# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 2. Espacios vectoriales

2.1. Demostrar que el conjunto $A = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ respecto de las operaciones

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) &= a + a' + (b + b')\sqrt{2} \\ \alpha(a + b\sqrt{2}) &= \alpha a + \alpha b\sqrt{2}\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

2.2. Estudiar si el conjunto $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ respecto de las operaciones

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, 0)\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2.3. a) Sea $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Prueba que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$. ¿Tiene en este conjunto solución la ecuación $x^2 - 2 = 0$?
b) Sea $\mathbb{Q}(i) := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}$. Prueba que $\mathbb{Q}(i)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$. ¿Tiene en este conjunto solución la ecuación $x^2 + 1 = 0$?

2.4. Calcular el valor de $a$ y $b$ para que el vector $\overrightarrow{v} = (a, -2, 1, b)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 3, 4)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-1, 0, -2, 3)$.

2.5. Siendo $\overrightarrow{u_1} = (-5, 2, 8, -16)$, $\overrightarrow{u_2} = (-5, 3, 17, -14)$ y $\overrightarrow{u_3} = (1, 1, 11, 6)$, expresa $\overrightarrow{u_1}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{u_2}$ y $\overrightarrow{u_3}$.

2.6. Sea $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ un sistema de vectores de $(\mathbb{R}^3, +, .\mathbb{R})$, tal que $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{u_3} = (-1, -1, 0)$. Demostrar que estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $(1, -1, 0)$ respecto de esta base.

2.7. En el espacio vectorial $(V_3, +, .\mathbb{R})$, demostrar que si los vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ forman una base, también es una base la formada por los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ siendo

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2}, \qquad \overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}, \qquad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_3}$$

2.8. Demostrar que el conjunto formado por los vectores

$$\left\{1 + x, x^2, 1 + x^2, 3x - 2x^2\right\}$$

es linealmente dependiente en el espacio de los polinomios con coeficientes racionales y grado menor o igual que dos. A partir de dicho conjunto, encontrar un conjunto máximo de vectores linealmente independientes.

2.9. Sea $(V_3, +, .\mathbb{R})$ un espacio vectorial, y sea $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ un conjunto linealmente independiente. Demostrar que también es linealmente independiente el conjunto

$$\{\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}\}$$

2.10. Estudiar si tiene estructura de subespacio vectorial el subconjunto de $(\mathbb{R}^3, +, .\mathbb{R})$ formado por todas las ternas $(x, y, z)$ tales que $x + y + z = 1$. ¿Y si cumple la condición $x + y + z = 0$?

2.11. Determinar cuánto deben valer $a$ y $b$ para que el vector $\overrightarrow{v} = (a, 1, b, -5)$ pertenezca al subespacio vectorial engendrado por los vectores $\overrightarrow{u_1} = (2, 1, 0, 4)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-1, 1, -1, 1)$.

2.12. a) Demostrar que el subconjunto de $\mathbb{Q}^4$ formado por los elementos $(w, x, y, z)$ que verifican

$$w + x + y + z = 0 \qquad w - x + y - z = 0,$$

es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Q}^4, +, .\mathbb{Q})$.

b) Probar que los vectores $\overrightarrow{u_1} = (2, 1, -2, -1)$ y $\overrightarrow{u_2} = (1, 0, -1, 0)$ son base de dicho subespacio.

c) Hallar las coordenadas del vector $\overrightarrow{u} = (4, 1, -4, -1)$ respecto de dicha base.

2.13. En $\mathbb{R}^3$ se considera el conjunto de los vectores $(x, y, z)$ definido por

$$S = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0 \text{ y } x + y + z = 0\}.$$

Demostrar que $S$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 1 y hallar una base del mismo.

2.14. Se considera el conjunto de las funciones reales de variable real $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ función}\}$

a) Comprueba que F es un espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y el producto de un escalar por una función.

b) Sea el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$,

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}.$$

Prueba que $C([a, b])$ es un subespacio vectorial de $F$.

2.15. La ecuación

$$x''(t) + ax'(t) + x(t) = 0 \qquad (*)$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son coeficientes conocidos, se denomina ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Esta ecuación se relaciona con el comportameinto de los circuitos eléctricos RLC. Una solución de esta ecuación es toda función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica la ecuación $(*)$.

a) Comprueba que las funciones $f_1 = e^{-t}$ y $f_2 = te^{-t}$ son soluciones de la ecuación $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.
b) Sea $S$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $(*)$. Prueba que es un subespacio vectorial del conjunto de las funciones reales de variable real.
c) Se puede probar que dados dos valores cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, existe una única función $f$ que es solución de $(*)$ y que cumple que $f(0) = x_1$ y $f'(0) = x_2$. Usando lo anterior prueba que $S$ el conjunto de soluciones de $(*)$ es un espacio vectorial de dimensión 2.
d) Comprueba que las funciones $f_1$ y $f_2$ del apartado a) forman una base del conjunto de soluciones de la ecuación $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.

2.16. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z,t) : x+y+z=0, z+t=0\} \qquad \text{y} \\ S' &= \{(\lambda+\mu, \lambda+2\mu, \lambda+3\mu, \lambda+\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Hallar las ecuaciones y las bases de $S \cap S'$ y de $S + S'$.

2.17. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} U &= L\{(2,0,1),(1,1,0),(0,2,2)\} \qquad \text{y} \\ W &= \{(x,y,z) : x=0, y+z=0\}. \end{aligned}$$

Hallar las ecuaciones y las bases de $U \cap W$ y de $U + W$.

2.18. Hallar: a) Las coordenadas del vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}$ respecto de la nueva base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ sabiendo que

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}, \qquad \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}, \qquad \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$$

b) Las coordenadas del vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ respecto de la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$.

2.19. Halla las ecuaciones del cambio de base:
a) De la base $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ a la base $B' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, sabiendo que

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \qquad \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}, \qquad \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}.$$

b) De la base $B'$ a la base $B$.
c) Las coordenadas del vector $\overrightarrow{w} = (1,0,3)_B$ respecto de $B'$ y las de $\overrightarrow{x} = = (5,3,1)_{B'}$ respecto de $B$.

2.20. Halla la dimensión de los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generados por los siguientes subconjuntos de vectores:

$$\begin{aligned} A &= \{(1,1,1,-1,-1),(2,0,2,0,1),(3,1,3,-1,0),(5,1,5,-1,1)\}, \\ B &= \{(6,3,9,3,3),(8,4,12,4,4),(10,5,15,5,5)\}, \\ C &= \{(1,2,3,4,5),(2,2,2,2,2),(-5,-4,-3,-2,-1),(6,7,8,9,10)\}. \end{aligned}$$