Act 8: Laboratorio de Álgebra Lineal

Jose Manuel Enriquez

22 de febrero del 2024

1 Operaciones con matrices y determinantes

1. Encuentre la inversa de la siguiente matriz y verifique su resultado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Su forma aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Resolvemos para encontrar la inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

2. Demuestre la propiedad de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes.

   Queremos demostrar lo siguiente: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

   Si A y B son diagonizables entonces se cumple lo siguiente:
   $det(A) = a_{11} \cdot a_{21} \cdot ... \cdot a_{nn}$
   $det(B) = b_{11} \cdot b_{21} \cdot ... \cdot b_{nn}$

   Si C es el producto de estas dos matrices entonces:
   $det(C) = (a_{11} \cdot b_{11})(a_{22} \cdot b_{22}) \cdot ... \cdot (a_{nn} \cdot b_{bb}) = det(A) \cdot det(B)$

2 Sistema de ecuaciones lineales

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ -2x + 4y - 2z = 1 \\ x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

Ahora despejamos cada variable:

$x = \frac{7+y-z}{4}$

$y = \frac{1+2x+2z}{4}$

$z = \frac{5-x-+y}{3}$

1 iteración:

$x = y = z = 0$

$x = \frac{7+0-0}{4} = \frac{7}{4}$

$y = \frac{1+2(\frac{7}{4})}{4} = \frac{9}{8}$

$z = \frac{5-\frac{7}{4}+\frac{9}{8}}{3} = \frac{35}{24}$

2 iteración:

$x = \frac{7}{4}, y = \frac{9}{8}, z = \frac{35}{24}$

$x = \frac{7+\frac{9}{8}-\frac{35}{24}}{4} = \frac{5}{3}$

$y = \frac{1+2(\frac{5}{3})+2(\frac{35}{24})}{4} = \frac{29}{16}$

$z = \frac{5-\frac{5}{3}+\frac{29}{16}}{3} = \frac{247}{144}$

3 iteración:

$x = \frac{5}{3}, y = \frac{29}{16}, z = \frac{247}{144}$

$x = \frac{7+\frac{29}{16}-\frac{247}{144}}{4} = \frac{511}{288}$

$y = \frac{1+2(\frac{511}{288})+2(\frac{247}{144})}{4} = \frac{382}{192}$

$z = \frac{5-\frac{511}{288}+\frac{382}{192}}{3} = \frac{751}{432}$

Por lo tanto los valores finales son:
$x = \frac{511}{288}, y = \frac{382}{192}, z = \frac{751}{432}$

2. Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases}$$

Se puede escribir la primera ecuación como: $x + 2y + 3z = 0$
Resolvemos para x: $x = -2y - 3z$

Ya que el sistema tiene infinitas soluciones, se puede expresar la solución de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = -2t - 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

La solución final es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 Espacio vectoriales y auto-valores/auto-vectores

1. Encuentre la base y dimensión del subespacio generado por los vectores $\{(1, 2, 3), (2, 4, 6), (3, 6, 9)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Reducimos la matriz y nos queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La base es: $\{(1, 2, 3)\}$ y la dimensión es 1.

2. Determine los autovalores y autovectores de la matriz

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Primeramente calculamos: $G - \lambda I =$

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante: $(5-\lambda)(5-\lambda) - (-2)(-2) = 0$
$(5-\lambda)^2 - 4 = 0$
$(5-\lambda)^2 = 4$
$\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$
Ahora encontramos los autovectores:
Paso 2: Encontrar los autovectores
Para $\lambda_1 = 7$, resolvemos $(G - 7I)\mathbf{x} = 0$:

$$G - 7I = \begin{bmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$-2x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y$$

Tomando $y = 1$, obtenemos $x = -1$. Por lo tanto, el autovector asociado a $\lambda_1 = 7$ es:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$, resolvemos $(G - 3I)\mathbf{x} = 0$:

$$G - 3I = \begin{bmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$2x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Tomando $y = 1$, obtenemos $x = 1$. Por lo tanto, el autovector asociado a $\lambda_2 = 3$ es:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

1. Explique cómo el PCA (Análisis de Componentes Principales) utiliza el álgebra lineal para reducir dimensiones.
   El Análisis de Componentes Principales (PCA) es una técnica estadística utilizada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos mientras conserva la mayor cantidad de información posible. PCA utiliza álgebra lineal para transformar un conjunto de datos de muchas dimensiones a un nuevo conjunto de dimensiones más bajas, mediante la creación de nuevas variables llamadas componentes principales.

2. Calcule la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   La descomposición en valores singulares de la matriz A es $A = U\Sigma V^T$, donde:

   - U es la matriz de autovectores de AA^T, - Σ es la matriz diagonal de valores singulares, - V es la matriz de autovectores de A^TA.

   Calculamos A^TA y AA^T:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

   Los autovalores de A^TA son $\lambda_1 = 17.06$ y $\lambda_2 = 0.94$. Los valores singulares son $\sigma_1 = 4.13$ y $\sigma_2 = 0.97$.

   Los vectores singulares correspondientes son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.88 \\ 0.47 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0.47 \\ 0.88 \end{bmatrix}$$

   La matriz Σ es:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4.13 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix}$$

   Finalmente, la descomposición SVD de A es:

$$A = U\Sigma V^T$$

   Donde:

$$U = \begin{bmatrix} 0.87 & -0.5 \\ 0.5 & 0.87 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0.88 & -0.47 \\ 0.47 & 0.88 \end{bmatrix}$$

3. Analice el uso de álgebra lineal en el aprendizaje profundo con redes neuronales:
   El aprendizaje profundo (deep learning) y las redes neuronales artificiales se basan en principios matemáticos complejos, y el álgebra lineal juega un papel crucial en el funcionamiento de estas redes. Las redes neuronales son estructuras compuestas por capas de neuronas, donde cada capa realiza transformaciones lineales de los datos de entrada y las transforma en representaciones más abstractas y complejas.

4. Explique el impacto de los espacios vectoriales en la representación de datos en IA:
   El concepto de espacios vectoriales es fundamental en la representación de datos en inteligencia artificial (IA), particularmente en áreas como el aprendizaje automático y el aprendizaje profundo. Los espacios vectoriales permiten representar datos complejos de manera estructurada y matemática, facilitando su procesamiento, análisis y manipulación en diversas aplicaciones de IA.