Probabilidad y Estadística

Jose Manuel Enriquez

15 de febrero del 2025

1 Tipos de datos y Medidas de tendencia central

En una empresa se han recolectado los siguientes datos de 10 empleados.

Nombre	Edad (años)	Área de trabajo
Ana	25	Ventas
Luis	30	Administración
Marta	40	Producción
Carlos	35	Ventas
Elena	28	Recursos Humanos
Juan	50	Producción
Sofía	45	Administración
Pedro	38	Ventas
Daniel	33	Producción
Laura	27	Recursos Humanos

1. Clasifique las variables en cualitativas y cuantitativas
   (a) Cualitativas: Nombre y área de trabajo
   (b) Cuantitativas: Edad
2. Determine la media, mediana y moda de la variable "Edad"
   (a) Media = 35.1 años
   (b) Mediana = 34 años
   (c) Moda = No hay moda ya que todas las edades aparecen una vez.
3. Interprete los resultados obtenidos
   (a) En este caso la edad promedio del grupo es de 35.1 años, la edad que se encuentra en la mediana es de 34 años y no hay una moda en las edades.

2 Medidas de dispersión

Dado el siguiente conjunto de datos correspondiente a las calificaciones de 8 estudiantes en un examen:

$$X = \{70, 85, 90, 95, 88, 92, 75, 80\}$$

1. Calcule la varianza y la desviación estándar de los datos
   (a) Media = 84.375
   (b) Varianza = $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n} = 66.2344$
   (c) Desviación estándar = 8.14

3 Probabilidades y Teorema de Bayes

Una empresa de tecnología ha identificado que el 60% de sus empleados son programadores, y el 40% son diseñadores. Se sabe que el 70% de los programadores tienen conocimientos de inteligencia artificial (IA), mientras que solo el 30% de los diseñadores tienen estos conocimientos. Si se elige un empleado al azar y se sabe que tiene conocimientos de IA, ¿cuál es la probabilidad de que sea programador?

1. Definimos los eventos:
   (a) P = El empleado es programador
   (b) D = El empleado es diseñador
   (c) IA = El empleado tiene conocimientos de IA.
2. Información dada:
   (a) $P(P) = 0.6$ Probabilidad de que el empleado sea programador
   (b) $P(D) = 0.4$ Probabilidad de que el empleado sea diseñador
   (c) $P(IA|P) = 0.7$ Probabilidad de que el programador tenga conocimientos de IA
   (d) $P(IA|D) = 0.3$ Probabilidad de que el diseñador tenga conocimientos de IA
3. Aplicamos el teorema de Bayes

$$P(P|IA) = \frac{P(IA|P)P(P)}{P(IA)} \tag{1}$$

$$P(IA) = P(IA|P)P(P) + P(IA|D)P(D) \tag{2}$$

Sustituyendo los valores

$$P(IA) = (0.7)(0.6) + (0.3)(0.4) \tag{3}$$

$$P(IA) = 0.42 + 0.12 = 0.54 \tag{4}$$

4. Calculamos $P(P|IA)$

$$P(P|IA) = \frac{(0.7)(0.6)}{0.54} \tag{5}$$

$P(P|IA) = \frac{0.42}{0.54} \approx 0.7778$

4 Distribuciones de probabilidad

Suponga que el número de defectos en un lote de producción sigue una distribución de Poisson con media $\lambda = 3$ defectos por lote.

1. Calcule la probabilidad de que un lote tenga exactamente 2 defectos.

   La función Poisson se define de la siguiente manera:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{1}$$

   Donde:

   (a) $\lambda = 3$ es la media de defectos por lote

   (b) $k = 2$ es el número de defectos que queremos calcular.

   Cálculo de la probabilidad

$$P(X = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} \tag{2}$$

$$P(X = 2) = \frac{9e^{-3}}{2} \tag{3}$$

$$P(X = 2) = \frac{9}{2} e^{-3} \tag{4}$$

$$P(X = 2) = \frac{9}{2} * 0.0498 \tag{5}$$

$$P(X = 2) \approx 0.224 \tag{6}$$

2. Calcule la probabilidad de que un lote tenga al menos 1 defecto

   Queremos calcular la siguiente probabilidad:

$$P(X \geq 1) \tag{1}$$

   Usamos la propiedad de probabilidad complementaria

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \tag{2}$$

Calculamos la probabilidad para $k = 0$

$$P(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = \frac{1e^{-3}}{1} = e^{-3} \tag{3}$$

Calculamos la probabilidad final

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.0498 \tag{4}$$

$$P(X \geq 1) \approx 0.9502 \tag{5}$$

5 Funciones de densidad y distribución acumulativa

Sea X una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación estándar $\sigma = 10$.

1. Determine la probabilidad de que X tome un valor menor que 45

   Queremos calcular la probabilidad $P(X \leq 45)$. Primero estandarizamos la variable

   $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{1}$$

   Sustituimos los valores

   $$Z = \frac{45 - 50}{10} = \frac{-5}{10} = -0.5 \tag{2}$$

   Ahora queremos calcular: $P(X < 45) = P(Z < -0.5)$

   Se consulta la tabla de la distribución normal

   $$P(Z < -0.5) \approx 0.3085 \tag{3}$$

2. Determinar la probabilidad de que X esté entre 40 y 60.

   Convertimos X a la variable normal estándar Z, usando:

   $$Z = \tfrac{X-\mu}{\sigma}$$

   Para $X = 40$:

   $$Z = \tfrac{40-50}{10} = \tfrac{-10}{10} = -1$$

   Para $X = 60$:

   $$Z = \tfrac{60-50}{10} = \tfrac{10}{10} = 1$$

Entonces:

$$P(40 \leq X \leq 60) = P(-1 \leq X \leq 1)$$

Buscamos los valores en la tabla de la distribución normal:

$$P(Z \leq 1) = 0.8413 \; P(Z \leq -1) = 0.1587$$

Entonces:

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.8413 - 0.1587$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.6826$$

6 Probabilidad condicional

Un dado justo de seis caras se lanza dos veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en el segundo lanzamiento, dado que en el primero salió un número impar?

   Primero identificamos los eventos 1. Los numeros impares son $\{1, 3, 5\}$ por lo que la probabilidad de obtener un imparen el primer lanzamiento es:

   $$P(impar) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

   2. Los números pares son $\{2, 4, 6\}$, la probabilidad de obtener un número par en el segunda lanzamiento no depende del primero por lo que la probabilidad es: $P(par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   Dado que los lanzamientos son independientes la probabilidad de tener un par en el segundo lanzamiento es $P(par) = \frac{1}{2}$

7 Distribución binomial

Un examen de opción múltiple tiene 5 preguntas, cada una con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Un estudiante responde al azar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante acierte exactamente 3 respuestas?

   Sea X la cantidad de respuestas correctas. Entonces:

   $$X \sim Bin(n = 5, p = \frac{1}{4}) \tag{4}$$

Donde:
$n = 5$ es el número total de preguntas.
$p = \frac{1}{4}$ probabilidad de acertar una pregunta.

Queremos calcular: $P(X = 3)$
La fórmula de la distribución binomial es:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

Sustituimos $K = 3$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \tag{2}$$

Resolvemos:

$$P(X = 3) = 10 * \frac{1}{64} * \frac{9}{16} \approx 0.0879 \tag{3}$$

Por lo que la probabilidad de que acierte 3 preguntas es 8.79%

2. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos una pregunta?

   Queremos calcular: $P(X \geq 1)$

   Es más facil calcular la probabilidad de no acertar ninguna y restarle 1.
   $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

   Usamos la fórmula de distribución binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

   Para $k = 0$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0.2373 \tag{2}$$

   Calculamos la probabilidad:

$$P(X \geq 1) = 1 - 0.2373 \tag{3}$$

$$P(X \geq 1) = 0.7627 \tag{4}$$

8 Regla de Laplace

Una urna contiene 5 bolas rojas y 7 bolas azules. Se extrae una bola al azar

1. Determinar la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

   En total hay 12 bolas, por lo tanto la probabilidad de escoger una roja es:
   $P(roja) = \frac{5}{12} \approx 0.4167$

2. Si se extraen dos bolas sin remplazo ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean azules?

   La probabilidad de que la primera sea azul es: $P(azul) = \frac{7}{12}$
   Y la probabilidad de que la segunda sea azul es: $P(azul) = \frac{6}{11}$
   La probabilidad total es: $\frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{42}{132} = \frac{7}{22} \approx 0.3182$

9 Esperanza matemática

Suponga que una persona juega una lotería donde el premio es de 1000 dólares con una probabilidad de 0.01, y el costo del boleto es de 10 dólares.

1. Calcule la esperanza matemática de la ganancia del jugador.

   La fórmula para calcular la esperanza es la siguiente:

$$E(X) = P(\text{ganar}) \times \text{ganancia por ganar} + P(\text{no ganar}) \times \text{ganancia por no ganar}$$

   Sustituyendo los valores:

$$E(X) = 0.01 \times 990 + 0.99 \times (-10) = 0$$

   La esperanza es 0 dólares lo que significa que en promedio el jugador ni pierde ni gana a largo plazo.

10 Ley de los grandes números

Un experimento consiste en lanzar una moneda justa 1000 veces y calcular la frecuencia relativa de obtener cara.

1. ¿Cuál es el valor esperado de la frecuencia relativa de obtener cara?

   El valor esperado es $\frac{1}{2}$

2. ¿Cómo se relaciona esto con la Ley de los Grandes Números?

   La Ley de los Grandes Números afirma que, conforme realizamos más y más lanzamientos de la moneda, la frecuencia relativa de obtener cara (es decir, el número de caras dividido entre el número total de lanzamientos) se acercará al valor esperado, que es 0.5.