Introduction :

"On désire construire un code de calcul capable de simuler la diffraction d'une onde EM plane par un réseau de diffraction plantaire fait de strips à base de graphène."

Équations de Maxwell

On se place dans un milieu LHI (Linéaire, Homogène, Isotrope) :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Avec les relations :

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{cases}$$

En remplaçant $\vec{B}$ et $\vec{D}$ dans les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Hypothèse harmonique

On sépare les variables temporelles et spatiales. On fait l'hypothèse que les champs oscillent de manière sinusoïdale à une pulsation unique ω et ceux depuis la nuit des temps.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad \vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) = \vec{D}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{\partial t} = -i\omega \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t), \qquad \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)}{\partial t} = -i\omega \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\omega \mu_0 \mu_r \vec{H} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \end{cases}$$

1/ Incidence classique :

La forme du réseau impose la base cartésienne pour traiter le problème.

Le réseau est en incidence classique, invariant suivant la direction y. Les champs ne dépendent donc pas de y. Par ailleurs, le théorème de Noether stipule qu'une invariance en translation est à l'origine de la conservation de la quantité de mouvement. Nous avons un problème périodique, c'est donc le vecteur d'onde $\vec{k}$ qui est conservé. Ce vecteur est donc de norme constante. La composante k_y est nulle car on est en incidence normale. Une composante constante et nulle en un point est nulle de partout.

Nous pouvons donc calculer les rotationnels de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ en ignorant les dérivées par rapport à y :

$$\begin{cases} \partial_y \cancel{E_z} - \partial_z E_y = i\omega\mu_0\mu_r H_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega\mu_0\mu_r H_y \\ \partial_x E_y - \partial_y \cancel{E_x} = i\omega\mu_0\mu_r H_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_y \cancel{H_z} - \partial_z H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_x \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_y \\ \partial_x H_y - \partial_y \cancel{H_x} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_z \end{cases}$$

On peut alors rassembler ce qui dépend de E_y d'un côté (transverse électrique) et de H_y de l'autre (transverse magnétique) :

Transverse électrique : TE

$$\begin{cases} -\partial_z E_y = i\omega\mu_0\mu_r H_x \\ \partial_z H_x - \partial_x H_z = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_y \\ \partial_x E_y = i\omega\mu_0\mu_r H_z \end{cases}$$

Transverse magnétique : TM

$$\begin{cases} -\partial_z H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_x \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = i\omega\mu_0\mu_r H_y \\ \partial_x H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_z \end{cases}$$

Relation de dispersion en incidence classique :

On part de l'équation d'Alembert en deux dimensions (selon x et z) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

L'hypothèse d'une solution harmonique permet de traiter le membre de droite. Supposons une solution de la forme :

$$u(x, z, t) = u(x, z)e^{-i\omega t}.$$

La dérivée seconde par rapport au temps devient alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(x, z)e^{-i\omega t}$$

En remplaçant dans l'équation d'Alembert, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} u(x, z)$$

Si le milieu est homogène, caractérisé par des constantes relatives ε_r et μ_r, on a $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$, d'où :

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \mu_r = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r$$

Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r u(x, z)$$

Les solutions sont des ondes planes de la forme :

$$u(x, z) = u_0 e^{i\vec{k}\vec{r}} = u_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = u_0 e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)},$$

avec les notations :

$$k_x = \alpha, \quad k_y = \beta, \quad k_z = \gamma$$

On obtient alors la relation de dispersion :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \mu_r$$

Condition aux limites en incidence classique :

Le développement en série de Fourier impose :

$$u(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(z) e^{i\alpha_n x}$$

Dans notre problème, on a deux fonctions d'onde :

$$u_0(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(T_n e^{i\gamma_{on} z} + J_n e^{-i\gamma_{on} z} \right) e^{i\alpha_n x}$$

et :

$$u_i(x, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(I_n e^{i\gamma_{in} z} + R_n e^{-i\gamma_{in} z} \right) e^{i\alpha_n x}$$

Les conventions de signe adoptées sont les suivantes : elles proviennent du choix $e^{-i\omega t}$ pour la partie temporelle et de z entrant.

— Les ondes de la forme $e^{+i\gamma z}$ correspondent aux ondes entrantes, c'est-à-dire celles qui se propagent vers l'intérieur de la structure.

— Les ondes de la forme $e^{-i\gamma z}$ correspondent aux ondes sortantes, c'est-à-dire celles qui se propagent vers l'extérieur.

— $u_i(x,z)$ désigne le champ dans le milieu 1, tandis que $u_0(x,z)$ correspond au milieu 2 (i=input et o=output).

Dans ces expressions :

— I_n et J_n sont les amplitudes des ondes **incidentes** dans les régions d'entrée et de sortie respectivement.

— R_n et T_n sont les amplitudes des ondes **réfléchies** et **transmises**.

L'un des objectifs de ce projet est de déterminer les coefficients de réflexion R_n et de transmission T_n

Pour obtenir une relation entre ces coefficients, on se place à l'interface ($z = 0$) :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (I_n + R_n)\, e^{i\alpha_n x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (T_n + J_n)\, e^{i\alpha_n x}$$

Ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad I_n + R_n = T_n + J_n$$

En effet, deux série de Fourier sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficiants (même argument que dans l'algèbre des polynômes).

2/ Incidence conique :

Expression de l'onde plane en incidence conique

L'onde plane incidente a pour expression :

$$\mathbf{E}_{1+}(\mathbf{r}) = \mathbf{I}_0 e^{i\mathbf{k}_{10}^{+}\cdot\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{E}_{1-}(\mathbf{r}) = \mathbf{R}_n e^{i\mathbf{k}_{1n}^{-}\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E}_{2+}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_n e^{i\mathbf{k}_{2n}^{+}\cdot\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{E}_{2-}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_n e^{i\mathbf{k}_{2n}^{-}\cdot\mathbf{r}}$$

Le théorème de Bloch affirme que la fonction d'onde est périodique à une phase près. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$u(x+d,z) = u(x,z)e^{i\alpha d}$$

On a donc :

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\mathbf{I}_n e^{i\mathbf{k}_{1n}^{+}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{R}_n e^{i\mathbf{k}_{1n}^{-}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\mathbf{T}_n e^{i\mathbf{k}_{2n}^{+}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{J}_n e^{i\mathbf{k}_{2n}^{-}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

Dans une onde électromagnétique plane, on a la relation suivante entre $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, et $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\mathbf{k}\wedge\mathbf{E}$$

Pour l'onde incidente :

$$\mathbf{k}_{\text{inc}} = \begin{pmatrix} k_1 \sin\theta\cos\phi \\ k_1 \sin\theta\sin\phi \\ k_1\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

En toute generalité :

$$\mathbf{k}_{pn}^{\pm} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta \\ \pm\gamma_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + n\dfrac{2\pi}{d} \\ \beta \\ \pm\sqrt{\left(k_0\sqrt{\varepsilon_p\mu_p}\right)^2 - \alpha_n^2 - \beta^2} \end{pmatrix}$$

où p est l'indice du milieu (1 ou 2). On constate que $\beta \neq 0$, contrairement au cas d'incidence normale.

On a donc :

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\mu_0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\mathbf{k}_{1n}^{+}\wedge\mathbf{I}_n\, e^{i\mathbf{k}_{1n}^{+}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{k}_{1n}^{-}\wedge\mathbf{R}_n\, e^{i\mathbf{k}_{1n}^{-}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\mu_0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\mathbf{k}_{2n}^{+}\wedge\mathbf{T}_n\, e^{i\mathbf{k}_{2n}^{+}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{k}_{2n}^{-}\wedge\mathbf{J}_n\, e^{i\mathbf{k}_{2n}^{-}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

On a donc, pour la première onde (n = 1) :

$$\mathbf{k}_{1,1}^{+}\wedge\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} \beta I_{1,z} - \gamma_1 I_{1,y} \\ \gamma_1 I_{1,x} - \alpha I_{1,z} \\ \alpha I_{1,y} - \beta I_{1,x} \end{pmatrix}$$

Généralisé à un indice arbitraire n, cela donne :

$$\mathbf{k}_{1n}^{+}\wedge\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} \beta I_z - \gamma_1 I_y \\ \gamma_1 I_x - \alpha I_z \\ \alpha I_y - \beta I_x \end{pmatrix}_n$$

Le n indique l'indice de l'onde étudiée.

De la même manière, on a les relations :

$$\mathbf{k}_{1n}^{-}\wedge\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} \beta R_z + \gamma_1 R_y \\ -\gamma_1 R_x - \alpha R_z \\ \alpha R_y - \beta R_x \end{pmatrix}_n$$

$$\mathbf{k}_{2n}^{+}\wedge\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} \beta T_z - \gamma_2 T_y \\ \gamma_2 T_x - \alpha T_z \\ \alpha T_y - \beta T_x \end{pmatrix}_n$$

$$\mathbf{k}_{2n}^{-}\wedge\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \beta J_z + \gamma_2 J_y \\ -\gamma_2 J_x - \alpha J_z \\ \alpha J_y - \beta J_x \end{pmatrix}_n$$

Or, on a :

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Ce qui donne :

$$\omega\mu_0 = k_0 Z_0$$

On fait donc passer ce terme du côté gauche en divisant par $k_0 Z_0$:

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_0 Z_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\begin{pmatrix} \beta I_z - \gamma_1 I_y \\ \gamma_1 I_x - \alpha I_z \\ \alpha I_y - \beta I_x \end{pmatrix}_n e^{i\mathbf{k}_{1n}^{+}\cdot\mathbf{r}} + \begin{pmatrix} \beta R_z + \gamma_1 R_y \\ -\gamma_1 R_x - \alpha R_z \\ \alpha R_y - \beta R_x \end{pmatrix}_n e^{i\mathbf{k}_{1n}^{-}\cdot\mathbf{r}} \right)$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_0 Z_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\begin{pmatrix} \beta T_z - \gamma_2 T_y \\ \gamma_2 T_x - \alpha T_z \\ \alpha T_y - \beta T_x \end{pmatrix}_n e^{i\mathbf{k}_{2n}^{+}\cdot\mathbf{r}} + \begin{pmatrix} \beta J_z + \gamma_2 J_y \\ -\gamma_2 J_x - \alpha J_z \\ \alpha J_y - \beta J_x \end{pmatrix}_n e^{i\mathbf{k}_{2n}^{-}\cdot\mathbf{r}} \right)$$

Expression des composantes des champs en incidence conique :

D'un coté le réseau avec lequel nous travaillons possède une symétrie cartésienne, mais de l'autre nous souhaitons travailler en incidence conique ce qui necessite d'avoir des angles. Nous allons transformer un vecteur défini dans un repère conique vers un repère cartésien :

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\theta\cos\varphi - \sin\delta\sin\varphi \\ \cos\delta\cos\theta\sin\varphi + \sin\delta\sin\varphi \\ -\cos\delta\sin\theta \end{pmatrix}$$

Les angles utilisés dans cette base conique sont définis comme suit :

- θ : angle polaire, mesuré par rapport à l'axe z,
- φ : angle azimutal, mesuré dans le plan xOy : c'est cette angle qui nous fait sortir de l'incidence normale.
- δ : angle secondaire : c'est cette angle qui nous fait sortir de l'incidence oblique pour nous placer en incidence conique. C'est cet angle qui defini dans quelle polarisation nous sommes.

Les composantes y du vecteur d'onde k ne sont plus nulles car on est en incidence conique.

Conditions aux limites à l'interface $z = 0$

Les relations de passage indiquent que pour un matériau comme le graphène, qui ne possède pas de charge surfacique, il y a conservation de la composante tangentielle du champ $\mathbf{E}$ à l'interface ($z = 0$) :

$$E_{1x}(x, y, 0) = E_{2x}(x, y, 0)$$

$$E_{1y}(x, y, 0) = E_{2y}(x, y, 0)$$

En revanche, le graphène est conducteur. Les composantes tangentielles de $\mathbf{H}$ présentent donc un saut : elles obéissent en $z = 0$ à la loi d'Ohm locale :

$$H_{2x}(x, y, 0) - H_{1x}(x, y, 0) = \sigma(x) E_{1/2\,y}(x, y, 0)$$

$$H_{2y}(x, y, 0) - H_{1y}(x, y, 0) = -\sigma(x) E_{1/2\,x}(x, y, 0)$$

On peut choisir librement $\mathbf{E}_1$ ou $\mathbf{E}_2$, car $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$. D'où la notation $\mathbf{E}_{1/2}$.

Expression de la conductivité σ_g

La conductivité du graphène est donnée par la somme des contributions intra- et interbande. Le système étant invariant dans le temps, la pulsation ω est également invariante.

$$\sigma_g = \sigma_{\text{intra}} + \sigma_{\text{inter}}$$

Bande la plus basse :

$$\sigma_{\text{intra}}(\omega) = \frac{2ie^2 k_B T}{\pi \hbar^2 (\omega + i\gamma)} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\mu_c}{2k_B T} \right) \right]$$

Passage de la bande 1 à 2 :

$$\sigma_{\text{inter}} = \frac{e^2}{4\hbar} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{\hbar(\omega + i\gamma) - 2\mu_c}{2k_B T} \right) - \frac{i}{2\pi} \ln \left(\frac{[\hbar(\omega + i\gamma) + 2\mu_c]^2}{[\hbar(\omega + i\gamma) - 2\mu_c]^2 + (2k_B T)^2} \right) \right)$$

À haute fréquence, le terme

$$-\frac{i}{2\pi} \ln \left(\frac{[\hbar(\omega + i\gamma) + 2\mu_c]^2}{[\hbar(\omega + i\gamma) - 2\mu_c]^2 + (2k_B T)^2} \right)$$

devient négligeable.

On a une conductivité $\sigma_g(x)$ qui est d-périodique. L'idée est donc d'utiliser une matrice réduite de Toeplitz remplie avec les coefficients de Fourier de cette conductivité.

Cette matrice se nomme aussi matrice de convolution (une convolution intervient losrsqu'on a le produit de deux serie de Fourier de même période d ; ce qui est le cas dans notre étude).

On a tronqué cette Matrice à M=4 dans la formule ci-dessous :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_{-1} & \sigma_{-2} & \sigma_{-3} & \sigma_{-4} \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_{-1} & \sigma_{-2} & \sigma_{-3} \\ \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_{-1} & \sigma_{-2} \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_{-1} \\ \sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

Voici comment calculer ces coefficients :

Pour p=0 :

$$\sigma_{n-p} = \sigma_0 \quad \text{(car sur la diagonale, } n = p\text{).}$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{d}\int_0^d \sigma_g(x)\,dx = \left(\frac{a}{d}\right)\sigma_g$$

Pour $p \neq 0$:

$$\sigma_p = \frac{1}{d}\int_0^d \sigma_g(x)e^{-iKpx}dx = \frac{\sigma_g}{d}\int_0^a e^{-iKpx}dx$$

$$= \frac{\sigma_g}{d}\left[\frac{e^{-iKpx}}{-iKp}\right]_0^a = \frac{i\sigma_g}{dKp}\left(e^{-iKpa}-1\right) = \frac{i\sigma_g}{2\pi p}\left(e^{-iKpa}-1\right)$$

$$\sigma_g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} \sigma_p e^{iKpx} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq d \end{cases}$$

avec σ_p le coefficient de la série de Fourier :

$$\sigma_p = \frac{1}{d}\int_0^d \sigma_g(x)e^{-iKpx}\,dx, \quad \text{et} \quad K = \frac{2\pi}{d}$$

Calcul des sorties du problème :

Reprenons nos conditions aux limites :

$$\begin{cases} E_{1x}(x,y,0) = E_{2x}(x,y,0) \\ E_{1y}(x,y,0) = E_{2y}(x,y,0) \end{cases}$$

De ces relations on sort :

$$I_{xn} + R_{xn} = T_{xn} + J_{xn}$$

$$I_{yn} + R_{yn} = T_{yn} + J_{yn}$$

Soit matriciellement :

$$\mathbf{I} + \mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{J}$$

Et de plus :

$$\begin{cases} H_{2x}(x, y, 0) - H_{1x}(x, y, 0) = \sigma(x) \cdot E_{1/2\,y}(x, y, 0) \\ H_{2y}(x, y, 0) - H_{1y}(x, y, 0) = -\sigma(x) \cdot E_{1/2\,x}(x, y, 0) \end{cases}$$

De ces relations on obtient :

$$\{(\beta T_z - \gamma_2 T_y) + (\beta J_z + \gamma_2 J_y)\} - \{(\beta I_z - \gamma_1 I_y) + (\beta R_z + \gamma_1 R_y)\} = k_0 Z_0 \Lambda(T_y + J_y) = k_0 Z_0 \Lambda(I_y + R_y)$$

$$\{(-\alpha T_z + \gamma_2 T_x) + (-\alpha J_z - \gamma_2 J_x)\} - \{(-\alpha I_z + \gamma_1 I_x) + (-\alpha R_z - \gamma_1 R_x)\} = -k_0 Z_0 \Lambda(T_x + J_x) = k_0 Z_0 \Lambda(I_x + R_x)$$

Remarque : Ces deux égalités sont essentielles car elles expriment les entrées du problème en fonction des inconnus T et R.

Expression des composantes du champ selon z :

Le champ E est une onde plane d'expression :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Pour un milieu sans charge surfacique :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Ainsi :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) = i\vec{E}_0 \cdot \vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

On prend la partie réelle :

$$\nabla \cdot \vec{E} = i\vec{E}_0 \cdot \vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Ce qui donne :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

D'où :

$$E_z = -\frac{1}{k_z}\left(k_x E_x + k_y E_y\right)$$

On a donc ces équations que l'on peut injecter dans les conditions de passage :

$$I_z = -\frac{\alpha I_x + \beta I_y}{\gamma_1}, \quad J_z = \frac{\alpha J_x + \beta J_y}{\gamma_2}, \quad T_z = -\frac{\alpha T_x + \beta T_y}{\gamma_2}, \quad R_z = \frac{\alpha R_x + \beta R_y}{\gamma_1}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases}
\beta T_z - \gamma_2 T_y = \beta\left(\frac{-\alpha T_x - \beta T_y}{\gamma_2}\right) - \gamma_2 T_y = -\frac{\alpha\beta}{\gamma_2} T_x - \left(\gamma_2 + \frac{\beta^2}{\gamma_2}\right) T_y \\
\beta J_z + \gamma_2 J_y = \beta\left(\frac{\alpha J_x + \beta J_y}{\gamma_2}\right) + \gamma_2 J_y = \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} J_x + \left(\gamma_2 + \frac{\beta^2}{\gamma_2}\right) J_y \\
-\alpha T_z + \gamma_2 T_x = -\alpha\left(\frac{-\alpha T_x - \beta T_y}{\gamma_2}\right) + \gamma_2 T_x = \left(\gamma_2 + \frac{\alpha^2}{\gamma_2}\right) T_x + \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} T_y \\
-\alpha J_z - \gamma_2 J_x = -\alpha\left(\frac{\alpha J_x + \beta J_y}{\gamma_2}\right) - \gamma_2 J_x = -\left(\gamma_2 + \frac{\alpha^2}{\gamma_2}\right) J_x - \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} J_y \\
\beta I_z - \gamma_1 I_y = \beta\left(\frac{-\alpha I_x + \beta I_y}{\gamma_1}\right) - \gamma_1 I_y = -\frac{\alpha\beta}{\gamma_1} I_x - \left(\gamma_1 + \frac{\beta^2}{\gamma_1}\right) I_y \\
\beta R_z + \gamma_1 R_y = \beta\left(\frac{\alpha R_x + \beta R_y}{\gamma_1}\right) + \gamma_1 R_y = \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} R_x + \left(\gamma_1 + \frac{\beta^2}{\gamma_1}\right) R_y \\
-\alpha I_z + \gamma_1 I_x = -\alpha\left(\frac{-\alpha I_x + \beta I_y}{\gamma_1}\right) + \gamma_1 I_x = \left(\gamma_1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_1}\right) I_x + \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} I_y \\
-\alpha R_z - \gamma_1 R_x = -\alpha\left(\frac{\alpha R_x + \beta R_y}{\gamma_1}\right) - \gamma_1 R_x = -\left(\gamma_1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_1}\right) R_x - \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} R_y
\end{cases}$$

Matriciellement cela donne :

$$-\begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} & \gamma_2 + \frac{\beta^2}{\gamma_2} \\ \gamma_2 + \frac{\alpha^2}{\gamma_2} & \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} & \gamma_2 + \frac{\beta^2}{\gamma_2} \\ \gamma_2 + \frac{\alpha^2}{\gamma_2} & \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} & \gamma_1 + \frac{\beta^2}{\gamma_1} \\ \gamma_1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_1} & \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} & \gamma_1 + \frac{\beta^2}{\gamma_1} \\ \gamma_1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_1} & \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_0 Z_0 \Lambda \\ k_0 Z_0 \Lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_0 Z_0 \Lambda \\ k_0 Z_0 \Lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}$$

On identifie :

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} & \gamma_1 + \frac{\beta^2}{\gamma_1} \\ \gamma_1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_1} & \frac{\alpha\beta}{\gamma_1} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} & \gamma_2 + \frac{\beta^2}{\gamma_2} \\ \gamma_2 + \frac{\alpha^2}{\gamma_2} & \frac{\alpha\beta}{\gamma_2} \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & k_0 Z_0 \Lambda \\ k_0 Z_0 \Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne l'égalité matriciel finale :

$$\Gamma_2(-T + J) + \Gamma_1(I - R) = \Omega(T + J)$$

Résultat final :

$$\begin{cases} -I + J = R - T \\ \Gamma_1 I + (\Gamma_2 - \Omega) J = \Gamma_1 R + (\Gamma_2 + \Omega) T \end{cases}$$

Les membres à gauche correspondent aux entrées. Ceux de droite aux sorties.

Pour des raisons historiques on peut réarranger ce système d'équation matriciel sous forme d'une matrice "S" :

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 + \Omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 - \Omega \end{pmatrix}$$

On a finallement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} R \\ T \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}}$$

Absorption :

Un milieu totalement absorbant a une absorption $\mathcal{A} = 1$:

$$\mathcal{A} = 1 - \sum_n (\mathcal{E}_{rn} + \mathcal{E}_{tn})$$

où :

$$\mathcal{E}_{rn} = \frac{\Phi_{rn}}{\Phi_i}, \qquad \mathcal{E}_{tn} = \frac{\Phi_{tn}}{\Phi_i}$$

La part de puissance transportée par l'onde diminue cette absorption.

3/ Conclusion :