MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

1. Matrices y sistemas lineales

1.1. Resolver por Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-y+z=7 \\ -x+y+z=3 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} x+y=12 \\ y+z=8 \\ x+z=6 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 2y+3z=15 \\ 3x+y=12 \end{array}\right.$

1.2. Resolver por Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y+3z=9 \\ 3x-5y+z=-4 \\ 4x-7y+z=5 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} 5x+2y-3z=-2 \\ 2x-2y+5z=0 \\ 3x+4y+2z=-10 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{r} 3x+2y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right.$

1.3. Resolver por Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z+t=6 \\ x-y+z-t=-2 \\ 3x-y+3z-t=2 \\ 7x-5y+7z-5t=-6 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x \quad +z \qquad =0 \\ x+3y+z+3t=0 \\ x-y+z+t=0 \end{array}\right.$

1.4. Resolver por Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{r} x-y+z-u+v=0 \\ x+y+2z+2u-v=0 \\ -x+5y+z+7u-5v=0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} x-y \qquad +t=0 \\ -x+2y+z \qquad =0 \\ y-3z+2t=0 \end{array}\right.$

1.5. Supongamos que 5 corderos, 4 patos, 3 pollos y 2 conejos cuestan 1496 monedas; que 4 corderos, 2 patos, 6 pollos y 3 conejos cuestan 1175 monedas; que 3 corderos, un pato, 7 pollos y 5 conejos cuestan 958 monedas y que 2 corderos, 3 patos, 5 pollos y 1 conejos cuestan 861 monedas. ¿Cuál es el precio de un cordero, de un pato, de un pollo y de un conejo?
(Del libro "*Jiuzhang Suanshu*"s. III a.C., compendio de matemáticas chinas).

1.6. En los siguientes apartados se dan una serie de puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Encuentra funciones polinómicas, del grado n que se indica, de modo que sus respectivas gráficas contengan a dichos puntos.
a) $(1,4)$ y $(4,7); n=1$.
b) $(1,4),(4,7)$ y $(5,0); n=2$.
c) $(1,4),(4,7),(5,0)$ y $(6,1); n=3$.
d) $(0,0),(1,4),(4,7),(5,0)$ y $(6,1); n=4$

1.7. Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{array}\right.$$

a) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema que resulte sea incompatible.
b) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema de resulte sea compatible indeterminado. Resolver el sistema formado.

1.8. Calcular el valor de m para que el siguiente sistema tenga alguna solución distinta de la trivial $(0,0,0)$. Resolverlo por Gauss para ese valor.

$$\left\{\begin{aligned} 3x+3y-z&=0\\ -4x-2y+mz&=0\\ 3x+4y+6z&=0\end{aligned}\right.$$

1.9. Discutir y resolver, en los casos en que sea posible, por Gauss

$$\text{a)}\ \left\{\begin{aligned} 2x+y-z&=1\\ x-2y+z&=3\\ 5x-5y+2z&=m\end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{aligned} mx+y-z&=1\\ x-2y+z&=1\\ 3x+4y-2z&=-3\end{aligned}\right.$$

1.10. Para las siguientes matrices, calcular su forma normal de Hermite por filas y su rango:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&3\\2&3&0\end{pmatrix}.$$

1.11. Hallar la forma normal de Hermite por filas y el rango:

$$D=\begin{pmatrix}2&1&3&-2\\2&-1&5&2\\1&1&1&1\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&1&1&1\\1&-2&1&2\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}.$$

1.12. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\qquad \text{y}\qquad B=\begin{pmatrix}2&0&1&3\\-1&3&-2&0\end{pmatrix},$$

efectúa las operaciones: $A.B$, $(3A).(-4B)$, AA^t, B^tB.

1.13. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Las siguientes igualdades, ¿son ciertas?

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
b) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
c) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

1.14. Resuelve la ecuación en X, $AX-2B+C=D$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}8&1\\-5&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-4&2\\3&5\end{pmatrix}.$$

1.15. Halla todas las matrices que conmuten con la matriz B del ejercicio anterior.

1.16. Resuelve el sistema

$$\left\{\begin{aligned} X+3Y&=\begin{pmatrix}3&5\\1&3\end{pmatrix}\\ 3X-2Y&=\begin{pmatrix}-2&-7\\3&-2\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

1.17. Calcula la matriz A^n, con $n \in \mathbb{N}$, siendo:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{c) } A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.18. Calcula A^n con $n \in \mathbb{N}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.19. Calcula

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{40} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{83}.$$

1.20. Sea A una matriz cuadrada cualquiera. Demuestra que $A + A^t$ es simétrica, mientras que $A - A^t$ es antisimétrica.

1.21. Sea A una matriz cualquiera. Demuestra que AA^t y A^tA son simétricas.

1.22. Sea A una matriz antisimétrica. Demuestra que A^2 y A^4 son simétricas, mientras que A^3 y A^5 son antisimétricas.

1.23. Sean A y B matrices ortogonales, demuestra que AB es ortogonal.

1.24. Identificar las transformaciones elementales representadas por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.25. Halla, si es posible, utilizando la definición, la inversa de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.26. Determinar cuáles de las siguientes matrices son regulares y calcular, por Gauss, la inversa de las que lo sean:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

1.27. Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.28. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

calcula, en cada caso, una matriz regular Q tal que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad QB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.29. Pensemos en un sistema de ecuaciones lineales $n \times n$, y en el método de eliminación de Gauss para resolverlo. Pongámonos de acuerdo para llamar "operación simple" a toda suma, resta, producto o división del método.

a) Si el sistema tiene solución única ¿cuántas operaciones simples como máximo tenemos que realizar para resolverlo?

b) De forma razonable se puede pensar que tenemos un ordenador que realiza 10^{10} operaciones por segundo y su hora de servicio cuesta 1000 euros. ¿Cómo de grande es el sistema que podemos resolver con 1 euro? ¿Y con 1000 euros?