

EXAMEN DE SEPTIEMBRE MMI

Lunes 19 de Septiembre de 2011

- 1.- Si $a \leq b$ y $\forall \epsilon > 0$ ocurre que $b < a + \epsilon$, prueba que $a = b$.
- 2.- Estudia la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!}$.
- 3.- Se considera la función $f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$, $x \neq 0$. Se puede definir $f(0)$ de modo que la función sea continua? ¿Por qué?
- 4.- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{\lg x}{x}$. Determina cuál es el máximo del conjunto $A = \{e^\pi, \pi^e\}$.
- 5.- Estudia la convergencia y calcula, si es posible, la integral impropia $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$.
- 6.- Halla todas las matrices que conmuten con la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.
- 7.- Demuestra que el conjunto formado por los vectores

$$\{1 + x, x^2, 1 + x^2, 3x - 2x^2\}$$

es linealmente dependiente en el espacio de los polinomios con coeficientes racionales.

- 8.- Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - \vec{u}_3/2$ y $\text{Ker}(f) = \mathcal{L}(2\vec{u}_1 + \vec{u}_3)$. Donde $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .
Calcula la dimensión y las ecuaciones de $\text{Im}(f)$.
- 9.- Demuestra, sin desarrollar, que es nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

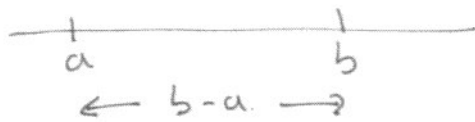
- 10.- Estudia para qué valores de los parámetros es diagonalizable la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

La revisión del examen se efectuará el día.....a las.....horas en el aula..... No es obligatorio asistir a la revisión.

EXAMEN DE SEMESTRE MM I
14-IX-2011

1:] Si $a \leq b$ i bien $a = b$ i bien $a < b$.
veremos que $a < b$ no tiene variación



Sea $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$
ya que $b > a$.

por hipótesis $b < a + \epsilon$, ①

por otra parte $\left[a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a + b - a}{2} = \frac{a+b}{2} < \right.$

$\left. < \frac{b+b}{2} = b \right] \text{ ②}$
↓
si $a < b$

① y ② son contradicciones luego $a < b$.
no tiene variación.

2:] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!}$

en valor absoluto $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(25)^n}{n!} = e^{25} - 1$

ya que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

o de otra forma; usando la regla de L'Hôpital

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(25)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{25^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25}{n+1} = 0 < 1$ luego la

serie es convergente en valor absoluto;

luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!}$ converge absolutamente.

y por tanto la serie es convergente

3:] ss $f(0) = f_0$ es continua, n'ha derivada

$$\text{que } f(0) = f_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{1/x} \cdot (-1/x^2)}{e^{1/x} \cdot (-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 = -1$$

por outro lado $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = 1$, como não existe a

limite de f em 0, f não é contínua para qualquer valor $a = f(0)$
que seria derivável a seguir

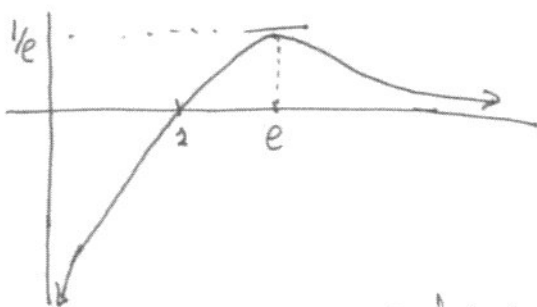
4:] $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ Dom $f = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0 \quad \begin{cases} \text{ss } x \in (0, 1) & f(x) < 0 \\ \text{ss } x > 1 & f(x) > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \begin{cases} < 0 & \text{ss } x > e \\ = 0 & \text{ss } x = e \\ > 0 & \text{ss } x \in (0, e) \end{cases} \quad f(e) = \frac{1}{e} \text{ máximo}$$



$$\text{Analogamente } \ln e^n = n \ln e$$

$$\ln ne = e \ln n$$

$$\text{como } \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln n}{n} \quad (\text{função decrescente para } x > e) \quad \text{se } n > e$$

$$n \ln e = \ln e^n > e \ln n = \ln ne$$

como $\ln x$ é uma função crescente

$$\boxed{e^n > ne}$$

$$5^o) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r x e^{-x^2} dx =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \left(\frac{-2x e^{-x^2}}{-2} \right) dx =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_0^r -2x e^{-x^2} dx =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left[e^{-x^2} \right]_0^r =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} (e^{-r^2} - 1) = -\frac{1}{2} (-1) = \frac{1}{2}$$

ESTE ES LA INTEGRAL EMPLEANDO LA (MATERIA) INTEGRAL
 PARA DEFINICIÓN Y SU VALOR ES $\frac{1}{2}$

$$6^o) A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = B \cdot A \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad (\Rightarrow)$$

$$\cancel{3a_1} - 2a_2 = \cancel{3a_1} + 2a_3$$

$$2a_1 - 3a_2 = 3a_2 + 2a_3$$

$$3a_3 - 2a_4 = -2a_1 - 3a_2$$

$$2a_3 - \cancel{3a_4} = -2a_1 - \cancel{3a_2}$$

(VALORES TRANSICIONALES)
 LINEALES (1) (2)
 (VALORES SINGULARES)

$$(\Rightarrow) \begin{cases} a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 - 6a_2 - 2a_3 = 0 \\ 2a_1 + 6a_3 - 2a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

MATRIZ COEFICIENTES

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} a_2 = -a_3 \\ 2a_1 - 6a_2 = 2a_3 \end{cases} \quad \text{ASS} \begin{cases} a_1 = a_3 + 3a_2 = -3a_3 + a_3 \end{cases}$$

$$a_3, a_4 \in \mathbb{R}$$

RANGO DE LA

MATRIZ DE COEFICIENTES

$$Y \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -3a_3 + a_3 & -a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_3 & -a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

7:] Sea la combinación lineal

$$0 = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(x^2) + \lambda_3(1+x^2) + \lambda_4(3x-2x^2)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_3) + (\lambda_1 + 3\lambda_4)x + (\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4)x^2$$

Así

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = \lambda_1 + 3\lambda_4 \\ 0 = \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones
con 4 variables (sistema homogéneo)

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

luego la combinación de los tres es solución
es 1 (= 4 - 3). La solución es infinita
se infinitesimalmente, por tanto existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$
no son nulos que verifican la ecuación de
admisión

Otra forma $\{1, x, x^2\}$ forman una base de \mathcal{L} .

La solución de grado a lo más 2 y
coeficientes en \mathbb{Q} . Por tanto

$$1+x, x^2, 1+x^2 \text{ y } 3x-2x^2 \in \mathcal{L}[1, x, x^2]$$

Como $\dim \mathcal{L}[1, x, x^2] \leq 3$ y tanto como
vectorial, necesariamente son el conjunto
de la base, es decir de los linealmente
dependientes.

8:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{ABSTRACT LINEAR}$$

$$\vec{u}_1 \longrightarrow f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\vec{u}_2 \longrightarrow f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

$$2\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \longrightarrow f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = 0$$

$$\text{com } f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = 2f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_3) = 2[\vec{u}_1 + \vec{u}_2] + f(\vec{u}_3) = 0$$

$$\text{so we get } f(\vec{u}_3) = -2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$$

ABSTRACT MATRIX M_f ABSTRACT A LA ABSTRACT

$$f \text{ is } M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rank } M_f = 2 \quad \text{yes } \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{yes } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Let } \dim \text{Im } f = 2 \quad \text{yes } \text{Im } f = \mathcal{L}\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2)\} = \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, -1/2)\}\} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 0\} =$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1/2 x + 1/2 y - z = 0\}$$

Equation of the Im f.

$$9: \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

yes we get the same result
+ same for columns
+ G.V.A.C.S.

10:

$$C: \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

AVHVALUTS $0 = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 4 \\ 3 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(1+\lambda)(8-\lambda)$$

ASS SS $\lambda \neq 5$ y $\lambda \neq -1$, C + IZAK TATH
AVHVALUTS SISTEMU Y ZAK TANDU TI NISAGUNASTADLE
(IZAKTANISTATUTATE NE 4)

ALWANT SS $\lambda = 5$ S ES AVHVALUTS POSIBLE

1.) AVHVALUTS AVSIAKU VISAKTANU ZAK.

$$-6y + 4z = 0$$

$$= 0$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

3x

LEGO LA NISATSIKU STAK AVSIAKU YEL SISTEMU
ES 1; LEGO C KON $\lambda = 5$ AV IS NISAGUNASTADLE

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

SS $\lambda = -1$ -1 ES VA AVHVALUTS POSIBLE

1.) AVHVALUTS AVSIAKU VISAKTANU ZAK

$$6x = 0$$

$$4z = 0$$

$$3x = 0$$

SS $4 \neq 0$ $\text{Rang} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ Y C AV TI NISAGUNASTADLE

SS $4 = 0$ $x = 0 \Leftrightarrow L[(0,1,0), (0,0,1)]$

LEGO MAY KU AVHVALUTS IZAKTANU
AVSIAKU AL AVHVALUTS $\lambda = -1$

EN ESTE CASO $\lambda = -1$ Y $4 = 0$ C ES NISAGUNASTADLE