

Imágenes polinómicas de bolas cerradas

José F. Fernando

Universidad Complutense de Madrid



Geometría algebraica y analítica real (2023)

1. Introducción

La **Geometría algebraica y analítica real (14PXX)** estudia:

- Objetos y sistemas que surgen de la modelización matemática de fenómenos físicos, tecnológicos, económicos y sociales.
- Conjuntos definidos mediante combinaciones booleanas finitas de igualdades y desigualdades de funciones a valores reales (**conjuntos constructibles**).

Cuando las funciones a valores reales involucradas son polinomios (con coeficientes reales) aparecen los **conjuntos semialgebraicos**.

Algunos problemas relevantes:

- **Optimización** de funciones polinómicas sobre conjuntos semialgebraicos.
- **Positivstellensätze:** certificados de positividad para funciones polinómicas sobre conjuntos semialgebraicos.

1.1. Punto de inicio

Nuestro estudio pionero de las imágenes polinómicas $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ empezó con la participación de Gamboa en la semana de Oberwolfach “Reelle Algebraische Geometrie” (1990). Propuso:

- (1) Caracterizar los conjuntos $S \subset \mathbb{R}^n$ que son imagen de una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. (**Tarski-Seidenberg:** S es un **conjunto semialgebraico**)
- (2) Determinar si el **cuadrante abierto** $\mathcal{Q} := \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ es imagen de una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. (**Respuesta positiva: Punto de inicio! (2001)**)

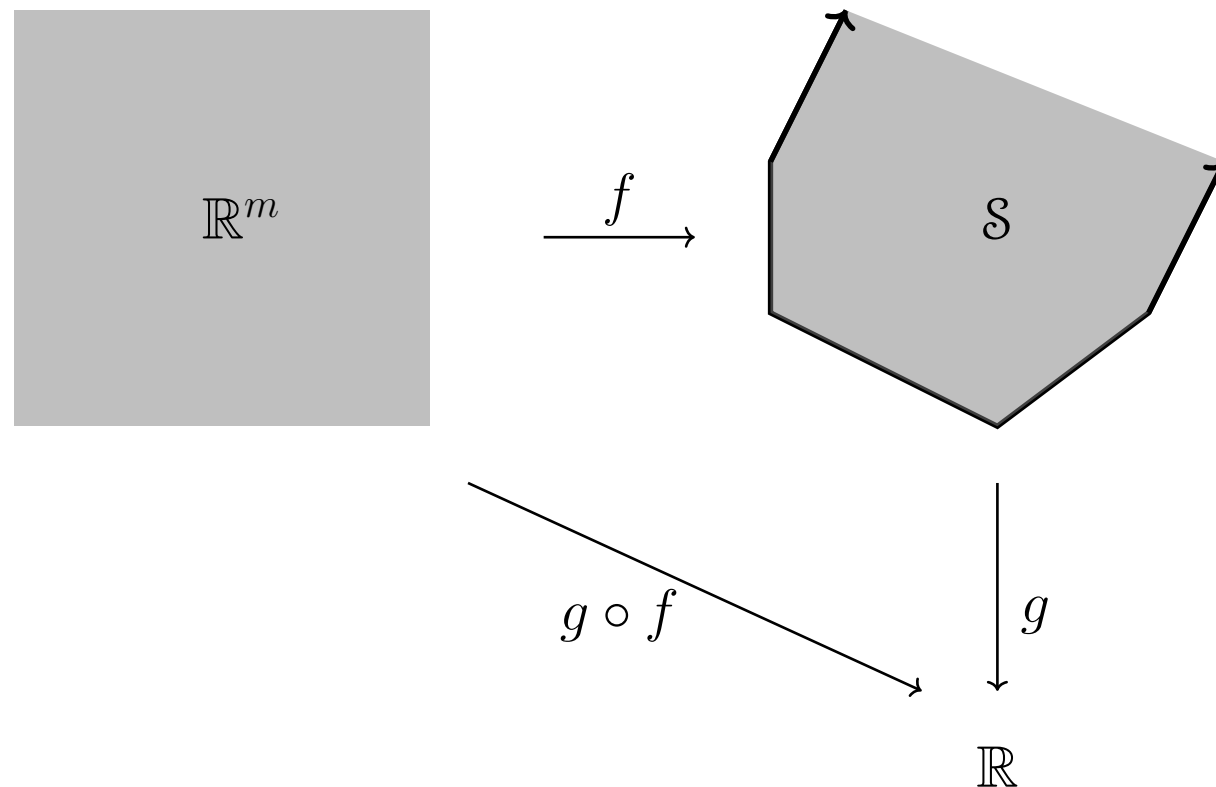
Véase también D. Eisenbud: Open problems in computational algebraic geometry, Cortona (1991).

Equipo de trabajo: Carbone (2019), Fernando (2001), Gamboa (1996), Ueno (2007).

Pregunta natural: ¿Por qué estudiar este tipo de problemas?

1.2. Motivación: Potenciales aplicaciones

Optimización: *Eliminación de condiciones de contorno.* Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación polinómica y $\mathcal{S} := f(\mathbb{R}^m)$, optimizar una función polinómica $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ es equivalente a optimizar la composición $g \circ f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.



Dificultad: Evaluar si el incremento de complejidad de $g \circ f$ con respecto a g compensa la eliminación de las condiciones de contorno.

Comparación de complejidad: La optimización de funciones polinómicas en conjuntos semialgebraicos involucra descomposición cilíndrica algebraica (CAD) de complejidad doblemente exponencial $(\ell d)^{O(1)^n}$ donde

- $O(1)$ representa una constante,
- ℓ es el número de polinomios necesarios para describir \mathcal{S} ,
- d es una cota de los grados de los polinomios que describen \mathcal{S} ,
- n es la dimensión de inmersión de \mathcal{S} .

Positivstellensätze: *Certificados de positividad.* Caracterización de las funciones polinómicas $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ semidefinidas positivas (resp. estrictamente positivas) sobre un conjunto semialgebraico $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$.

- **Conjuntos semialgebraicos básicos cerrados:** Si $\mathcal{S} := \{f_1 \geq 0, \dots, f_r \geq 0\}$, tenemos el Positivstellensatz de Stengle:

$$\mathcal{S} \subset \{g \geq 0\} \iff \left(\sum_{\nu \in \{0,1\}^r} \sigma_\nu f_1^{\nu_1} \cdots f_r^{\nu_r} \right) g = g^{2m} + \sum_{\nu \in \{0,1\}^r} s_\nu f_1^{\nu_1} \cdots f_r^{\nu_r},$$

$$\mathcal{S} \subset \{g > 0\} \iff \left(\sum_{\nu \in \{0,1\}^r} \sigma'_\nu f_1^{\nu_1} \cdots f_r^{\nu_r} \right) g = 1 + \sum_{\nu \in \{0,1\}^r} s'_\nu f_1^{\nu_1} \cdots f_r^{\nu_r},$$

donde $\sigma_\nu, s_\nu, \sigma'_\nu, s'_\nu$ son sumas de cuadrados de polinomios.

- **Poliedros convexos compactos:** Si $\mathcal{K} := \{h_1 \geq 0, \dots, h_\ell \geq 0\}$, tenemos el Positivstellensatz de Handelman:

$$\mathcal{S} \subset \{g > 0\} \iff g = \sum_{|\nu| \leq d} \lambda_\nu h_1^{\nu_1} \cdots h_r^{\nu_r},$$

donde cada $\lambda_\nu \in \mathbb{R}^+$.

- **Imágenes polinómicas:** Si $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es la imagen de una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{S} \subset \{g \geq 0\} \iff g \circ f \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}^m.$$

$$\mathcal{S} \subset \{g > 0\} \iff g \circ f > 0 \text{ en } \mathbb{R}^m.$$

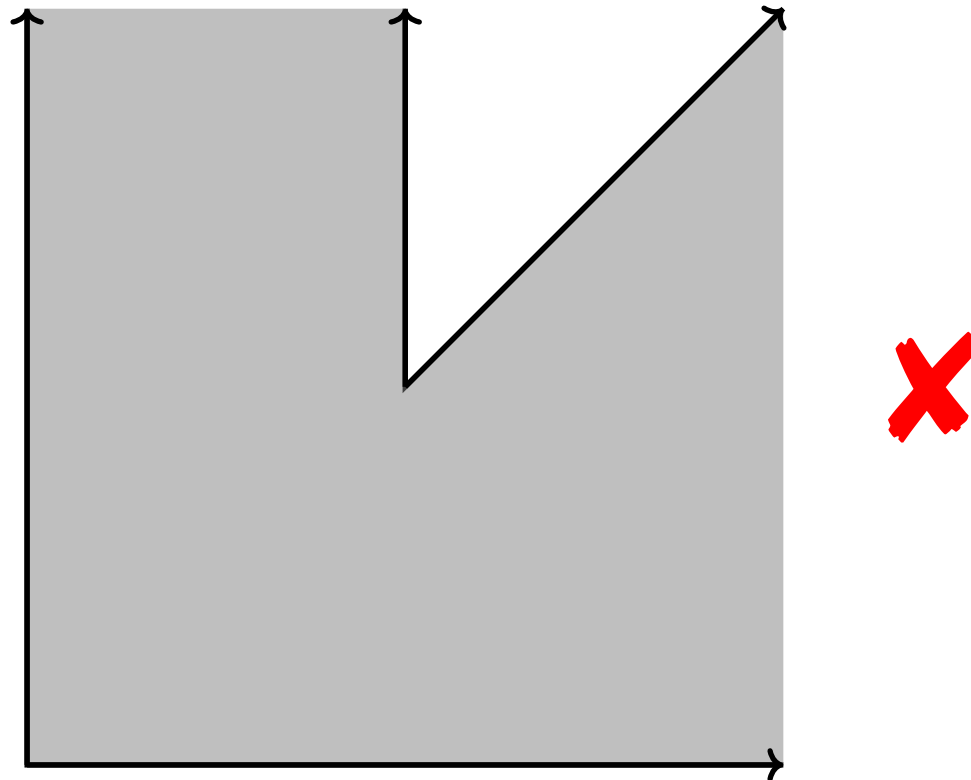
La positividad de funciones polinómicas sobre \mathbb{R}^m está caracterizada por la solución del **Problema 17th de Hilbert**.

Observaciones:

- Las imágenes polinómicas no tienen por qué ser ni conjuntos cerrados ni conjuntos semialgebraicos básicos.
- Nuestros resultados diversifican la naturaleza de los conjuntos semialgebraicos que admiten un Positivstellensatz.

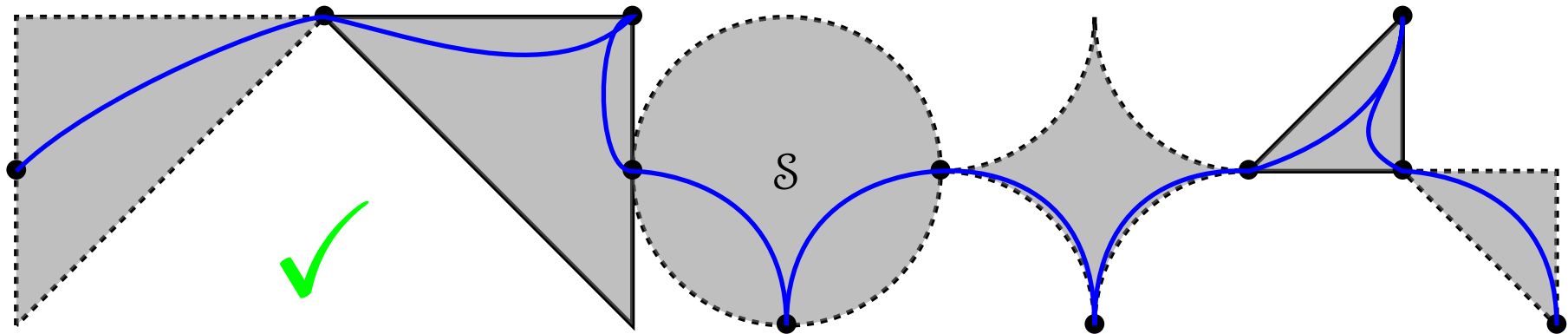
1.3. Principales resultados teóricos obtenidos

- (1) Caracterización de las imágenes polinómicas (y regulares = racionales + sin polos) de \mathbb{R}^m de dimensión 1 \iff lo son de \mathbb{R}^2 (Fernando, 2014).
- (2) El conjunto de puntos de infinito $\text{Cl}_{\mathbb{RP}^n}(\mathcal{S}) \cap H_\infty$ de una imagen polinómica $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^m es conexo (Fernando-Ueno, 2014).



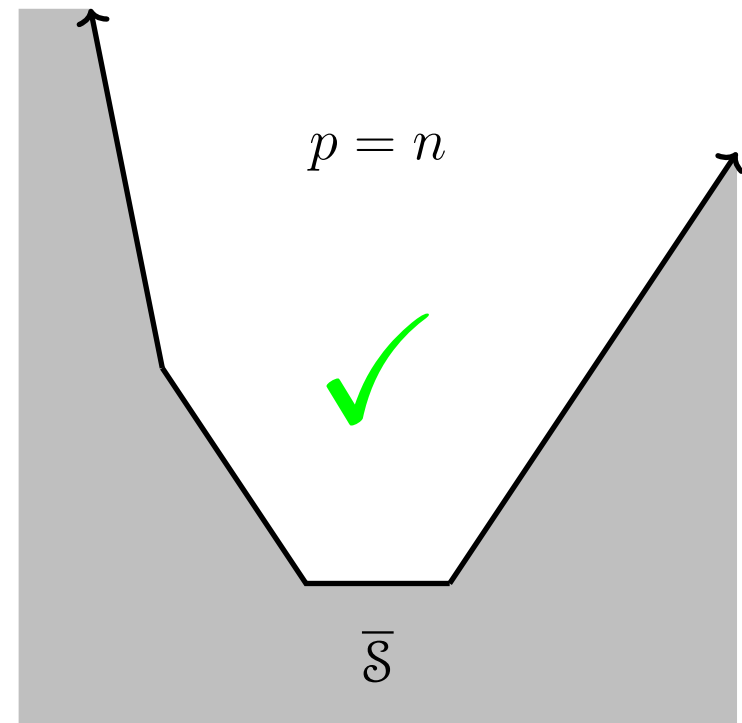
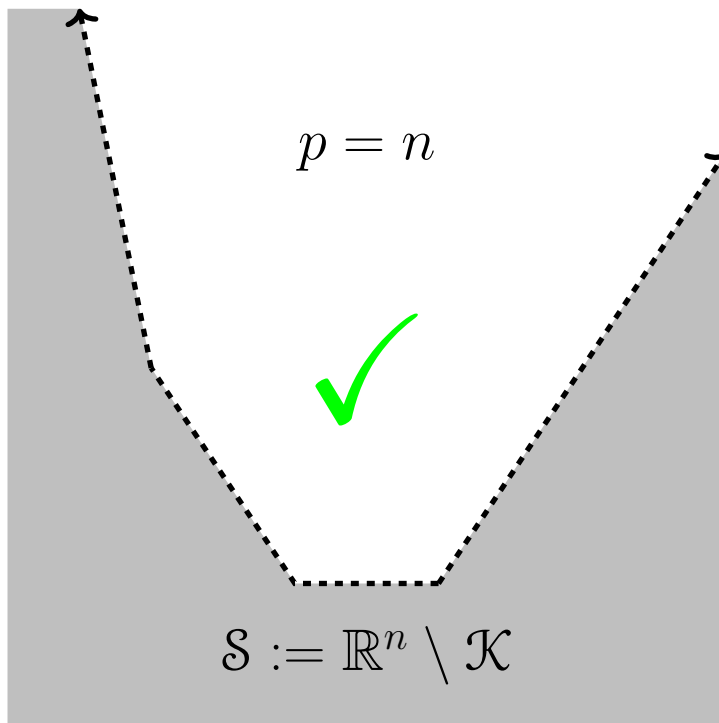
(3) **Conjetura de Shiota** (Fernando, 2018): Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es imagen por un aplicación de Nash (= diferenciable + grafo semialgebraico) $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- \mathcal{S} es un conjunto semialgebraico ($\dim(\mathcal{S}) \leq m$) conexo por caminos analíticos.
- \mathcal{S} es un conjunto semialgebraico de dimensión pura ($\dim(\mathcal{S}) \leq m$) y existe un camino analítico dentro de \mathcal{S} que corta a todas las componentes conexas de su lugar regular $\text{Reg}(\mathcal{S})$.

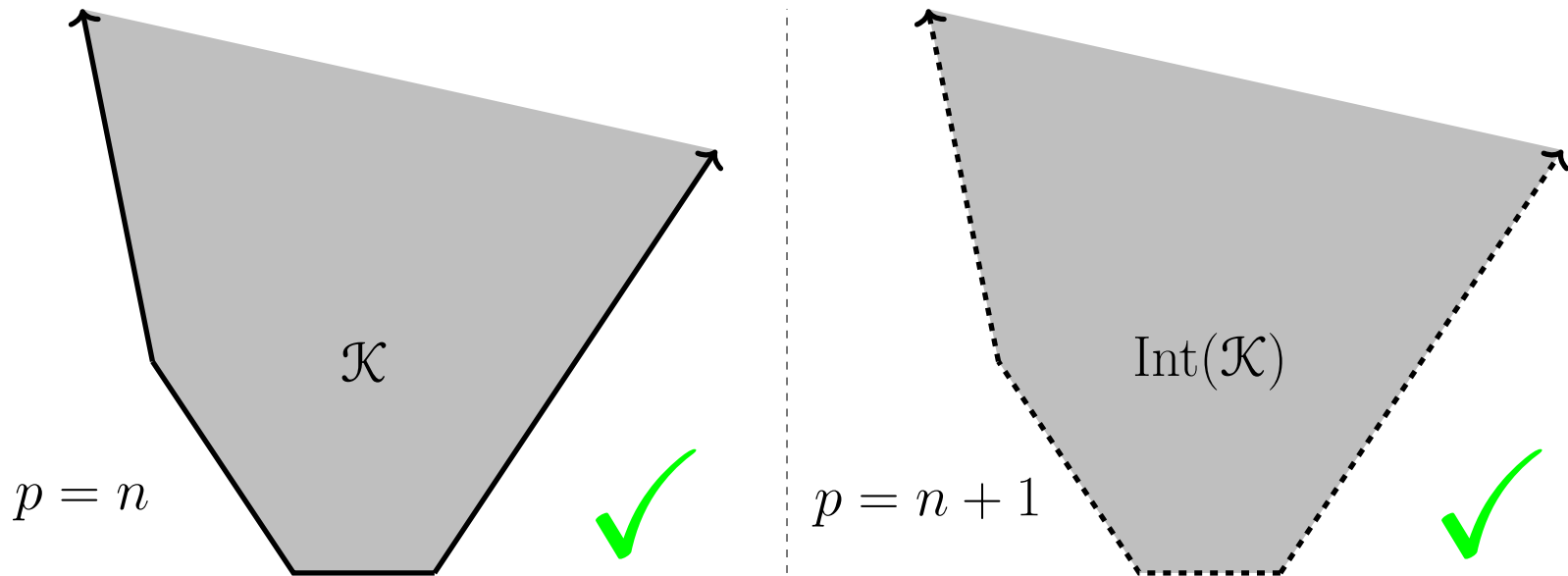


1.4. Principales conjuntos semialgebraicos PL estudiados

- (1) Resolución del problema del **cuadrante abierto** (Fernando-Gamboa, 2003).
- (2) Construcciones “explícitas” (Fernando-Gamboa-Ueno, 2019) de aplicaciones polinómicas $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ (de alta complejidad) cuyas imágenes son:
 - El complementario $\mathcal{S} := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}$ de un poliedro convexo n -dimensional $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ (que no desconecta \mathbb{R}^n) y su clausura $\overline{\mathcal{S}}$. Conseguido para $p = n$. **SHARP!!**



- Poliedros convexos n -dimensional no acotados $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ con proyecciones no acotadas. Conseguido para $p = n$. **SHARP!!**



- Interiores $\text{Int}(\mathcal{K})$ de poliedros convexos n -dimensional no acotados $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ con proyecciones no acotadas. Conseguido para $p = n + 1$ (y $\text{Int}(\mathcal{K})$ no es imagen polinómica de \mathbb{R}^n si \mathcal{K} tiene caras de dimensión $n - 1$ acotadas). **SHARP!!**
- (3) Cada poliedro convexo n -dimensional $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ es imagen de una aplicación regular (= racional + sin polos) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Fernando-Gamboa-Ueno, 2011). **SHARP!!**

1.5. Nuevos horizontes

En Octubre de 2018 Sturmfels nos propuso estudiar el siguiente problema:

- ¿Es posible aplastar “polinómicamente” un balón de fútbol para representar polígonos convexos (compactos)? (propuesto por Kubjas-Parrilo-Sturmfels, 2017).
- Con más precisión: Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ un polígono convexo (compacto). ¿Existe una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(\overline{\mathcal{B}_3}) = \mathcal{P}$? ($\overline{\mathcal{B}_3} := \{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 \leq 1\}$).

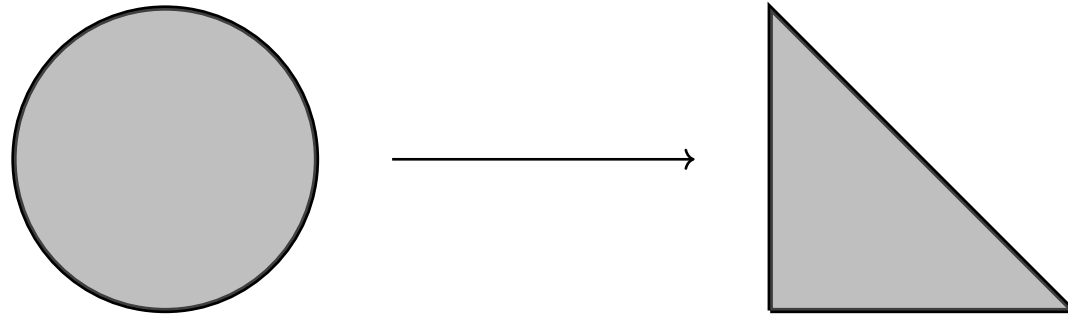
De forma más general, es natural preguntarse:

- ¿Qué ocurre con los poliedros convexos (compactos) de mayor dimensión?
- ¿Qué ocurre con los conjuntos semialgebraicos (compactos) PL (= lineal a trozos)?
- ¿Qué ocurre con los conjuntos semialgebraicos (compactos) más generales?

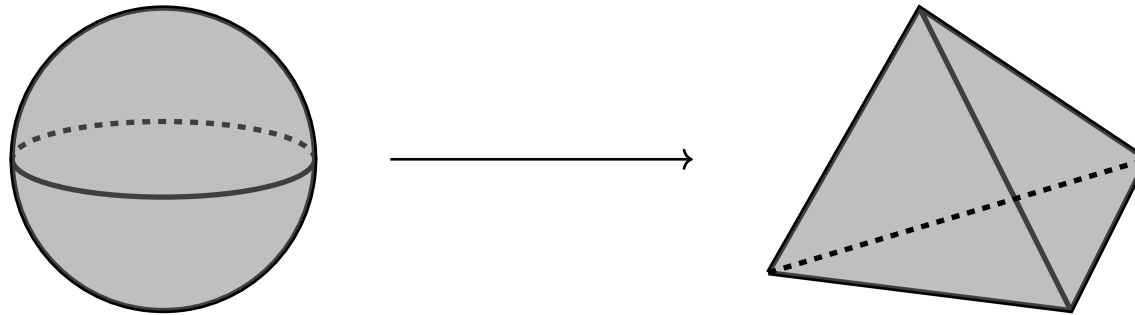
Nuevo miembro del equipo de trabajo: Antonio Carbone (Caso Nash, Ph.D. 2023).

2. Polígonos y poliedros convexos

2.1. Triángulo (y n -símplice)

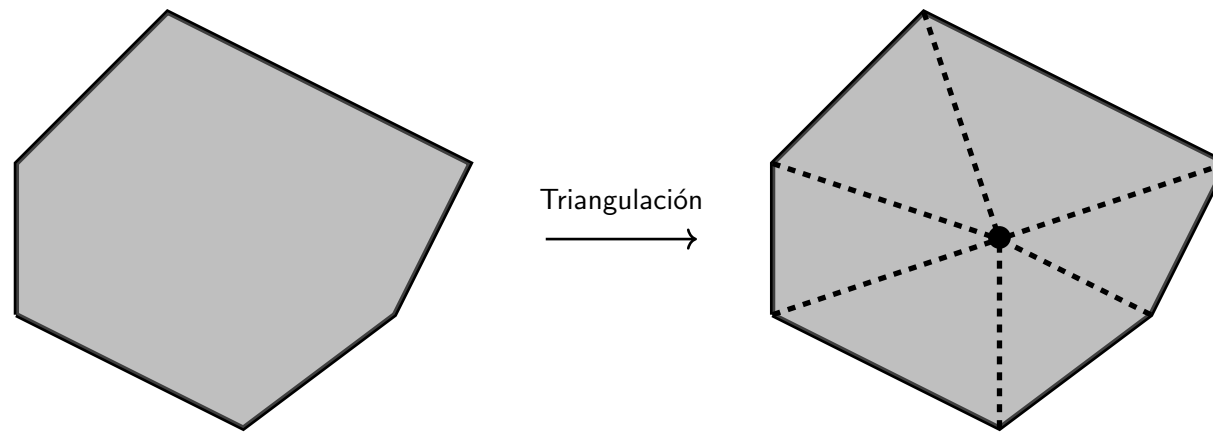


$$\varphi : \overline{\mathcal{B}}_2 := \{\mathbf{x}^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathcal{T} := \{u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$$
$$(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$$

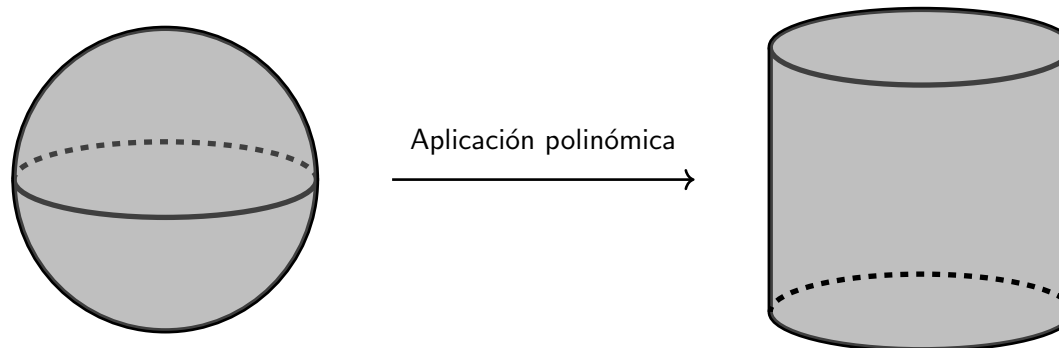


$$\varphi : \overline{\mathcal{B}}_n := \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2 \leq 1 \right\} \rightarrow \mathcal{T}_n := \left\{ u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0, \sum_{i=1}^n u_i \leq 1 \right\}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2, \dots, x_n^2)$$

Observaciones 2.1 (i) Los poliedros convexos (compactos) son *triangulables* (se pueden representar como unión finita de símplexes tales que dos de ellos son o bien disjuntos o tienen una cara común). Esta propiedad nos permitirá representar los polígonos convexos (compactos) como imagen polinómica de $\overline{\mathcal{B}}_3$.



(ii) Necesitamos representar primero $\overline{\mathcal{B}}_2 \times [0, 1]$ como imagen polinómica de $\overline{\mathcal{B}}_3$.

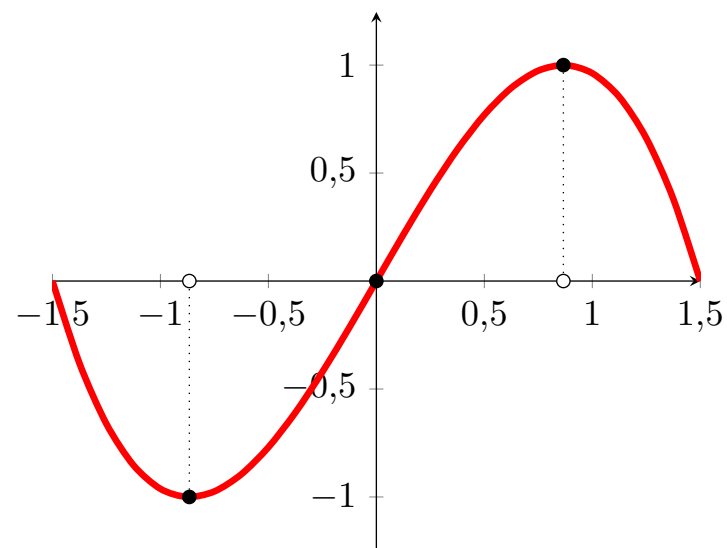
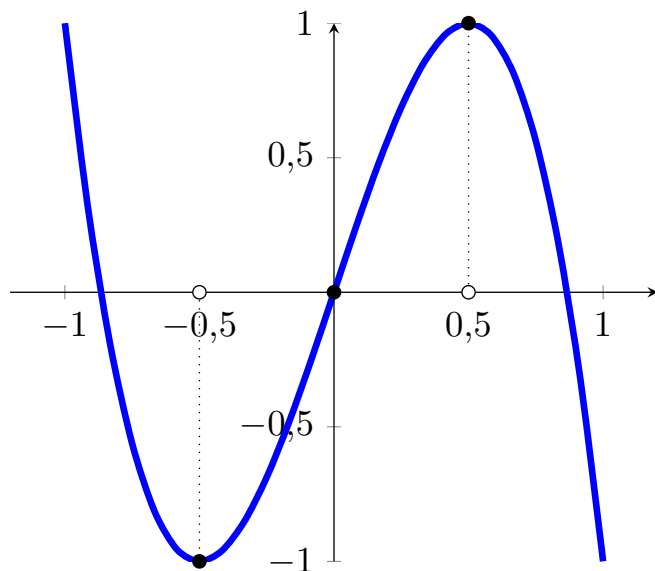


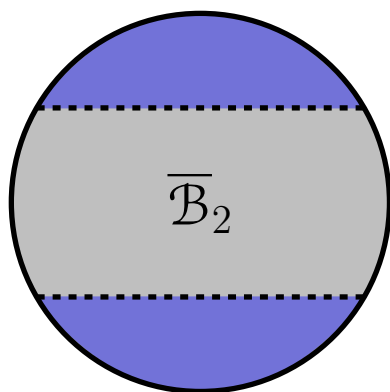
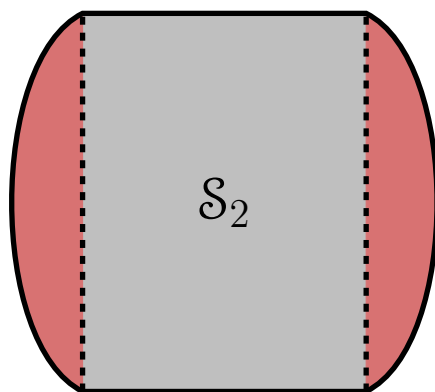
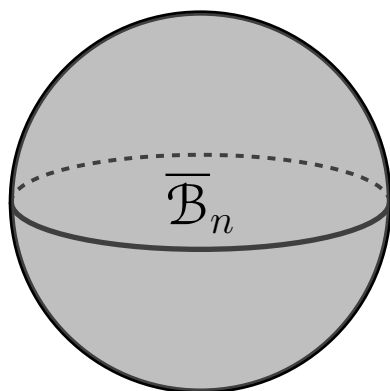
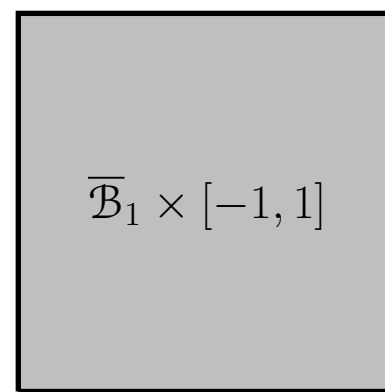
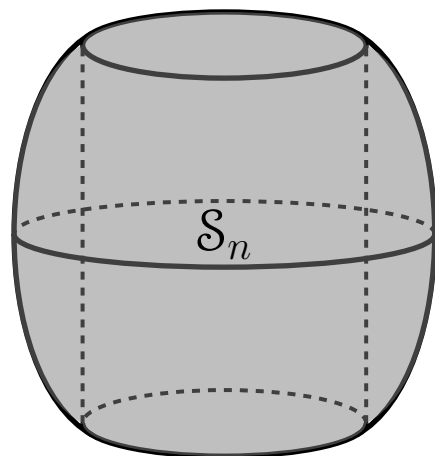
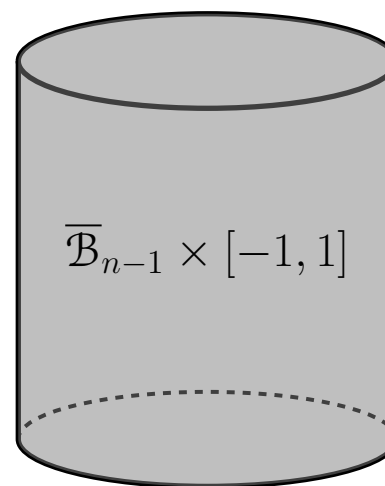
2.2. Cuadrado: $\overline{\mathcal{B}}_1 \times [-1, 1]$

$$\overline{\mathcal{B}}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{S}_2 \xrightarrow{H} \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, g(x_2)) = (x_1, y_2) \mapsto (x_1 h(|x_1|), y_2)$$

$$\mathcal{S}_2 := G(\overline{\mathcal{B}}_2) = \{|x| < \frac{\sqrt{3}}{2}, |y| < 1\} \cup \{|y| \leq \sqrt{1 - x^2}(3 - 4(1 - x^2))\}$$

$$g(t) := t(3 - 4t^2) \quad \& \quad th(t) := t\left(\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{3}}t^2\right)$$




 \xrightarrow{G}

 \xrightarrow{H}

 \xrightarrow{G}

 \xrightarrow{H}


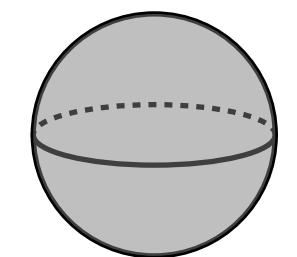
2.3. Cilindro: $\overline{\mathcal{B}}_{n-1} \times [-1, 1]$

La aplicación polinómica para representar el cuadrado nos permite obtener el cilindro.

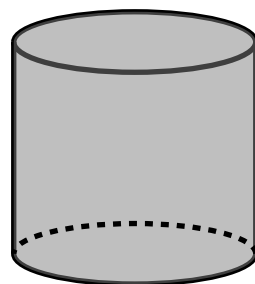
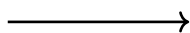
Denotamos $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$ y

$$G : \overline{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathcal{S}_n \rightarrow [-1, 1]^n, (x', x_n) \mapsto (x', g(x_n)) = (x', y_n) \mapsto (x' h(\|x'\|), y_n)$$

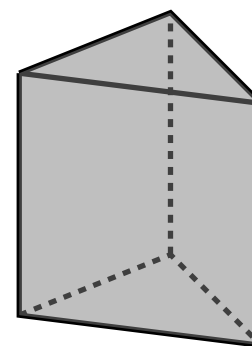
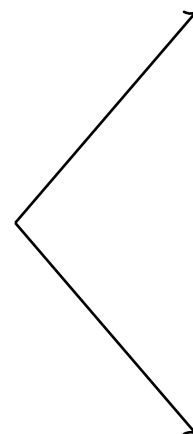
$$\mathcal{S}_n := G(\overline{\mathcal{B}}_n) = \{\|\mathbf{x}'\| < \frac{\sqrt{3}}{2}, |\mathbf{x}_n| < 1\} \cup \{|\mathbf{x}_n| \leq \sqrt{1 - \|\mathbf{x}'\|^2}(3 - 4(1 - \|\mathbf{x}'\|^2))\}$$



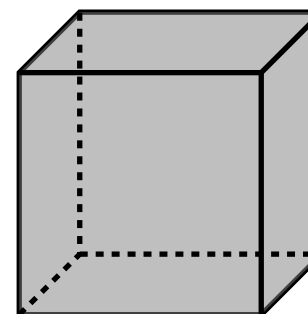
Bola cerrada



Cilindro



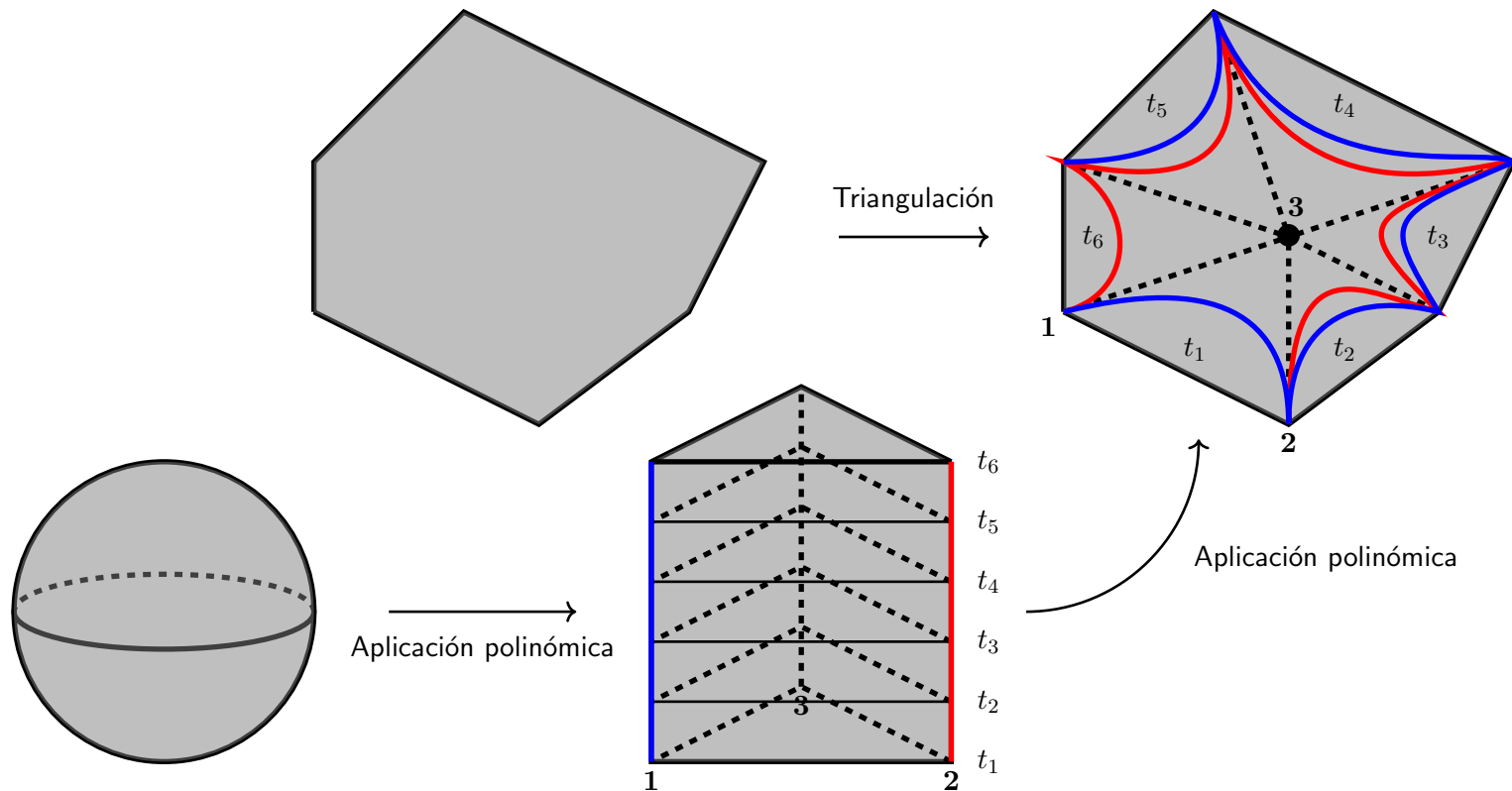
Prisma



Hiper cubo

2.4. Polígonos convexos

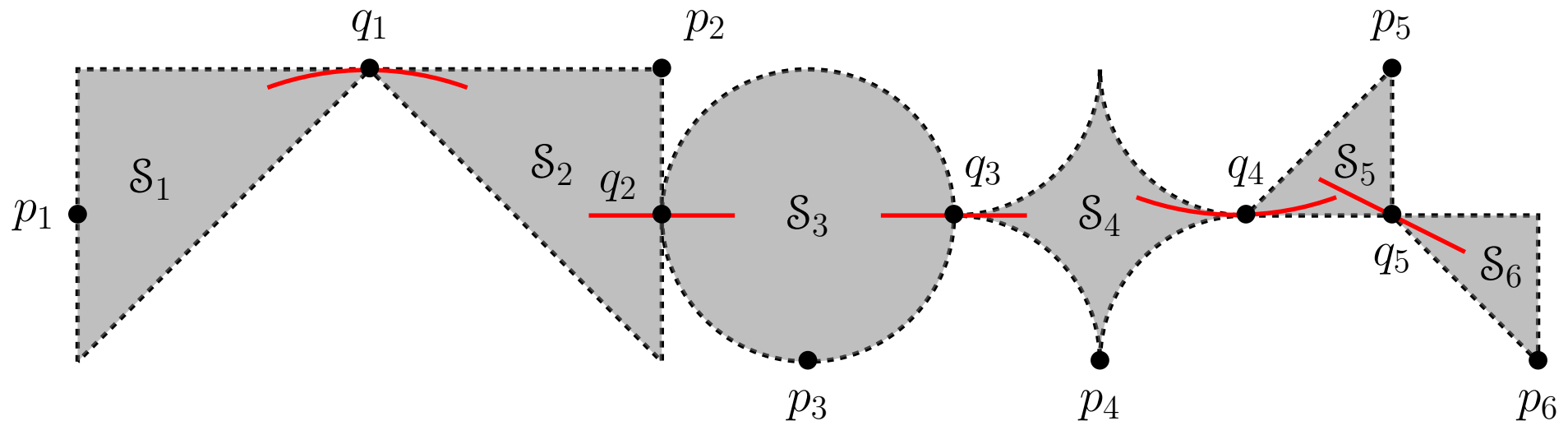
Representamos un polígono convexo como imagen polinómica de un prisma triangular usando un proceso dinámico que involucra una triangulación de tal polígono convexo.



Necesitamos describir trayectorias polinómicas dentro del polígono que en ciertos instantes pasan por ciertas posiciones prefijadas.

3. Lema de selección de curvas inteligentes

Lema 3.1 Sean $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_r \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos semialgebraicos abiertos conexos (quizás algunos repetidos) tales que existen arcos analíticos entre \mathcal{S}_i y \mathcal{S}_{i+1} a través de $q_i \in \text{Cl}(\mathcal{S}_i) \cap \text{Cl}(\mathcal{S}_{i+1})$ y sean $p_i \in \text{Cl}(\mathcal{S}_i)$ para $i = 1, \dots, r$.



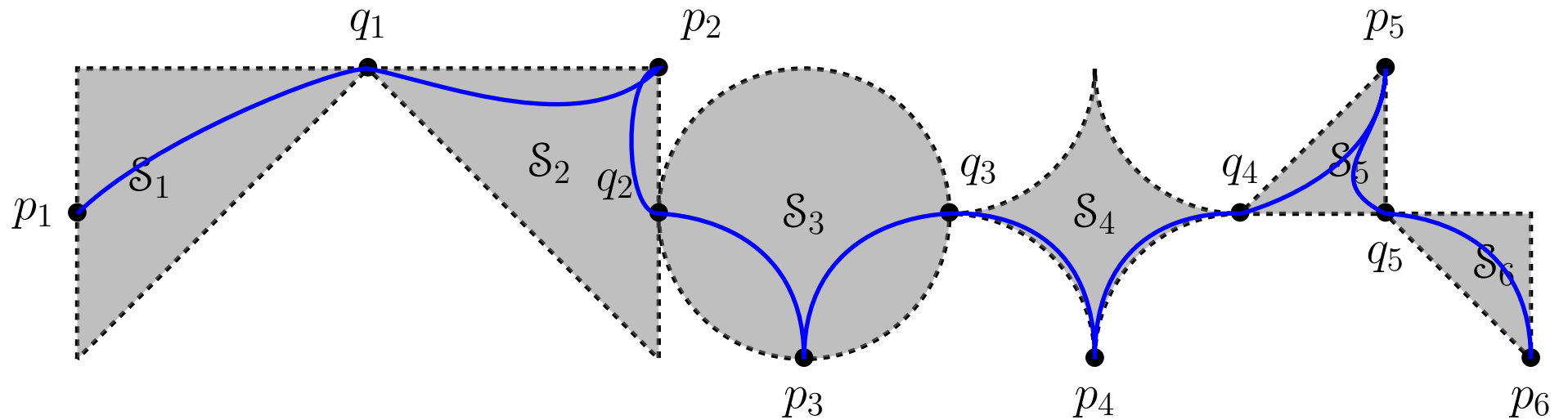
Fijamos valores $0 \leq t_1 < \dots < t_r \leq 1$ y $s_i \in (t_i, t_{i+1})$ para $i = 1, \dots, r$.

Entonces existe un camino polinómico

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \bigcup_{i=1}^r \mathcal{S}_i \cup \{q_1, \dots, q_{r-1}\} \cup \{p_1, \dots, p_r\}$$

$$t_i \mapsto p_i, \quad \alpha((t_i, s_i)) \subset \mathcal{S}_i,$$

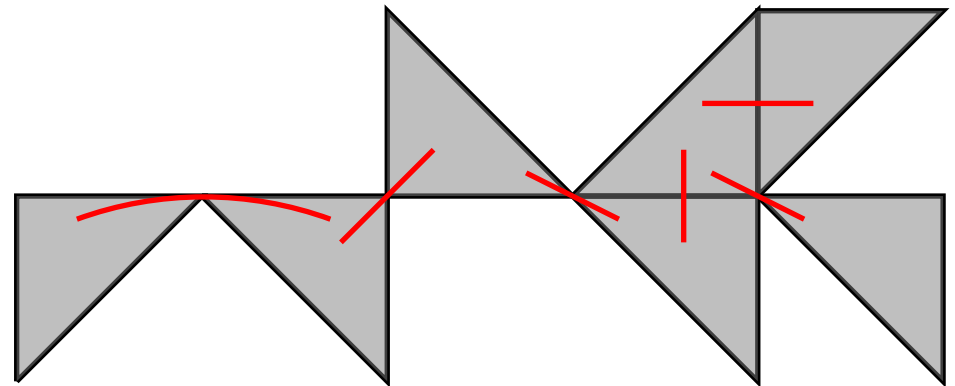
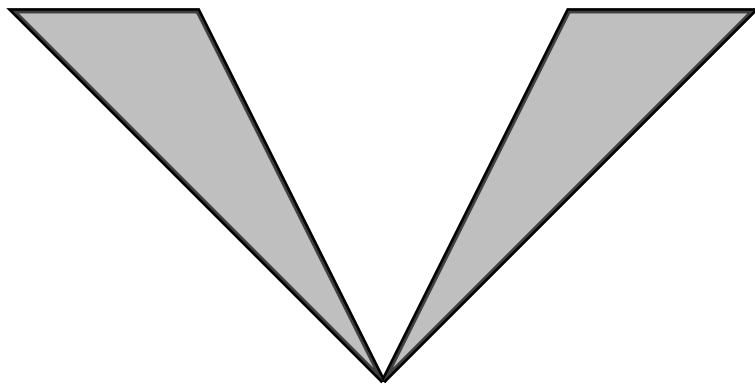
$$s_i \mapsto q_i, \quad \alpha((s_i, t_{i+1})) \subset \mathcal{S}_{i+1}.$$



4. Conjuntos semialgebraicos PL

¿Es la convexidad del conjunto semialgebraico PL (compacto) necesaria para obtener una representación como imagen polinómica de la bola cerrada? ¿Existen restricciones dimensionales?

NO!! La conexión por caminos analíticos es suficiente. Esta propiedad permite “pasar” de un símple al siguiente (Condición necesaria y suficiente).



Conjunto semialgebraico PL (compacto) = unión finita de poliedros convexos (compactos) = realización de un complejo simplicial finito.

Teorema 4.1 *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ una unión finita de poliedros convexos (compactos) n -dimensionales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

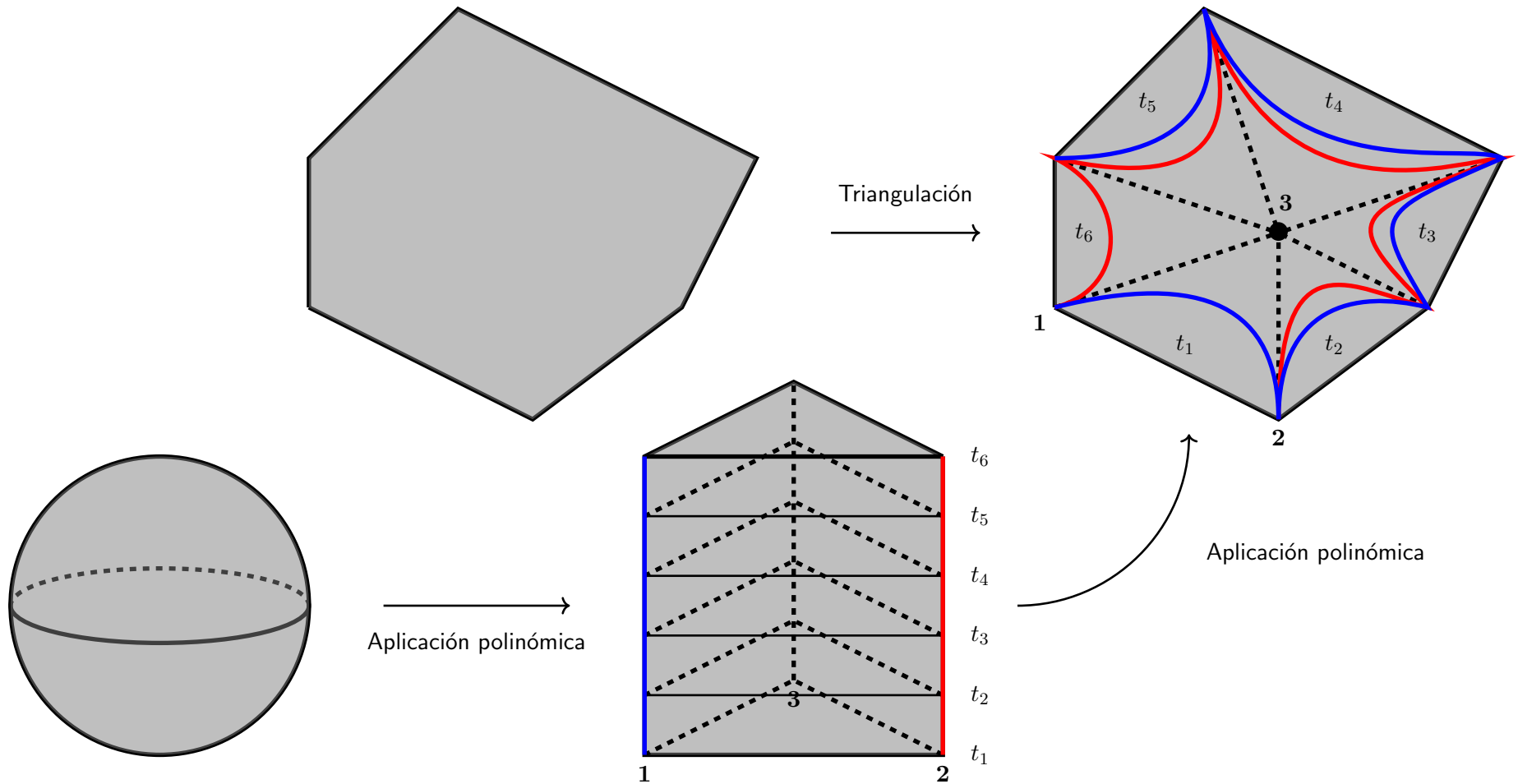
- (i) \mathcal{S} es conexo por caminos analíticos.
- (ii) Existe una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(\overline{\mathcal{B}}_{n+1}) = \mathcal{S}$.

Los argumentos de la prueba del Teorema 4.1 se pueden expresar (incrementando la complejidad de las construcciones involucradas) para probar lo siguiente.

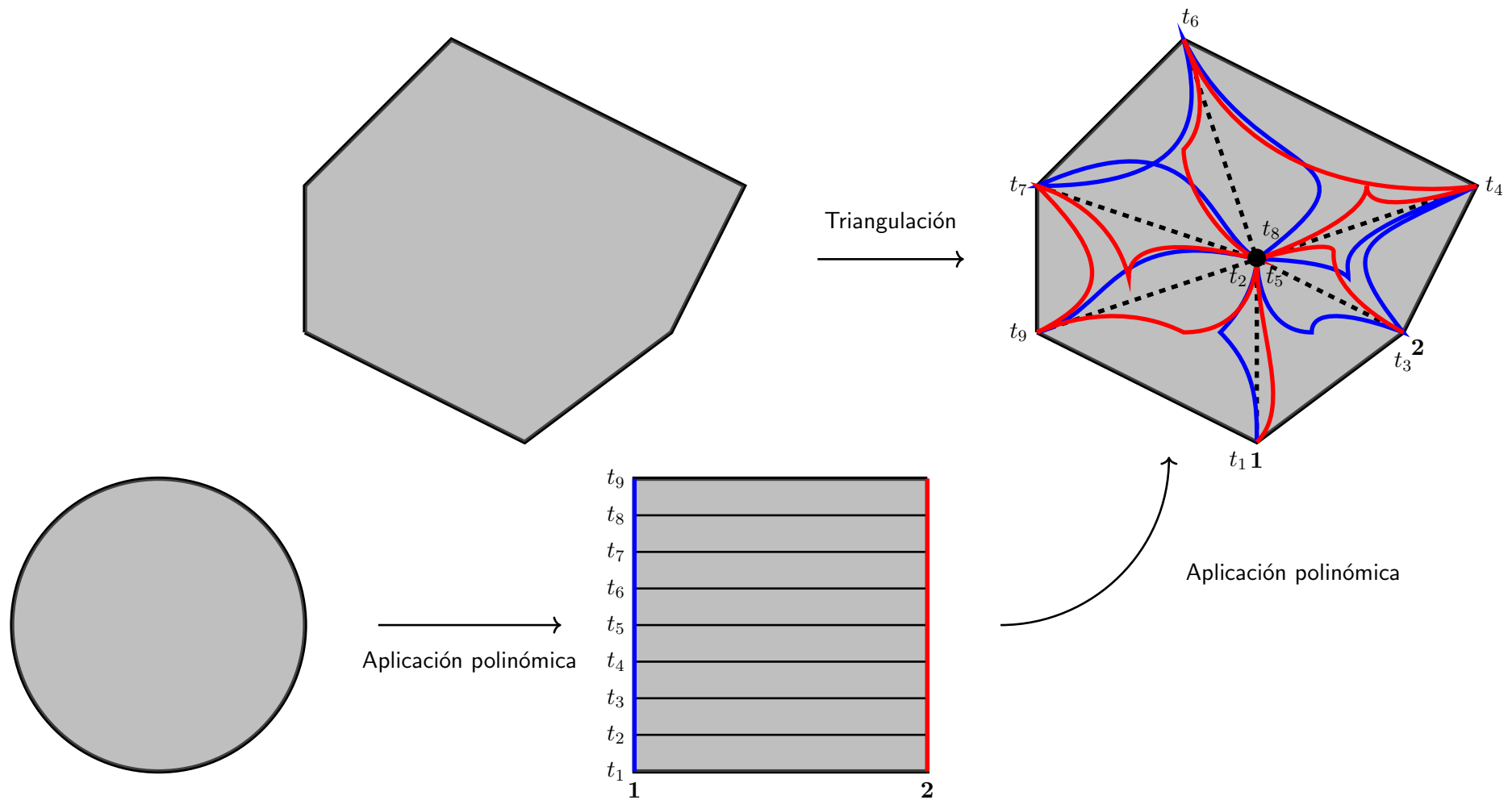
Teorema 4.2 *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ una unión finita de poliedros convexos (compactos) n -dimensionales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) \mathcal{S} es conexo por caminos analíticos.
- (ii) Existe una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(\overline{\mathcal{B}}_n) = \mathcal{S}$.

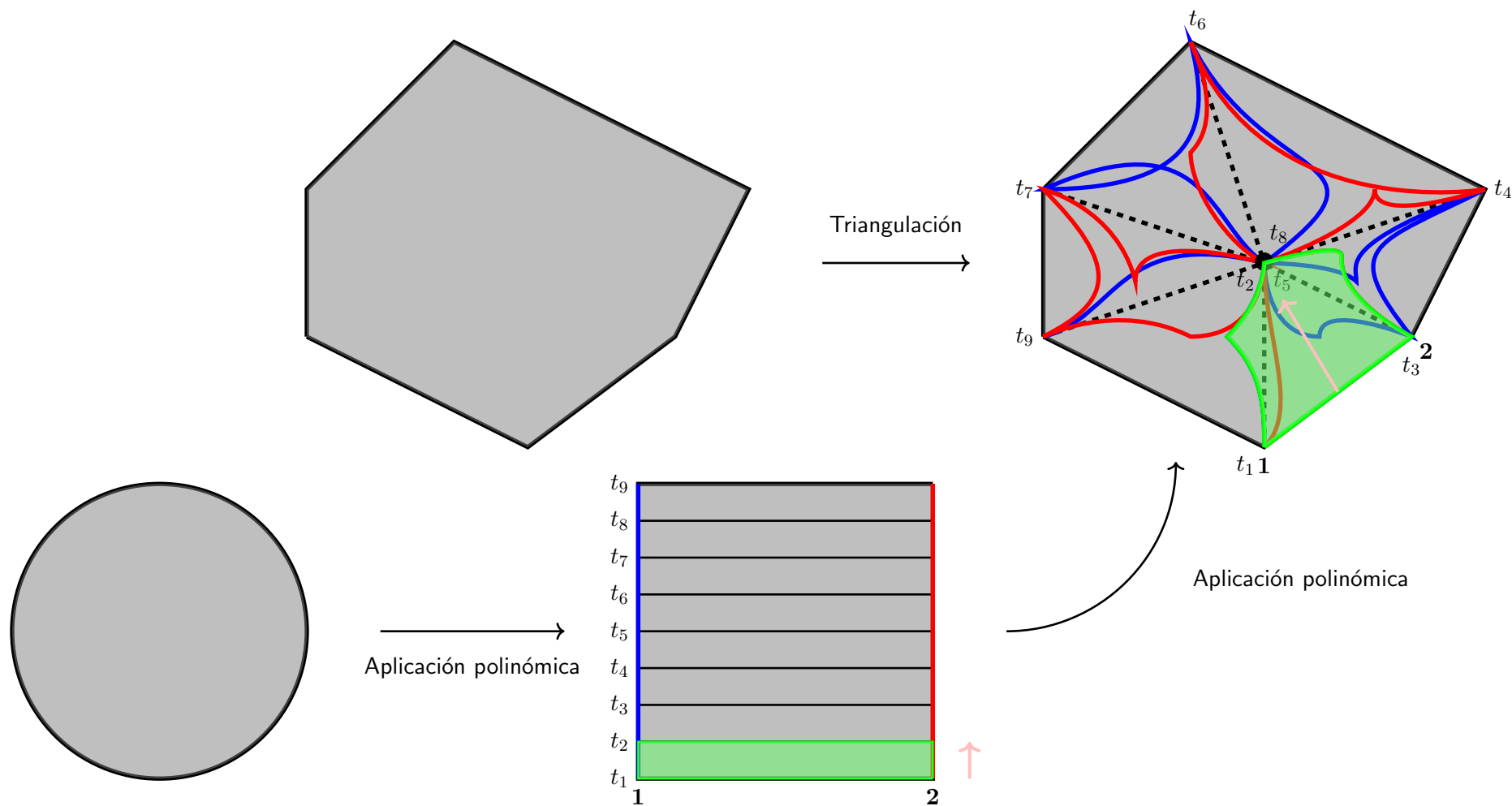
Representación gráfica del Teorema 4.1



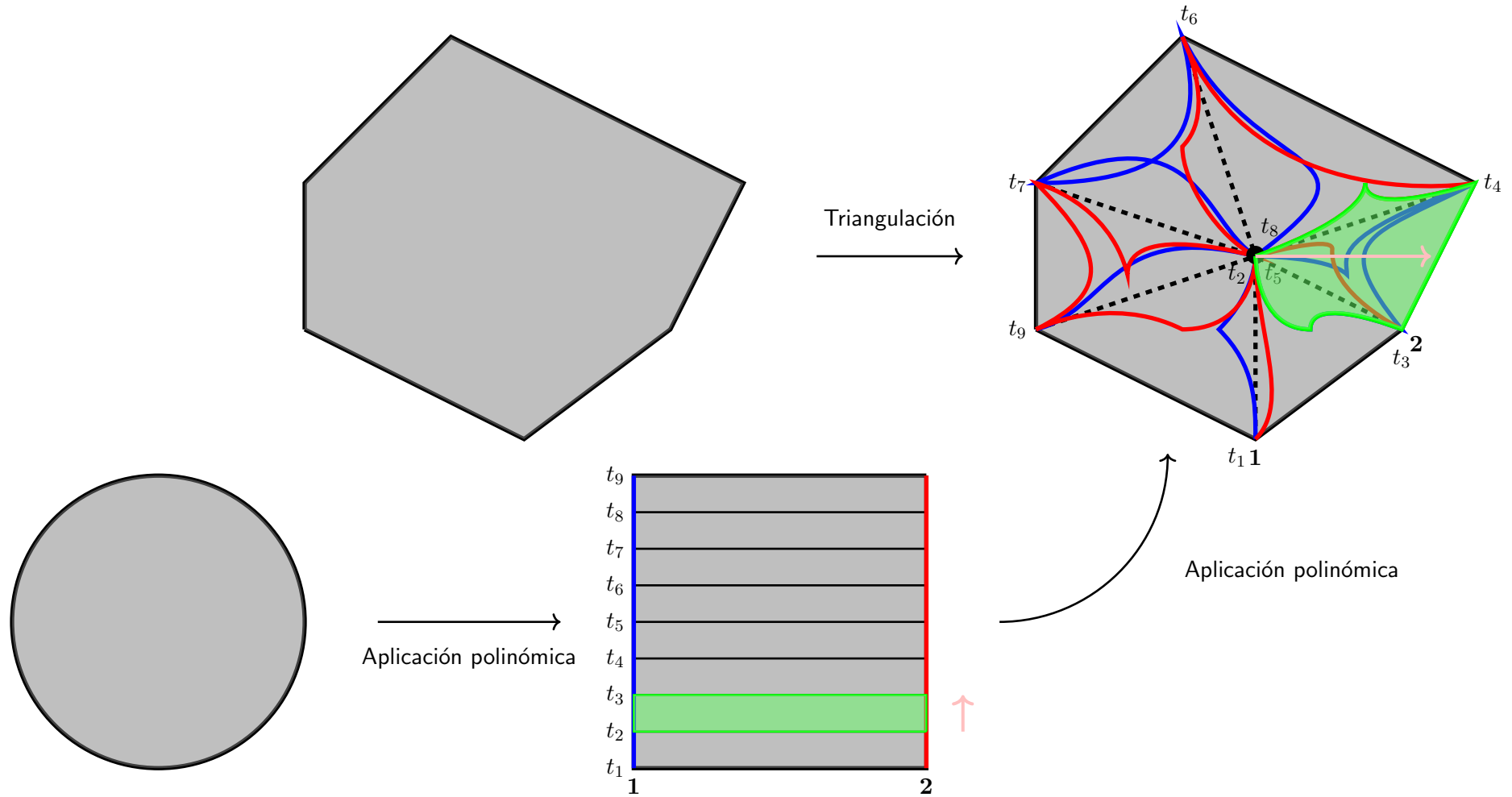
Representación gráfica del Teorema 4.2



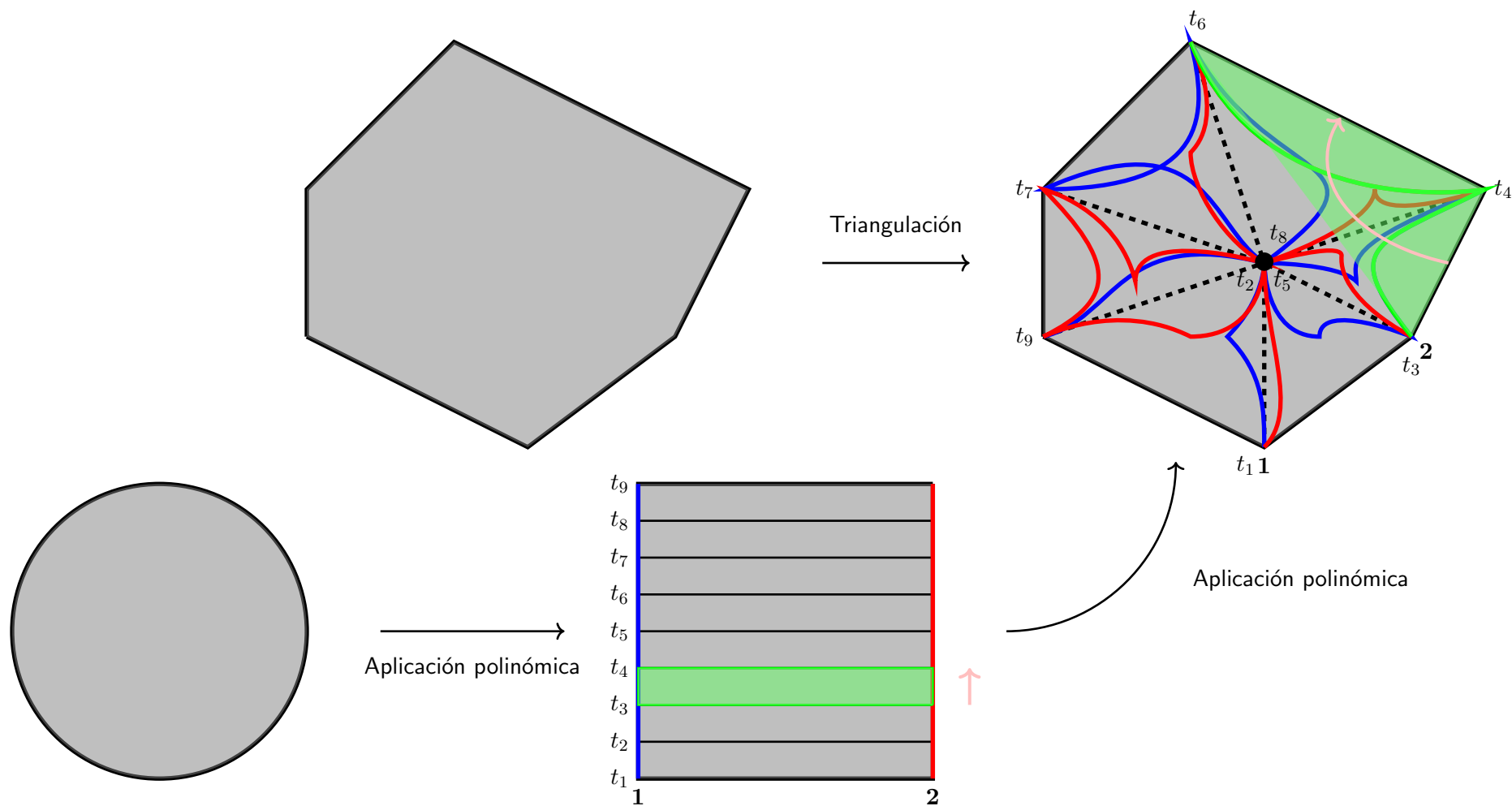
Teorema 4.2: Paso 1



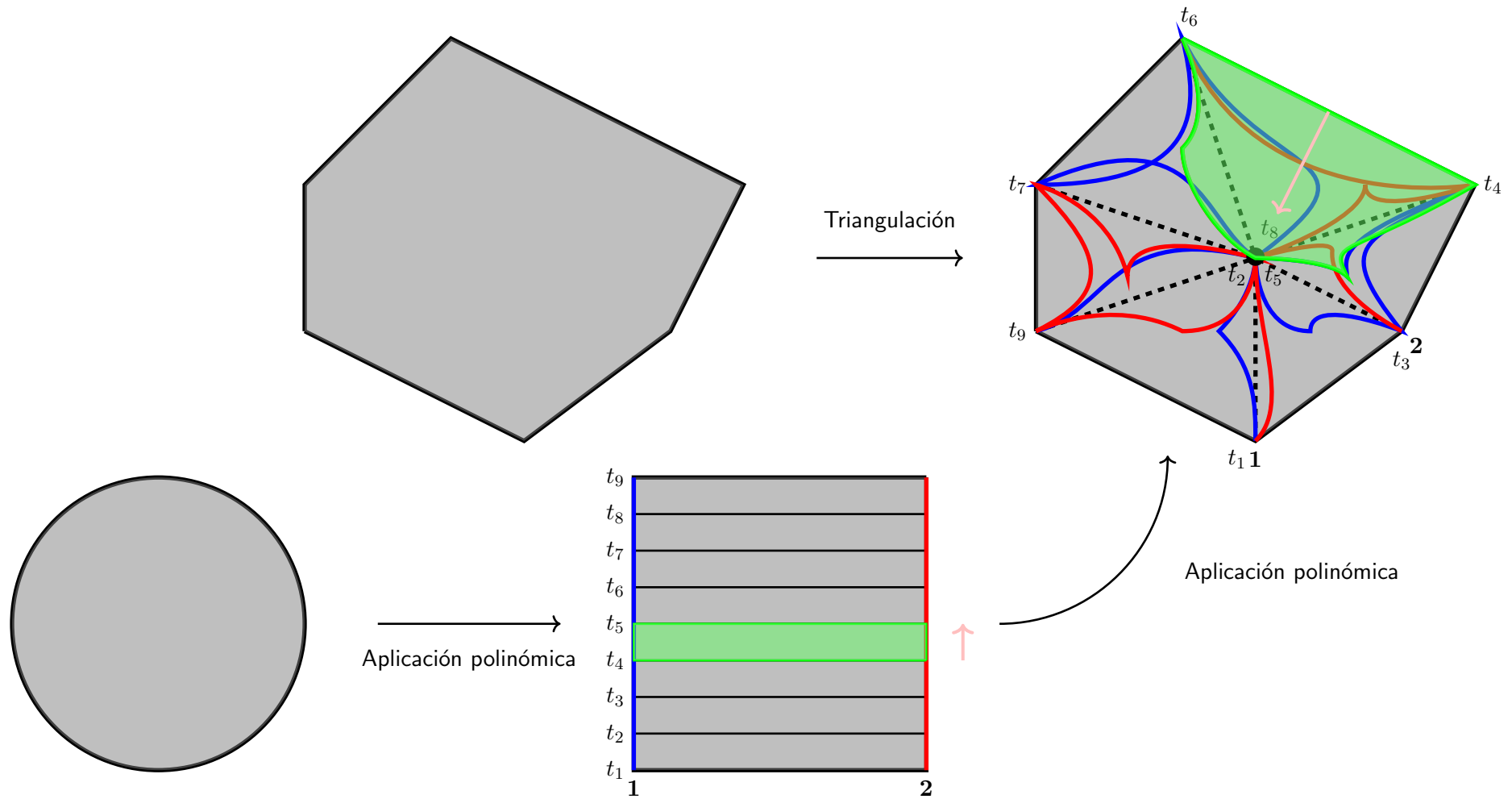
Teorema 4.2: Paso 2



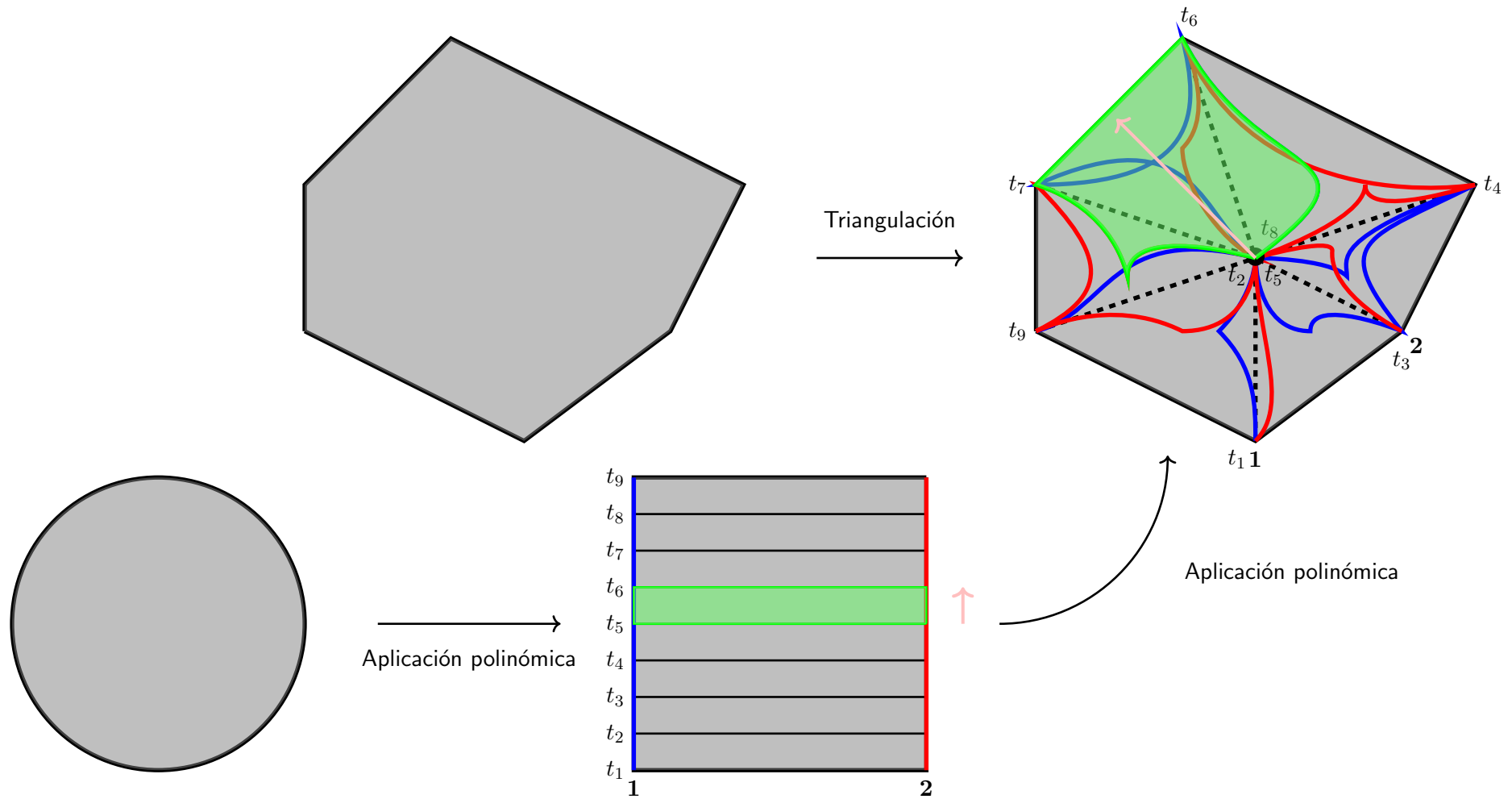
Teorema 4.2: Paso 3



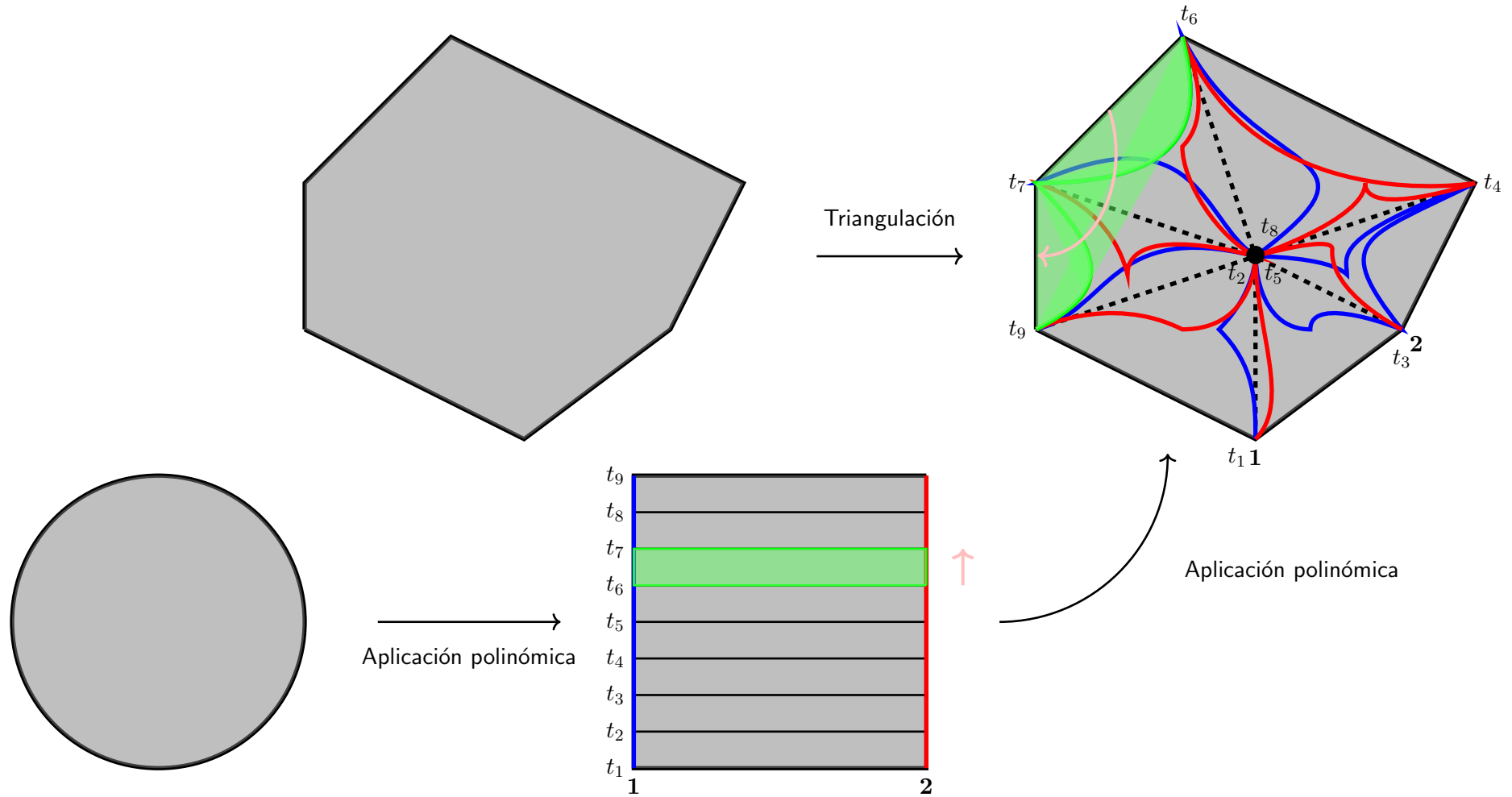
Teorema 4.2: Paso 4



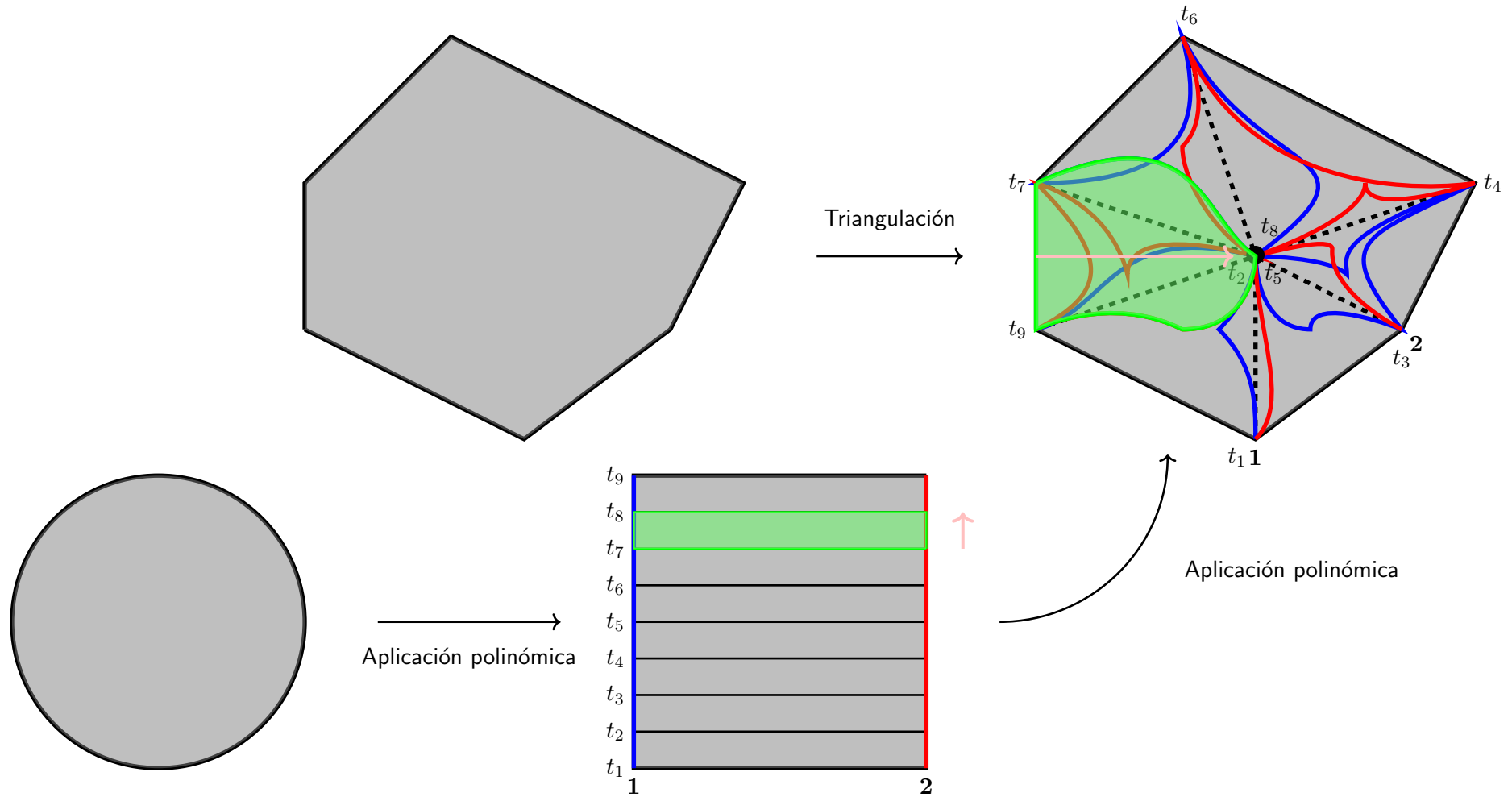
Teorema 4.2: Paso 5



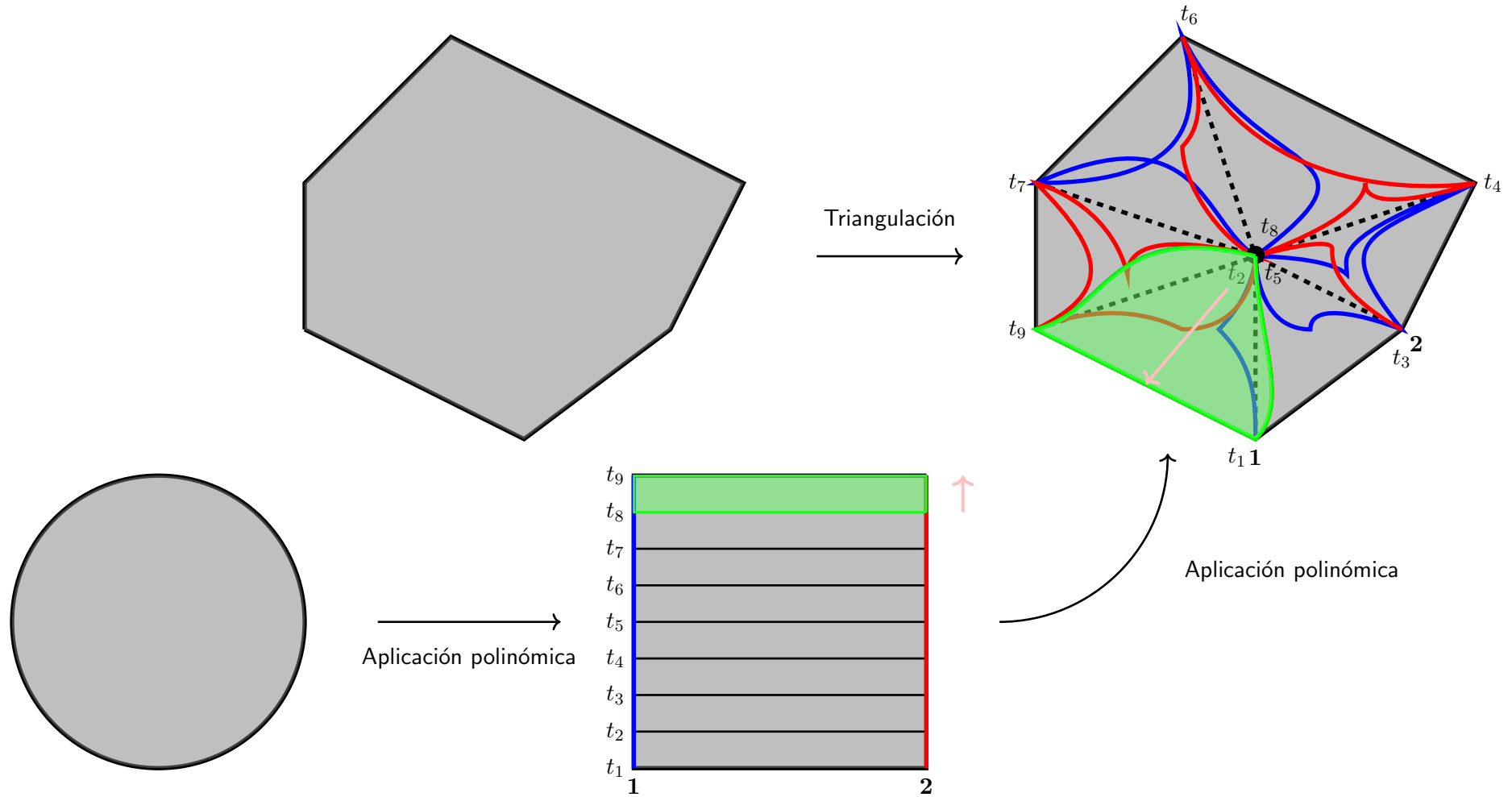
Teorema 4.2: Paso 6



Teorema 4.2: Paso 7



Teorema 4.2: Paso 8



5. Uniones de conjuntos semialgebraicos convexos

¿Es necesario que los “bloques” que constituyen un conjunto semialgebraico $S \subset \mathbb{R}^n$ que es imagen polinómica de una bola cerrada sean símplices?

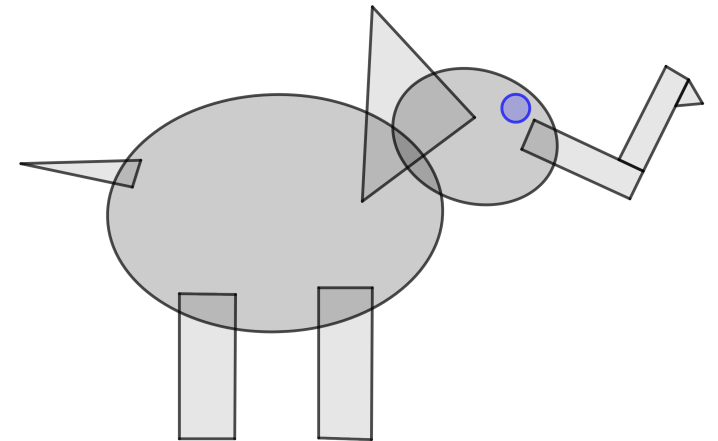
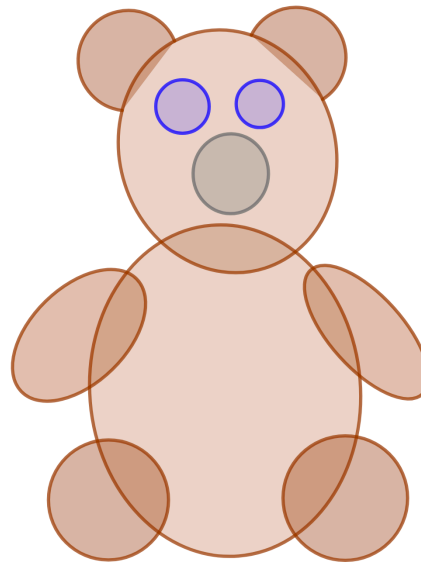
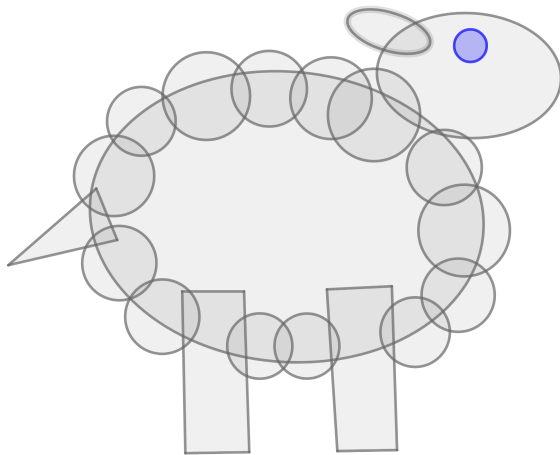
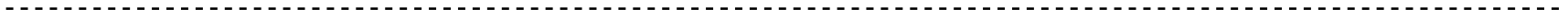
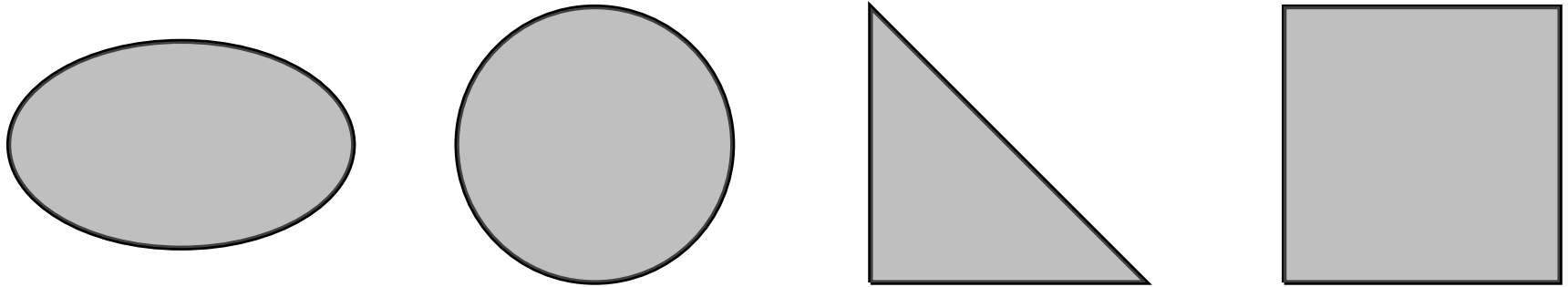
NO!! Es suficiente que cada “bloque” sea un conjunto semialgebraico convexo que es imagen polinómica de $\overline{\mathcal{B}}_n$. Por ejemplo:

- Bolas cerradas, elipsoides sólidos y sectores elípticos.
- Símplices.
- Hipercubos, hiperprismas o productos de bolas cerradas.
- Conos truncados.
- Segmentos parabólicos, elípticos, hiperbólicos, etc.

Y se pueden combinar diferentes tipos de ellos!!

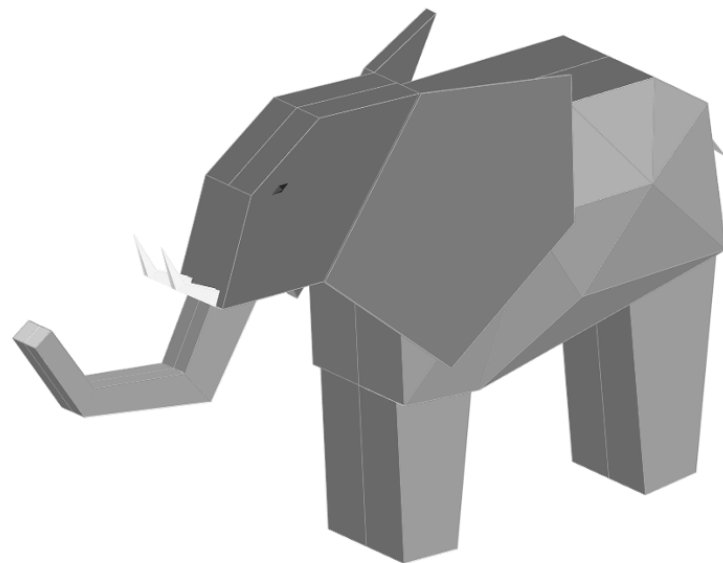
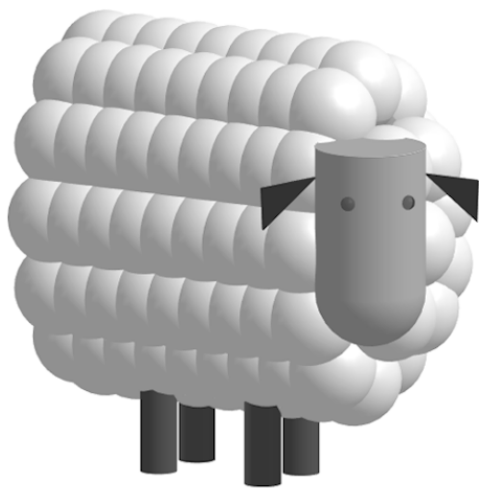
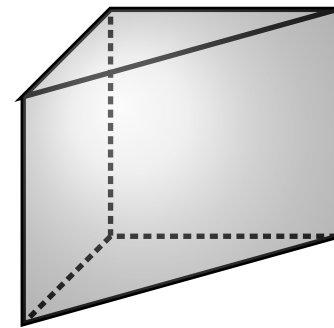
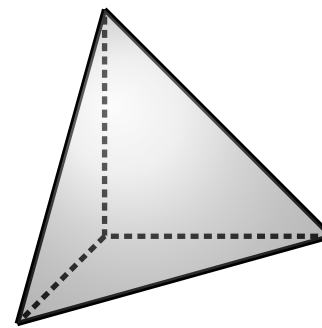
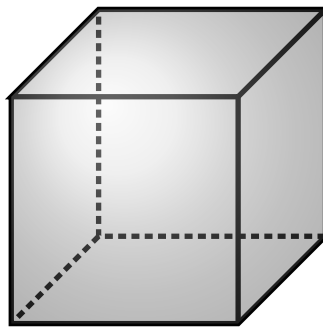
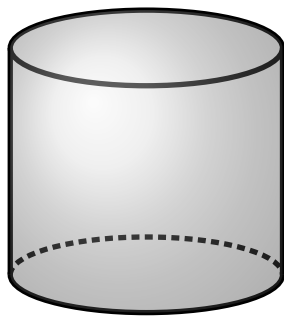
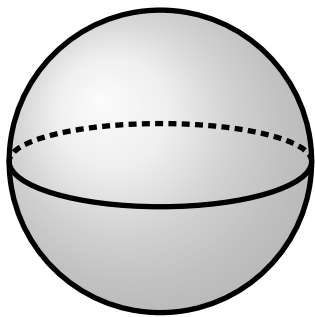
Ejemplo 5.1 (Osito, Elefante, Oveja 2-dimensionales)

Tres tipos de “bloques”: triángulos, rectángulos, elipses sólidas.



Ejemplo 5.2 (Osito, Elefante, Oveja 3-dimensionales)

Imágenes polinómicas de la bola cerrada unitaria 4-dimensional.



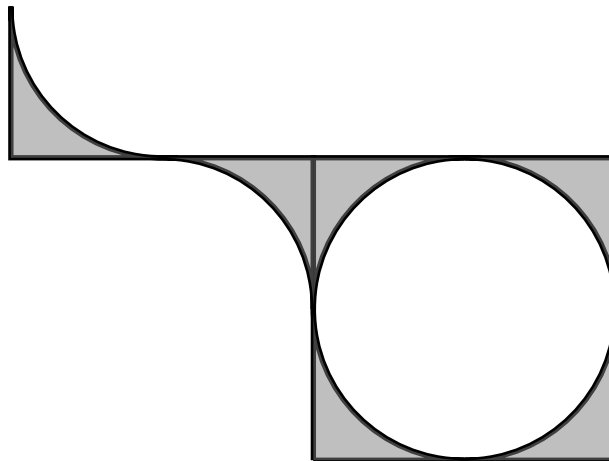
6. Uniones finitas de conjuntos semialgebraicos

¿Es necesario que los “bloques” que constituyen un conjunto semialgebraico $S \subset \mathbb{R}^n$ que es imagen polinómica de una bola cerrada sean convexos?

NO!! Nuestras técnicas permiten representar conjuntos semialgebraicos que son uniones finitas de “bloques” que admiten “ciertas deformaciones” y que llamaremos *m-ladrillos*.

Ejemplo 6.1 (Estrellas esféricas) Conjuntos semialgebraicos del tipo:

$$f : \overline{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathcal{S}_{k,n} := \{\mathbf{x}_1^{2/k_1} + \cdots + \mathbf{x}_n^{2/k_n} \leq 1\}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n})$$



6.1. m -ladrillos

Denotamos $\mathcal{S}^0([0, 1])$ el conjunto de las funciones semialgebraicas (= con grafo semialgebraico) continuas definidas en el intervalo $[0, 1]$.

Definición 6.2 Un conjunto semialgebraico n -dimensional $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es un m -ladrillo si existe una homotopía semialgebraica $H := (H_1, \dots, H_n) : [0, 1] \times \overline{\mathcal{B}}_m \rightarrow \mathcal{S}$ tal que:

- (i) $H_i \in \mathcal{S}^0([0, 1])[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m]$ para $i = 1, \dots, n$.
- (ii) $H(\{0\} \times \overline{\mathcal{B}}_m) = \mathcal{S}$ y $H(1, \cdot)$ es una aplicación constante.
- (iii) $H(\{\lambda\} \times \overline{\mathcal{B}}_m) \subset \text{Int}(\mathcal{S})$ para cada $\lambda \in (0, 1)$.

Un conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es *estrictamente radialmente convexo* (con respecto a $p \in \text{Int}(\mathcal{S})$) si para cada rayo ℓ con origen en p , la intersección $\ell \cap \mathcal{S}$ es un segmento cuyo interior (relativo) está contenido en $\text{Int}(\mathcal{S})$.

Los conjuntos conexos son estrictamente radialmente convexos!

Ejemplos 6.3

- Los conjuntos semialgebraicos estrictamente radialmente convexos que son imagen polinómica de $\overline{\mathcal{B}}_m$ son m -ladrillos.
- Los productos finitos de m_i -ladrillos son m -ladrillos, donde $m := \sum_i m_i$.
- Las estrellas esféricas n -dimensionales son n -ladrillos.
- Los sectores hiperbólicos n -dimensionales son n -ladrillos.

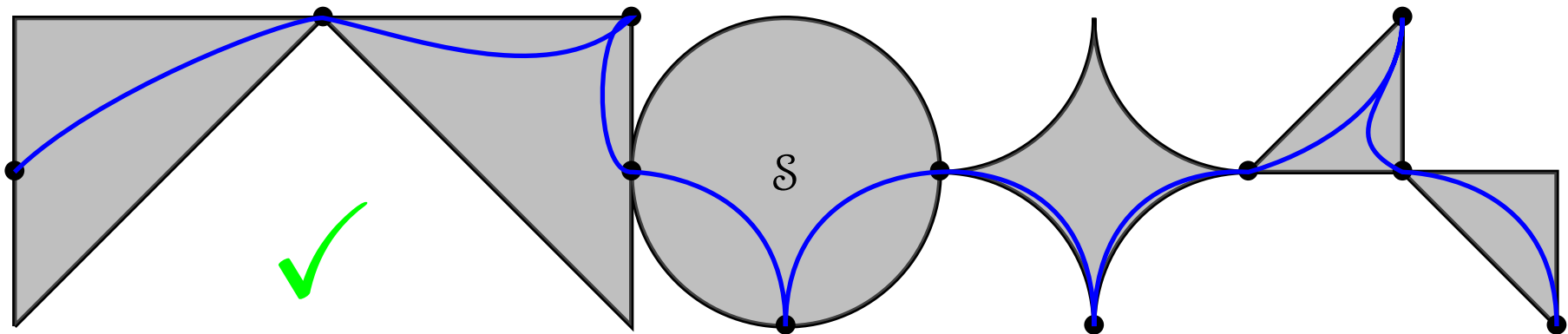
Teorema 6.4 *Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ una unión finita de m -ladrillos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) \mathcal{S} es conexo por caminos analíticos.
- (ii) Existe una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(\overline{\mathcal{B}}_{m+1}) = \mathcal{S}$.

7. Ph.D. Tesis Carbone (2023)

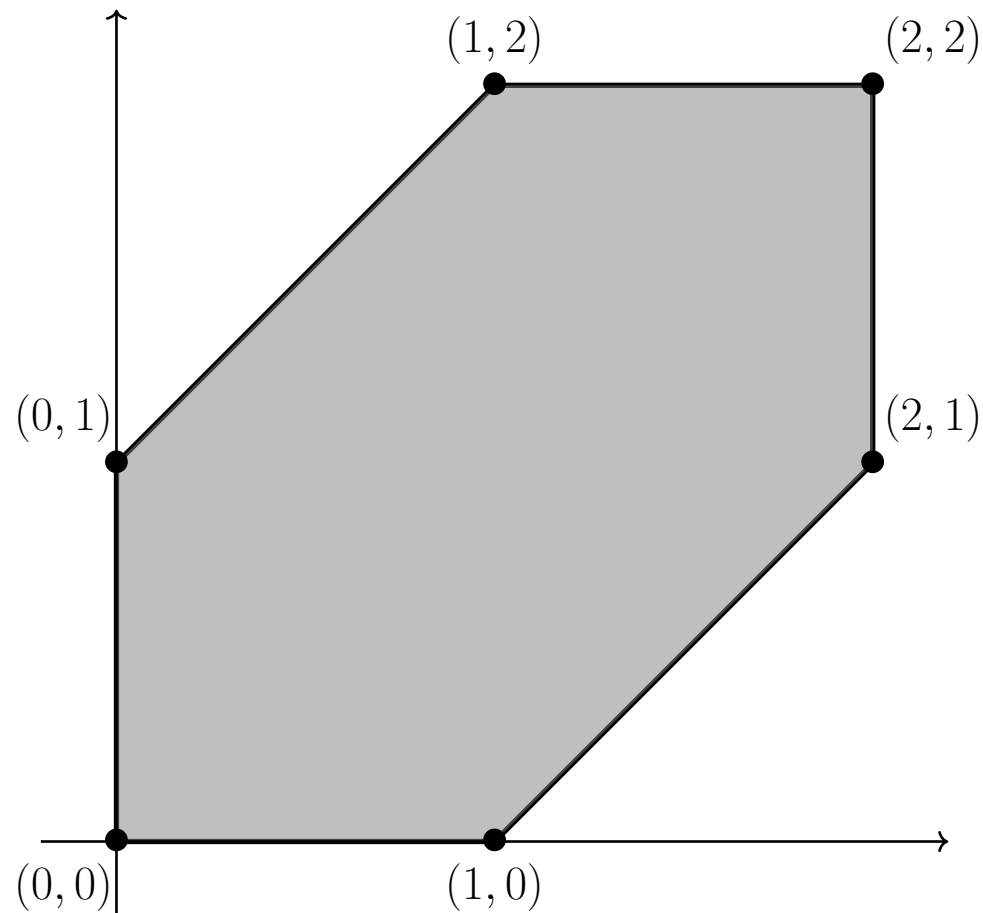
Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto semialgebraico **compacto**. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ es imagen por un aplicación de Nash (= diferenciable + grafo semialgebraico) $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- \mathcal{S} tiene $\dim(\mathcal{S}) \leq m$ y es conexo por caminos analíticos.
- \mathcal{S} tiene dimensión pura ($\dim(\mathcal{S}) \leq m$) y existe un camino analítico dentro de \mathcal{S} que corta a todas las componentes conexas de su lugar regular $\text{Reg}(\mathcal{S})$.



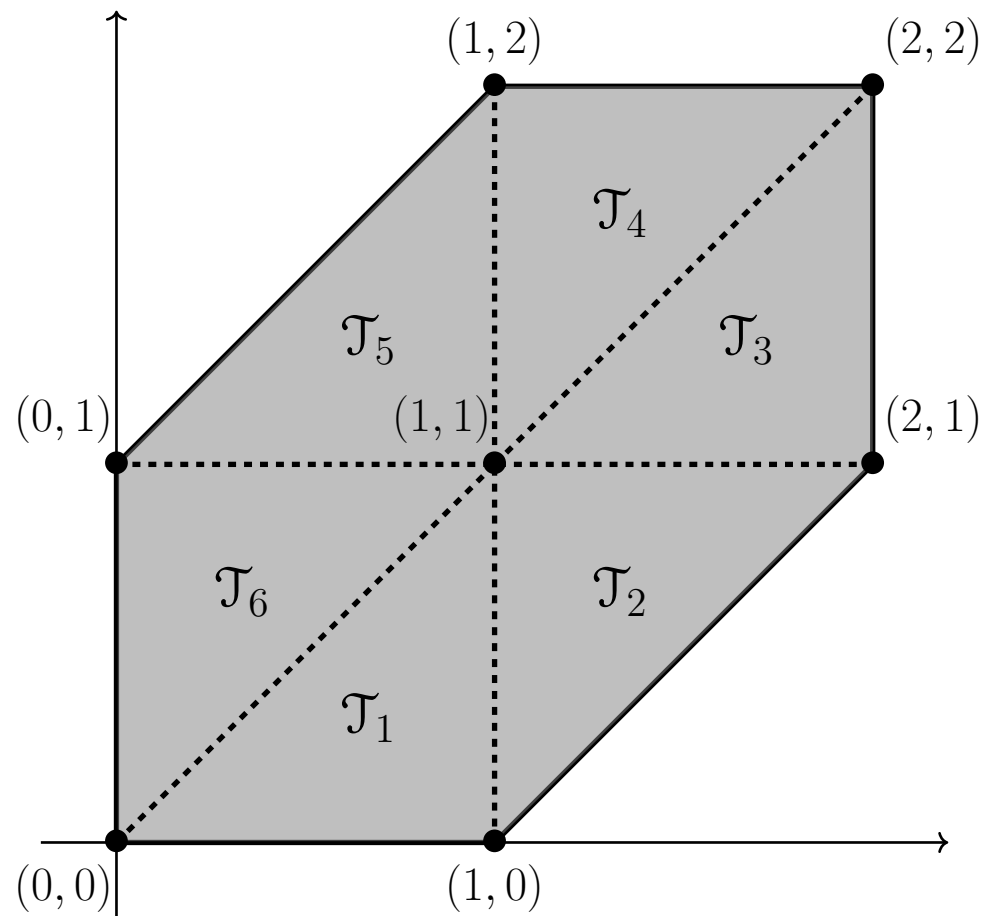
8. Hexágono convexo como imagen polinómica de $\overline{\mathcal{B}}_3$

Aplicación polinómica $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la imagen de $\overline{\mathcal{B}}_3$ por F es el hexágono convexo \mathcal{H} de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$, $(0, 1)$.



Procedimiento:

(1) Consideramos los seis triángulos $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_6$ de vértices $(1, 1)$ y dos vértices consecutivos de $\mathcal{H} = \bigcup_{k=1}^6 \mathcal{T}_k$.



(2) Construcción de una parametrización polinómica

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (h(t), h(-t))$$

tal que

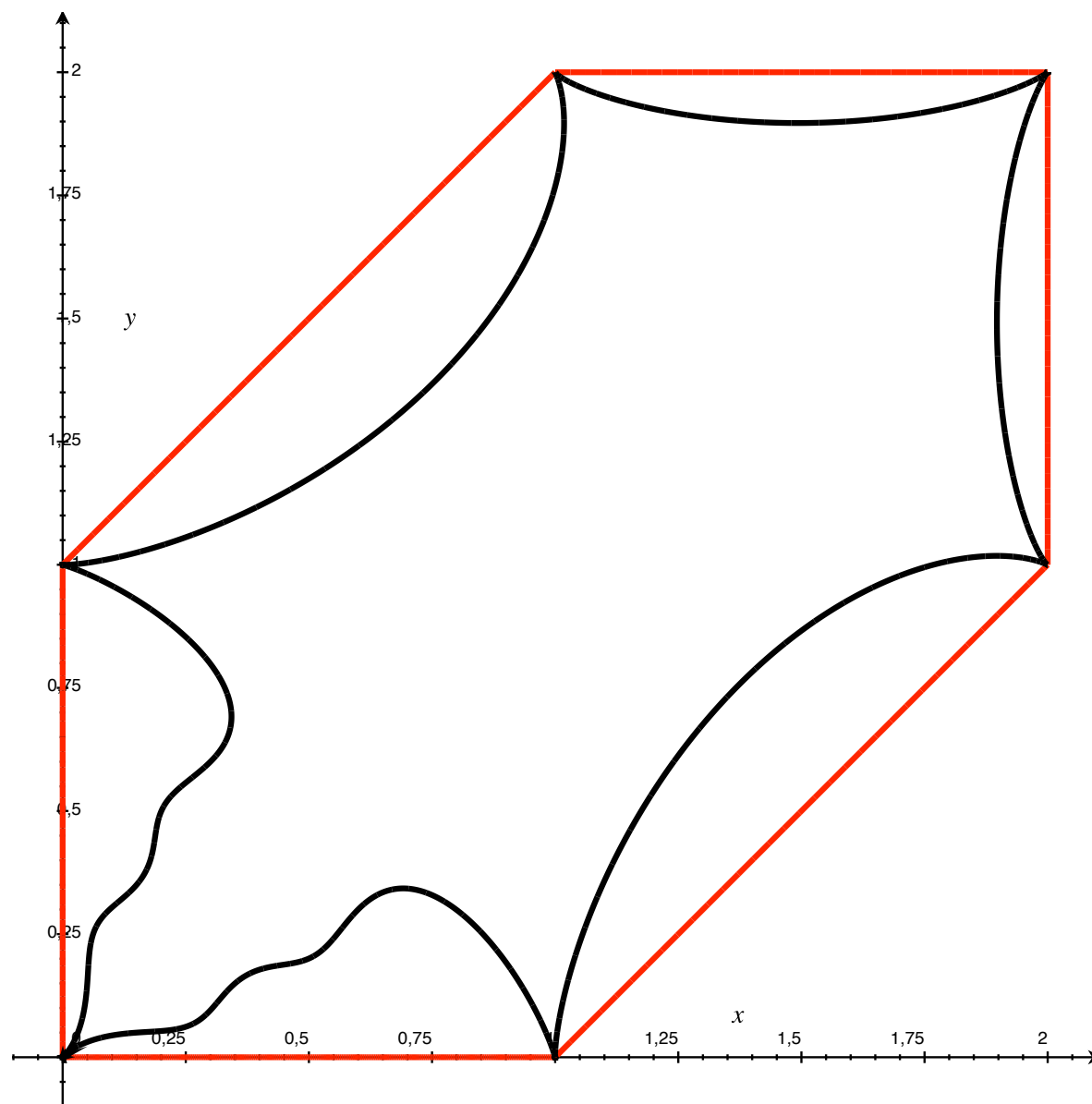
$$\begin{aligned} \alpha(-3) &= (0, 0), & \alpha(-2) &= (1, 0), & \alpha(-1) &= (2, 1), \\ \alpha(0) &= (2, 2), & \alpha(1) &= (1, 2), & \alpha(2) &= (0, 1), & \alpha(3) &= (0, 0) \end{aligned}$$

y $\alpha([-3, 3]) \subset \mathcal{H}$.

NOTA: La mejor que hemos conseguido cumple $\deg(h) = 34$. Construcción inspirada por la realizada por S. Abentín (TFG, 2020)

El polinomio $h \in \mathbb{R}[t]$ es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 h := & \frac{76664779821250669077010607272790474060504126133999431}{104530224145652815761417086083845114789055289966288790958080000} t^{34} - \frac{78717893577241614088318159777360793613982855123}{9304806924249799602963648728748783545276701634902800000} t^{33} \\
 & - \frac{912613527484440059374721830348026508601541166858620900719}{12976165756012073680727638272477324594503415306159987843072000000} t^{32} + \frac{83892235220371692608393905913301582885887545485043}{128342164472411029006395154879293566141747608757280000000} t^{31} \\
 & + \frac{22685040173892809529211504901998267843669377577565665759314889}{7526176138487002734822030198036848264811980877572792948981760000000} t^{30} - \frac{341651515368750302761136090666887873089921143003186509}{14887691078799679364741837965998053672442722615844480000000} t^{29} \\
 & - \frac{2312987243313117187847123345648030529341762836741812156033242153}{30104704553948010939288120792147393059247923510291171795927040000000} t^{28} + \frac{739549879853169825818932859020391314048855175653852243}{1526942674748685063050444919589543966404381806753280000000} t^{27} \\
 & + \frac{2276284563512474920119374134981072455831492763452604504854047611}{1745200263996986141408007002443327133869444841176299814256640000000} t^{26} - \frac{1844015505082748933043548683479792565506942192402271751}{269155996904852960266519104470021309332297810003968000000} t^{25} \\
 & - \frac{617678727783923372994726045176856180266061575815960662776038981}{191534650791625808889042148881672737990833829426795743} t^{24} + \frac{2793843036134117638234452351113873548663893523968000000}{26872808849517631782827161438579675458460680303908554289} t^{23} \\
 & + \frac{1092968886400506955836901798243093407953206769838766664682946289821}{8027921214386136250476832211239304815799446269410979145580544000000} t^{22} - \frac{53831199380970592053303820894004261866459562000793600000}{21278895451981505723409875956831063512932611500243467814443} t^{21} \\
 & - \frac{108429710987186801524931157295746273363317657983915070157800658683}{123506480221325173084258957095989304858453019529399679162777600000} t^{20} + \frac{7940101908693162327862313581865628625302785395117056000000}{15343314371199209768200722187083411564089297923735661841193} t^{19} \\
 & + \frac{3073703987676894324210366665805746792617837392955601774090905999873}{729811019489648750043348382839936801436313297219179922325504000000} t^{18} - \frac{1443654892489665877793147923975568840964142799112192000000}{76038476443389770380096278588852356368626040742215775927} t^{17} \\
 & - \frac{10936887264822748056498590600656508762604715166403711626815259269679}{729811019489648750043348382839936801436313297219179922325504000000} t^{16} + \frac{2460775384925566837147411234049265069825243407577600000}{106279014558443243149270242653074552792653941625109030932479} t^{15} \\
 & + \frac{6496934190786413999058459578468782136581293765475784303435117586589}{166094921676954543113313769887709754809643715918847844391321600000} t^{14} - \frac{1642779705246861171281857982454957646614369392093184000000}{489624276273750826348881432522588958622036832178716706790257} t^{13} \\
 & - \frac{29977661421428095114360408317401194506069501391456164973924272457861}{408199383782345911041194858198608719447429471325981990453248000000} t^{12} + \frac{5178327331756410213823247988173236059980077431598080000000}{14424739984071336997741067336445906355369656570801663620093} t^{11} \\
 & + \frac{5444857799367724341614972148198281098432336302759938935926034370597}{56587790514939870186631806000277054622646472763705210142720000000} t^{10} - \frac{157541704537562744600442729798921202882991773712640000000}{1631979839386110496201193087227698207675223532405371249967} t^9 \\
 & - \frac{11695393745625246285991189606549798699384856308791698561139404628187}{139373632194203754348556114778460153052073719955051721277440000000} t^8 + \frac{30633109215637200338974975238679122782803955999680000000}{7362117782018690715541516858507252889735560321011407953} t^7 \\
 & + \frac{1135847093359630638538403956445142918501566447380671798346253777}{25470327520870569142645488811853098145481308471317931520000000} t^6 - \frac{510551820260620005649582920644652046380065933328000000}{132022313339010089934748996284139958625614088083058661615643} t^5 \\
 & - \frac{11558411055895884489273367067925573721788800978176819200000}{11558411055895884489273367067925573721788800978176819200000} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{t} + 2.
 \end{aligned}$$



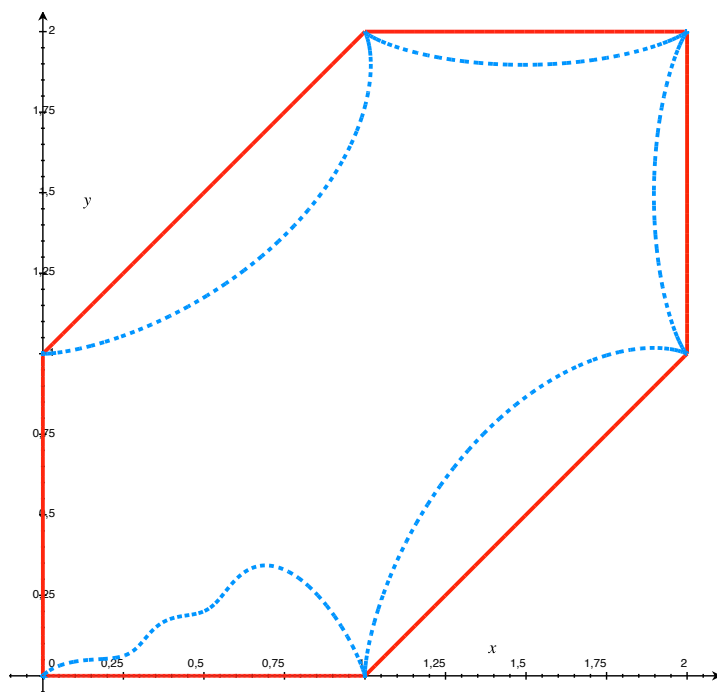
Borde del hexágono \mathcal{H} (rojo) y la curva polinómica $\alpha : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (azul)

(3) Definimos

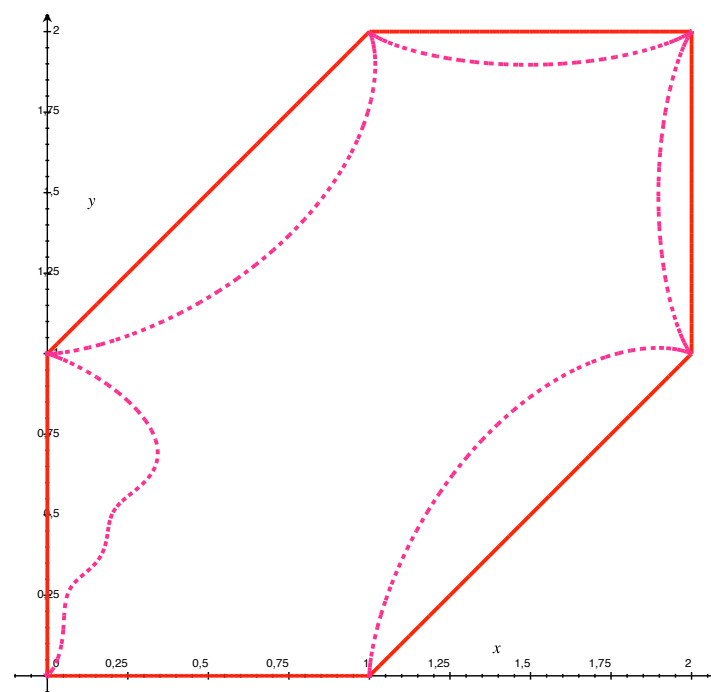
$$\alpha_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \alpha\left(\frac{5}{2}t - \frac{1}{2}\right),$$

$$\alpha_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \alpha\left(\frac{5}{2}t + \frac{1}{2}\right).$$

- α_1 empieza en $(0, 0)$ y recorre los restantes vértices de \mathcal{H} en sentido antihorario.
- α_2 empieza en $(1, 0)$ y recorre los restantes vértices de \mathcal{H} en sentido antihorario.



Parametrización $\alpha_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (cyan)



Parametrización $\alpha_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (rosa)

(4) La aplicación polinómica

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (\lambda, \mu, t) \rightarrow \lambda\alpha_1(t) + \mu\alpha_2(t) + (1 - \lambda - \mu)(1, 1)$$

transforma el prisma triangular $\Delta_2 \times [-1, 1]$ en \mathcal{H} , donde

$$\Delta_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}.$$

(5) Solo falta componer con

$$H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \rightarrow \left(\frac{1}{3}\left(3 - \frac{4}{3}(x^2 + y^2)\right)^2 x^2, \frac{1}{3}\left(3 - \frac{4}{3}(x^2 + y^2)\right)^2 y^2, 3z - 4z^3\right)$$

que transforma $\overline{\mathcal{B}}_3$ en $\Delta_2 \times [-1, 1]$.

CONCLUSIÓN: La aplicación polinómica $F := H \circ G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cumple

$$F(\overline{\mathcal{B}}_3) = \mathcal{H}.$$

Bibliografía

Imágenes polinómicas de la bola cerrada

- J.F. Fernando, C. Ueno: On polynomial images of a closed ball. *J. Math. Soc. Japan* **75** (2022), no. 2, 679–733.
- J.F. Fernando: On a Nash curve selection lemma through finitely many points. *Preprint RAAG* (2023).

Resultados generales

- A. Carbone, J.F. Fernando: Surjective Nash maps between semialgebraic sets. *Adv. Math.* **XXX** (2024), XXX–XXX. arXiv:2306.00401
- J.F. Fernando: On the one dimensional polynomial and regular images of \mathbb{R}^n . *J. Pure Appl. Algebra* **218** (2014), no. 9, 1745–1753.
- J.F. Fernando: On Nash images of Euclidean spaces. *Adv. Math.* **331** (2018), 627–719.
- J.F. Fernando, G. Fichou, R. Quarez, C. Ueno: On regulous and regular images of Euclidean spaces, *Q. J. Math.* **69** (2018), no. 4, 1327–1351.
- J.F. Fernando, C. Ueno: On the set of points at infinity of a polynomial image of \mathbb{R}^n . *Discrete Comput. Geom.* **52** (2014), no. 4, 583–611.

El cuadrante abierto

- J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial images of \mathbb{R}^n . *J. Pure Appl. Algebra* **179** (2003), no. 3, 241–254.
- J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: The open quadrant problem: a topological proof. *A mathematical tribute to Professor José María Montesinos Amilibia*, 337–350, Dep. Geom. Topol. Fac. Cien. Mat. UCM, Madrid (2016).
- J.F. Fernando, C. Ueno: A short proof for the open quadrant problem. *J. Symbolic Comput.* **79** (2017), no. 1, 57–64.

Conjuntos semialgebraicos PL

- J.F. Fernando, J.M. Gamboa: Polynomial and regular images of \mathbb{R}^n . *Israel J. Math.* **153** (2006), 61–92.
- J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: On convex polyhedra as regular images of \mathbb{R}^n . *Proc. London Math. Soc.* (3) **103** (2011), 847–878.
- J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: Unbounded convex polyhedra as polynomial images of Euclidean spaces. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) **19** (2019), no. 2, 509–565.
- J.F. Fernando, J.M. Gamboa, C. Ueno: Polynomial, regular and Nash images of Euclidean spaces. Ordered algebraic structures and related topics, 145–167, *Contemp. Math.*, **697**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2017).
- J.F. Fernando, C. Ueno: On complements of convex polyhedra as polynomial and regular images of \mathbb{R}^n . *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2014**, no. 18, 5084–5123.
- J.F. Fernando, C. Ueno: On the complements of 3-dimensional convex polyhedra as polynomial images of \mathbb{R}^3 . *Internat. J. Math.* **25** (2014), no. 7, 1450071 (18 pages).
- J.F. Fernando, C. Ueno: On complements of convex polyhedra as polynomial images of \mathbb{R}^n . *Discrete Comput. Geom.* **62** (2019), no. 2, 292–347.

Otros autores

- D. Eisenbud: Open Problems in Computational Algebraic Geometry and commutative Algebra, in *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Cortona 1991*, (ed. D. Eisenbud and L. Robbiano) Cambridge University Press, Cambridge, England, (1993), 49–71.
- J.M. Gamboa: Reelle Algebraische Geometrie, June, 10th – 16th (1990), Oberwolfach.
- K. Kubjas, P.A. Parrilo, B. Sturmfels: How to flatten a soccer ball. *Homological and computational methods in commutative algebra*, 141–162, Springer INdAM Ser., **20**, Springer, Cham (2017).
- D. Handelman: Representing polynomials by positive linear functions on convex (compact) polyhedra, *Pacific J. Math.* **132** (1988), no. 1, 35–62.
- G. Stengle: A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. *Math. Ann.* **207**, (1974) 87–97.
- C. Ueno: A note on boundaries of open polynomial images of \mathbb{R}^2 . *Rev. Mat. Iberoam.* **24** (2008), no. 3, 981–988.
- C. Ueno: On convex polygons and their complements as images of regular and polynomial maps of \mathbb{R}^2 . *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), no. 11, 2436–2448.