3.1. En los siguientes casos, encuentra $\delta > 0$ de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, siendo $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$

A) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$ y $\varepsilon = 1/2$

$\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{x} = 1/2$

Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2}$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|2-x|}{|2x|} < \frac{1}{2} \quad \text{si } |2-x| < 1 \text{ y } |x| > 1$$

Observamos que si $|2-x| < 1 \Rightarrow x \in (1,3) \Rightarrow |x| > 1$.

Así que el δ buscado es 1.

B) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 1/3$

Escribimos en primer lugar $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x+1}$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{3}$

$$\left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-(x+1)}{2(x+1)} \right| = \left| \frac{1-x}{2(x+1)} \right| < \frac{1}{3}.$$ Esto se cumple si

por ejemplo $|x+1| > 1$ y $|1-x| < \dfrac{1}{2}$ ya que entonces

$$\frac{|1-x|}{2|x+1|} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

Si tomamos $\delta = \dfrac{1}{2}$, tenemos que $|1-x| < \dfrac{1}{2}$ y por tanto

$x \in \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2} \right)$, con lo que $x+1 \in \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2} \right) \Rightarrow |x+1| > \dfrac{3}{2} > 1$ que

es lo que necesitamos.

C) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$, $x_0 = 2$ y $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 - \sqrt{2}$

Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} - (1 - \sqrt{2}) \right| < \frac{1}{n}$$

Tenemos que

$$\left|\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}-1+\sqrt{2}\right| = \left|\frac{1}{x-1}-1+\sqrt{2}-\sqrt{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x-1}-1\right|+|\sqrt{2}-\sqrt{x}|$$

$$= \left|\frac{1-(x-1)}{x-1}\right| + |\sqrt{2}-\sqrt{x}| = \frac{|2-x|}{|x-1|}+|\sqrt{2}-\sqrt{x}| = \frac{|x-2|}{|x-1|}+|\sqrt{x}-\sqrt{2}| < \frac{1}{n}$$

Si hacemos que $\frac{|x-2|}{|x-1|}<\frac{1}{2n}$ y $|\sqrt{x}-\sqrt{2}|<\frac{1}{2n}$, tendremos que

$$\left|\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}-1+\sqrt{2}\right| < \frac{1}{n}.$$

Vamos a elegir $\delta>0$ para que $\frac{|x-2|}{|x-1|}<\frac{1}{2n}$ y $|\sqrt{x}-\sqrt{2}|<\frac{1}{2n}$ siempre que $|x-2|<\delta$.

Observamos que $|\sqrt{x}-\sqrt{2}| = |\sqrt{x}-\sqrt{2}|\,\frac{|\sqrt{x}+\sqrt{2}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{2}|} = \frac{|x-2|}{|\sqrt{x}+\sqrt{2}|}$

Si $|x-2|<\frac{1}{4n}$ y $|x-1|>\frac{1}{2}$ y $|\sqrt{x}+\sqrt{2}|>\frac{1}{2}$, tendremos que

$$\frac{|x-2|}{|x-1|}<\frac{1}{2n}, \quad |\sqrt{x}-\sqrt{2}| = \frac{|x-2|}{|\sqrt{x}+\sqrt{2}|}<\frac{1}{2n}$$

Si $|x-2|<\frac{1}{2n} \Rightarrow x\in\left(2-\frac{1}{2n},2+\frac{1}{2n}\right) \Rightarrow x-1\in\left(1-\frac{1}{2n},1+\frac{1}{2n}\right)$

$\Rightarrow |x-1|>1-\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}$ para cada número natural $n\geq 1$

Si $|x-2|<\frac{1}{2n} \Rightarrow x\in\left(2-\frac{1}{2n},2+\frac{1}{2n}\right) \underset{x>2-\frac{1}{2n}>1}{\Rightarrow} \sqrt{x}+\sqrt{2}>\sqrt{1}+\sqrt{2}>1>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |\sqrt{x}+\sqrt{2}|>\frac{1}{2}$

Así que el δ buscado es $\delta=\frac{1}{4n}$.

3.2. De las siguientes funciones calcule su dominio y los límites (o límites laterales) relevantes para representar la gráfica de cada función.

a) $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x}$

$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Límits relevants:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2}{1+x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{1+x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2(x-1)}} = \dfrac{x}{|x|\sqrt{x-1}}$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup$ valores tales que $x-1 \leq 0)$

$x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Por tanto $\mathrm{Dom}(f) = (1,+\infty)$

Así que $f(x) = \dfrac{x}{|x|\sqrt{x-1}} \underset{x>1}{\overset{\uparrow}{=}} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Límits relevants

- $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Esta función no esta definida en $x=1$

En $x=-1$ tenemos una discontinuidad evitable ya que

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} \quad \text{si } x<0$$

Así, escribimos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & \text{si } x \geq 0,\ x \neq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Límites relevantes:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

3.4. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$ con $b_m \neq 0$ es un número real si y sólo si $m \geq n$. ¿Cuánto vale ese número real?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}\right)}{x^m \left(b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots + b_1 \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{x^m}\right)}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \quad \left(\text{ya que } \frac{1}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ si } k \geq 1\right) \text{ y } x^{n-m} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \quad \left(\text{ya que } \frac{1}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ si } k \geq 1\right) \text{ y } x^{n-m} = 1 \\ 0 & \text{si } n < m \quad \left(\text{ya que } \frac{1}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \text{ si } k \geq 1\right) \text{ y } \frac{1}{x^{m-n}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

3.7. Encuentre la función f^{-1} y su dominio en los casos:

c) $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right)$

Escribimos $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} e^{-x}\right) \Rightarrow \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2} e^{-x} \Rightarrow$

$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(y) = e^{-x} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(y)\right) = -x \Rightarrow$

$\Rightarrow -\ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(y)\right) = x$, así que $f^{-1}(y) = -\ln\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(y)\right)$

La arcotangente toma valores entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

y solo podemos calcular ln para números positivos.

La función arcotangente toma valores positivos si $y>0$

Por tanto, $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = (0,+\infty)$

3.8. Sea $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ una función polinómica.

Prueba que:

(a) Si P es de grado par, entonces $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \infty$

(b) Si P es de grado impar, entonces $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$

(c) Si P es de grado impar, entonces $P(x)=0$ tiene al menos una solución

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n + \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right) =$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm\infty & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

de modo que $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$

Esto prueba (a) y (b)

(c) Como $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = +\infty$ existe un $M>0$ tal que $P(M)>0$ y como $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ existe un $-N<0$ tal que $P(-N)<0$.

Como los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{R}$ y $P(M)>0$ y $P(-N)<0$ existe, por el teorema de Bolzano, $t\in[-N,M]$ tal que $P(t)=0$.

3.14. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reales distintos. Encuentra una función polinómica f de grado $n-1$ de modo que $f(x_i)=a_i$ donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números dados e $i=1,\dots,n$

(a) Encuentra un polinomio de grado 2, tal que $P(0)=2$, $P(1)=-1$, $P(2)=6$

(b) Encuentra un polinomio de grado 3, tal que $P(-1)=3$, $P(0)=4$, $P(1/2)=2$ y $P(2/3)=-3$.

Consideramos el polinomio de grado $n-1$ dado por la fórmula

$$Q_i(x)=\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$ (polinomio interpolador de Lagrange)

Observamos que $Q_i(x_k)=\begin{cases}1 & \text{si } k=i\\ 0 & \text{si } k\neq i\end{cases}$

Consideramos el polinomio $f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i(x)$ y observamos que

$$f(x_l)=\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i(x_l)\underset{\substack{\uparrow\\ Q_i(x_l)=0 \text{ si } i\neq l}}{=} a_l Q_l(x_l)=a_l\cdot 1=a_l$$

para $l=1,\dots,n$

Por tanto, f tiene grado $\leq n-1$ ya que cada polinomio Q_i tiene grado $n-1$ y $f(x_l)=a_l$ para $l=1,\dots,n$.

a) $P(x) = 2 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + (-1)\frac{(x-0)(x-2)}{(+1-0)\cdot(+1-2)} + 6\,\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} =$

$= 5x^2 - 8x + 2$

Otra forma de resolverlo es considerar un sistema de ecuaciones lineales. Escribimos $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P(0) = 2$ nos da $a_0 = 2$

$P(1) = -1$ nos da $a_2 + a_1 + a_0 = -1$

$P(2) = 6$ nos da $4a_2 + 2a_1 + a_0 = 6$

Cuya solución es $a_2 = 2$, $a_1 = -8$, $a_2 = 5$, y nos proporciona el polinomio $P(x) = 5x^2 - 8x + 2$.

b) $P(x) = 3\,\frac{(x-0)(x-1/2)(x-2/3)}{(-1-0)(-1-1/2)(-1-2/3)} + 4\,\frac{(x+1)(x-1/2)(x-2/3)}{(0+1)(0-1/2)(0-2/3)} +$

$2 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-2/3)}{(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-2/3)} - 3\,\frac{(x+1)(x-0)(x-1/2)}{(2/3+1)(\frac{2}{3}-0)(\frac{2}{3}-1/2)} =$

$= \cancel{\frac{79}{8}x^3 - \frac{1723}{30}x^2 + \frac{623}{30}x + 4} \quad -\frac{107}{5}x^3 - \frac{421}{30}x^2 + \frac{251}{30}x + 4$

Otra forma de resolverlo es considerar un sistema de ecuaciones lineales. Escribimos $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P(-1) = 3$ nos da $-a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 3$

$P(0) = 4$ nos da $a_0 = 4$

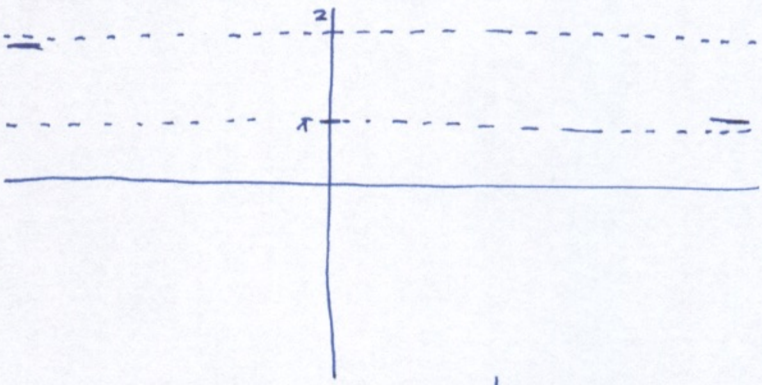
$P(1/2) = 2$ nos da $\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0 = 2$

$P(2/3) = -3$ nos da $\frac{8}{27}a_3 + \frac{4}{9}a_2 + \frac{2}{3}a_1 + a_0 = -3$

cuya solución es $a_3 = -\frac{107}{5}$, $a_2 = -\frac{421}{30}$, $a_1 = \frac{251}{30}$, $a_0 = 4$ y nos proporciona el polinomio $P(x) = -\frac{107}{5}x^3 - \frac{421}{30}x^2 + \frac{251}{30}x + 4$

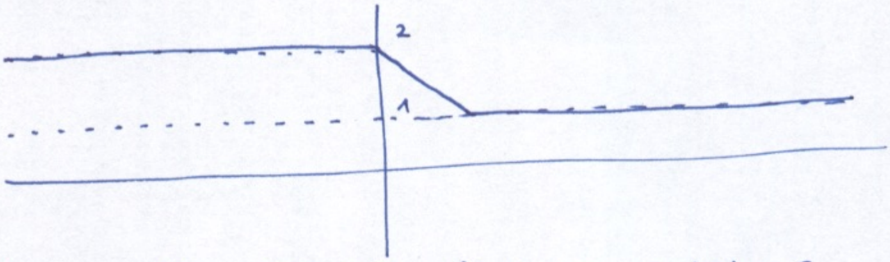
3.15. Construye una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que, en cada caso, verifique las propiedades siguientes:

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ y $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

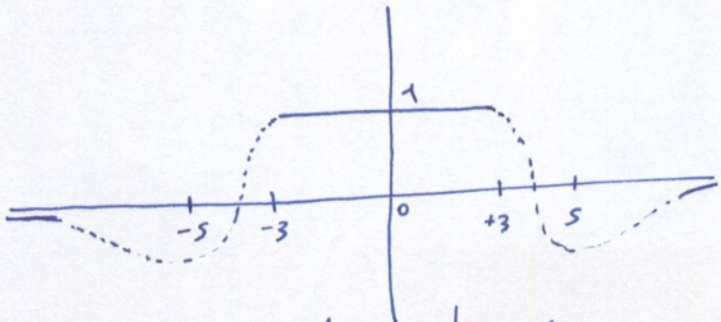


Por ejemplo podemos tomar

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



b) $f(x) = 1 \quad \forall x \in [-3, 3]$, $f(x) < 0$ si $|x| > 5$ y $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$



Por ejemplo, podemos tomar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-26}{x^2+1} & \text{si } x \leq -5 \\ x + 4 & \text{si } -5 < x \leq -3 \\ 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ -x + 4 & \text{si } +3 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{-26}{x^2+1} & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$