Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(i)	**1**(ii)	**1**(iii)	**1**(iv)	**1**(v)	**1**(vi)	**2**	**3**	**4**	**5**

Prática 8: 20 de Diciembre de 2013

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

1. Calcular las siguientes primitivas

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4+x^6}dx$ (*Ayuda: intentar relacionar la integral anterior con una arcotangente.*)

$$\int \frac{x^2}{4+x^6}dx = \int \frac{x^2}{4+(x^3)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{1+(x^3/2)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{3x^2/2}{1+(x^3/2)^2} = \frac{1}{6}\text{arctg}(x^3/2)+C$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \overset{(1)}{=} \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\Big(\int \frac{t+1-1}{1+t}dt\Big) = 2\Big(\int dt - \int \frac{1}{1+t}dt\Big)$

$= 2t - 2\log(1+t) + C = 2\sqrt{x} - 2\log(1+\sqrt{x}) + C$

Cambio de variable (1): $t=\sqrt{x},\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \ \rightsquigarrow\ x = t^2, dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$

(iii) $\displaystyle\int \log x dx \overset{(1)}{=} x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$

Por partes (1): $u = \log x, du = \frac{1}{x}dx,\ dv = dx, v = x$

(iv) $\displaystyle\int x^2e^xdx \overset{(1)}{=} x^2e^x - 2\int xe^xdx \overset{(2)}{=} x^2e^x - 2\Big(xe^x - \int e^xdx\Big) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

Por partes (1): $u = x^2, du = 2xdx,\ dv = e^xdx, v = e^x$

Por partes (2): $u = x, du = dx,\ dv = e^xdx, v = e^x$

(v) $\displaystyle\int \text{sen}^3 x dx = \int (\text{sen}(x))^2\text{sen}(x)dx = \int (1-(\cos(x))^2)\text{sen}(x)dx$

$\displaystyle = \int \text{sen}(x)dx - \int (\cos(x))^2\text{sen}(x)dx = -\cos(x) + \frac{(\cos(x))^3}{3} + C$

(vi) $\displaystyle\int \frac{2x^3-16}{x^2+4}dx \overset{(1)}{=} \int 2xdx + \int \frac{-8x-16}{x^2+4}dx = x^2 - 4\int \frac{2x}{x^2+4}dx - 16\int \frac{1}{x^2+4}dx$

$\displaystyle = x^2 - 4\log(x^2+4) - \frac{16}{4}\int \frac{1}{1+(x/2)^2}dx = x^2 - 4\log(x^2+4) - \frac{32}{4}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx$

$= x^2 - 4\log(x^2+4) - 8\text{arctg}(x/2) + C$

División (1): $2x^3 - 16 = (x^2+4)(2x) + (-8x-16)$

2. Derivar la función $F(x)=\int_{x^3}^{x^2}\cos(\mathrm{tg}(x))dx$ definida en el intervalo $[0,1]$. Escribimos $F(x)=\int_{x^3}^{x^2}\cos(\mathrm{tg}(x))dx=\int_{x^3}^{0}\cos(\mathrm{tg}(x))dx+\int_{0}^{x^2}\cos(\mathrm{tg}(x))dx=-\int_{0}^{x^3}\cos(\mathrm{tg}(x))dx+\int_{0}^{x^2}\cos(\mathrm{tg}(x))dx.$

Sean ahora $G(y)=\int_0^y\cos(\mathrm{tg}(x))dx$, $f_1(x)=x^3$ y $f_2(x)=x^2$. Se cumple que

$$F(x)=-G\circ f_1(x)+G\circ f_2(x)$$

Por tanto por la regla de la cadena $F'(x)=-G'\circ f_1(x)\cdot f_1'(x)+G'\circ f_2(x)\cdot f_2'(x)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que $G'(y)=\cos(\mathrm{tg}(x))$. Por otro lado, $f_1'(x)=3x^2$ y $f_2'(x)=2x$. De este modo, deducimos que

$$F'(x)=-G'\circ f_1(x)\cdot f_1'(x)+G'\circ f_2(x)\cdot f_2'(x)=-\cos(\mathrm{tg}(x^3))3x^2+\cos(\mathrm{tg}(x^2))2x.$$

3. Calcula los extremos relativos de la función $F(x):=\int_0^{\log(x)}\mathrm{arctg}(t)dt$.

Sean $G(y)=\int_0^y\mathrm{arctg}(t)dt$ y $g(x)=\log(x)$. Se cumple que $F(x)=G\circ g(x)$ y por tanto $F'(x)=G'\circ g(x)\cdot g'(x)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo se cumple que $G'(y)=\mathrm{arctg}(y)$; además, $g'(x)=\frac{1}{x}$. Como la función F es derivable, se cumple que los extremos relativos de F son puntos críticos de F es decir, tiene que cumplir

$$F'(x)=\mathrm{arctg}(\log(x))\cdot\frac{1}{x}=0\quad\rightsquigarrow\quad\mathrm{arctg}(\log(x))=0\quad\rightsquigarrow\quad\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(\log(x)))=\mathrm{tg}(0)=0$$

Por tanto, $\log(x)=0$ y esto ocurre si y sólo si $x=1$. Por tanto el único posible extremo relativo es $x=1$. Para ver si es un extremo calculamos la segunda derivada

$$F''(x)=\frac{1/x}{1+(\log(x))^2}\cdot\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}(\log(x))\cdot\frac{1}{x^2}$$

Como $F''(1)=\frac{1/1}{1+(\log(1))^2}\cdot\frac{1}{1}=1>0$, deducimos que F tiene un mínimo en $x=1$.

4. Expresar en forma integral y calcular $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.

Escribimos $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^n\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n\sqrt{\frac{k}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ donde $f(x)=\sqrt{x}$. Como f es continua en el intervalo $[0,1]$ se cumple que es integrable y por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

5. Demostrar que si la función f es continua en $[1,5]$ y verifica que $\int_1^5 f(x)dx=12$, entonces la función f toma el valor 3 en algún punto de ese intervalo. *Ayuda: Intentar aplicar el teorema del valor medio.*

Definimos $F(y)=\int_1^y f(x)dx$ y recordamos que por Teorema Fundamental del Cálculo Integral se cumple que $F'(y)=f(y)$. Por otra parte, por el teorema del valor medio aplicado a F se cumple que existe un punto $y_0\in[1,5]$ tal que

$$\frac{F(5)-F(1)}{5-1}=F'(y_0)=f(y_0).$$

Como $F(5)=\int_1^5 f(x)dx=12$ y $F(1)=\int_1^1 f(x)dx=0$ deducimos que

$$f(y_0)=\frac{F(5)-F(1)}{4}=\frac{12}{4}=3.$$