Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(a)	**1**(b)	**2**(a)	**2**(b)	**3**(a)	**3**(b)	**3**(c)	**4**(a)	**4**(b)	**4**(c)

Prática 4: 7 de Noviembre de 2013

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

1. Halla la suma de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$
$\displaystyle = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} =: S$

Escribimos $\displaystyle\frac{3}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} - \frac{B}{3n+1} = \frac{A(3n+1)+B(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}.$

Por tanto, $3(A+B)=0$, $A-2B=3$, es decir, $B=-A$, $3A=3$. De este modo, $A=1, B=-1$.

Deducimos que $\displaystyle a_n = \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} = b_n - b_{n+1}$ si definimos $\displaystyle b_n := \frac{1}{3n-2}$. Por el ejercicio 2.14, sabemos que entonces

$$S = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n-2} = 1.$$

2. Estudia por comparación la convergencia de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{e^n+4^n}$. Sea $\displaystyle a_n := \frac{5^n}{e^n+4^n}$ y tomamos $\displaystyle b_n := \left(\frac{5}{4}\right)^n = \frac{5^n}{4^n}$. Observamos que $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ y

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5^n}{e^n+4^n}}{\frac{5^n}{4^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{e^n+4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n/4^n}{e^n/4^n+4^n/4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(e/4)^n+1} = 1 \neq 0$$

porque $0 < e/4 < 1$. De este modo, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge. Como $\frac{5}{4} > 1$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ es divergente y por tanto la serie del enunciado también.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n^2+5}$. Sea $\displaystyle a_n := \frac{3}{n^2+5}$ y tomamos $\displaystyle b_n := \frac{3}{n^2}$. Observamos que $0 \leq a_n \leq b_n$. De este modo, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie armónica con exponente $2 > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente. Por tanto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.

3. Estudia por criterios del cociente o la raíz, la convergencia de las series:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^n \cdot n}{(3n+1)\cdot 5^n}$. Escribimos $a_n := \dfrac{4^n \cdot n}{(3n+1)\cdot 5^n}$ y $a_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}\cdot(n+1)}{(3(n+1)+1)\cdot 5^{n+1}}$. Calculamos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4^{n+1}\cdot(n+1)}{(3(n+1)+1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{4^n\cdot n}{(3n+1)\cdot 5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4(n+1)(3n+1)}{5n(3n+4)} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} < 1$$

Dado que $a_n \geq 0\ \forall n$, por el criterio del cociente, deducimos que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(3n)!}$. Escribimos $a_n := \dfrac{(n!)^2}{(3n)!}$ y $a_{n+1} = \dfrac{((n+1)!)^2}{(3(n+1))!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(3(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(3n)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)(n!))^2((3n)!)}{(n!)^2(3n+3)(3n+2)(3n+1)((3n)!)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1))^2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = 0 < 1$$

Dado que $a_n \geq 0\ \forall n$, por el criterio del cociente, deducimos que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1+n^2}{3+2n^2}\right)^n$ Escribimos $a_n := \left(\dfrac{1+n^2}{3+2n^2}\right)^n$ y $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1+n^2}{3+2n^2}$. Calculamos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^2}{3+2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

Dado que $a_n \geq 0\ \forall n$, por el criterio de la raíz, deducimos que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.

4. Estudia la convergencia (condicional) y la convergencia absoluta de las series:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^3}$. Escribimos $a_n := (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^3}$ y $|a_n| = \dfrac{1}{n^3}$. La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$ es convergente porque se trata de una serie armónica con exponente > 1. Por tanto, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es absolutamente convergente y por tanto (condicionalmente) convergente.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. Escribimos $a_n := (-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ y $|a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ es divergente porque $0 \leq |a_n| \leq b_n := \frac{1}{n^{1/2}}\ \forall n$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ es una serie armónica divergente ya que el exponente es < 1. Por tanto, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ no es absolutamente convergente. Para demostrar la convergencia condicional basta usar el criterio de Leibniz, ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es alternada, la sucesión $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ es decreciente (porque $\sqrt{n+1}$ es creciente) y $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$.

(c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\log(n)}$. Escribimos $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n\log(n)}$ y $|a_n| = \dfrac{1}{n\log(n)}$. La serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\log(n)}$ es divergente por el criterio de la integral ya que $|a_n| = f(n)$ donde $f(x) := \frac{1}{x\log(x)}$ es una función ≥ 0 en $[2, +\infty)$, decreciente (ya que $x\log(x)$ es creciente), continua y

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)}dx = \Big[\log(\log(x))\Big]_2^{+\infty} = +\infty$$

Por tanto, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ no es absolutamente convergente. Para demostrar la convergencia condicional basta usar el criterio de Leibniz, ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ es alternada, la sucesión $\dfrac{1}{n\log(n)}$ es decreciente (porque $n\log(n)$ es creciente) y $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\log(n)} = 0$.