1.6 Resuelve la ecuación: $|2-|x||=2+|x|$

Elevando al cuadrado la expresión anterior obtenemos

$$|2-|x||^2=(2+|x|)^2 \overset{\text{los cuadrados son números positivos}}{\longleftrightarrow} (2-|x|)^2=(2+|x|)^2 \longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-4|x|+x^2=4+4|x|+x^2 \longleftrightarrow -4|x|=4|x| \Leftrightarrow 8|x|=0 \longleftrightarrow |x|=0$$

$$\longleftrightarrow x=0.$$

Por tanto, el único candidato a solución es $x=0$, que efectivamente cumple la ecuación anterior.

1.7. Demuestra lo siguiente:

(a) Si $ax=a$ para algun $a\neq 0$, entonces $x=1$.

$$ax=a \longleftrightarrow ax-a=0 \longleftrightarrow a(x-1)=0.$$

El producto de dos números reales es 0 $\longleftrightarrow$ al menos uno de ellos es cero. Como $a\neq 0$, entonces $x-1=0 \Rightarrow x=1$.

(b) $(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=x^2+2xy+y^2$

(c) $x^2-y^2=x^2-xy+xy-y^2=(x-y)(x+y)$

(d) Si $x^2=y^2$, entonces $x=y$ o bien $x=-y$.

$$x^2=y^2 \longleftrightarrow x^2-y^2=0 \longleftrightarrow (x-y)(x+y)=0$$

El producto de dos números reales es 0 $\longleftrightarrow$ al menos uno de ellos es cero

Por tanto $(x-y)(x+y)=0 \longleftrightarrow x-y=0$ ó $x+y=0 \longleftrightarrow x=y$ ó $x=-y$.

(e) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=\left\{\begin{array}{l} x^3+x^2y+xy^2 \\ \quad\ -x^2y-xy^2-y^3 \end{array}\right\}=x^3-y^3$$

(f) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$

$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})=\left\{\begin{array}{l} x^n+x^{n-1}y+\cdots+x^2y^{n-2}+xy^{n-1} \\ \quad\ -x^{n-1}y-\cdots-x^2y^{n-2}-xy^{n-1}-y^n \end{array}\right\}=$$

$$=x^n-y^n.$$

1.8. Si $0<a<b$ son dos números reales, prueba que se verifica que

$$\frac{2ab}{a+b} \underset{①}{<} \sqrt{a\cdot b} \underset{②}{<} \frac{a+b}{2} \underset{③}{<} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

① $\dfrac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} \underset{a,b>0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{2ab}{\sqrt{ab}} < a+b \Longleftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} < a+b = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2$

$\Longleftrightarrow 0 < (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$ lo cual es cierto porque

$0<a<b$ y por tanto $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

② $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} \Longleftrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} < a+b$, lo cual ya hemos visto en ① que es cierto.

③ $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \underset{a,b>0}{\Longleftrightarrow} \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 < \dfrac{a^2+b^2}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{a^2+b^2+2ab}{4} < \dfrac{a^2+b^2}{2} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dfrac{a^2+b^2+2ab}{2} < a^2+b^2 \Longleftrightarrow a^2+b^2+2ab < 2a^2+2b^2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \underbrace{a^2+b^2-2ab}_{=(b-a)^2} > 0$, lo cual es cierto ya que $a<b$.

1.9. Si $a \le b$ y para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $a \le b \le a+\varepsilon$, prueba que $a=b$. Del mismo modo prueba que si para todo $\varepsilon>0$ se verifica que $b-\varepsilon \le a \le b$, entonces $a=b$.

- Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $a<b$. Entonces $b-a>0$. Elegimos $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Entonces para esta elección de $\varepsilon>0$ se cumple que:

$$a \le b \le a+\varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

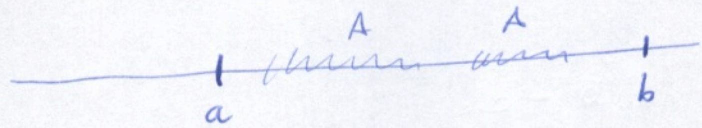
Por tanto, llegamos a contradicción. Como $a \le b$ y $a<b$ no es posible, nos queda que $a=b$.

- El segundo apartado se hace igual (y sirve el mismo $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ para llegar a contradicción)

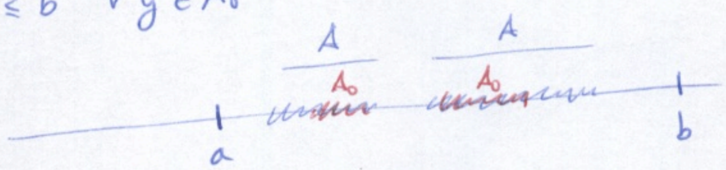
1.10. Sea A un conjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $A_0 \subseteq A$ con $A_0 \neq \emptyset$.
Prueba que A_0 está acotado y que

$$\inf A \leq \inf A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$$

① Como A está acotado $\Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b \ \ \forall x \in A$



Sea ahora $y \in A_0$. Como $A_0 \subseteq A$, entonces $y \in A$ y por tanto
$a \leq y \leq b \ \ \forall y \in A_0$



② • $\inf A_0$ = mayor de las cotas inferiores de A_0
$\inf A$ = mayor de las cotas inferiores de A_0

Si $y \in A_0 \underset{A_0 \subset A}{\Rightarrow} y \in A \Rightarrow \inf A \leq y$

Por tanto, $\inf A \leq y \ \ \forall y \in A_0 \Rightarrow \inf A$ es cota inferior de A_0 y
por tanto $\inf A \leq \inf A_0$.

• $\inf A_0 \leq \sup A_0$ (siempre se cumple)

• $\sup A_0 \leq \sup A$
$\sup A_0$ = menor de las cotas superiores de A_0
$\sup A$ = menor de las cotas superiores de A

Si $y \in A_0 \underset{A_0 \subset A}{\Rightarrow} y \in A \Rightarrow y \leq \sup A$

Por tanto, $y \leq \sup A \ \ \forall y \in A_0 \Rightarrow \sup A$ es cota superior de A_0 y por
tanto $\sup A_0 \leq \sup A$.

1.11 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen los siguientes subconjun[tos] de $\mathbb{R}$:

$$A+B = \{x \in \mathbb{R} : x = a+b \text{ donde } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

$$\alpha A = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha a \text{ donde } a \in A\}$$

Prueba que:

(i) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

- Veamos en primer lugar que $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

  Sea $x \in A+B \Rightarrow x = a+b$ donde $a \in A$ y $b \in B$

  $\left.\begin{array}{l} \text{Como } a \in A \Rightarrow a \leq \sup(A) \\ \text{Como } b \in B \Rightarrow b \leq \sup(B) \end{array}\right| \Rightarrow x = a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$

  Por tanto $\forall x \in A+B$ se cumple que $x \leq \sup(A) + \sup(B)$

  Por lo que $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota superior $\Rightarrow \sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

- Veamos ahora que $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$. Para ello usaremos el ejercicio 1.9. Vamos a demostrar que $\forall \varepsilon > 0$ $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon \leq \sup(A+B)$ y deduciremos usando el ejercicio 1.9. que $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A+B)$.

  Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota superior de A. Por tanto existe $a \in A$ tal que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \sup(A)$

  Análogamente $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota superior de B. Por tanto existe $b \in B$ tal que $\sup(B) - \varepsilon/2 < b \leq \sup(B)$

  Sea $x = a+b \in A+B$. Se cumple que

  $$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon = \sup(A) - \varepsilon/2 + \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < a+b = x$$

  Por tanto $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$ no es cota superior y por tanto $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon \leq \sup(A+B)$ (que es lo que queríamos demostrar)

(ii) $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

- Veamos en primer lugar que $\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A+B)$

  Sea $x \in A+B \Rightarrow x = a+b$ donde $a \in A$ y $b \in B$

  $$\left.\begin{array}{l} \text{Como } a \in A \Rightarrow a \geq \inf(A) \\ \text{Como } b \in B \Rightarrow b \geq \inf(B) \end{array}\right| \Rightarrow x = a+b \geq \inf(A) + \inf(B)$$

  Por tanto, $\forall x \in A+B$ se cumple que $x \geq \inf(A) + \inf(B)$, es decir $\inf(A) + \inf(B)$ es una cota inferior $\Rightarrow \inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A+B)$

- Veamos ahora que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$. Para ello, usaremos el ejercicio 1.9. Vamos a demostrar que $\forall \varepsilon > 0$ $\inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$ y deduciremos por el ejercicio 1.9 que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\inf(A) + \varepsilon/2$ no es cota inferior de A. Por tanto, existe $a \in A$ tal que $\inf(A) \leq a < \inf(A) + \varepsilon/2$. Análogamente, $\inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota inferior de B. Por tanto, existe $b \in B$ tal que $\inf(B) \leq b < \inf(B) + \varepsilon/2$.

Sea $x = a+b \in A+B$. Se cumple que:

$$x = a+b < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2} = \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$$

Por tanto $\inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$ no es cota inferior de $A+B$ y por tanto

$$\inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$$

que es lo que queríamos demostrar

(iii) $\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A)$ y $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ siempre que $\alpha > 0$.

① $\inf(\alpha A) \leq \alpha \inf(A)$

Sea $x \in A \Rightarrow \alpha x \in \alpha A \Rightarrow \inf(\alpha A) \leq \alpha x \Rightarrow \frac{\inf(\alpha A)}{\alpha} \leq x$.

Como esto se cumple $\forall x \in A \Rightarrow \frac{\inf(\alpha A)}{\alpha}$ es una cota inferior de $A \Rightarrow \frac{\inf(\alpha A)}{\alpha} \leq \inf(A) \Rightarrow \inf(\alpha A) \leq \alpha \inf(A)$.

② $\inf(\alpha A) \geq \alpha \inf(A)$

Sea $y \in \alpha A \Rightarrow \exists a \in A$ tal que $y = \alpha a \Rightarrow \frac{y}{\alpha} = a \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{\alpha} \geq \inf(A) \Rightarrow y \geq \alpha \inf(A)$.

Como esto se cumple $\forall y \in \alpha A \Rightarrow \alpha \inf(A)$ es una cota inferior de $\alpha A \Rightarrow \alpha \inf(A) \leq \inf(\alpha A)$.

① $\sup(\alpha A) \geq \alpha \sup(A)$

Sea $x \in A \Rightarrow \alpha x \in \alpha A \Rightarrow \alpha x \leq \sup(\alpha A) \Rightarrow x \leq \frac{\sup(\alpha A)}{\alpha}$

Como esto se cumple $\forall x \in A \Rightarrow \frac{\sup(\alpha A)}{\alpha}$ es una cota superior de $A \Rightarrow \sup(A) \leq \frac{\sup(\alpha A)}{\alpha} \Rightarrow \alpha \sup(A) \leq \sup(\alpha A)$

② $\sup(\alpha A) \leq \alpha \sup(A)$

Sea $y \in \alpha A \Rightarrow \exists a \in A$ tal que $y = \alpha a \Rightarrow \frac{y}{\alpha} = a \in A \Rightarrow$

$\frac{y}{\alpha} = a \leq \sup(A) \Rightarrow y \leq \alpha \sup(A)$

Como esto se cumple $\forall y \in \alpha A \Rightarrow \alpha \sup(A)$ es una cota superi[or] de $\alpha A \Rightarrow \sup(\alpha A) \leq \alpha \sup(A)$

(iv) $\inf(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ y $\sup(\alpha A) = \alpha \inf(A)$ siempre que $\alpha < 0$.

Hagamos primero el caso $\alpha = -1$. Es decir

$$\inf(-A) = -\sup(A) \quad \text{y} \quad \sup(-A) = -\inf(A)$$

① $\inf(-A) \leq -\sup(A)$

Sea $y \in A \Rightarrow -y \in (-A) \Rightarrow -y \geq \inf(-A) \Rightarrow y \leq -\inf(-A)$

Como esto se cumple $\forall y \in A \Rightarrow -\inf(-A)$ es cota superior de A

$\Rightarrow \sup(A) \leq -\inf(-A) \Rightarrow \inf(-A) \leq -\sup(A)$.

② $\inf(-A) \geq -\sup(A)$

Sea $x \in (-A) \Rightarrow x = -a$ para cierto $a \in A \Rightarrow -x = a \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow -x \leq \sup(A) \Rightarrow x \geq -\sup(A)$

Como esto se cumple $\forall x \in (-A) \Rightarrow -\sup(A)$ es cota inferior de $(-$

$\Rightarrow \inf(-A) \geq -\sup(A)$

③ $\sup(-A) \overset{B:=-A}{=} \sup(B) = -\inf(-B) = -\inf(-(-A)) = -\inf(A)$

usando el ~~apartado~~ caso anterior para $B = -A$

— ∘ —

Sea $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = (-1)\beta$ donde $\beta = -\alpha > 0$. Usando (iii) y lo anterior

$$\begin{cases} \inf(\alpha A) = \inf((-1)\beta A) = -\sup(\beta A) = -\beta \sup(A) = \alpha \sup(A) \\ \sup(\alpha A) = \sup((-1)\beta A) = -\inf(\beta A) = -\beta \inf(A) = \alpha \inf(A) \end{cases}$$