$\boxed{2.8}$ a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}\right)^{\frac{n}{3(n+3)}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+3)}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\right)^{\frac{2n}{-(n-1)}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{-(n-1)}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+n}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^2$$

$\boxed{2.9}$ $x\in A \iff x^2 \geq \frac{4}{9}$ y $\frac{9}{4}x^2-1 < \frac{77}{4} \iff \frac{4}{9} \leq x^2 < 9$

$$\Rightarrow A = \left(-3,-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},3\right)$$

La respuesta es b):

$$\frac{-2n+3}{3n} = \frac{-2}{3}+\frac{1}{n} > -\frac{2}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{-2n+3}{3n}\notin A\ \forall n$$

$\wedge$

$\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+3}{3n} = \frac{-2}{3}\in A$$

$\boxed{2.10}$

$\boxed{a1}$ $\left.\begin{array}{l} a_1 \overset{7}{=} > 0 \\ \frac{n}{n+7} > 0 \quad \forall n \end{array}\right] \Rightarrow$ Si $a_n > 0 \Rightarrow$
$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+7} > 0$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada inferiormente

$\frac{n}{n+7} \in (0,1) \ \forall n$

Como $a_n > 0$, entonces $a_{n+1} = a_n \frac{n}{n+7} < a_n$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente

Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente tiene límite

$\boxed{a2}$ No hace falta ver que es de Cauchy

$$X_n = 1 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k}$$

Lo probamos por inducción completa:

$X_1 = 1 + 2 \cdot \sum_{k=0}^{-1} \frac{(-1)^k}{2^k} = 1$ ✓, $X_3 = 1 + 2\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{2^k} = 3$ ✓

$$X_{n+2} = \frac{X_{n+1} + X_n}{2} \overset{H.I.}{=} \frac{1 + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^k} + 1 + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k}}{2} =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} + 2 \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} = 1 + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}$$

$$= 2 \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}$$

Luego $X_n = 1 + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} = 1 + 2\left(\frac{1 - \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}}{1 + 1/2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{7}{3}$

$\boxed{2.10}$ $\boxed{a3}$ Consideremos $y_n := \cancel{x_n}^2$

Entonces $\left.\begin{array}{l} y_{n+1} = x_{n+1}^2 = 1 + x_n^2 = 1 + y_n \\ y_1 = x_1^2 = 1^2 = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow y_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n = \sqrt{n} \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ Diverge

$\boxed{a\,4}$ $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = a_n + \underbrace{\frac{-3n-2}{4n^3+6n^2+2n}}_{<0}$

Luego $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ acotada inf.

decreciente + acotada inf. $\Rightarrow$ convergente

$\boxed{2.10}$ $\boxed{2.1}$ Si $\exists\ l = \lim_{n\to\infty} x_n$,

entonces $l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-x_n} = \frac{1}{3-l} \Rightarrow$

$$\Rightarrow l^2 - 3l + 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Sea $l_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$x_1 = 2 \in [l_1, 2]$

Si $x_n \in [l_1, 2] \Rightarrow 3 - x_n \in [1, 3-l_1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{n+1} \in \left[\frac{1}{3-l_1}, 1\right] = [l_1, 1] \subset [l_1, 2].$$

Luego $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

$$x_n - x_{n+1} = \frac{-x_n^2+3x_n-1}{3-x_n} \geq 0 \Rightarrow$$

$x_n \in [l_1, 2] \subset [l_1, l_2]$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente.

Por tanto, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = l_1$

$\boxed{2.10}$

$\boxed{2.1}$ $x_1 = m > 1 \Rightarrow x_1 > \sqrt{m}$

$x_n > \sqrt{m} \Rightarrow x_n - \sqrt{m} > 0 \Rightarrow (x_n - \sqrt{m})^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n^2 - 2x_n\sqrt{m} + m > 0 \Rightarrow x_n^2 + m > 2x_n\sqrt{m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n^2+m}{2x_n} > \sqrt{m}$$

Así, $x_n > \sqrt{m}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con lo que la sucesión es acotada inferiormente.

$x_n > \sqrt{m} \Rightarrow x_n^2 > m \Rightarrow 2x_n^2 > x_n^2 + m \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n > \frac{x_n^2+m}{2x_n} = x_{n+1} \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente

Si $l = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $l = \frac{l^2+m}{2l} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2l^2 = l^2 + m \Rightarrow l^2 = m \Rightarrow l = \pm\sqrt{m}$

Debe ser $+\sqrt{m}$, pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de términos positivos

$\boxed{2.11}$ a) No acotada: $\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \exists\ p$ primo tal que $p > M$. Entonces

$$x_p = p + 1 > M$$

No converge: Toda sucesión convergente es acotada. Dado que ésta no es acotada, diverge

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n \neq +\infty$: La subsucesión $(x_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ es constantemente 0, lo que impide que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$

La subsucesión convergente es $(x_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$, que converge a cero

$\boxed{2.11}$ b) $|x_{3k}| = \left|\dfrac{(-1)^{3k}\cdot 3k}{3k+1}\right| = \dfrac{3k}{3k+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$$\lim_{k\to\infty} x_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{3k+2} - \sqrt{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+2-(3k+1)}{\sqrt{3k+2}+\sqrt{3k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3k+2}+\sqrt{3k+1}}$$

$$= 0$$

Sea $M>0$. Entonces $\dfrac{1}{2M} > 0$, luego

$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, k \geq k_0$:

$$\left|1 - \frac{3k}{3k+1}\right| < \frac{1}{2M}\,;\ \left|\sqrt{3k+2} - \sqrt{3k+1}\right| < \frac{1}{2M}.$$

Sea $k \geq k_0$ y k par. Entonces

$$x_{3k+2} = \frac{1}{1 - \frac{3k}{3k+1} + \sqrt{3k+2} + \sqrt{3k+1}} > \frac{1}{\frac{1}{2M} + \frac{1}{2M}} = M$$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>no</u> acotada $\Rightarrow$ <u>no</u> convergente

$\lim_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$, porque la subsucesión $(x_{3k})_{k\in\mathbb{N}}$ es ~~convergente~~ acotada

$\lim_{n\to\infty} x_{3n+1} = 0$, como hemos probado arriba

$\boxed{2.12}$

a) $a_1 = 1$

$a_n = 4n + a_{n-1}$

b) $a_n = 4n + a_{n-1} \underset{n>0}{\geq} a_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la sucesión es creciente

$a_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$a_1 = 1 \geq 1$

$a_n = 4n + \underset{\substack{\vee\!/\ \text{H.I.} \\ n-1}}{a_{n-1}} \geq n \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow$ la sucesión no es acotada

c) • $|a_1 - 2\cdot 1^2| = |1-2| = 1 < 2\cdot 1$ ✓

• $|a_n - 2n^2| = |4n + a_{n-1} - 2n^2| = |a_{n-1} - 2(n-1)^2 + 2| \leq$

$\leq |a_{n-1} - 2(n-1)^2| + 2 \underset{\text{H-I}}{<} 2(n-1) + 2 = 2n$

d) $0 \leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{2n^2} - 1\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - 2n^2|}{2n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n^2} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$