Act 8: Laboratorio de Álgebra Lineal

Jose Manuel Enriquez

22 de febrero del 2025

1 Repaso de sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ -2x + 4y + z = -3 \\ 5x + 2y - 3z = 10 \end{cases}$$

Paso 1: Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right]$$

Paso 2: Dividimos la primera fila entre 3 para hacer el primer pivote igual a 1:

$$R_1 \to \frac{1}{3} R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & -3 & 10 \end{array}\right]$$

Paso 3: Eliminamos los elementos debajo del primer pivote:

$$R_2 \to R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \to R_3 - 5R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right]$$

Paso 4: Multiplicamos la segunda fila por $\frac{3}{10}$ para hacer el pivote en la segunda fila igual a 1:

$$R_2 \to \frac{3}{10} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right]$$

Paso 5: Eliminamos los elementos sobre y debajo del pivote en la segunda columna:

$$R_1 \to R_1 + \frac{1}{3}R_2$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{11}{3}R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 6: Dividimos la tercera fila entre -5 para hacer el pivote en la tercera fila igual a 1:

$$R_3 \to \frac{1}{-5}R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Paso 7: Eliminamos los elementos sobre el pivote en la tercera columna:

$$R_1 \to R_1 - R_3$$

$$R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

La solución es:

$$x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{3}{10}, \quad z = -\frac{1}{5}.$$

2. Determine todas las soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Paso 1: Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Paso 2: Eliminamos los elementos debajo del pivote en la primera columna:

$$R_2 \to R_2 - 2R_1$$

$$R_3 \to R_3 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Paso 3: Eliminamos el elemento debajo del pivote en la segunda columna:

$$R_3 \to R_3 + \frac{5}{3}R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Paso 4: Hacemos el pivote en la tercera fila igual a 1:

$$R_3 \to \frac{3}{22}R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Paso 5: Eliminamos los elementos sobre el pivote en la tercera columna:

$$R_1 \to R_1 + R_3$$

$$R_2 \to R_2 - 5R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Paso 6: Hacemos el pivote en la segunda fila igual a 1:

$$R_2 \to -\frac{1}{3}R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La solución es:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

2 Matrices, determinantes y rango

1. Encuentre la inversa de la matriz si existe:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calcular el determinante de la matriz:

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 2(8) - (-1)(7) + 3(4) = 16 + 7 + 12 = 35$$

Como el determinante es 35, la matriz es invertible.

Paso 2: Calcular la matriz adjunta $\text{adj}(A)$:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 2 \\ -7 & -5 & 7 \\ 4 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Calcular la inversa de la matriz A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 8 & 13 & 2 \\ -7 & -5 & 7 \\ 4 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{35} & \frac{13}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{-7}{35} & \frac{-5}{35} & \frac{7}{35} \\ \frac{4}{35} & \frac{-11}{35} & \frac{1}{35} \end{bmatrix}$$

2. Determine si la siguiente matriz es ortogonal:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calcular la transpuesta de B, es decir, B^T:

$$B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Paso 2: Calcular el producto $B^T B$:

$$B^T B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que $B^T B = I$, la matriz B es ortogonal.

3 Propiedades de matrices relevantes para programación lineal

1. Explique la importancia de las matrices en la optimizaci´on lineal y resuelva un problema de transporte con matrices.
   Las matrices juegan un papel crucial en la optimización lineal, ya que permiten representar sistemas de ecuaciones lineales de manera compacta y eficiente. En muchos problemas de optimización, los coeficientes de las restricciones y la función objetivo pueden ser organizados en matrices y vectores, lo que facilita su resolución mediante métodos algebraicos y computacionales, como el Método Simplex o Programación Lineal.

2. Determinar el Rango de la Matriz y Explicar su Significado en un Contexto de Programación Lineal:

   La matriz C es:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

   (a) **Paso 1: Aplicar Eliminación Gaussiana:**
   Comencemos con la matriz original:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

   Primero, restamos el doble de la primera fila de la segunda fila para eliminar el primer elemento de la segunda fila:

$$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

   Luego, restamos tres veces la primera fila de la tercera fila para eliminar el primer elemento de la tercera fila:

$$F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (b) **Paso 2: Conclusión sobre el Rango:**
   La matriz resultante tiene solo una fila no nula (la primera fila), lo que significa que el rango de la matriz es 1.

   Esto indica que las columnas de la matriz están linealmente dependientes. Es decir, las columnas son combinaciones lineales de la primera columna.

(c) **Significado del Rango en Programación Lineal:**

El rango de la matriz tiene implicaciones clave en programación lineal:

- Un rango de 1 sugiere que las restricciones lineales son redundantes, ya que todas ellas pueden ser expresadas como combinaciones lineales de una sola ecuación.
- El rango también está relacionado con la dimensión del espacio de soluciones. En este caso, el espacio de soluciones tiene solo una dirección en el espacio.
- En problemas de programación lineal, un rango menor que el número de variables o restricciones sugiere que algunas de las restricciones no son necesarias para definir el problema y pueden ser eliminadas sin afectar la solución.

4 Problemas adicionales

1. Encontrar la Factorización LU de la Matriz:

   Dada la matriz D:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

   Queremos encontrar la factorización LU, tal que $D = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

   Multiplicamos las matrices L y U:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}$$

   Igualamos los elementos correspondientes:

   - $u_{11} = 4$
   - $u_{12} = 3$
   - $l_{21} \cdot u_{11} = 6 \quad \Rightarrow l_{21} = \frac{6}{4} = 1.5$
   - $l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = 3 \quad \Rightarrow 1.5 \cdot 3 + u_{22} = 3 \quad \Rightarrow u_{22} = -1.5$

   Por lo tanto, las matrices L y U son:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

La factorización LU es:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}$$

2. Resolver el Sistema Mediante Factorización LU:

   El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 6 \\ 2x + 3y + 3z &= 14 \\ y + 4z &= 8 \end{aligned}$$

   Paso 1: Representar en forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

   Paso 2: Factorización LU:

   La factorización LU de la matriz A es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Paso 3: Resolver el sistema en dos etapas:

   (a) Resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

   Resolviendo este sistema obtenemos $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$.

   (b) Resolver $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   Resolviendo este sistema obtenemos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{35}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$.

3. Determinar si la matriz es diagonalizable:

   Dada la matriz E:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Paso 1: Calcular los autovalores de E:

   Los autovalores se encuentran resolviendo el determinante de $E - \lambda I$:

$$E - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

   El determinante es:

$$\det(E - \lambda I) = (1-\lambda)^2$$

   Igualando a cero:

$$(1-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

   Por lo tanto, el único autovalor es $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica 2.

   Paso 2: Encontrar los autovectores:

   Sustituyendo $\lambda = 1$ en $E - I$, obtenemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   La ecuación $2v_2 = 0$ da $v_2 = 0$, y no hay restricción en v_1. Por lo tanto, los autovectores son de la forma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 \neq 0$$

   Paso 3: Determinar si es diagonalizable:

   Para que una matriz sea diagonalizable, debe tener suficientes autovectores linealmente independientes. En este caso, solo hemos encontrado un autovector linealmente independiente para el autovalor $\lambda = 1$, mientras que su multiplicidad algebraica es 2.

   Por lo tanto, la matriz E no es diagonalizable.

   Conclusión: La matriz E no es diagonalizable porque no tiene suficientes autovectores linealmente independientes.

4. Método de Jacobi para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10x + 2y - z &= 27 \\ -3x - 6y + 2z &= -61 \\ x + y + 5z &= -21 \end{aligned}$$

Paso 1: Reescribir el sistema:

$$x = \frac{27 - 2y + z}{10}, \quad y = \frac{-61 + 3x - 2z}{-6}, \quad z = \frac{-21 - x - y}{5}$$

Paso 2: Iteración inicial:

Supongamos $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$, $z^{(0)} = 0$.

Primera iteración:

1. Para $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = \frac{27 - 2(0) + 0}{10} = \frac{27}{10} = 2.7$$

2. Para $y^{(1)}$:

$$y^{(1)} = \frac{-61 + 3(0) - 2(0)}{-6} = \frac{-61}{-6} = 10.17$$

3. Para $z^{(1)}$:

$$z^{(1)} = \frac{-21 - 0 - 0}{5} = \frac{-21}{5} = -4.2$$

Segunda iteración:

1. Para $x^{(2)}$:

$$x^{(2)} = \frac{27 - 2(10.17) + (-4.2)}{10} = \frac{27 - 20.34 - 4.2}{10} = \frac{2.46}{10} = 0.246$$

2. Para $y^{(2)}$:

$$y^{(2)} = \frac{-61 + 3(2.7) - 2(-4.2)}{-6} = \frac{-61 + 8.1 + 8.4}{-6} = \frac{-44.5}{-6} = 7.42$$

3. Para $z^{(2)}$:

$$z^{(2)} = \frac{-21 - 2.7 - 7.42}{5} = \frac{-31.12}{5} = -6.224$$

Paso 3: Continuar las iteraciones hasta la convergencia.