Parcial #3. José David Pazos Ricaurte - 1004535394.

Solución 1er punto

El sistema masa, resorte y amortiguador se puede modelar a partir de la conservación de fuerzas.

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

Donde $F_S(t) = ky(t)$; $F_F(t) = c\frac{dy(t)}{dt}$, $F_I = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$

Por consiguiente:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{c\,dy(t)}{dt} + ky(t) = F_E(t) = x(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nx(t)}{dt}\right\} = s^nX(s)$, tenemos que

$$ms^2y(s) + csy(s) + ky(s) = X(s)$$

y

$$H(s) = \frac{y(s)}{X(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

↳ Función de transferencia, sistema masa resorte amortiguador.

Ahora para el circuito eléctrico presentado, hallamos la respectiva función de transferencia.

LVK malla int

$$-V_i(t) + L\frac{d}{dt}i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t) - i_2(t))\,dt = 0$$

utilizando las impedancias transformadas, obtenemos:

$$V_i(s) = Ls\,I_1(s) + (I_1(s) - I_2(s))\frac{1}{Cs} \qquad (1)$$

Ahora hallamos LVK malla $i_2(t)$

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2(t) - i_1(t))\,dt = 0$$

Donde $V_o(t) = i_2(t)R$

utilizando las impedancias transformadas, obtenemos

$$I^2(s)R + (I_2(s) - I_1(s))\frac{1}{Cs} = 0$$

Despejando $I_1(s)$, se obtiene

$$\frac{I_1(s)}{Cs} + \frac{I_2(s)}{Cs} + I_2(s)R$$

$$I_1(s) = \frac{I_2(s)}{Cs}Cs + I_2(s)RCs$$

$$I_1(s) = I_2(s)(1+CRs) \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$V_i(s) = Ls\,I_2(s)(1+CRs) + (I_2(s)(1+CRs) - I_2(s))\frac{1}{Cs}$$

$$V_i(s) = Ls\,I_2(s) + CRLs^2 I_2(s) + (I_2(s) + CRsI_2(s) - I_2(s))\frac{1}{Cs}$$

$$V_i(s) = Ls\,I_2(s) + (CRLs^2 I_2(s) + RI_2(s)$$

$$V_i(s) = I_2(s)\,[CRLs^2 + Ls + R]$$

$$\frac{I_2(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CRLs^2+Ls+R}$$

Reemplazando $I_2(s) = \frac{V_o(s)}{R}$ obtenemos:

$$\frac{V_o(s)}{R\,V_i(s)} = \frac{1}{CRLs^2+Ls+R}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{CRLs^2+Ls+R}\cdot\left(\frac{1/R}{1/R}\right)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{CLs^2+\frac{L}{R}s+1}$$ Función transferencia cto electrico

Equivalencia del cto eléctrico en péndulo elástico

Cto eléctrico	Pendulo elástico
CL	m
L/R	c
1	k

Entonces:

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Su equivalente en pendulo es:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2+cs+R} = \frac{1/m}{\left(s^2+\frac{cs}{m}+\frac{R}{m}\right)}$$

Hallando la Forma canónica de segundo orden:

- comparando:

$$s^2 + s\xi w_n s + w_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}$$

- igualando coeficiente

$1 = 1 \rightarrow$ coef s^2

$2\xi w_n = \frac{c}{m} \rightarrow$ coef s

$w_n^2 = \frac{k}{m} \rightarrow$ coef independiente

- Hallando frecuencia natural no amortiguado

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Hallando factor de amortiguamiento

$$2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{m} \Rightarrow \xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- Hallando la ganancia k

$$k w_n^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow k = \frac{1}{m w_n^2}$$

$$k = \frac{1}{m\frac{k}{m}}$$

$$k = \frac{1}{k} //$$

Finalmente, la Forma canónica de segundo orden es:

$$H(s) = k \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k/m}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)\sqrt{k/m}\, s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} //$$

• Hallando la Frecuencia natural amortiguada.

$$w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$w_d = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{k/m}}\right)^2}\right)$$

$$w_d = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{4km-c^2}}{2\sqrt{km}}$$

El tiempo de levantamiento y tiempo pico se hace por simulación:

• Hallando el tiempo de establecimiento

$$t_s = \frac{3}{\xi w_n} \Rightarrow t_s = \frac{3}{\left(\frac{c}{2m}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\sqrt{k/m}}$$

$$t_s = \frac{6m}{c}$$

Función de transferencia para masa resorte amortiguado lazo cerrado

Podemos representar la función de transferencia de un sistema de lazo de la sgte manera,

$$HLC = \frac{H(s)}{1+A(s)H(s)}$$

En este caso:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$ → Función de transferencia lazo abierto

$$A(s) = 1$$

calculamos $HLC(s)$:

$$HLC(s) = \frac{\frac{1}{ms^2+cs+k}}{1+\frac{1}{ms^2+cs+k}} = \frac{\frac{1}{ms^2+cs+k}}{\frac{ms^2+cs+k+1}{ms^2+cs+k}}$$

$$HLC(s) = \frac{\cancel{ms^2+cs+k}}{(\cancel{ms^2+cs+k})(ms^2+cs+k)}$$

$$HLC(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k+1} \quad ó \quad \frac{1/m}{s^2+\frac{c}{m}s+\left(\frac{k+1}{m}\right)}$$

Hallando la Forma canónica de segundo orden, o comparado.

$$s^2 + s\,\xi w_n s + w_n^2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \left(\frac{K+1}{m}\right)$$

comparando coeficientes.

$$1 = 1 \rightarrow \text{coef } s^2$$

$$2\xi w_n = \frac{c}{m} \rightarrow \text{coef } s$$

$$w_n^2 = \frac{K+1}{m} \rightarrow \text{coef independiente}$$

Hallando frecuencia natural no amortiguado

$$w_n = \sqrt{\frac{K+1}{m}}$$

Hallando factor de amortiguado

$$\xi = \frac{c}{2mw_n} = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{K+1}{m}}}$$

Hallando la ganancia

$$Kw_n^2 = \frac{1}{m} \quad \Rightarrow K = \frac{1}{m\,w_n^2}$$

$$K = \frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{K+2}{m}}\right)^2}$$

$$K = \frac{1}{K+1}$$

entonces de la Forma canónica de segundo orden es:

$$H_{LC}(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{(K+1)/m}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\left(\sqrt{\frac{K+1}{m}}\right)}\sqrt{(K+1)m^{1}} \cdot s \quad \frac{K+1}{m}\right)}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K+1}{m}\right)}$$

Hallando frecuencia natural amortiguada.

$$wd = wn\sqrt{1-\xi^2}$$

$$wd = \sqrt{\frac{k+1}{m}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{(k+1)(m)}}\right)^2}$$

$$wd = \frac{\sqrt{\frac{k+1}{m}}\sqrt{4km+4m-c^2}}{2\sqrt{m(k+1)}}$$

Hallando el tiempo de establecimiento

$$ts = \frac{3}{\xi wn} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}\cdot\sqrt{\frac{k+1}{m}}} = \frac{6m}{c}$$ //

Punto #2

Espectros de cada etapa

1) $A_1 m(t)\cos(2\pi f_0 t+\theta_0)$

$$A_1 m(t)\left(\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)=A\left(\frac{m(t)e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right)+\left(\frac{m(t)e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right)$$

con $F\{x(t)e^{\pm j\omega_0 t}\}=X(\omega\mp\omega_0)$

$$\frac{A}{2}M((\omega-2\pi f_0)+(\omega+2\pi f_0))$$

2) $\cos(2\pi f_0 t+\theta_0)$ con $\theta_0=0$

$$\cos(2\pi f_0 t)=\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\}=F\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right\}+F\left\{\frac{e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\}$$

con $F\{e^{\pm j\omega_0 t}\}=2\pi\delta(\omega\mp\omega_0)$

$F(\omega)=\pi\delta(\omega-2\pi F_0)+\pi\delta(\omega+2\pi f_0)\longrightarrow$ Mixer (1×2)

$$A_1 m(t)\cos^2(2\pi f_0 t+\theta_0)=\frac{A_1 m(t)}{2}+\frac{A m(t)}{2}\cos(4\pi f_0 t+2\theta_0)$$

$$F(\omega)=\frac{AM(\omega)}{2}+\frac{A}{2}m(t)\times\left(\frac{e^{j4\pi f_0 t}+e^{-j4\pi f_0 t}}{2}\right)$$

$$F(\omega)=\frac{AM(\omega)}{2}+\frac{A}{2}\left(\frac{m(t)e^{j4\pi f_0 t}}{2}\right)+\left(m(t)e^{-j4\pi f_0 t}\right)$$

con $F\{x(t)e^{\pm j\omega_0 t}\}=X(\omega\mp\omega_0)$

$F(\omega)=\dfrac{AM(\omega)}{2}+\dfrac{A}{4}M((\omega-4\pi f_0)+(\omega+4\pi f_0))\longrightarrow$ Low Pass

$$\frac{A_1}{2}m(t)$$

$F(\omega)=\dfrac{AM(\omega)}{2}\longrightarrow$ se escala a una amplitud por $\dfrac{2}{A_1}$

$$\frac{A_1}{2}(m(t))\cdot\frac{2}{A_1}=m(t)$$

$$F(m(t))=M(\omega)$$