Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(a)	**1**(b)	**2**(a)	**2**(b)

Prática 1: 10 de Octubre de 2013

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución detallada de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica y entregar las dos hojas juntas.

1. Demostrar por inducción:

(a) $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} := \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(b) $P_n : \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$

Ayuda: Recuerda que $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ y observa que

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big) + \Big(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)$$

2. Resolver las inecuaciones

(a) $3x + \frac{2}{x} < 5$ (b) $\left|\frac{1}{5} - x\right| \leq \frac{1}{5}$

SOLUCIONES

1.(a) Caso $n = 1$, $S_1 = \frac{1}{2}$ y $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$. Por tanto, la fórmula se cumple para $n = 1$.

Supongamos el resultado cierto para n y veamos que también es cierto para $n+1$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}\Big(n + \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{n+1}\Big(\frac{n^2+2n+1}{n+2}\Big) \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado es cierto

1.(b) Caso $n = 1$, $P_1 : 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$.

Supongamos el resultado cierto para n y veamos que también es cierto para $n+1$.

$$P_{n+1}: \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\Big) + \Big(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{\ell=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+\ell} \geq 1+\frac{n}{2} + \sum_{\ell=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+\ell} \overset{?}{\geq} 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{n+1}{2}$$

Para terminar, basta con demostrar que $\sum_{\ell=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+\ell} \geq \frac{1}{2}$. Para ello, observamos que la suma anterior consta de 2^n sumandos y cada sumando cumple

$$\frac{1}{2^n+\ell} \geq \frac{1}{2^{n+1}} \quad \forall \ell = 1,2,\cdots,2^n$$

Por tanto,

$$\sum_{\ell=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+\ell} \geq \frac{1}{2} \geq (\text{n}^o \text{ de sumandos}) \cdot \Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

2.(a) La ecuación $3x+\frac{2}{x} < 5$ es equivalente a

$$3x+\frac{2}{x}-5<0 \iff \frac{3x^2-5x+2}{x}<0 \iff \frac{3(x-1)(x-\frac{2}{3})}{x}<0$$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-\frac{2}{3}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{3(x-1)(x-\frac{2}{3})}{x}$	$-$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto, la solución es: $S := (-\infty,0)\cup(\frac{2}{3},1)$.

2.(b) Observamos que la ecuación

$$\left|\frac{1}{5}-x\right| \leq \frac{1}{5}$$

representa el conjunto de los $x\in\mathbb{R}$ que distan del punto $\frac{1}{5}$ una distancia menor o igual que $\frac{1}{5}$. Por tanto, el conjunto de soluciones es el intervalo cerrado $[0,\frac{2}{5}]$.