MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

0. Los Números Complejos

0.1. Halla el módulo y el argumento de los números complejos:

$$3+4i, \quad (3+4i)^{-1}, \quad (1+5i)^5 \quad \text{y} \quad \frac{1+i}{1-i}.$$

0.2. Dibuja los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

a) $|z| < 1 - Rez$ b) $Re\frac{z-a}{z-b} = 0$ c) $|\frac{z-3}{z+3}| = 2$

d) $|z-1| = 1$ e) $|z-1| = |z+1|$ f) $\overline{z} = z^{-1}$

0.3. Prueba las siguientes igualdades:

a) $|z| = |\overline{z}|$ b) $\overline{\overline{z}} = z$ c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ d) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ e) $\overline{-z} = -\overline{z}$ f) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

0.4. Para cualquier número complejo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, prueba que: $z, -z, \overline{1/z}, \overline{-1/z}$ y 0 están alineados (o lo que es lo mismo, están sobre una misma recta).

0.5. a) Sea $z \neq 1, -1$ y con $|z| = 1$. Prueba que $\frac{1+z}{1-z}$ es un complejo imaginario puro.

b) Sea z un complejo de módulo 1. Prueba que $z + z^{-1}$ es un número real.

0.6. Determina los números complejos z que verifican:

a) $z^2 = 3 - 4i$ b) $z^2 + zi + 2 = 0$ c) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

0.7. Calcula: a) $\sqrt[5]{-1}$ b) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[3]{1+i}$ d) $\sqrt[5]{-4+3i}$

0.8. a) Halla todas las raíces cuartas de i.

b) Determina los números complejos tales que su cuadrado coincide con alguna de sus raíces cuadradas.

c) Demuestra que las raíces n-ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces n-ésimas de 1.

d) Prueba que el producto de dos raíces n-ésimas de la unidad es de nuevo una raíz n-ésima de la unidad.

0.9. Demuestra que las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación polinómica:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0$$

0.10. Prueba que si m y n son dos números enteros y m divide a n, entonces el polinomio $x^m - 1$ divide al polinomio $x^n - 1$.

0.11. Sean $1, z_1$ y z_2 las tres raíces cúbicas de 1. Calcula α para que $\alpha z_2 = 1$. ¿Y para qué $\alpha z_1 = 1$?

0.12. Expresa $\cos 3t$ y $\operatorname{sen} 3t$ como polinomios de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$.

0.13. Si $n = 2, 3, 3, 4, ...$; prueba que:
a) $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + ... + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1.$ b) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n} + ... + \operatorname{sen} \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$

0.14. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos. Decimos que la serie es convergente si las series de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} Rez_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Imz_n$ son convergente. Y se dice que la serie converge a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} Rez_n + i \sum_{n=1}^{\infty} Imz_n.$$

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ también lo es.
b) Prueba que $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.
c) Comprueba que $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deduce que $-1 = e^{i\pi}$.

0.15. Para $t \in \mathbb{R}$, prueba las siguientes igualdades: a) $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ b) $|e^{it}| = 1$ c) $\overline{e^{it}} = e^{-it}$
d) $\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ e) $\operatorname{sen} nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$ f) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi}$
(*Indicación:* Se define $\int f(t) + ig(t)dt := \int f(t)dt + i \int g(t)dt$).

0.16. a) Si z es una raíz del polinomio con coeficientes reales $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, prueba que $\overline{z}$ también lo es.
b) Utiliza la ecuación $z^2 + zi + 2 = 0$, para ver que el apartado anterior no es cierto en general si los coeficientes son complejos.

0.17. Encuentra las soluciones de la ecuación $z^3 - (2 + 3i)z^2 - z + (2 + 3i) = 0$, si se sabe que $2 + 3i$ es una solución de la misma.

0.18. Se pide descomponer el polinomio $x^4 + 1$ en
a) producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$.
b) producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$.
c) producto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$.
Haz lo mismo para los polinomios: $x^3 - x^2 - x - 2$ y $x^4 + x^2 + 1$.