Universidad de Granada

Ingeniería Informática

Computación y Sistemas Inteligentes

Cuestionario 2

Autor: José Antonio Ruiz Millán Asignatura: Visión por Computador 30 de noviembre de 2018



1. ¿Identificar la/s diferencia/s esencial/es entre el plano afín y el plano proyectivo? ¿Cuáles son sus consecuencias? Justificar la contestación.

Una diferencia es que en el plano afín, los puntos se representan como coordenadas (x, y) y las rectas son del tipo $\alpha x + \beta y + c = 0$. Por otra parte, en el plano proyectivo, los puntos estan definidos por (x, y, 1) siendo coordenadas homogéneas.

Esto hace que las transformaciones afines mantengan la relacion de colinealidad de los puntos así como las proporciones y el paralelismo, es decir, en una transformación afín, si dos puntos pertenecían a una recta, despúes de la transformación estos dos puntos siguen en una misma recta. Sin embargo, en el plano poryectivo tenemos la **perdida del paralelismo**, que hace que dos rectas paralelas en el plano se deformen y dejen de ser paralelas, aunque sí se mantiene el echo de ser rectas.

Las consecuencias que aparecen entonces a parte de las deformaciones de los objetos como he comentado, es la aparición de unos nuevos puntos llamados **puntos de fuga** que son los puntos donde se cortan esas rectas. Estos puntos son puntos en el infinito y aparecen con la propia deformacion de las lineas paralelas, al perder ese paralelismo.

2. Demuestre que los punto de la recta del infinito del plano proyectivo son vectores del tipo (*,*,0) con *=cualquier número.

Sabemos que un punto en el plano proyectivo se representa como una tripleta que podemos representarla asi:

$$(wx, wy, 1) = (x, y, \frac{1}{w})$$

Cuando hablamos de un punto en el infinito, hace que $w \to \infty$ y entonces $\frac{1}{w} \to 0$, por lo que cualquier punto en un plano proyectivo perteneciente al infinito, el vector de coordenadas será del tipo (x, y, 0).

- 3. En coordenadas homogéneas los puntos y rectas del plano se representan por vectores de tres coordenadas (notados x y l respectivamente), de manera que si una recta contiene a un punto se verifica la ecuación $x^T l = 0$. Puede verificar que en coordenadas homogéneas el vector de la recta definida por dos puntos afines puede calcularse como el producto vectorial de los vectores de ambos puntos $(l = x \cdot x')$. De igual modo el punto intersección de dos rectas l y l' está dado por $x = l \cdot l'$; Qué aportan las anteriores propiedades de cara a construir un algoritmo que calcule la intersección de dos rectas cualesquiera en el plano afín? Justificar la contestación.
- 4. Defina una homografía entre planos proyectivos que haga que el punto (2,0,3) del plano proyectivo-1 se transforme en un punto de la recta del infinito del plano proyectivo-2. Justificar la respuesta

Sabemos que un punto de la recta del infinito el tercer valor de las coordenadas debe ser 0, por lo que tenemos que calcular lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como he comentado, lo único que necesitamos saber es de esta multiplicacion de matrices, qué hace que la tercera coordenada del punto en el plano proyectivo-2 sea 0, por lo que tenemos que:

$$2g + 0h + 3 = 0$$
$$2g + 3 = 0$$
$$g = -\frac{3}{2}$$

Esto nos dice que para el punto (2,0,3) cualquier homografía que utilicemos, mientras el valor de $g=-\frac{3}{2}$, este punto se transformará en un punto de la recta del infinito.

5. Descomponer en composición de movimientos elementales (traslación, giro, escala, cizalla, proyectivo) cada una de las matrices de las siguientes homografías H1, H2y H3:

$$H1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 3 \\ 0 & 0.8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -3 \\ -0.5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■ H1:

$$H1_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso vemos como la primera matriz es inmediata, ya que es una matriz en la que se aplica una cizalla en la direccion del eje X.

$$H1_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, la segunda matriz es menos directa pero únicamente por el valor de los elementos. Lo que tenemos que hacer es normalizar la matriz como sigue:

$$H1_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que pasamos a tener ahora una transformación de escalado.

Por útimo, tenemos una matriz compuesta, es decir, no define una única transformación por lo que tenemos que descomponerla. Esta matriz está compuesta por una transformación de escalado y otra de traslación, antes de nada, voy a normalizarla como en el caso anterior.

$$H1_3 = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 3 \\ 0 & 0,8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0,4 & 2,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez la tenemos normalizada, el primer paso (en mi caso) es extraer la transformación de traslación y calcular la matriz resultante. Finalmente el resultado es el siguiente:

$$H1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que una vez realizados todos los cáculos, obtengo que:

$$H1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente, si leemos de derecha a izquierda, tenemos que dado un punto, se le aplicará en primer lugar **un escalado, una traslación, otro escalado y una cizalla**. He de comentar, que al haber normalizado, si hacemos los calculos obtenemos dos homografías equivalentes que sólo varían en una constante multiplicativa que es la uqe he utilizado para normalizar, no obstante, las dos homografías son exactamente la misma. Esto se aplica a todos los casos donde normalice.

■ H2:

$$H2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -3 \\ -0.5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos apreciar claramente una rotación y una traslación, por lo que tenemos que separarlas. Primero saco la traslación y calculo la matriz resultante, obteniendo:

$$H2_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vemos, ya tenemos separadas las matrices y tenemos tanto el giro como la traslación.

$$H2_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para este caso, estamos en las mismas que para el anterior, la matriz no es directamente de una de las clases de transformaciones, ya que aparece tanto un escalado como una cizalla, por lo que tenemos que descomponerla. Para ello, primero sacaré el escalado y calcularé la matriz resultante.

$$H2_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vemos, ahora tenemos por separado cada una de las transformaciones. Con esto, va tenemos calculado el apartado dos, que finalmente queda como sigue:

$$H2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente, para este caso, si leemos de dedrecha a izquierda, tenemos que aplicamos una cizalla, un escalado, una rotación y una traslación.

■ H3:

$$H3_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En primer caso, voy a normalizar la matriz para dejar la el ultimo elemento como 1.

$$H3_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora vemos como esta matriz también es compuesta y tenemos que descomponerla. En este caso tenemos una proyección y una traslación. Al igual que en los casos anteriores, lo primero que voy a sacar es la traslación y calcularé la matriz resultante, obteniendo lo siguiente:

$$H3_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 1.5 \\ 0 & 1.25 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Como podemos ver, ahora volvemos a tener otra matriz compuesta por lo que tenemos que seguir desarrollando.

$$H3_{1_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguimos teniendo matriz compuesta por lo que seguimos:

$$H3_{1_{1_{2}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que ya hemos terminado esta parte, vamos a ir acumulando los calculos.

$$H3_{1_{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H3_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo calculado esta parte, pasamos a calcular la segunda:

$$H3_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COmo vemos esta parte tampoco esta descompuesta, por lo que al descomponerla obtengo lo siguiente:

$$H3_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que finalmente obtengo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0,75 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vemos, finalmente hemos obtenido una homografía en la que realizamos las siguientes transformaciones, de derecha a izquierda, una cizalla (tanto en X como en Y), un escalado, una proyeccion, otra cizalla, otro escalado y una translación.

6. ¿Cuáles son las propiedades necesarias y suficientes para que una matriz defina una homografía entre planos? Justificar la respuesta

La primera propiedad es que la matriz debe ser de tama \tilde{n} o 3x3, y la segunda propiedad es que esta matriz debe tener determinante distinto de 0.

La primera propiedad se debe a que estamos trabajando con coordenadas con 3 variables, con dimension 3x1, por lo que para poder transoformar un punto con esta codificación, necesitamos una matriz 3x3 y así al multiplicarlas obtener un punto de la misma dimensión.

Por otra parte, la segunda característica se debe a que una homografía transforma un punto de un plano (p_1) a un punto de otro plano (p_2) , lo que quiere decir que la dirección es única. Si queremos transformar un punto de p_2 a p_1 , necesitamos calcular la inversa de la homografía y aplicarsela al punto del p_2 y así obtendríamos el punto en el plano p_1 , por lo que esto hace que la matriz obligatoriamente tenga que ser invertible, y por lo tanto, que su determinante sea distinto de 0.

7. ¿Qué propiedades de la geometría de un plano quedan invariantes si se aplica una homografía general sobre él? Justificar la respuesta.

Una homografía general engloba las transformaciones afines y las proyecciones, por lo que quedamos acotados por el caso más destructivo que en este caso es las proyecciones ya que eliminan el paralelismo cosa que las transformaciones afines no lo hacen. Por lo que las propiedades que quedan invariantes son:

- Colinealidad: Esto dice que si un punto pertenece a una recta, seguirán perteneciendo a la recta después de aplicar la homografía.
- Discontinuidades tangenciales
- Concurrencia: Esto sabemos que se cumple ya que se cumple la colinealidad. Esto nos
 dice que si dos rectas tienen un punto en común, este punto, al aplicar la homografía

seguirá perteneciendo a cada una de las rectas.

- Orden de contacto (interseccion tangencia e inflexión)
- Ratio cruzado: Dado 4 puntos, se calcula de la siguiente forma:

$$C(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{p_1 p_3 \cdot p_2 p_4}{p_2 p_3 \cdot p_1 p_4}$$

8. ¿Cuál es la deformación geométrica más fuerte que se puede producir sobre la imagen de un plano por el cambio del punto de vista de la cámara? Justificar la respuesta.

La deformación geométrica más fuerte es la **proyección**, ya que como hemos visto en ejercicios anteriores, destruye el paralelismo, los ángulos y las proporciones. Un ejemplo claro es la típica imagen de las vías del tren, sabemos que las vías son totalmente paralelas, pero según el punto de vista de la cámara, puede dar el efecto de que las vías en un punto lejano se van a cruzar, cosa que sabemos que no sucede porque las vías son totalmente paralelas.

9. ¿Qué información de la imagen usa el detector de Harris para seleccionar puntos? ¿El detector de Harris detecta patrones geométricos o fotométricos? Justificar la contestación.

El detector de Harris usa información de la intensidad del gradiente. El funcionamiento del detector de Harris consiste en mediante una ventana, ir recorriendo la imagen y buscando cambios significativos de la intensidad del gradiente. Para que el detector detecte un punto, este punto debe tener cambios fuertes en la intensidad del gradiente tanto en el eje X como en el eje Y. Una vez se obtienen los puntos, se seleccionan los "buenos" utilizando el criterio de Harris. También se utiliza un umbral para decidir si un punto es "bueno" y si el valor calculado es mayor del umbral, directamente se marca como punto "bueno".

Dicho esto, creo que Harris utiliza **ambos patrones** ya que detecta patrones geométricos para poder detectar las esquinas pero también utiliza la intensidad del gradiente como hemos comentado, lo que hace que también utiliza patrones fotométricos.

10. ¿Sería adecuado usar como descriptor de un punto Harris los valores de los píxeles de su región de soporte? En caso positivo identificar cuando y justificar la respuesta

La respuesta es **no**. Hablamos para caso generales y no específicos, lo que hace que este método no sea el adecuado ya que sabemos que el detector de Harris es invariante a la rotación y a los cambios de intensidad, pero no es invariante a los cambios de escala, por lo que cualquier transformación sobre la escala, el detector Harris no haría unas buenas correspondencias y no conseguiríamos un buen resultado.

Si asumimos que no se va a realizar escalado podría funcionar correctamente, pero hablando en casos generales para todos los casos, no es una buena opción.

11. ¿Qué información de la imagen se codifica en el descriptor de SIFT? Justificar la contestación.

El descriptor SIFT lo que hace para cada punto es crear un vecindario de 16x16, que a su vez se divide en sub-bloques de 4x4 y para cada uno de ellos crea un histograma de orientaciones calculando el vector gradiente para cada uno de los puntos. La concatenación en un vector

de los valores de las cajas de cada histograma para los 16 sub-bloques del punto de interés constituye su descriptor.

- 12. Describa un par de criterios que sirvan para seleccionar parejas de correspondencias ("matching") entre descriptores de regiones extraídos de dos imágenes. Justificar la idoneidad de los mismos
 - Fuerza bruta: Este método es el método más simple que hay, se calcula la distancia entre el descriptor origen y los descriptores de la imagen destino y selecciona el match con menos distancia (calculada por ejemplo con la distancia Euclídea). Como he comentado los pros de este método es su simpleza ya que no tiene mucha complejidad, pero por otra parte es un algoritmo lento y en muchos casos donde se puedan encontrar objetos parecidos en las imágenes, se puede confundir como por ejemplo en una imagen de una valla.
 - Versión mejorada: Este método consiste en mejorar el anterior, se seleccionan ahora los dos mejores match (menor distancia) dado un descriptor origen. Tenemos también un umbral que utilizaremos para seleccinar de estos dos match, el mejor. Lo que hace es calcular si el primer match es menor que el umbral multiplicado por la distancia con el segundo march, es decir, el match será bueno si el descriptor origen tiene una distancia pequeña respecto al descritor destino x y tiene una distancia grande sobre el descriptor destino y. De esta forma solucionamos el error comentado en el caso anterior de por ejemplo la imagen de una valla.
- 13. Cual es el objetivo principal en el uso de la técnica RANSAC en el cálculo de una homografía. Justificar la respuesta

El principal objetivo de RANSAC en el calculo de la homografía es **desechar los puntos** considerados como *outliers* y realizar el ajuste únicamente con los puntos *inliers*. Esto lo hace para hacer un ajuste con los puntos que se consideran realmente buenos y no con los puntos que pueden perjudicarnos a la hora de hacer el ajuste para calcular la homografía. Lo que hace es ir mirando la distancia que hay entre un punto en el origen y en su destino y si supera a un umbral establecido, se considera punto *outliers* y se elimina. Este proceso es iterativo y las homografías que se crean intermedias para poder calcular lo puntos *inliers* y *outliers* se realiza con una muestra aleatoria de 4 puntos.

14. ¿Si tengo 4 imágenes de una escena de manera que se solapan la 1-2, 2-3 y 3-4. ¿Cuál es el número mínimo de parejas de puntos en correspondencias necesarios para montar un mosaico? Justificar la respuesta

Sabemos que para poder tener una homografía entre 2 imágenes, necesitamos como mínimo 4 parejas de puntos en correspondencias. En este caso, necesitamos calcular 3 homografías, por lo que entonces necesitamos **12 parejas de puntos en correspondencias** que son un total de 24 puntos.

15. En la confección de un mosaico con proyección rectangular es esperable que aparezcan deformaciones de la escena real. ¿Cuáles y por qué? ¿Bajo qué condiciones esas deformaciones podrían desaparecer? Justificar la respuesta

Las deformaciones se generan principalmente porque las imagenes no están tomadas en un mismo plano y esto hace que al crear el mosaico y transportarlas al mismo plano, se creen

esas deformaciones.

Tenemos las deformaciones generadas por las propias transformaciones como la proyección, que se le aplican a la imagen, y las deformaciones que se van acumulando entre imagen e imagen.

Las deformaciones podrían desaparecer si tomamos las imagenes en el mismo plano, es decir, si por ejemplo el movimiento de la cámara para tomar las imágenes se mueve en un solo eje, si al tomar las imágenes la cámara se mueve únicamente en el eje X o únicamente en el eje Y estas deformaciones desaparecerán.

Por otra parte, las deformaciones acumuladas podemos paliarlas si al crear el mosaico, en vez de comenzar el mosaico de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, comenzamos desde la imagen central y expandemos el mosaico hacia ambos lados. Con esto conseguimos repartir el ruido de las transformaciones y no acumularlo todo sobre la última imagen que coloquemos.

Referencias

- [1] Freeman, W. T. and Adelson, E. H. (1991). The design and use of steerable filters. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 13(9):891–906. Accedido el 30 de noviembre de 2018.
- [2] Perona, P. (1995). Deformable kernels for early vision. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 17(5):488–499. Accedido el 30 de noviembre de 2018.
- [3] Richard Szeliski (2010). Computer Vision: Algorithms and Applications Accedido el 30 de noviembre de 2018.
- [4] Richard Hartley and Andrew Zisserman (2004). Multiple View Geometry in Computer Vision Accedido el 30 de noviembre de 2018.