Universidad de Granada

Ingeniería Informática

Computación y Sistemas Inteligentes

Relacion Tema 2

Autor: José Antonio Ruiz Millán

Asignatura: Teoria de la Información y de la Codificación

4 de noviembre de 2018

1. **Suponiendo que un sistema S pueda generar 4 símbolos, ¿es posible que H(S)=5? Razone su respuesta. ¿Qué significado tendría H(S)= 0? Indique qué implicaciones, en términos de probabilidades de los símbolos del alfabeto, tiene que H(S)= 0.**

   Teniendo que:

   $$H(S) = -\sum_{i=1}^{n} p(S = s_i) \cdot log_k(p(S = s_i))$$

   Donde k indica el número de símbolos que tenemos para codificar.

   Sabemos por otra parte que la fórmula de la entropía está acotada superiormente:

   $$H(S) < log_k(n)$$

   Donde n indica el número de símbolos que tenemos que codificar.

   Por lo que en este caso, tenemos que:

   $$H(S) < log_2(4) = 2$$

   Asumiendo que los símbolos son codificados utilizando un método binario, podemos ver que $H(S)$ no puede ser 5. Fijándonos en los números esto es fácil de ver ya que si tomamos la entropía como el número de bits necesarios para codificar todos los símbolos, en este caso debemos asumir máxima incertidumbre, es decir, $p(s_1) = p(s_2) = p(s_3) = p(s_4) = 0{,}25$, por lo que como máximo tendríamos que:

   $$H(S) = -(0{,}25 \cdot log(0{,}25) + 0{,}25 \cdot log(0{,}25) + 0{,}25 \cdot log(0{,}25) + 0{,}25 \cdot log(0{,}25)) = 2$$

   Por otra parte, si la entropía nos devuelve 0, quiere decir que no tenemos níngun tipo de ruido ni ningún tipo de desorden, es decir, para cada símbolo que se envía, sabemos exactamente el símbolo que se va a recibir. Esto puede ocurrir de dos formas, o bien la probabilidad e mandar un símbolo es 1, es decir, sabemos siempre que hemos mandados ese símbolo y no crea incertidumbre, o bien el caso contrario, que la probabilidad de enviarse sea 0, por lo tanto sabemos que ese símbolo no se va a mandar nunca y seguimos teniendo que la incertidumbre es nula.

2. **Un sistema A tiene 4 símbolos y una entropía H(A)=2, y otro sistema B tiene 2 símbolos y una entropía H(B)= 1. ¿Cuál produce más información? Razone su respuesta. Si un sistema A que produce 4 símbolos tiene entropía H(A)=2, indique qué implicaciones, en términos de probabilidades de los símbolos del alfabeto, tiene que H(A)= 2.**

   En primer lugar, para poder comparar dos entropías, lo mejor que podemos hacer es normalizar el valor de las mismas para que la comparación sea más justa.

   $$\tilde{H}(A) = \frac{H(A)}{log_2(n)}$$

   $$\tilde{H}(B) = \frac{H(B)}{log_2(m)}$$

   Donde n y m son el número de símbolos de cada uno de los sistemas y asumiendo que los simbolos los codificamos utilizando código binario.

   Por lo que finalmente tenemos que:

$$\tilde{H}(A) = \frac{2}{log_2(4)} = 1$$

$$\tilde{H}(B) = \frac{1}{log_2(2)} = 1$$

Por lo que podemos decir que los dos sistemas producen la misma información aunque los datos en un principio eran distintos, ya que al normalizarlos obtenemos la misma entropía.

Como hemos visto en el ejercicio anterior, la entropía esta acotada superiormente y en este caso tenemos que:

$$H(A) < log_2(4) = 2$$

Lo que entonces nos dice que si $H(A) = 2$ tiene el máximo valor de entropía, es decir, hay mucha incertidumbre, lo que respecto a las probabilidades nos dice que la probabilidad de que aparezca cada uno de los símbolos es exactamente la misma *(*$p(s_1) = p(s_2) = p(s_3) = p(s_4) = 0{,}25$*)* .

3. **Una fuente E emite una señal X con bits de modo que la probabilidad en cualquier momento de emitir un uno sea 0,3. Esos bits son transmitidos hasta un receptor a través de un canal binario con probabilidad de error en un bit igual a 0,2, el cual recibe una señal Y. Se pide:**

   Antes de nada, he creado la que creo que sería la tabla de probabilidades, entendiendo del enunciado que la probabilidad de mandar un 1 es 0,3 y que sea un 1 o un 0, la probabilidad de que éste se reciba mal es 0,2.

Tabla 1: Probabilidades conjuntas

X/Y	**0**	**1**	
0	0,5	0,2	0,7
1	0,2	0,1	0,3
	0,7	0,3	1

   a) **Calcular** $H(X)$ **y** $H(Y)$**.**

   Tenemos pues, que:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(S = s_i) \cdot log_k(p(S = s_i)) =$$

$$-(0{,}7 \cdot log_2(0{,}7) + 0{,}3 \cdot log_2(0{,}3)) = 0{,}881$$

   Por otra parte, tenemos que:

$$H(Y) = -(0{,}7 \cdot log_2(0{,}7) + 0{,}3 \cdot log_2(0{,}3)) = 0{,}881$$

   b) **Calcular** $H(X,Y)$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(X = x_i, Y = y_j) \cdot log_2(p(X = x_i, Y = y_j))$$

   Por lo que obtenemos que:

$$H(X,Y) = 1{,}761$$

   c) **Calcular** $H(X|Y)$ **y** $H(Y|X)$**, y explicar qué significa tanto** $H(X|Y)$ **como** $H(Y|X)$**.**

Tenemos que:

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{n} p(Y=y_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} p(X=x_j|Y=y_i) \cdot log_2(p(X=x_j|Y=y_i))$$
$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} p(Y=y_j|X=x_i) \cdot log_2(p(Y=y_j|X=x_i))$$

Esto se puede reescribir de la siguiente forma:

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{n} P(Y=y_i) \cdot H(X|Y=y_i)$$
$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \cdot H(Y|X=x_i)$$

Donde

$$H(X|Y=y_i) = -\sum_{j=1}^{m} P(X=x_j|Y=y_i) \cdot log_2(P(X=x_j|Y=y_i))$$
$$H(Y|X=x_i) = -\sum_{j=1}^{m} P(Y=y_j|X=x_i) \cdot log_2(P(Y=y_j|X=x_i))$$

No obstante, para este ejercicio no tenemos la tabla de probabilidades condicionadas, pero sabemos que:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X)$$
$$H(Y,X) = H(Y) + H(X|Y)$$

Por lo que finalmente tenemos que:

$$H(X|Y) = 1{,}761 - 0{,}881 = 0{,}88$$
$$H(Y|X) = 1{,}761 - 0{,}881 = 0{,}88$$

Estos valores se interpretan como “sabiendo lo que se envia del emisor, a qué nivel sabemos lo que recibe el receptor” *($H(Y|X)$)* y viceversa para el otro caso. Este valor se interpreta al igual que la entropía anteriores, si esta cercana a 0 no tenemos poca incertidumbre y si se aproxima a $log_2(n)$ tiene mucha incertidumbre.

d) **Explicar qué significa la Información mutua. Calcular la información mutua $I(X;Y)$.**

La Información mutua es una medida que nos permite cuantificar la dempendencia entre el input X y el output Y, es decir, nos permite medir lo que se transmite cuando X e Y comparten información.

La información mutua entre dos variables es simétrica, por lo que:

$$I(X;Y) = I(Y;X) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Por lo que tenemos como resultado:

$$I(X;Y) = I(Y;X) = 0{,}881 - 0{,}88 = 0{,}001$$

Lo que nos dice que el canal tiene muchisimo ruido, ya que no se transmite apenas nada de información comparado con la información que el canal podría transmitir *($H(X) = 0{,}881$)*.

4. **Consideremos una fuente S que emite símbolos a, b, c, d con probabilidades 1/2, 1/4, 1/8, 1/8, respectivamente. Calcular la entropía de la fuente.**

Sabemos que la entropía sigue la siguiente formula:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(S = s_i) \cdot log_k(p(S = s_i))$$
$$= -(0{,}5 \cdot log_2(0{,}5) + 0{,}25 \cdot log_2(0{,}25) + 2 \cdot 0{,}125 \cdot log_2(0{,}125)) = 1{,}75$$

Lo que nos dice que es un canal con ruido, y con bastante ruido ya que su máximo es $log_2(4) = 2$ y la entropía esta bastante cerca. También nos dice que necesitamos en media 1,75 bits para codificar este codigo.

5. **En una planta de una comunidad de vecinos hay 4 pisos con las letras A, B, C y D. Todos se conocen entre ellos y saben quién dice la verdad y quién miente. Se sabe que el dueño de uno de ellos es un mentiroso (siempre miente), mientras que los demás son honrados y siempre dicen la verdad. ¿Cuál sería el mínimo número de preguntas de respuesta "Sí/No" que deberíamos hacer para saber cuál es el mentiroso? ¿Sabría elaborar un procedimiento y la batería de mínimas preguntas necesarias para detectarlo? Justifique su respuesta utilizando argumentos basados en la Teoría de la Información.**

   Para calcular el número mínimo de preguntas utilizaremos la entropía:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(S = s_i) \cdot log_k(p(S = s_i))$$

6. **Supongamos que disponemos de la siguiente tabla de probabilidades conjuntas entre una señal X emitida por un emisor y la señal Y recibida por el receptor, para un sistema que trabaja con 4 símbolos 1, 2, 3, 4.**

Tabla 2: Probabilidades conjuntas

	X = 1	**X = 2**	**X = 3**	**X = 4**	
Y = 1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	0,25
Y = 2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	0,25
Y = 3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0,25
Y = 4	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0,25
	0,5	0,25	0,125	0,125	1

   Calcule H(X), H(Y), H(X,Y), H(Y—X) e I(X; Y)

   Como las formulas de las distintas entropías estan en los ejercicios anteriores, en este sólo pondré el resultado calculado.

   - $H(X) = 1{,}75$
   - $H(Y) = 2$
   - $H(X, Y) = 3{,}375$
   - $H(Y|X) = 1{,}05$
   - $I(X; Y) = 2 - 1{,}05 = 0{,}95$

7. **Sea un sistema capaz de transmitir dos símbolos 1, 2, entre un emisor que proporciona una señal X emitida hacia un receptor que recibe la señal Y:**

   Calcule H(X), H(Y), H(X,Y), H(Y—X) e I(X; Y)

   - $H(X) = 0{,}544$

Tabla 3: Probabilidades conjuntas

	$\mathbf{X = 1}$	$\mathbf{X = 2}$	
$\mathbf{Y = 1}$	0	$\frac{3}{4}$	0,75
$\mathbf{Y = 2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0,25
	0,125	0,875	1

- $H(Y) = 0{,}811$
- $H(X,Y) = 1{,}06$
- $H(Y|X) = 0{,}65$
- $I(X;Y) = 0{,}811 - 0{,}65 = 0{,}161$

8. **Calcule la entropía de un mazo de 52 cartas perfectamente barajado. Si escogiésemos una carta al azar, ¿Cuánta información se ganaría conociendo que esa carta es un As? ¿Y si fuese el As de picas?**

   Para calcular la entroía del mazo, sabemos que todas las cartas son equiprobables de salir por lo que $p(s_i) = \frac{1}{52}$:

   $$H(X) = 52 * \tfrac{1}{52} * log_2(\tfrac{1}{52}) = 5{,}7$$

   Para calcular la informaciñon que nos da, utilizaré la formula de la Informacion del tema 1. Lamaremos A al suceso de que salga un AS y B al suceso de que ese As sea el de picas.

   $$I(A) = -log_k(p(A))$$
   $$= -log_2(\tfrac{4}{52}) = 3{,}7$$

   Mientras que:

   $$I(B) = -log_2(\tfrac{1}{52}) = 5{,}7$$

   POr lo que tenemos que sacar un As de picas nos da más información que sacar un As cualquiera, claramente esto es normal ya que es más complicado sacar un As concreto que sacar alguno de ellos.

9. **El servicio meteorológico de las noticias de un canal de televisión tiene el siguiente sistema de probabilidades para calcular cuándo llueve en las noticias sobre el tiempo:**

   Tabla 4: Probabilidades conjuntas

	Lo que ocurre realmente	
Prediccion	Lluvia	No Lluvia
Lluvia	5/8	1/16
No Lluvia	3/16	1/8

   Para el calculo de todos los apartados, las formulas ya estan especificadas en otros ejercicios de la practica, por lo que evitaré reescribirlos y únicamente dedicarme a poner los resultados finales.

a) **Calcule la entropía de lo que ocurre realmente.**

$$H(X) = -(\frac{13}{16} \cdot log_2(\frac{13}{16}) + \frac{3}{16} \cdot log_2(\frac{3}{16})) = 0{,}7$$

b) **Calcule la entropía de la predicción, suponiendo que se sabe lo que ocurre realmente.**

$$H(Y|X) = 0{,}83$$

c) **Calcule la entropía conjunta (H(X,Y))**

$$H(X,Y) = 1{,}5$$

d) **Calcule la información mutua del sistema**

$$H(Y) = 0{,}9 \; I(X;Y) = 0{,}9 - 0{,}83 = 0{,}07$$

10. **Supongamos que en otra cadena tienen el siguiente sistema de probabilidades para las noticias sobre el tiempo:**

Tabla 5: Probabilidades conjuntas

	Lo que ocurre realmente		
Prediccion	**Lluvia**	**Nublado**	**Soleado**
Lluvia	0,1237	0,0056	0,106
Nublado	0,1498	0,1326	0,1183
Soleado	0,1024	0,1458	0,116

a) **Calcule la entropía de lo que ocurre realmente.**

$$H(X) = -(0{,}3759 \cdot log_2(0{,}3759) + 0{,}284 \cdot log_2(0{,}284) + 0{,}3403 \cdot log_2(0{,}3403)) = 1{,}58$$

b) **Calcule la entropía de la predicción, suponiendo que se sabe lo que ocurre realmente.**

$$H(Y|X) = 1{,}02$$

c) **Calcule la entropía conjunta (H(X,Y))**

$$H(X,Y) = 3{,}02$$

d) **Calcule la información mutua del sistema**

$$H(Y) = 1{,}55 \; I(X;Y) = 1{,}55 - 1{,}02 = 0{,}53$$

e) **Con respecto al canal de TV del ejercicio anterior, ¿de cuál de los dos sistemas de predicción del tiempo se fiaría más, y bajo qué circunstancias?**

Me quedaría con el segundo caso, ya que si normalizamos las entropías para poder diferenciarlas, tenemos valores iguales o menores en todas las entropías he incluso en la información mutua obtenemos un valot mayor y por lo tanto mejor que en el caso anterior, por ello, me quedaría con el segundo.