Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(i)	**1**(ii)	**1**(iii)	**1**(iv)	**1**(v)	**1**(vi)	**2**	**3**	**4**	**5**

Prática 7: 12 de Diciembre de 2013

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

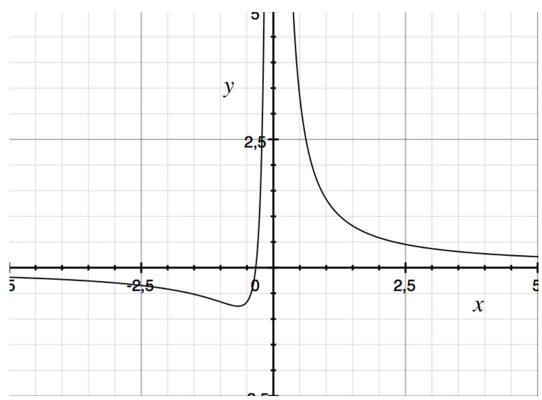
1. (1 punto) Hallar por derivación logarítmica la derivada de $f(x) = (\text{arctg}\sqrt{x})^{x^2}$

Definimos $g(x) := \log(f(x)) = \log((\text{arctg}\sqrt{x})^{x^2}) = x^2 \log(\text{arctg}\sqrt{x})$. Derivamos la expresión anterior y obtenemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\log(\text{arctg}(\sqrt{x})) + \frac{x^2}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\text{arctg}(\sqrt{x})}.$$

Por tanto, $f'(x) = (\text{arctg}\sqrt{x})^{x^2}\Big(2x\log(\text{arctg}(\sqrt{x})) + \frac{x^2}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\text{arctg}(\sqrt{x})}\Big)$.

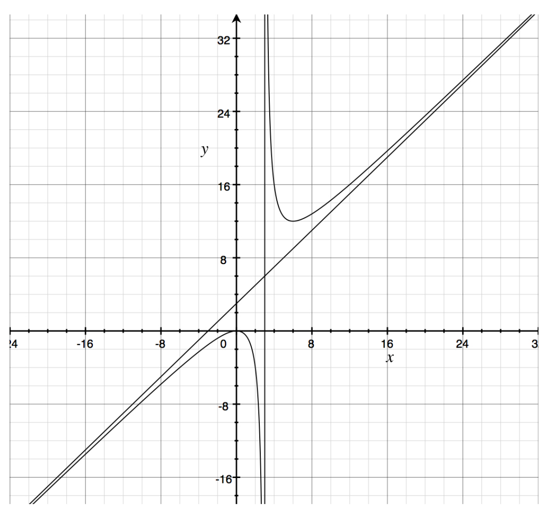
2. (1 punto) Esboza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{x}$.



$\text{Dom(f)} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Asíntotas verticales: $x = 0$ ya que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Asíntotas horizontales: $y = 0$ ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
Crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = -\frac{2}{3x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{-2-3x}{3x^3}$.

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & \text{si } x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \rightsquigarrow f \text{ decreciente en } (-\infty, -\frac{2}{3}), \\ = 0 & \text{si } x = -\frac{2}{3} \rightsquigarrow -\frac{2}{3} \text{ mínimo para } f, \\ > 0 & \text{si } x \in (-\frac{2}{3}, 0) \rightsquigarrow f \text{ creciente en } (-\frac{2}{3}, 0), \\ < 0 & \text{si } x \in (0, \infty) \rightsquigarrow f \text{ decreciente en } (0, \infty). \end{cases}$$

3. (1 punto) Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.



Después de dividir, escribimos $f(x) = x + 3 + \frac{9}{x-3}$.
$\text{Dom(f)} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Asíntotas verticales: $x = 3$ ya que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$.
Asíntotas horizontales: No tiene.
Asíntotas oblicuas: $y = x + 3$, ya que $m := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y $n := \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = 3$
Crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$.

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \rightsquigarrow f \text{ creciente en } (-\infty, 0), \\ = 0 & \text{si } x = 0 \rightsquigarrow 0 \text{ máximo para } f, \\ < 0 & \text{si } x \in (0, 3) \cup (3, 6) \rightsquigarrow f \text{ decreciente en } (0, 3) \cup (3, 6), \\ = 0 & \text{si } x = 6 \rightsquigarrow 6 \text{ mínimo para } f, \\ > 0 & \text{si } x \in (6, \infty) \rightsquigarrow f \text{ creciente en } (6, \infty). \end{cases}$$

4. (1 punto) Calcula $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{(1-2x+x^2)}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{(1-2x+x^2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x(x-1)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x)}{(1-2x+x^2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x(x-1)} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(x)}{(1-2x+x^2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2x(x-1)} = -\infty \end{cases}$$

5. (2 puntos) Ya es temporada de pitufresas en la aldea pitufa y Pitufo Goloso debe pitufar la tradicional tarta de pitufresas para la ocasión. Según sus cálculos, hay exactamente 200 pitufresas en las matas de la aldea, cada una con 10 gramos de zumo. Además, en esta época, las pitufesas crecen un gramo al día. Por otro lado, Pitufo Goloso no puede negarse a sí mismo, lo que significa que no se resiste a comerse 10 pitufresas diarias. ¿Cuántos días debe esperar Pitufo Goloso a recoger las pitufresas para tener la mayor cantidad de zumo y que así la tarta sea más grande?

La función que tenemos que maximizar es

$$f(x) := \Big(200 \text{ (fresas)} - 10 \text{ (fresas/día se come)} \cdot x(\text{días})\Big)$$
$$\cdot \Big(10 \text{ (gramos de zumo/fresa)} + x \text{ (días)} \cdot 1(\text{ crecimiento/día de cada fresa})\Big),$$

es decir, $f(x) = (200 - 10x)(10 + x)$. Tenemos que maximizarla en el intervalo $[0, 20]$ porque seguro que después de 20 días no quedan fresas. Como f es continua y $[0, 20]$ la función alcanza un máximo en dicho intervalo. Dicho m·ximo se producirá en los extremos del intervalo o en los puntos cíticos. La derivada de f es $f'(x) = -10(10 + x) + (200 - 10x) = 100 - 20x$ que se anula si y sólo si $x = 5$. Observamos que $f(0) = 2000$, $f(5) = 2250$, $f(20) = 0$. Por tanto, el máximo se alcanza en el quinto día.

6. (2 puntos) Queremos subir los $3000m$ de un monte, cuyo pico está a una distancia de $5km$ de nuestra posición actual (en línea recta). Para ello podemos ir primero por carretera llana a velocidad de $V_C := 10km/h$ y despues desviarnos y subir por la ladera del monte a velocidad $V_M = 6km/h$. Encuentra la distancia x, en el cual hay que desviarse de la carretera, para que el tiempo usado en el trayecto sea mínimo. ¿Cuál es el tiempo mínimo que necesitamos?

La distancia que recorremos hasta la base de la montaña es $4km$ porque se trata del cateto horizontal de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5km y cuyo cateto vertical mide 3km. Recordamos que velocidad=espacio/tiempo y por tanto tiempo=espacio/velocidad. En horizontal recorreremos una distancia $x$km en un tiempo de $x/10$horas y a traves de la ladera del monte recorreremos un espacio de $\sqrt{3^2 + (4-x)^2}$km (ya que se trata de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $(4-x)$km y 3km). El tiempo correspondiente será de $\frac{\sqrt{3^2+(4-x)^2}}{6}$horas. Por tanto la función que tenemos que maximizar es $f(x) = \frac{x}{10} + \frac{\sqrt{3^2+(4-x)^2}}{6}$ que mide el tiempo necesario para llegar a la cima en función del momento x en el que nos desviamos. Por supuesto, nos tenemos que desviar antes de haber recorrido 4km, es decir, tenemos que minimizar f en el intervalo $[0, 4]$. Donde sabemos que f alcanza un mínimo porque f es continua y $[0, 4]$ es compacto. Dicho mínimo se alcanza en los extremos del intervalo o en un punto crítico. La derivada de f es $f'(x) = \frac{1}{10} - \frac{2(4-x)}{6\cdot 2\cdot \sqrt{3^2+(4-x)^2}}$, que se anula en los puntos $x = 4 \pm \frac{9}{4}$. De estos puntos a nosotros sólo nos vale el punto $x = \frac{7}{4}$ pues el otro no pertenece al intervalo $[0, 4]$. Evaluamos en los puntos $\frac{7}{4}, 0, 4$ $f(\frac{7}{4}) = \frac{4}{5}$, $f(0) = \frac{5}{6}$ y $f(4) = \frac{9}{10}$ y deducimos que el mínimio se alcanza en $x = \frac{7}{4}$.

7. (2 puntos) Demuestra que la función $f(x) = 2x + \sin(x)$ es inyectiva. Calcula la derivada de f^{-1} en el punto $y = 2\pi$.

Como f es continua y f es estrictamente creciente porque $f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 1$, deducimos que f es inyectiva. Como $(f \circ f^{-1})(y) = y$, deducimos usando la regla de la cadena que $f'(f^{-1})(y)) \cdot (f^{-1})'(y)) = 1$ y por tanto $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1})(y))$. Para $y = 2\pi$, se cumple que $f(x) = 2\pi$ si y sólo si $x = \pi$. Por tanto $f^{-1}(2\pi) = \pi$ y concluimos que

$$(f^{-1})'(2\pi) = \frac{1}{f'(f^{-1})(2\pi))} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{2 + \sin(\pi)} = \frac{1}{2}.$$