Metodo de Newton para Sistemas de 2 ecuaciones no lineales

José Espinoza Peralta

13 de enero de 2023

Índice

1. El método de Newton- Función variable real **2**

2. Sistemas de ecuaciones no lineales **2**

3. El método de Newton- Función varias variables **2**

4. El método de Newton- Sistema 2 ecuaciones **3**

5. Algoritmo- Método de Newton **4**

6. Diagrama de flujo - Método de Newton **4**

7. Código C++ **5**

8. Resultados **6**

9. ANEXOS **7**

1. El método de Newton- Función variable real

Método que se utiliza para calcular los ceros de una función real de variable real. Aunque no sea siempre el mejor método para un problema dado, su simplicidad formal y su rapidez de convergencia hacen que, con frecuencia, sea el primer algoritmo a considerar para esta tarea.

El método de Newton-Raphson se basa en el desarrollo de Taylor de la función cuya raíz se quiere calcular. Consideremos la ecuación $\boldsymbol{f(x)} = 0$, y supongamos que posee una y sólo una solución $\alpha \in [a, b]$. Partiendo de un punto x0 suficientemente cercano a dicha raíz, podemos escribir:

$$\boldsymbol{f(\alpha) = f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) + \frac{(\alpha - x_0)^2}{2}f''(x_0) + ...}$$

Suponiendo que $f'(x)$ no se anula en $[a, b]$, y que la diferencia $\alpha - x_0$ es muy pequeñas, el método de Newton-Raphson consiste en despreciar los términos desde el sumando $(\alpha - x_0)^2$ del desarrollo anterior, quedándonos con la aproximación:

$$\boldsymbol{f(\alpha) \cong f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0)}$$

Como α es la solución de la ecuación $\boldsymbol{f(x)} = 0$ se tiene que $\boldsymbol{f(\alpha)} = 0$ y por tanto, de la expresión anterior se sigue que:

$$\boldsymbol{f(x_0) + (\alpha - x_0)f'(x_0) \cong 0}$$

y despejando α resulta:

$$\boldsymbol{\alpha \cong x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1}$$

Así pues, si se parte de un valor x_0 próximo a α, el valor siguiente x_1 obtenido de esta forma proporciona un valor más próximo a la raíz α. El proceso puede seguir repitiéndose sucesivamente hasta encontrar un x_k lo suficientemente próximo a la raíz α.

2. Sistemas de ecuaciones no lineales

Sea $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de varias variables, no-lineal. Se quiere resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{f(x)} = 0$, donde $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ representa al vector de incógnitas.

3. El método de Newton- Función varias variables

Una de las ventajas del método de Newton-Raphson ademas de su velocidad de convergencia, es que se puede generalizar fácilmente a sistemas de ecuaciones no lineales.

Supongamos que $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n$ es la solución del sistema de ecuaciones, y que $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_n)^t$ es dos veces diferenciable. Entonces aplicando el desarrollo de Taylor para funciones de varias variables de $\boldsymbol{f}$ en torno a una aproximación de la raíz $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})^t$, se tiene que:

$$\boldsymbol{0 = f(\alpha) = f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(\alpha - x^{(k)}) + \mathcal{O}(\left\|\alpha - x^{(k)}\right\|^2)}$$

Donde $J(x^{(k)})$ es la **matriz Jacobiana** en $x^{(k)}$:.

$$J(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^{(k)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^{(k)}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Notamos que cuando $\left\|\alpha - x^{(k)}\right\|$ es pequeño, el término $\mathcal{O}(\left\|\alpha - x^{(k)}\right\|^2)$ es mucho más pequeño aún y puede despreciarse en el desarrollo de Taylor anterior:

$$\boldsymbol{0 = f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(\alpha - x^{(k)}) + \mathcal{O}(\left\|\alpha - x^{(k)}\right\|^2)}$$

$$\boldsymbol{\approx f(x^{(k)}) + J(x^{(k)})(\alpha - x^{(k)})}$$

Si además la matriz $J(x^{(k)})$ es invertible, entonces podemos aproximar la raíz *alpha* despejandola en la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{\alpha \approx x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)})}$$

El **método de Newton** consiste en, dada la aproximación de la solución $x^{(k)}$, tomar como nueva aproximación $x^{(k+1)}$ el valor de la expresión anterior:

$$\boldsymbol{x^{(k+1)} := x^{(k)} - [J(x^{(k)})]^{-1} f(x^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

donde $x^{(0)}$ es la aproximación inicial.

4. El método de Newton- Sistema 2 ecuaciones

Sea $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de 2 variables, no-lineal. Para el trabajo requerido, se quiere resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{f(x, y)} = (0, 0)^t$.

Teniendo que $f(x, y) = (f_1, f_2)^t$ y su respectivo Jacobiano sea:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Por el metodo de Newton desarrollado anteriormente, tendremos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{k} - J^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{k} . f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{k}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

En la practica, hallar la inversa del jacobiano es lo que requiere el mayor numero de cálculos, y se buscan otras maneras de resolver la igualdad presentada. En este momento nos centraremos en el caso sencillo de 2 variables, teniendo en cuenta que todo esto se puede generalizar a n variables solo si tenemos un método optimo de obtener inversas de matrices cuadradas nxn.

Siguiendo esto, plantearemos el siguiente ejercicio, donde debemos hallar la solución al siguiente sistema no lineal, donde se representa la posición de un balón de fútbol cerca a la linea de campo, y necesitamos los puntos de intersección para hallar el porcentaje de volumen del balón fuera del campo:

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 &= 22 \\ 5x + 9y &= 55 \end{cases}$$

donde se obtiene que la función f quedaría:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + (y-3)^2 - 22 \\ 5x + 9y - 55 \end{pmatrix}$$

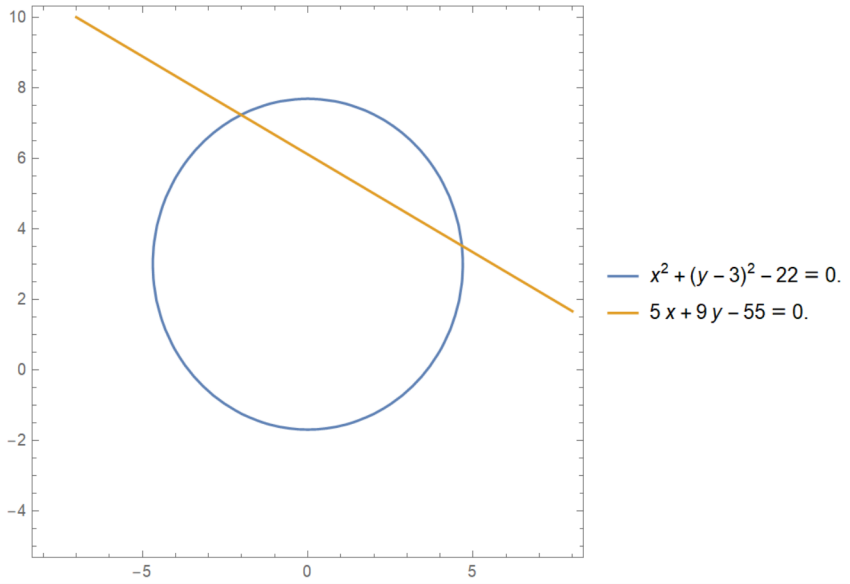

Figura 1: Grafica de las posiciones balón-linea de Campo

5. Algoritmo- Método de Newton

i) Definir librerías

ii) Inicializar $f(x, y)$,el jacobiano J, semilla inicial (x_0, y_0), la tolerancia y el numero de iteraciones máximo n.

iii) Repetir $k = 1 : n$

iv) Si $\|f(x_0, y_0)\|^2 < tol \Rightarrow$ la raiz aproximada es (x_0, y_0)

FIN

Sino Calcular: $|J(x_0, y_0)|$

v) Si $|J(x_0, y_0| = 0$, imprimir ERROR, matriz jacobiana no tiene inversa. Ingresar nueva semilla

vi)Sino Calcular: $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - (d_1, d_2)$ donde;

$delta = (d_1, d_2) = J^{-1}(x_0, y_0).f(x_0, y_0)$ es la variación de los (x_i, y_i) en cada iteración

Nota: el calculo de la inversa del Jacobiano se hará con formula explicita(ver anexos). Para casos generales, debemos utilizar alguna algoritmo aparte que nos brinde esta.

Asignar $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$

vii)Imprimir k, x_0, y_0

6. Diagrama de flujo - Método de Newton

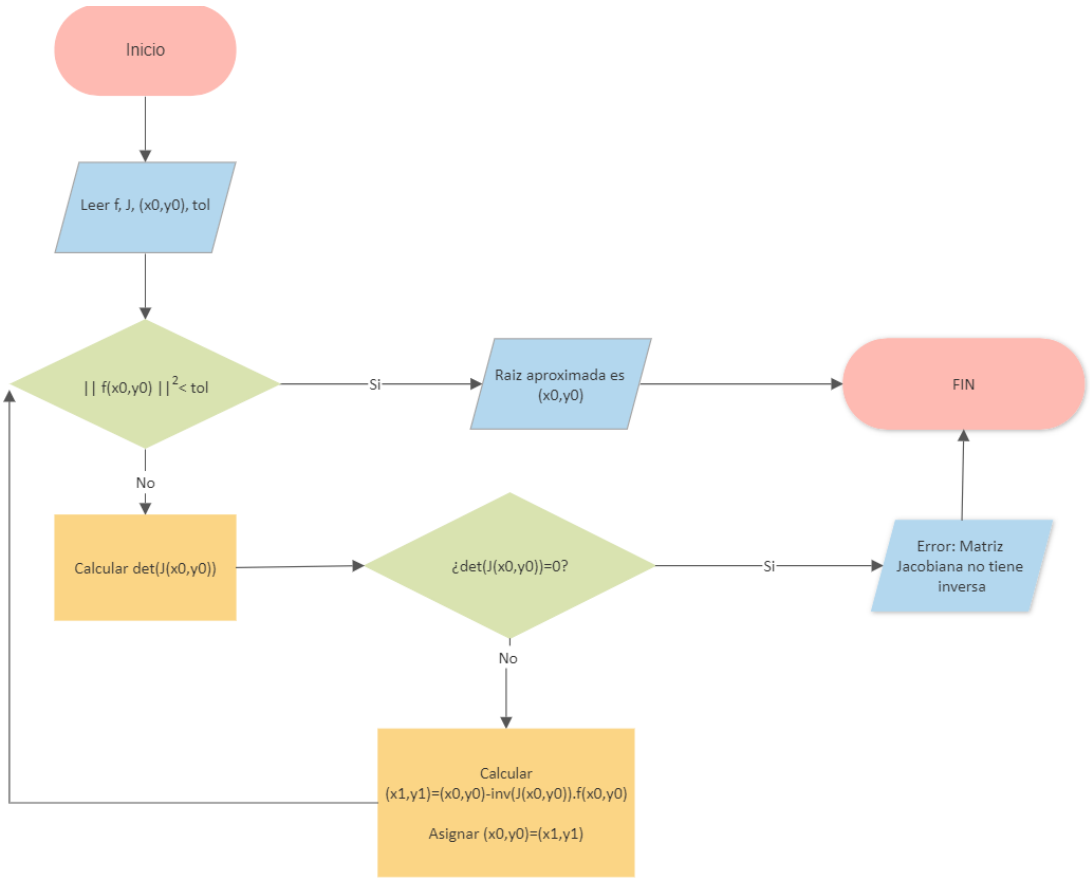

Figura 2: Placa de acero

7. Código C++

```
#include <iostream>
#include <conio.h>
#include <iomanip>
#include <cmath>
# define f1(x,y) (x*x+pow((y-3),2)-22) //Ingreso las componentes de la  funcion f
# define f2(x,y) (5*x+9*y-55)
# define jf11(x,y) (2*x)        // Defino el Jacobiano
# define jf12(x,y) (2*y-6)
# define jf21(x,y) (5)
# define jf22(x,y) (9)
using namespace std;
int main ()
{float x0,y0,x11,x12;  //Entro la semilla (x0,y0)
float j11,j12,j21,j22,nj11,nj12,nj21,nj22; //variables auxiliares para calculos del jacobia
float det,d1,d2,tol; // variables auxiliares y tolerancia
int n;
cout<<"Ingrese x0="; cin>>x0;
cout<<"Ingrese y0="; cin>>y0;
cout<<"Ingrese n="; cin>>n;
cout<<"Ingrese tol="; cin>>tol;
printf("k \t x01    \t x02  \n");
cout << "=============================================" << endl;
    for (int k=1;k<=n;k++)
    {  if((pow(f1(x0,y0),2)+pow(f2(x0,y0),2))<=tol){
                break; }

        else {  //Calculo J(x0,y0)
    j11=jf11(x0,y0);j12=jf12(x0,y0);
    j21=jf21(x0,y0);j22=jf22(x0,y0);

        //Calculo Inversa de J=  1/det(J) (Adj(J)*T)

    //1.Calculo determinante
    det=j11*j22-j12*j21;

    if (det==0){
                cout<<"ERROR, Matriz jacobiana no invertible.Ingrese nueva semilla";
                break;}
    else{
                //2. Calculo inversa J componente a componente
        nj11=j22/det;    nj12=-j12/det;
        nj21=-j21/det;  nj22=j11/det;

                 //Calculo inv[J(x0,y0)].f(x0,y0)
        d1=nj11*f1(x0,y0)+nj12*f2(x0,y0);
        d2=nj21*f1(x0,y0)+nj22*f2(x0,y0);

                //Hallo siguiente x1
        x11=x0-d1;
        x12=y0-d2;

        //Asigno x1 ---->  x0
        x0=x11;
        y0=x12;
                printf("%d %12.6f %12.6f \n",k,x0,y0);  }
                }
        }
        return 0;
```

}

8. Resultados

Como se observa en la Figura 1 existen 2 soluciones a hallar.

Una primera aproximación a escoger podría ser $(x_0, y_0) = (0, 8)$, por lo que ingresaremos a nuestro programa esta semilla, junto con un máximo de 15 iteraciones y una tolerancia= 0,000001. Se ve en la siguiente figura los resultados. $(x = -2{,}019828, y = 7{,}233237)$

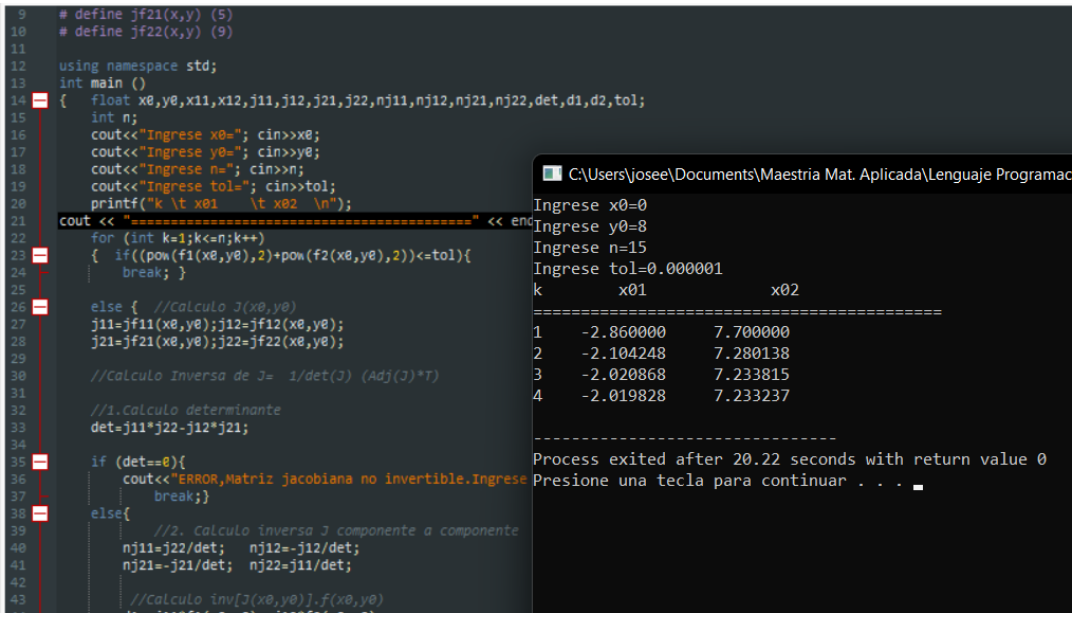

Figura 3: Primer solución

Una segunda aproximación a escoger podría ser $(x_0, y_0) = (5, 4)$, por lo que ingresaremos a nuestro programa esta otra semilla, junto con un máximo de 15 iteraciones y una tolerancia= 0,000001. Se ve en la siguiente figura los resultados. $(x = 4{,}661337, y = 3{,}521479)$

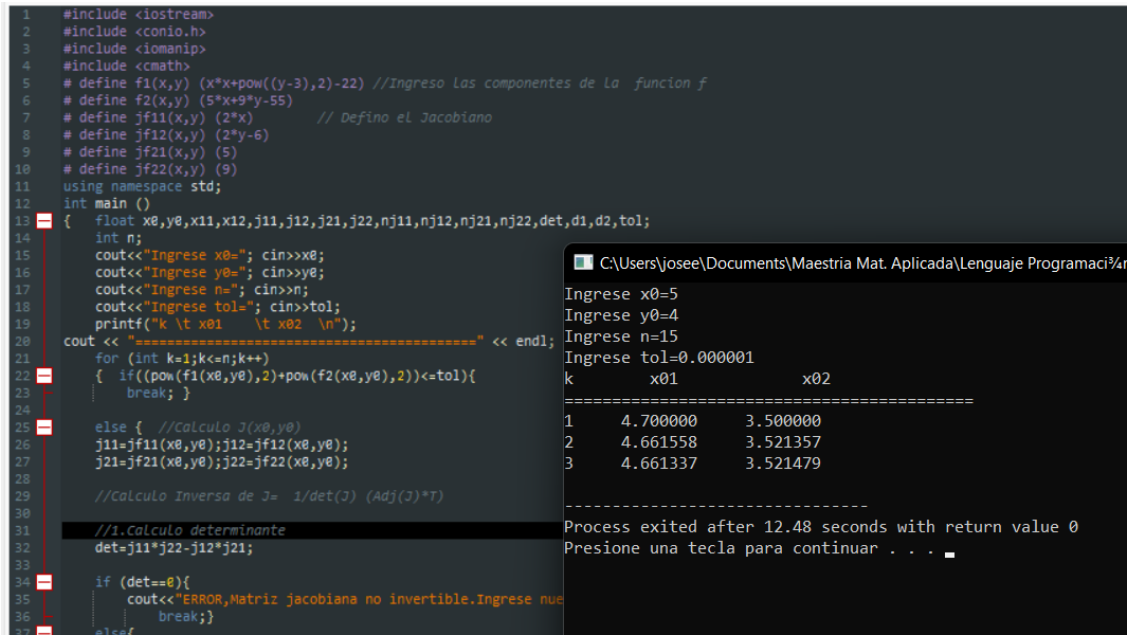

Figura 4: Segunda solución

9. ANEXOS

En esta parte daremos las formulas explicitas de la inversa de cualquier matriz $2x2$.

Sea A una matriz de $2x2$ cualquiera:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Esta es invertible si solo si, su determinante es distinto de cero, es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$ad - cb \neq 0$$

Si se cumple lo anterior, la inversa de una matriz de $2x2$ se define como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . (Adj(A))^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Referencias

[1] Angelo Santana del Pino.Métodos Numéricos 3. Recuperado el 9 diciembre 2022 de https://estadistica-dma.ulpgc.es/FCC/

[2] P. Venegas.Departamento de Matemática Facultad de Ciencias Universidad del Bío-Bío, Concepción. Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones no Lineales. Recuperado el 9 diciembre 2022 de http://ciencias.ubiobio.cl/pvenegas/220138/