Práctica

① $2xy + 6x + (x^2-4)y' = 0$

$(x^2-4)y' = -2xy - 6x$

$(x^2-4)y' = -2x(y+3)$

$\frac{y'}{y+3} = \frac{-2x}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$

Separamos variables

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y+3} = \frac{-2x}{x^2-4}$

$\frac{dy}{y+3} = \frac{-2x}{x^2-4}dx$

$\int \frac{dy}{y+3} = -\int \frac{2x}{x^2-4}dx$

$u = y+3$ $\quad w = x^2-4$

$du = dy$ $\quad dw = 2x\,dx$

$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dw}{w}$

$\ln|u| = -\ln|w| + c$

$\ln|y+3| = -\ln|x^2-4| + c$

$e^{\ln|y+3|} = e^{\ln|x^2-4|^{-1}} \cdot e^c$

$|y+3| = \frac{A}{|x^2-4|}$, $A = \pm e^c$

$y+3 = \frac{A}{x^2-4}$

Solución General

(2) $\operatorname{sen}(x)\,dx + y\,dy = 0$, con $y(0) = 1$

$-\operatorname{sen}(x)\,dx = y\,dy$ ← separamos variables

$-\int \operatorname{sen}(x)\,dx = \int y\,dy$ ← integramos

$\cos(x) = \frac{y^2}{2} + C$, C constante arbitraria

$y^2 = 2\cos(x) + 2C$ $\qquad A = 2C$

$y = \sqrt{2\cos(x) + A}$

Con $y(0) = 1$:

$1 = \sqrt{2\cos(0) + A}$

$\cancel{1^2 = \sqrt{A}^2}$

$\cancel{A =}$

$1 = \sqrt{2 + A} \Rightarrow 1^2 = \sqrt{2 + A}^2$

$\Rightarrow 1 = 2 + A \Rightarrow \boxed{A = -1}$

$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt{2\cos(x) - 1}}$

(3) $\frac{dy}{dx} = x e^{x^2 - \ln(y^2)}$

$\frac{dy}{dx} = x e^{x^2} \cdot e^{\ln(y^2)^{-1}}$

$\frac{dy}{dx} = x e^{x^2} \cdot \frac{1}{y^2}$

$y^2 dy = x e^{x^2} dx$

$\int y^2 dy = \int x e^{x^2} dx$

$u = x^2 \quad du = 2x dx$

$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2} \int e^u du$

$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2} e^u + C$

$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$\underbrace{y^3 = \frac{3}{2} e^{x^2} + A}_{\text{Solución General}}, \quad A = 3C$

(4) $x\frac{dy}{dx} = 2(y-4)$ (* Ver la familia de soluciones *)

$$\frac{dy}{2(y-4)} = \frac{dx}{x}$$ ← perdimos una solución particular $\boxed{y=4}$

$u = y-4 \quad du = dy$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \ln|x| + A$$

$$\frac{1}{2}\ln|u| = \ln|x| + A$$

$$|y-4|^{\frac{1}{2}} = \ln|x| + A$$

$$e^{|y-4|^{\frac{1}{2}}} = e^{\ln|x| + A}$$

$$|y-4|^{1/2} = |x| \cdot e^{A}$$

$$\sqrt{y-4} = x \cdot B, \quad B = \pm e^{A}$$

$$\sqrt{y-4}^{\,2} = Bx^2$$

$$y-4 = Bx^2$$

$$\underbrace{y = Bx^2 + 4}_{\text{Solución General}}$$ } Familia de parábolas.

(5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - 4y}{x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{y}_{H(y)} \underbrace{\frac{(x^2-4)}{x+2}}_{G(x)}$$ ← solo depende de x.

solo depende de y.

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2-4}{x+2}\,dx \qquad \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \cancel{\int \frac{x^2}{x+2}dx - 4\int \frac{1}{x+2}dx}$$

$\cancel{u = x^2 \quad du = 2x\,dx}$

$\cancel{\ln|y| =}$

$$\ln|y| = \int (x-2)\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\left(\frac{x^2}{2} - 2x + C\right)}$$

$$|y| = e^{\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)} \cdot A, \quad A = \pm C$$

(6) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} \cdot e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = e^{x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{e^{y}} = \int e^{x}\,dx$$

$$\int e^{-y}\,dy = \int e^{x}\,dx$$

$u = -y \quad du = -dy$

$$-\int e^{u}\,du = e^{x} + A$$

$$-e^{u} = e^{x} + A$$

$$-e^{-y} = e^{x} + A$$

$$\cancel{\ln e^{y^{-1}} = \ln e^{x} + \ln A}$$

$$\cancel{-\frac{1}{y} = x + \ln A, \quad A > 0}$$

$$\cancel{y = -\frac{1}{x + \ln A}}$$

$$\ln e^{y^{-1}} = \ln(-e^{x} - A)$$

$$\ln e^{y} = -\ln(-e^{x} - A)$$

$$y = -\ln(-e^{x} + A)$$

no importa pq es una constante arbitraria.

Ejemplo

classwork

$$(x^2+4)\,dy - xy\,dx = 0$$

$$(x^2+4)\,dy = xy\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

sustitución simple: $u = x^2+4 \quad du = 2x\,dx$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C \qquad \pm e^{C} = B$$

$$\boxed{y = \sqrt{x^2+4}\cdot B}$$ → Solución general

Solución singular $y(x) = 0$

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = 2y+1$$

$$\frac{dy}{2y+1} = dx$$ ← Separamos para $2y+1 \neq 0$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int dx$$

$u = 2y+1 \quad du = 2\,dy$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = x + C$$

$$\ln|u| = 2x + 2C \qquad 2C = B$$

$$e^{\ln|2y+1|} = e^{(2x+B)} \qquad \pm e^{B} = D$$

$$2y+1 = e^{2x}\cdot D$$

$$\Rightarrow y = \frac{De^{2x}-1}{2}$$

$$\cancel{y = \frac{\sqrt{Ae^{x}}-1}{2}}$$

$$\cancel{\sqrt{Ae^{x}}^{\,2} = (Ae^{2x})^2}$$

$$\cancel{Ae^{x} \neq A}$$

Ejercicios: (Separables)

① Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = 2 - y, \quad y(0) = 0$$

② Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)^2}{(x+1)^2}$$

③ $$y' = x\sqrt{y}$$

④ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}, \quad y(0) = -1$$

⑤ $$x\frac{dy}{dx} = y \ln x$$

⑥ $$\sin x - (y \cos^2 x)\frac{dy}{dx} = 0$$

⑦ Demuestre que $y = \frac{\cos x}{x}$ es solución de la ED

$$x\frac{dy}{dx} + y = -\sin x, \quad x > 0, \text{ con } y(\pi/2) = 0.$$

ED Homogéneas

Def. Una ED normalizada $y' = F(x,y)$ es homogénea si puede escribirse como:

$$y' = G\left(\frac{y}{x}\right)$$ donde G es alguna función continua.

Ejemplo

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{\frac{y}{x}}$$ tiene forma $y' = G\left(\frac{y}{x}\right)$

Ejemplo

La ED $y' = \ln(y+x) - \ln x$ es homogénea?

* propiedad de logaritmos podemos escribir

$$y' = \ln\left(\frac{y+x}{x}\right)$$

$$y' = \ln\left(\frac{y}{x} + 1\right)$$

Ejemplo

Compruebe que $(x^2-y^2)dx + (xy+y^2)dy = 0$ es homogénea?

(1) Normalizamos, ... $\frac{dy}{dx} = \ldots$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2-x^2}{xy+y^2}, \quad y' = \frac{y^2-x^2}{xy+y^2}, \quad xy+y^2 \neq 0$$

* Dividimos entre x^2.

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2} - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Teorema (Tres formas para probar homogeneidad)

1. $y' = G\left(\frac{y}{x}\right)$

2. $F(\alpha x, \alpha y) = F(x,y)$, para todo α tal que $(\alpha x, \alpha y)$ pertenezca al dominio de F.

3. $\underbrace{F(x,y)}_{y'} = H\left(\frac{x}{y}\right)$

* Usando el ejemplo anterior: (1) ✓

$$F(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha y)^2 - (\alpha x)^2}{\alpha x \alpha y + (\alpha y)^2} = \frac{\alpha(y^2 - x^2)}{\alpha(xy + y^2)} = \frac{y^2 - x^2}{xy + y^2} = f(x,y) \checkmark$$

$$F(x,y) = H\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}{\frac{xy}{y^2} + \left(\frac{y}{y}\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}{\frac{x}{y} + 1} \checkmark$$

Como resolver ED homogéneas

Ejemplo

$$(4x+y)\frac{dy}{dx} = y-2x, \quad y \neq -4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{4x+y}$$ } Normalizamos

verificamos que es homogénea. ✓

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{2x}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{y}{x}} = \frac{\frac{y}{x} - 2}{4 + \frac{y}{x}} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha y) - 2(\alpha x)}{4(\alpha x) + (\alpha y)} = \frac{\alpha(y-2x)}{\alpha(4x+y)} = \frac{y-2x}{4x+y} = F(\alpha x, \alpha y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{y} - \frac{2x}{y}}{\frac{4x}{y} + \frac{y}{y}} = \frac{1 - 2\left(\frac{x}{y}\right)}{4\left(\frac{x}{y}\right) + 1} = H\left(\frac{x}{y}\right)$$

o

Vamos a utilizar el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow y = vx$$
$$y' = v + xv'$$

} Utilizamos esta información para sustituir en la ED original. Vamos a sustituir y, y'

15

~~#7~~:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 2}{4 + \frac{y}{x}} \quad , \quad y' = \frac{\frac{y}{x} - 2}{4 + \frac{y}{x}}$$

$$\underbrace{v + xv'}_{y'} = \frac{v - 2}{4 + v}$$ obtenemos una ED separable ☺!

$$xv' = \frac{v - 2}{4 + v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - 2 - v(4+v)}{4+v} = \frac{v - 2 - 4v - v^2}{4+v} = \frac{-v^2 - 3v - 2}{v+4}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{(v^2 + 3v + 2)}{v+4}$$ separamos variables

$$\int \frac{v+4}{v^2+3v+2}\, dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\underbrace{\int \frac{v+4}{(v+1)(v+2)}\, dv}_{\text{Fracciones Parciales}} = -\ln|x| + A$$

$$\frac{v+4}{(v+1)(v+2)} = \frac{A}{v+1} + \frac{B}{v+2}$$

$$\frac{v+4}{(v+1)(v+2)} = \frac{A(v+2) + B(v+1)}{(v+1)(v+2)}$$

$$v+4 = A(v+2) + B(v+1)$$

Si $v=-2$	Si $v=-1$
$2 = 0 + B(-1)$	$3 = A(1)$
$\Rightarrow \boxed{B=-2}$	$\Rightarrow \boxed{A=3}$

Entonces,

$$\int \left(\frac{3}{v+1} - \frac{2}{v+2} \right) dv = -\ln|x| + A$$

$$3\int \frac{1}{v+1} dv - 2\int \frac{1}{v+2} dv = -\ln|x| + A$$

Ambos integrales podemos resolverlos mediante sustitución simple.

$u = v+1 \quad du = dv \qquad w = v+2 \quad dw = dv$

$$3\int \frac{du}{u} - 2\int \frac{dw}{w} = -\ln|x| + A$$

$$3\ln|u| - 2\ln|w| = -\ln|x| + A$$

$$3\ln|v+1| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + A$$

$$\ln \frac{|v+1|^3}{(v+2)^2} = \ln|x|^{-1} + \ln C, \quad A = \ln C, \ c > 0$$

$$\frac{|v+1|^3}{(v+2)^2} = \frac{A}{|x|}$$

$$|x|\,|v+1|^3 = A(v+2)^2$$

$$x(v+1)^3 = B(v+2)^2, \quad B = \pm A$$

$$x\left(\frac{y}{x}+1\right)^3 = B\left(\frac{y}{x}+2\right)^2$$

$$x\left(\frac{y+x}{x}\right)^3 = B\left(\frac{y+2x}{x}\right)^2$$

$$\frac{x}{x^3}(y+x)^3 = \frac{B}{x^2}(y+2x)^2$$

$$\Rightarrow (y+x)^3 = B(y+2x)^2$$

$$e^{\left(\ln(v+1)^3 - \ln(v+2)^2\right)} = e^{\left(-\ln|x| + A\right)}$$

$$e^{\ln(v+1)^3} \cdot e^{\ln(v+2)^{-2}} = x^{-1} \cdot e^{A}$$

Ejemplo

$$\left(x \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$ Es homogénea.

$$v = \frac{y}{x} \qquad y = vx$$

$$y' = v + xv'$$

Normalizamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right) - x\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$v + xv' = \frac{vx\cos v - x\sin v}{x\cos v}$$ simplifica

$$v + xv' = v - \tan v$$ separa variables

$$x\frac{dv}{dx} = -\tan v$$

$$\frac{dv}{\tan v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{\tan v} = -\ln|x| + C_1 \quad , \quad C = C_1 - C_2$$

$$\ln|u| = -\ln|x| + C \qquad A = \cancel{\ln|C|},\ \cancel{C>0} \quad C = \ln A,\ A>0$$

$$e^{\ln|\operatorname{sen} v|} = e^{(-\ln|x| + \ln A)}$$

$$\operatorname{sen} v = \frac{A}{x}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{A}{x}$$

Ejercicios: (Homogéneas)

① $(x-y)dx + xdy = 0$

② $x^2\left(\operatorname{sen}\left(\frac{y^2}{x^2}\right) - 2y^2\cos\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\right)dx + 2xy\cos\left(\frac{y^2}{x^2}\right)dy = 0$

③ $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

④ $(xe^{y/x} - y)dx + xdy = 0$

⑤ $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0, \quad y(1) = 0$

⑥ $(9x^2 + 3y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

ED de orden dos y variable ausente

Definición

Una ED de orden dos con incógnita $y(x)$ es de variable ausente si en ella no ~~ap~~ aparecen x o y.

Con x ausente $\underbrace{E(y, y', y'') = 0}_{\text{orden dos}}$

Con y ausente $\underbrace{E(x, y', y'') = 0}_{\text{orden dos}}$

Por ejemplo

① $\underbrace{xy'' + 2y' = 0}_{E(x,y',y'')}$, $x \neq 0$ ← y está ausente

② $\underbrace{2yy'' - 1 = (y')^2}_{E(y,y',y'')}$ ← x ausente

potencia

orden

③ $\underbrace{2y'' - (y')^2 + 1 = 0}_{E(y',y'')}$ ← x, y ausente

* Vamos a hacer un cambio de variable

$$\underbrace{y' = v \qquad y'' = v'}$$

Esto lo utilizamos para reducir el orden, es decir, convertir la ED de segundo orden (z'') a una de primer orden (z').

* Cuando x es ausente puede pasar que estén x, y, v en la ED y necesitaríamos eliminar una variable.

Por lo tanto, podemos utilizar la siguiente relación:

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{v} = \frac{dv}{dy} \cdot v$$

Importante cuando x es ausente.

Ejemplo $xy'' + 2y' = 0, \quad x \neq 0$ ← y ausente

$y' = v \quad y'' = v'$

$xv' + 2v = 0$ ← se convierte en una ED de primer orden y ... ? .. separable.

$$x\frac{dv}{dx} + 2v = 0$$

$$x\frac{dv}{dx} = -2v$$

separamos

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -2\ln|x| + \ln A, \quad \text{donde } c = \ln A,\ A > 0$$

$$e^{\ln|v|} = e^{\ln x^{-2}} + e^{\ln A}$$

$$|v| = Ax^{-2}$$

$$\Rightarrow v = \pm Ax^{-2}, \quad B = \pm A$$

$$\Rightarrow v = \frac{B}{x^2}$$

todavia necesitamos sustituir $v = y'$

$$y' = \frac{B}{x^2}$$ ← podemos integrar

$$\int y' = B\int x^{-2}\,dx$$

$$\boxed{y = -\frac{B}{x} + D}$$ ← solución general

Ejemplo (*clase*)

$$2yy'' = 1 + (y')^2, \quad y(2) = 1,\ y'(2) = -1,\ y(x) > \frac{1}{2},\ \forall x < 3$$

* En este caso x es ausente, vamos a usar la relación $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{v}$ $\quad v = y',\ v' = y''$

$$\underbrace{2yv' = 1 + v^2}_{\text{*Problema*}} \rightarrow 2y\frac{dv}{dx} = 1 + v^2$$

$$2yv\frac{dv}{dy} = 1 + v^2$$ separamos y resolvemos

$$\frac{2v}{1+v^2}\,dv = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \ln|y|$$

$u = 1+v^2$

$du = 2v\,dv$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|y| + A$$

$\ln|u| = \ln|y| + \ln B$, donde $A = \ln B$, $B > 0$

$$e^{\ln|1+v^2|} = e^{\ln|y|} + e^{\ln B}$$

$|1+v^2| = B|y|$

$1+v^2 = \pm B|y|$

$1+v^2 = cy$, donde $c = \pm B$

$1 + (y')^2 = cy$

$(y')^2 = cy - 1$, * Aplicamos la condiciones iniciales $y(2)=1$, $y'(2)=-1$

$(-1)^2 = c(1) - 1$

$1 + 1 = c$

$\Rightarrow \boxed{c = 2}$

$(y')^2 = 2y - 1$

$\sqrt{(y')^2} = \sqrt{2y-1}$

$y' = \pm\sqrt{2y-1}$

* Dado que la condición $y'(2) = -1$ tiene signo $(-)$, tomamos $y' = -\sqrt{2y-1}$

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2y-1}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = -\int dx$$

sustitución simple

$$\sqrt{2y-1} = -x + C$$ solución general

Usamos $y(2)=1$

$$\sqrt{2(1)-1} = -2 + C$$

$$1 = -2 + C$$

$$\Rightarrow \boxed{C=3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2y-1} = -x + 3$$ solución particular dada las condiciones iniciales