| Nombre (1): | | Calificación |
|---|---|---|
| Apellidos (1): | | |
| Nombre (2) | | |
| Apellidos (2) | | |

| **1** | **2** | **3** | **4** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** | **-** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

**Prática 10**: 24 de Enero de 2014

*Instrucciones:* Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

**1.** Utilizando el método de Horner, escribir el polinomio $2x^4 - 18x^3 + 62x^2 - 98x + 62$ como suma de potencias de $(x - 2)$.

$2x^4 - 18x^3 + 62x^2 - 98x + 62 = (x - 2)(2x^3 - 14x^2 + 34x - 30) + 2$

$2x^3 - 14x^2 + 34x - 30 = (x - 2)(2x^2 - 10x + 14) - 2$

$2x^2 - 10x + 14 = (x - 2)(2x - 6) + 2$

$2x - 6 = (x - 2)(2) + (-2)$

Por tanto $2x^4 - 18x^3 + 62x^2 - 98x + 62 = 2 - 2(x - 2) + 2(x - 2)^2 - 2(x - 2)^3 + 2(x - 2)^4$

**2.** Hallar el polinomio de Taylor de grado 5 en el punto $x = \dfrac{\pi}{4}$ de la función $f(x) = \cos(x)$.

$f(x) = \cos(x),\ f'(x) = -\sin(x),\ f''(x) = -\cos(x),\ f'''(x) = \sin(x),\ f^{4)}(x) = \cos(x),\ f^{5)}(x) = -\sin(x).$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f''(\frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$f'''(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f^{4)}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ f^{5)}(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x-2) + \frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2}(x-2)^2 + \frac{f'''(\frac{\pi}{4})}{6}(x-2)^3 + \frac{f^{4)}(\frac{\pi}{4})}{24}(x-2)^4 + \frac{f^{5)}(\frac{\pi}{4})}{120}(x-2)^5 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}(x-2)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}(x-2)^4 - \frac{\sqrt{2}}{240}(x-2)^5 \end{aligned}$$

**3.** Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 5 y el resto de Lagrange de $g(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2}$.

$g(x) = (2+x)^{-2},\ g'(x) = -2(2+x)^{-3},\ g''(x) = 6(2+x)^{-4},\ g'''(x) = -24(2+x)^{-5},$
$g^{4)}(x) = 120(2+x)^{-6},\ g^{5)}(x) = -720(2+x)^{-7},\ g^{6)}(x) = 5040(2+x)^{-8}.$
$g(0) = \frac{1}{2^2},\ g'(0) = \frac{-2!}{2^3},\ g''(0) = \frac{3!}{2^4},\ g'''(0) = \frac{-4!}{2^5},\ g^{4)}(0) = \frac{5!}{2^6},\ g^{5)}(x) = \frac{-6!}{2^7},\ g^{6)}(\alpha) = \frac{7!}{(1+\alpha)^8}.$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{g^{5)}(0)}{5!}x^5 \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{-2}{2^3}x + \frac{3}{2^4}x^2 + \frac{-4}{2^5}x^3 + \frac{5}{2^6}x^4 + \frac{-6}{2^7}x^5 \end{aligned}$$

$$T_5(x) = \frac{g^{6)}(\alpha)}{6!}x^6 = \frac{7}{(1+\alpha)^8}x^6, \quad \text{donde } \alpha \in (0,x) \text{ o } \alpha \in (x,0)$$

**4.** Se llama coseno hiperbólico de $x$ a la función $h(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Hallar el polinomio de MacLaurin de grado $n$ de $h$ y su término complementario.

$h(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ h'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ h''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ h^{k)}(x) = \frac{1}{2}(e^x + (-1)^k e^{-x})$
$h^{k)}(0) = \frac{1+(-1)^k}{2}.$
$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+(-1)^k}{2}\frac{x^k}{k!}$
$T_n(x) = \frac{h^{n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{\frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})}{(n+1)!}x^{n+1}$ donde $\alpha \in (0,x)$ o $\alpha \in (x,0)$