Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(i)	**1**(ii)	**2**(i)	**2**(ii)	**3**	**4**	**5**(i)	**5**(ii)	**6**	**7**

Prática 9: 16 de Enero de 2014

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

1. Determinar la convergencia o divergencia y calcular las siguientes integrales:

(i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{m\to\infty}\int_1^m \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{m\to\infty}\Big[\frac{(\ln x)^2}{2}\Big]_1^m = \lim_{m\to\infty}\frac{(\ln m)^2}{2} = +\infty$ (Divergente)

(ii) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{3-\varepsilon}(3-x)^{-1/2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[-\frac{(3-x)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\Big]_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[2\sqrt{3}-2\sqrt{\varepsilon}\Big]$
$= 2\sqrt{3}$

2. Calcula la siguientes integrales por medio de las funciones gamma y beta:

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{11/2}dx = \Gamma\Big(\frac{11}{2}+1\Big) = \frac{11}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{11}{2}\Big) = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{9}{2}\Big) = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{7}{2}\Big)$
$\displaystyle = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{5}{2}\Big) = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)$
$\displaystyle = \frac{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{2^6}\cdot\sqrt{\pi}$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^3}\sqrt{(1-x)^5}dx = B\Big(\frac{3}{2}+1,\frac{5}{2}+1\Big) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)\Gamma(\frac{5}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+1+\frac{5}{2}+1)} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\frac{5}{2}\cdot\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(6)}$
$\displaystyle = \frac{\frac{3}{2}\cdot\Gamma(\frac{3}{2})\cdot\frac{5}{2}\cdot\Gamma(\frac{5}{2})}{5!} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{5!} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{5!} = \frac{3\pi}{2^8}$

3. Hallar usando secciones el volumen de una pirámide de base cuadrada cuya altura es 7 m y cuyo lado de la base es 8 m.

Como la base mide 8 m y la altura 7m se cumple que el lado $\ell(x)$ del cuadrado correspondiente a altura x cumple que

$$\frac{8}{7} = \frac{\ell(x)}{x}$$

Por tanto $\ell(x) = \frac{8}{7}x$ y asi la sección de pirámide, que es un cuadrado, y que se encuentra a altura x tiene área $A(x) = \ell(x)^2 = \frac{8^2}{7^2}x^2$. Por tanto, el volumen de la pirámide vale

$$V := \int_0^7 \frac{8^2}{7^2}x^2dx = \frac{8^2}{7^2}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^7 = \frac{8^2\cdot 7}{3}\ m^3$$

4. Hallar la longitud del arco de parábola $y = x^2$ entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. (*Ayuda: Un cambio adecuado para el cálculo de la integral puede ser* $\sqrt{1+4x^2} = 2x + t$.)

La longitud de un arco de gráfica viene dada por $\ell = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x)^2)}dx$ donde $f(x) = x^2$ y $f'(x) = 2x$. Por tanto

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$$

Hacemos el cambio $\sqrt{1+4x^2} = 2x + t$, es decir, $1 + 4x^2 = 4x^2 + 4xt + t^2$, y por tanto, $x = \frac{1-t^2}{4t}$ y $dx = \frac{1}{4}(-\frac{1}{t^2} - 1)dt$. Además para $x = 0$ tenemos $t = 1$ y para $x = 1$ nos queda $t = \sqrt{5} - 2$. De este modo, nos queda la integral

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = \int_1^{\sqrt{5}-2} \Big(\frac{1-t^2}{4t} + t\Big)\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{t^2} - 1\Big)dt = \int_{\sqrt{5}-2}^1 \Big(\frac{1+3t^2}{4t}\Big)\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{t^2} + 1\Big)dt$$

$$= \int_{\sqrt{5}-2}^1 \Big(\frac{1+4t^2+3t^4}{16t^3}\Big)dt = \Big[-\frac{1}{32t^2} + \frac{1}{4}\log(t) + \frac{3}{32}t^2\Big]_{\sqrt{5}-2}^1$$

$$= \Big(\frac{1}{16} + \frac{1}{32(\sqrt{5}-2)^2} - \frac{1}{4}\log(\sqrt{5}-2) - \frac{3(\sqrt{5}-2)^2}{32}\Big)u$$

5. Se llama *trompeta del arcángel* (o Gabriel's trumpet) a la figura que se obtiene al girar alrededor del eje OX la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo $[1, +\infty]$.

(i) ¿Cuánto vale el volumen que hay dentro?

$$V := \pi \int_1^\infty (f(x))^2dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \pi \lim_{m\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \pi \lim_{m\to\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^m = \pi \lim_{m\to\infty} \Big[-\frac{1}{m} + 1\Big] = \pi\, u^3$$

(ii) Comprueba que aunque el arcángel se empeñe, no podrá pintar su trompeta ni con toda la pintura del mundo.

$$A := 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx > 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty\, u^2 \text{ (Divergente)}$$

6. Calcula $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}$. *Ayuda: Puede ser útil la identidad* $\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1+x^4+2x^2}{x(x^2+1)^2} - \frac{x^4+2x^2}{x(x^2+1)^2}$ *y aplicarle a continuación las simplificaciones adecuadas.*

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \int \Big(\frac{1+x^4+2x^2}{x(x^2+1)^2} - \frac{x^4+2x^2}{x(x^2+1)^2}\Big)dx = \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x^3+2x}{(x^2+1)^2}\Big)dx$$

$$= \log(x) - \int \Big(\frac{x^3+x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\Big)dx = \log(x) - \int \Big(\frac{x}{(x^2+1)} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\Big)dx$$

$$= \log(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + C$$

7. Una tinaja modelada en un torno tiene un radio interior de $x^2 + 1$, donde x es la altura. Si la cavidad de la tinaja tiene dos metros de altura total, calcula la cantidad de líquido que puede albergar.

$$V := \pi \int_0^2 (f(x))^2dx = \pi \int_0^2 (x^2+1)^2dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \pi\Big[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\Big]_0^2$$

$$\pi\Big(\tfrac{32}{5} + \tfrac{16}{3} + 2\Big) = \tfrac{206}{15}\, m^3$$