M_{i,j} \tag{1}$$

Subject to

$$\sum_{j \in L} M_{i,j} = \sum_{j \in L} Q_{i,j} + 2 \quad \forall i \in C \tag{2}$$

*OH significa Organização e Higiene

$$\sum_{i \in C} M_{i,j} = \sum_{i \in C} Q_{i,j} + 1 \quad \forall j \in L \tag{3}$$

$$M_{i,j} \geq Q_{i,j} \quad \forall j \in L \quad \forall i \in C \tag{4}$$

Onde:

- $C$ é o conjuto das áreas comuns ($\{A, C, D\}$)
- $L$ é o conjuto dos moradores que irão limpar as áreas comuns naquela semana.
- $Q_{i,j}$ onde: $i \in C$ e $j \in L$
  representa a quantidade de vezes que o morador $j$ fez a área $i$ historicamente (guarda a informação para as proximas computações). Note que o $Q_j$ representa quantas vezes o morador $j$ limpou as áreas do conjunto $C$
- $M_{i,j}$ onde: $i \in C$ e $j \in L$
  representa a quantidade de vezes que o morador $j$ fez a área $i$ mais a computação dos próximos a limpar as áreas. Ou seja, $M$ contém os valores de $Q$ e mais os valores que a computação desse modelo irá retornar. $M$ é a variável em uma implementação computacional.
- $P(\bar{x}, a)$ onde: $\bar{x} \in \mathbb{N}$ e $a \in C$ mapeada por:

  $$i(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a = A \\ 2, & \text{se } a = C \\ 3, & \text{se } a = D \end{cases}$$

  $P$ é a função que retorna um valor correspondente ao "peso" que a área $a$ tem, calculado de acordo com a diferença com o maior elemento do vetor de áreas comuns $\bar{x}$. A função é dada por:

  $$P(\bar{x}, a) = 5^{maximun(\bar{x}) - \bar{x}_{i(a)}}$$

  Note que, quanto menor o valor de $\bar{x}_{i(a)}$ maior será o resultado da função e, como o objetivo é maximizar a equação (1), priorizará a escolha dessa área $a$ em detrimento das outras.

O objetivo (1) é um somatório ponderado de acordo com a função $P_{\bar{x},y}$, logo quanto maior o peso, maior será a prioridade em aumentar o $M_{i,j}$, fazendo com que a diferença entre as áreas $i$ feitas pelo morador $j$ seja pequena. A restrição de linha (2) garante que cada área será feita duas vezes naquela semana. A restrição de coluna (3) garante que cada morador irá fazer a limpeza exatamente uma vez naquela semana. A restrição de quantidade (4) garante que a matriz $M$ será maior que a matriz histórica $Q$, ou seja, conserva a informação das limpezas feitas nas semanas anteriores. A diferença entre $M_{i,j}$ e $Q_{i,j}$ gera uma matriz binária que representa qual morador deve limpar determinada área naquela semana.

# 3 Exemplo

Supondo um $Q$ como segue, a computação deve ser capaz de determinar a melhor alocação dessas pessoas para as áreas, de acordo com os critérios mencionados.

| | Lais | Gustavo | Jose | Filipe | Renata | Tales |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 5 | 3 | 3 | 5 | 4 | 5 |
| C | 6 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 |
| D | 7 | 5 | 3 | 3 | 6 | 4 |

Objetivo:

$$\begin{aligned} Max \quad & 25M_{A,Lais} + 5M_{C,Lais} + M_{D,Lais} + 25M_{A,Gustavo} + \\ & 25M_{C,Gustavo} + M_{D,Gustavo} + 5M_{A,Jose} + M_{C,Jose} + 5M_{D,Jose} + \\ & M_{A,Filipe} + M_{C,Filipe} + 25M_{D,Filipe} + 25M_{A,Renata} + \\ & 5M_{C,Renata} + M_{D,Renata} + M_{A,Tales} + 25M_{C,Tales} + 5M_{D,Tales} \end{aligned} \tag{5}$$

Restrições de Linha:

$M_{A,Lais} + M_{A,Gustavo} + M_{A,Jose} + M_{A,Filipe} + M_{A,Renata} + M_{A,Tales} = 27$
$M_{C,Lais} + M_{C,Gustavo} + M_{C,Jose} + M_{C,Filipe} + M_{C,Renata} + M_{C,Tales} = 28$
$M_{D,Lais} + M_{D,Gustavo} + M_{D,Jose} + M_{D,Filipe} + M_{D,Renata} + M_{D,Tales} = 30$

Restrições de Coluna:

$M_{A,Lais} + M_{C,Lais} + M_{D,Lais} = 19$
$M_{A,Gustavo} + M_{C,Gustavo} + M_{D,Gustavo} = 12$
$M_{A,Jose} + M_{C,Jose} + M_{D,Jose} = 11$
$M_{A,Filipe} + M_{C,Filipe} + M_{D,Filipe} = 14$
$M_{A,Renata} + M_{C,Renata} + M_{D,Renata} = 16$
$M_{A,Tales} + M_{C,Tales} + M_{D,Tales} = 13$

Restrições de Quantidade:

$M_{A,Lais} \geq 5$
$M_{C,Lais} \geq 6$
$M_{D,Lais} \geq 7$
$M_{A,Gustavo} \geq 3$
$M_{C,Gustavo} \geq 3$
$M_{D,Gustavo} \geq 5$
$M_{A,Jose} \geq 3$
$M_{C,Jose} \geq 4$
$M_{D,Jose} \geq 3$
$M_{A,Filipe} \geq 5$
$M_{C,Filipe} \geq 5$
$M_{D,Filipe} \geq 3$
$M_{A,Renata} \geq 4$
$M_{C,Renata} \geq 5$
$M_{D,Renata} \geq 6$
$M_{A,Tales} \geq 5$

$M_{C,Tales} \geq 3$
$M_{D,Tales} \geq 4$

Variável M
$M_{i,j} \geq 0, integer, \forall i \in \{A, C, D\}, j \in \{Lais, Gustavo, Jose, Filipe, Renata, Tales\}$

O resultado da diferença entre $M$ e $Q$ foi:

| | Lais | Gustavo | Jose | Filipe | Renata | Tales |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| D | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Analizando os resultamos vemos que:

- Lais e Renata devem limpar a área A na semana em questão
- Gustado e Tales devem limpar a área C na semana em questão
- Jose e Filipe devem limpar a área D na semana em questão