

# Informe: Control de posición de una plataforma

Francisco Aguilera-Quesada, Emiliano Alfaro-Chacon, Jose Fabio Navarro-Naranjo  
Francisco720@estudiantec.cr 035444@estudiantec.cr josefabio1127@estudiantec.cr

Área académica de Ingeniería Mecatrónica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica

## I. INTRODUCCIÓN

De manera general, el diagrama de la figura 1, describe un sistema de control realimentado que se utiliza para controlar la posición de una banda que se mueve gracias a la acción de una cremallera.

El sistema tiene una entrada de tensión que se realimenta con el voltaje de un potenciómetro que permite medir la posición de la cremallera en la salida (dicho potenciómetro se modela mediante el uso de una constante, para simplificar la señal de realimentación). Esta tensión pasa por un controlador, el cual tiene una ganancia ajustable, que se utiliza como control proporcional del sistema.

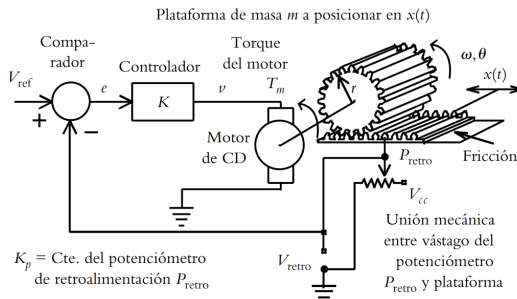


Figura 1. Sistema de control realimentado.

Luego, se tiene un motor de CD, el cual se muestra de manera detallada en la figura 2. Dicho motor tiene un imán permanente y es controlado mediante corriente de armadura, gracias al voltaje que llega justo luego de la etapa del controlador.

Este motor, se encarga de mover un engrane, sin embargo, el movimiento de dicho engrane tiene cierto desfase respecto al eje del motor. Finalmente, con el movimiento del engrane, se logra mover de igual manera la cremallera. Con el movimiento de la cremallera, se modifica el valor del potenciómetro, y por ende la señal de retroalimentación que se envía, y con esto se logra el control del sistema.

Por último, antes de comenzar con el desarrollo de la solución, se debe primero de identificar la señales que se encuentran del sistema. Por este motivo, en la figura 3 se encuentra un diagrama con las principales señales y bloques identificados.

Para este caso, en cuanto a las señales, la señal de entrada es la tensión de referencia, la señal de retroalimentación es la tensión enviada por el potenciómetro desde la banda, la señal de salida es la posición  $x(t)$  de la banda, y la señal

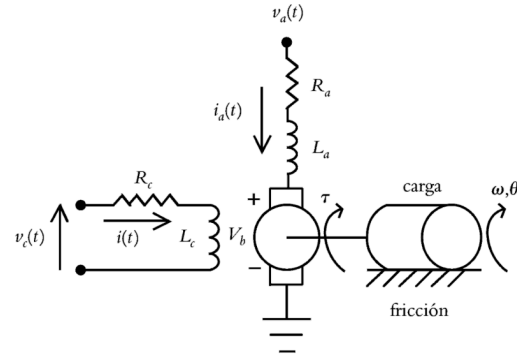


Figura 2. Motor CC controlado por corriente de armadura.

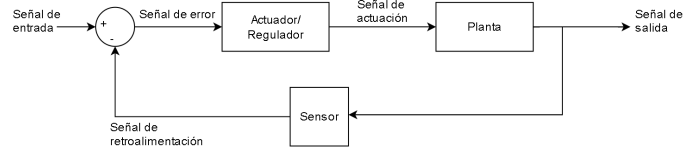


Figura 3. Diagrama de bloques con las señales y bloques principales del sistema.

de actuación corresponde a la señal obtenida en el sistema justo luego de aplicar la constante de control K. Ahora bien, respecto a los bloques, el bloque actuador y regulador es el bloque conformado por la constante K, el bloque sensor hace referencia al potenciómetro, por lo que la ganancia de este bloque corresponde a la constante  $K_p$ , y por último, el bloque de planta corresponde a la unión del motor CD junto con el sistema mecánico para el movimiento de la banda. La función de transferencia de dicho bloque se describe en la sección a continuación.

## II. DESARROLLO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Para la descripción total del sistema es necesario definir las magnitudes de las diversas constantes. El Cuadro I muestra las magnitudes necesarias.

### II-A. Análisis inicial del sistema

Al realizar el análisis inicial del sistema se concluyó que lo correcto como primer paso de resolución sería plantear la conexión total del sistema provisto. Seguido a esto se planificó deducir la parte mecánica del motor y su correlación con la parte eléctrica. Como último paso se planteó el análisis de la parte eléctrica. Se definen las ecuaciones de correlación

Cuadro I  
TABLA CON VALORES DE LAS CONSTANTES

Variable	Valor
$V_{ref}(t)$	1 [V]
$R$	1 [ $\Omega$ ]
$L$	0.1 [H]
$k_A$	0.6 [V·s/rad]
$k_f$	0.6 [N·m/A]
$r$	0.5 [m]
$J$	5 [kg·m <sup>2</sup> ]
$b$	3 [N·s/m]
$m$	4 [kg]
$k_p$	0.5 [V/m]
$k_t$	1 [N·m/rad]

entre la parte eléctrica y la parte mecánica de un motor CD de imán permanente, las mismas se muestran en la ecuación 1. Seguido a esto se analizó el comportamiento de la parte mecánica del sistema.

$$\begin{aligned} T_m &= k_f \cdot i_A(t) \\ V_b &= K_A \cdot \omega_m(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Se inició el análisis desde la sumatoria de torques sobre la salida del motor, esta se muestra en la ecuación 2, fueron considerados los torques del motor y la fuerza de reacción entre el engrane y la cremallera. Con el fin de determinar el valor de la fuerza F se realizó una sumatoria de fuerzas sobre la plataforma, lo obtenido se muestra en la ecuación 3, donde es necesario considerar la fricción viscosa y la dinámica del sistema. Adicionalmente se consideró el efecto de la barra torsional sobre el comportamiento, donde se dedujo que el torque sobre esta es idéntico al torque entregado por el motor, desde esta igualdad y las ecuaciones de correlación se deduce la ecuación 8 que define el comportamiento del desplazamiento angular del motor en razón al desplazamiento de la masa. Sustituyendo lo obtenido desde la sumatoria de fuerzas se obtiene la ecuación 4.

$$\sum = J \cdot \alpha = T_m - F \cdot r \quad (2)$$

$$\begin{aligned} m \cdot a &= F - f \\ \Rightarrow F &= m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$J \cdot \ddot{\theta}(t) + r(m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x}) = k_f \cdot i_A(t) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \theta(t) \cdot r \\ \Rightarrow (J + r^2 \cdot m) \ddot{\theta}(t) + b \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}(t) &= k_f \cdot i_A(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$(J + r^2 \cdot m) s^2 \cdot \theta(s) + b \cdot r^2 \cdot s \cdot \theta(s) = k_f \cdot I_A(s) \quad (6)$$

El desplazamiento lineal de la plataforma llamado  $x(t)$  se relaciona con el desplazamiento angular de forma que se obtiene la ecuación 5. Con esto la parte mecánica queda completamente definida. Continuando con el análisis propuesto se enfocó en el comportamiento de la parte eléctrica de motor donde se realiza la sumatoria de tensiones de la malla que se muestra en la Figura 2. La ecuación resultante se muestra en la ecuación 7. La tensión en el motor se relaciona directamente con la ecuación de correlación y se sustituye la tensión en el inductor y en la resistencia según ley de Ohm, la ecuación con las sustituciones realizadas se muestra igualmente en la ecuación 7. La velocidad angular del motor es equivalente a la derivada de la posición angular del motor. Vinculado lo anterior a la ecuación 3 que relaciona la posición angular del motor y la masa, se deduce la ecuación 4 que describe el comportamiento de la tensión de armadura en términos de la corriente de armadura y la posición angular de la masa.

$$\begin{aligned} V_a(t) &= V_L + V_R + V_b \\ \Rightarrow V_a(t) &= L \cdot \frac{d i_A(t)}{dt} + R \cdot i_A(t) + k_A \cdot \dot{\theta}_m(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T_m &= T_k = k_t(\theta_m(t) - \theta(t)) \\ \Rightarrow \theta_m(t) &= \frac{k_f}{k_t} i_A(t) + \theta(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Rightarrow V_a(t) = \left( L + \frac{K_A \cdot k_f}{k_t} \right) \frac{d i_A(t)}{dt} + R \cdot i_A(t) + k_A \cdot \dot{\theta}(t) \quad (9)$$

$$V_a(t) = (V_{ref} - k_p \cdot r \cdot \theta(t)) k \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (V_{ref} - k_p \cdot r \cdot \theta(t)) k &= \left( L + \frac{K_A \cdot k_f}{k_t} \right) \frac{d i_A(t)}{dt} \\ &+ R \cdot i_A(t) + k_A \cdot \dot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{ref} \cdot k - k_p \cdot r \cdot k \cdot \theta(s) &= R \cdot I_A(s) \\ &+ \left( L + \frac{K_A \cdot k_f}{k_t} \right) s \cdot I_A(s) + k_A \cdot s \theta(s) \end{aligned} \quad (12)$$

Es relevante señalar que desde el análisis del diagrama de bloques es fácilmente deducible que la conexión de salida del bloque K de la Figura 1 corresponde a la tensión de armadura del motor. Desde las deducciones anteriores es posible generar un diagrama de bloques que vincule cada sección del sistema, este se muestra en la Figura 4.

## II-B. Ecuaciones dinámicas

Con el fin de definir las ecuaciones dinámicas del sistema y su respectiva representación en espacio de estados es necesario definir las variables de estado. La primer variable de estados elegida fue la posición angular de la masa, esto bajo el criterio

de la existencia de tanto su primera como segunda derivada para la definición del sistema, por consiguiente es necesario elegir como segunda variable de estado la velocidad angular. Bajo el mismo criterio se selecciona la corriente de armadura como la tercera variable de estado. Las variables de estados se muestran en la Figura 13.

Las ecuaciones de estado serán las derivadas de las variables de estado propuestas. Sustituyendo las ecuaciones y las variables de estados en la ecuación deducida desde la sumatoria de torques se obtiene la ecuación dinámica de  $\dot{x}_2$ . Para obtener la ecuación que define el comportamiento de  $\dot{x}_3$  se utiliza lo deducido desde la parte eléctrica, de esta manera se obtiene la ecuación 16. Es lógico deducir que  $\dot{x}_1$  es equivalente a  $x_2$ . Tomando la salida como la posición lineal la misma se definiría como el producto de la posición angular y el radio de la masa.

Las ecuaciones dinámicas en espacio de estados se muestra desde la ecuación

17.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \theta(t) \\ x_2(t) &= \omega(t) \\ x_3(t) &= i_A(t) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = \omega(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{\omega}(t) = \dot{\omega}(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{d i_A(t)}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{b \cdot r^2}{J + r^2 \cdot m} x_2(t) + \frac{k_f}{J + r^2 \cdot m} x_3(t) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= -\frac{k_t \cdot k \cdot k_p \cdot r \cdot x_1(t)}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} - \frac{k_A \cdot k_t \cdot x_2(t)}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} \\ &\quad - \frac{k_t \cdot R \cdot x_3(t)}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} + \frac{k_t \cdot k \cdot V_{ref}}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot V_{ref}(t) \\ \underline{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b \cdot r^2}{J + r^2 \cdot m} & \frac{k_f}{J + r^2 \cdot m} \\ -\frac{k_t \cdot k \cdot k_p \cdot r}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} & -\frac{k_A \cdot k_t}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} & -\frac{k_t \cdot R}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} \end{bmatrix} \\ \underline{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_t \cdot k}{L \cdot k_t + k_A \cdot k_f} \end{bmatrix} \\ y &= \underline{C} \cdot \underline{x}(t) \\ \underline{C} &= [r \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \quad (17)$$

### II-C. Funciones de transferencia

Una vez obtenido el diagrama de bloques de todo el sistema, mostrado en la figura 4, se procede a obtener la función de transferencia para el bloque de planta, acorde a el diagrama

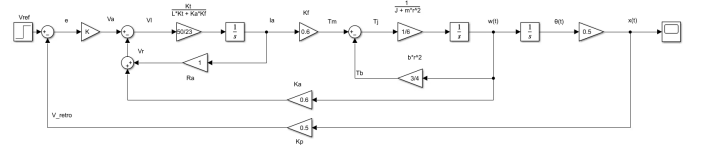


Figura 4. Diagrama de bloques del sistema sin simplificar.

mostrado en la figura 3. Para esto, primero se procede a realizar una reducción del lazo cerrado que pertenece a la sección mecánica del sistema. Luego de dicha reducción, se obtiene el diagrama mostrado en la figura 5.

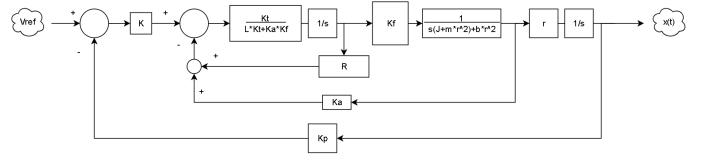


Figura 5. Simplificación del diagrama de bloques del sistema paso 1.

Ahora, lo que se hace es mover el punto de suma que sigue luego del bloque Ka, justo luego del bloque K, de modo que quede un lazo cerrado con los bloques correspondientes al motor de imán permanente. Luego de simplificar dicho lazo, se obtiene el diagrama de la figura 6.

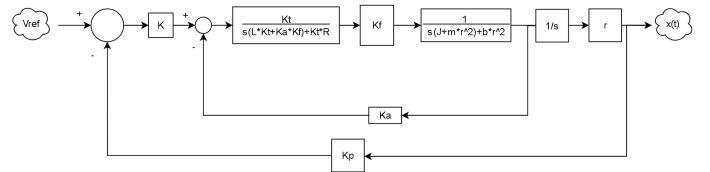


Figura 6. Simplificación del diagrama de bloques del sistema paso 2.

Ahora, se observa que luego de la reducción, se obtiene otro lazo cerrado, por lo que se continúa reduciendo este lazo, y se muestra el diagrama resultante en la figura 7.

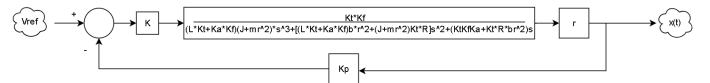


Figura 7. Simplificación del diagrama de bloques del sistema paso 3.

Si se compara el diagrama de la figura 7 con el diagrama de la figura 3, se puede notar que la función de transferencia de la planta es la función resultante que se muestra en la figura 7. Dicha ecuación se muestra en la ecuación 18.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k_t \cdot k_f}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s} \\ a_3 &= (L \cdot k_t + k_A \cdot k_f)(J + m \cdot r^2) \\ a_2 &= [(L \cdot k_t + k_A \cdot k_f)b \cdot r^2 + (J + m \cdot r^2)k_t \cdot R] \\ a_1 &= k_t \cdot k_f \cdot k_A + k_t \cdot R \cdot b \cdot r^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora bien, si se evalúan los parámetros la función de transferencia de la planta se convierte en la ecuación 19.

$$\Rightarrow G(s) = \frac{0,6}{2,76 \cdot s^3 + 6,345 \cdot s^2 + 1,11 \cdot s} \quad (19)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\frac{5}{23}}{s^3 + \frac{423}{184} \cdot s^2 + \frac{37}{92} \cdot s}$$

*II-C1. Función de transferencia directa:* si se parte de la figura 7, se puede observar que la función de transferencia directa se muestra en la ecuación 20. Los coeficientes de dicha ecuación son los mismos de la ecuación 18.

$$G(s) = \frac{k_t \cdot k_f \cdot r \cdot K}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{0,3 \cdot K}{2,76 \cdot s^3 + 6,345 \cdot s^2 + 1,11 \cdot s} \quad (20)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\frac{5}{46} \cdot K}{s^3 + \frac{423}{184} \cdot s^2 + \frac{37}{92} \cdot s}$$

*II-C2. Función de transferencia de lazo abierto:* observando la función de transferencia de realimentación, se puede obtener la función de transferencia de lazo abierto. Dicha función se muestra en la ecuación 21.

$$G(s)H(s) = \frac{k_t \cdot k_f \cdot r \cdot K \cdot k_p}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s}$$

$$\Rightarrow G(s)H(s) = \frac{0,15 \cdot K}{2,76 \cdot s^3 + 6,345 \cdot s^2 + 1,11 \cdot s} \quad (21)$$

$$\Rightarrow G(s)H(s) = \frac{\frac{5}{92} \cdot K}{s^3 + \frac{423}{184} \cdot s^2 + \frac{37}{92} \cdot s}$$

*II-C3. Función de transferencia de lazo cerrado:* aplicando una reducción del lazo, se obtiene la función de transferencia a lazo cerrado que se muestra en la ecuación 22.

$$T(s) = \frac{k_t \cdot k_f \cdot r \cdot K \cdot k_p}{a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s}$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{0,3 \cdot K}{2,76 \cdot s^3 + 6,345 \cdot s^2 + 1,11 \cdot s + 0,15 \cdot K}$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{\frac{5}{46} \cdot K}{s^3 + \frac{423}{184} \cdot s^2 + \frac{37}{92} \cdot s + \frac{5}{92} \cdot K} \quad (22)$$

#### II-D. Estabilidad del sistema

Por otra parte, como se observa en la función de transferencia del sistema, la variable K puede afectar el funcionamiento del sistema, ya que la ubicación de los polos dependen de esta. Es por este motivo que se debe analizar la estabilidad del sistema. Gracias al análisis mediante el criterio de Routh-Hurwitz, se obtuvieron las inecuaciones 23 y 24.

$$\frac{5 \cdot k}{92} > 0$$

$$\Rightarrow k > 0 \quad (23)$$

$$\frac{37}{92} - \frac{10}{423} > k$$

$$\Rightarrow 17,01 > k \quad (24)$$

Gracias al análisis anterior, en la ecuación 25 se muestra el rango de la variable K para que el sistema sea estable.

$$\Rightarrow 0 < k < 17,01 \quad (25)$$

### III. RESULTADOS EXPERIMENTALES

#### IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

##### IV-A. Comportamiento del sistema en función de la constante K

¿Cómo afecta el comportamiento del sistema en lazo cerrado a la variación de la constante k?

Se utilizó el software Matlab con el propósito de construir el lugar de las raíces, la gráfica obtenida se muestra en la Figura 8. De la misma manera se obtuvo la ubicación de los polos (Estos se ubican en  $s = -2,11$ ,  $s = -0,184$ ,  $s = -0,0069$ ) y su respectiva ubicación en el diagrama del lugar de las raíces, este se muestra en la Figura 10. En la Figura 9 se muestra el cruce del LGR tanto con el eje real como el imaginario. El punto  $s = -0,0961$  corresponde al cruce con el eje real, el software indica que posee una ganancia Gain de 0,337. El choque con el eje imaginario se indica como  $s = \pm 0,635j$ . y donde se puede observar que se tiene un Gain de 17,1 lo que satisface lo esperado en la teoría pues estos valores corresponden con los calculados al calcular estabilidad. (Ecuación 24)

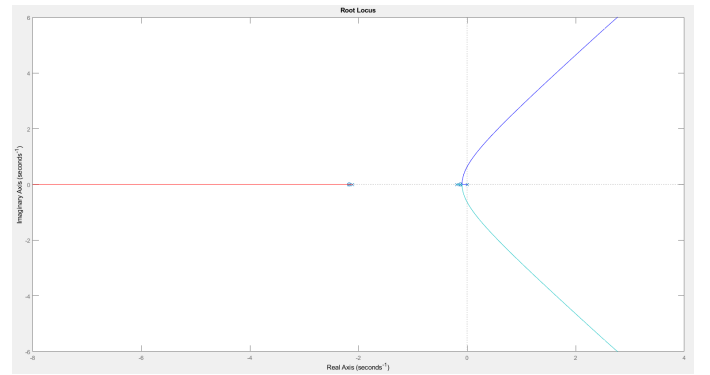


Figura 8. Lugar de las raíces, cruce con el eje real y jw

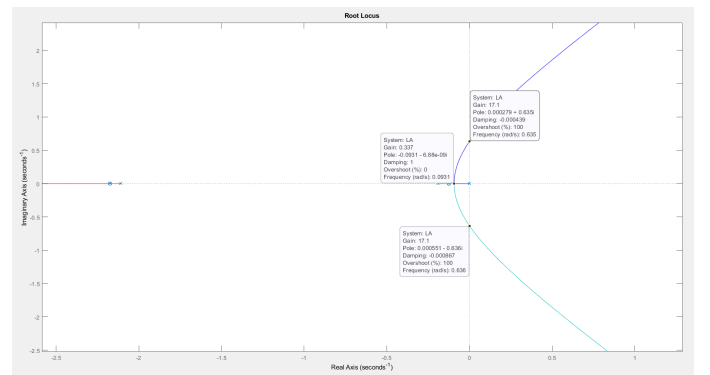


Figura 9. Lugar de las raíces, cruce con el eje real y jw

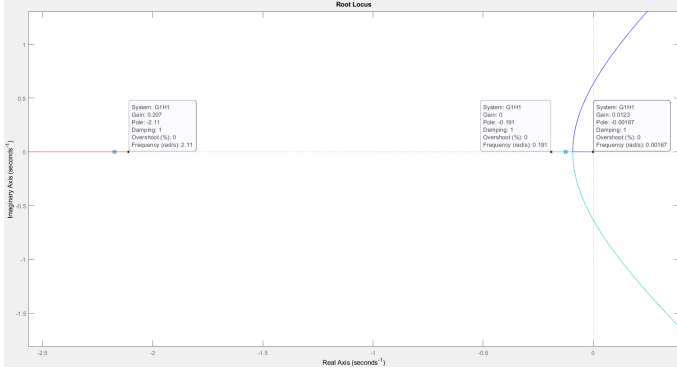


Figura 10. Lugar de las raíces, polos del sistema

#### IV-B. Polos complejos dominantes

Existen polos complejos dominantes, explique basándose en la teoría

Desde la Figura 10 en la que se muestran los polos del sistema de retroalimentación e puede observar un polo dominante en el origen, esto debido a que existe como mínimo la orden de magnitud antes del siguiente polo. Es una obviedad señalar que el polo ubicado en  $s = -2,11$  es despreciable para la respuesta transitoria. El polo  $s = -0,184$  posee una magnitud aproximadamente 26 veces mayor al polo que se define como dominante, es decir  $s = -0,00692$  (Este se puede considerar cero).

#### IV-C. Sobreimpulso del sistema

Para conocer el sobreimpulso del sistema, es importante considerar primero el factor de amortiguamiento del sistema, el cual se obtiene con la ecuación 26, donde M se representa como el sobreimpulso.

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\frac{\ln M}{\pi})^2}{1 + (\frac{\ln M}{\pi})^2}} \quad (26)$$

Dado que el factor de amortiguamiento es una función del sobreimpulso, para un caso específico donde se desee un sobreimpulso del 5 %, el resultado de este factor será de  $\zeta = 0,6961$

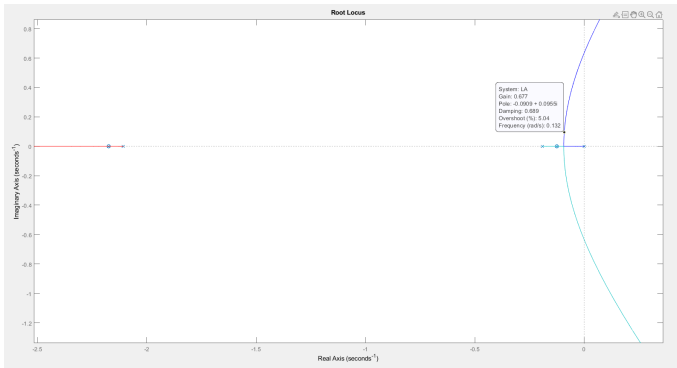


Figura 11. Lugar de las raíces, con un punto con sobreimpulso de 5 % aproximadamente.

Como se observa en la figura 11, para un sobreimpulso de aproximadamente 5 %, se necesita que K tome un valor de

0.677, motivo por el cual, como se desea un sobre impulso menor o igual a este valor, entonces, el valor de K debe pertenecer al rango que se muestra en la ecuación 27. De igual manera, en la figura 11, se observa un factor de amortiguamiento de 0.689, el cual aumenta hasta llegar a 1 conforme se reduce el sobreimpulso. Debido a lo anterior, en la ecuación 27 también se muestra la condición necesaria para el factor de amortiguamiento.

$$\Rightarrow 0 < K < 0,677$$

$$\Rightarrow 0,689 < \zeta < 1 \quad (27)$$

Ahora bien, en cuanto al comportamiento transitorio para este rango de sobreimpulso, se obtiene un sistema subamortiguado debido al rango de valores de  $\zeta$ .

#### IV-D. Error en estado estacionario

De manera general, para obtener el error en estado estable de un sistema, se puede utilizar la ecuación 28.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - T(s)]R(s) \quad (28)$$

Para lograr un error en estado estacionario igual a cero, se analizara las 2 principales entradas un escalón y una rampa. Primero, para una entrada de un escalón unitario, debido a su representación en frecuencia, el argumento del límite se reduce a la función de transmitancia de error, multiplicada por la entrada. Como se sabe que la entrada es diferente de cero, esto implica que la transmitancia del error debe ser igual a cero para conseguir un error de estado estacionario nulo. En otras palabras, se necesita que la función de transferencia del sistema sea igual a 1 al evaluar el límite.

Por otra parte, si se considera una entrada de impulso unitario, el sistema automáticamente provoca un error en estado estable de cero, esto debido a que por la evaluación del límite, el numerador se convierte en 0.

De igual manera en caso de que se utilice una entrada de tipo rampa, el error en este caso tenderá a infinito, ya que al evaluar el límite se provocará una división por cero, debido a que el orden del denominador es mayor al del numerador. Por lo que de manera general se puede decir que cualquier entrada que en el tiempo sea un polinomio de orden mayor o igual a 2, provocará este tipo de error, ya que sucederá la misma situación.

Por último, es importante mencionar que, existen muchos otros escenarios donde se puede obtener un error en estado estable igual a cero, sin embargo, debido a que no se habla de una entrada específica para el sistema, se analizan los casos genéricos de funciones básicas que forman entradas más complejas, como lo son el escalón y el impulso.

## V. CONCLUSIONES

- Se realizó el análisis de un sistema controlado por un motor CD de imán permanente el mismo se caracterizaba como un sistema LTI. La comprensión del comportamiento se planteó desde la creación de un modelo matemático que describió su dinámica.

- Se comprobó la veracidad del modelo matemático planteado para describir el sistema desde el uso de herramientas computacionales. Los resultados obtenidos aseveraron el planteamiento inicial.

#### REFERENCIAS

- [1] R. Tocci, G. Moss and N. Widmer, *Sistemas digitales*, Mexico: Pearson Educacion, 2007.