EXAMEN FINAL MMI. 27 Junio 2011

1. Calcula $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},3-\frac{1}{n}\right)$. Determina el interior, la adherencia y la frontera del conjunto anterior.

2. Calcula $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

3. Sea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una función con derivada continua y $f'(x)\neq 0$, para todo $x\in\mathbf{R}$. Prueba que f es monótona creciente o decreciente. Deduce que f es inyectiva.

4. Deriva la función $F(x)=\int_{x^2}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$

5. Estudia la convergencia de $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+4t^2}$. Calcula la integral si fuese convergente.

6. Resuelve por Gauss $\begin{cases}2x-y+3z+5w=9\\3x-5y+z-w=-4\\4x-7y+2z+w=5\end{cases}$

7. Dados los polinomios $p_1=-x^3+x^2+4x+a$, $p_2=x^3+2$ y $p_3=x^2+bx-1$, discute según los valores de a y b la dependencia o independencia del conjunto

8. Calcula:

$$\begin{vmatrix}1 & \ln 2 & (\ln 2)^2 & (\ln 2)^3\\ 1 & \ln 4 & (\ln 4)^4 & (\ln 4)^3\\ 1 & \ln 8 & (\ln 8)^8 & (\ln 8)^3\\ 1 & \ln 16 & (\ln 16)^2 & (\ln 16)^3\end{vmatrix}$$

9. Sea $f:U_3\to V_4$ la aplicación lineal tal que

$$f(\overrightarrow{u_1})=\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_4},\quad f(\overrightarrow{u_2})=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}+2\overrightarrow{v_3},\quad f(\overrightarrow{u_3})=\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_4}$$

donde $B_U=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ y $B_V=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4}\}$ son bases de U_3 y V_4 respectivamente. Calcula el núcleo de la f y el rango de la aplicación.

10. Se tiene dos sucesiones de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de modo que:

$$x_{n+1}=6x_n-y_n$$
$$y_{n+1}=3x_n+2y_n$$

Calcula y_{40} siendo $x_1=1$ e $y_1=2$