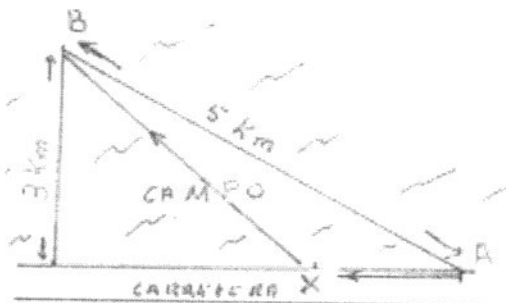


## EXAMEN PARCIAL MMI

Viernes 11 de Febrero de 2011

- 1.- Demuestra por inducción que:  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ .
- 2.- Relaciona el límite:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$  con la integral  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ ; calcula el límite anterior.
- 3.- Calcula la suma de:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$ .
- 4.- Estudia la convergencia de la serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n^3 - 1}$ . ( $\lg x$  es la función logaritmo neperiano).
- 5.- Si  $\alpha < \beta$ , prueba que la ecuación  $\frac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \frac{x^6 + 1}{x - \beta} = 0$  tiene al menos una solución en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ .
- 6.- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva  $f(x) = x^3 \sin x + 1$  por el punto  $(\pi, 1)$ .
- 7.- Observa el plano. Se quiere ir del punto A al B. Se puede ir por el campo a la velocidad  $V_{cam} = 6 km/h$  o por la carretera (a velocidad  $V_{car} = 10 km/h$ ) y el campo. Encuentra  $x$ , en el cuál hay que desviarse, para que el tiempo usado en el trayecto sea mínimo. ¿Cuánto tiempo es éste?



- 8.- Calcula la siguiente primitiva  $\int \frac{1}{1 + e^x} dx$
- 9.- Halla los extremos relativos de la función:  $F(x) = \int_0^{\lg x} \arctg(t) dt$ . (Observación: el rango de la  $\arctg x$  es  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ).
- 10.- Obtener el polinomio de Taylor de grado tres centrado en  $x = 0$  de la función  $f(x) = \arctg x$ .

La revisión del examen se efectuará el día 23 a las 15 horas en el aula 6. No es obligatorio asistir a la revisión.

**Observaciones:** Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada pregunta se resolverá en una cara de un folio y todas las preguntas se contestarán por orden.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

# EXAMEN PARCIAL UMJ

FEBRERO 2011

1. PARA  $n=1$   $1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$

SUPONGAMOS QUE  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

ASÍ  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \geq$

$\geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ sumandos}} \geq$

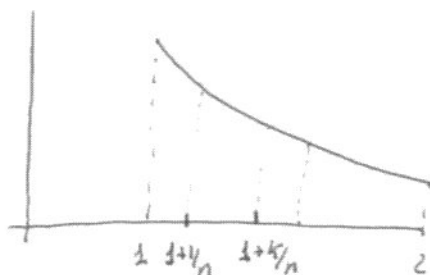
$\geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$

$\frac{1}{2^{n+1}}$  ES EL MAS PEQUEÑO  
DE LAS SUMANDAS

DEBO POR EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN, LA  
DESIGUALDAD QUE HA PROBADO  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

2.  $f(x) = \frac{1}{x}$  ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN  $[1,2]$ .

SE DIVIDIMOS EL INTERVALO  $[1,2]$  EN  
 $n$  PARTES IGUALES SE SIGUE QUE



$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

COMO  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left. \ln x \right|_1^2 = \ln 2$  / EL LÍMITE PERMANE  
ES  $\ln 2$ .

$$3^{\circ}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^3 2^n}{3^n} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= 8 \frac{2/3}{1-2/3} = 16.$$

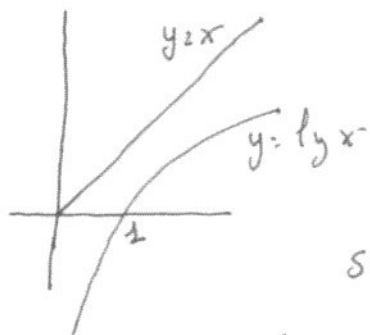
SUMA DE LA  
SERIE GEOMÉTRICA  
DE RAZÓN  $2/3$

$$4^{\circ}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n^3-1}$$

SS  $n \geq 1$  CLARAMENTE

$$\frac{\lg n}{2n^3-1} \geq 0$$

LEGO LA UNA SERIE DE TÉRMINOS POSITIVOS



Por otro lado  $\lg n < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{ASS} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n^3-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-1}$$

SABEMOS QUE  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ES CONVERGENTE

y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n^3-1} = \frac{1}{2}$ , ES CONSTANTE

DE COMPARACIÓN CON COEFICIENTE DE RIESGO QUE  
LA SERIE  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-1}$  ES CONVERGENTE y por tanto  
TAMBIÉN LO ES LA SERIE  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n^3-1}$  YA QUE

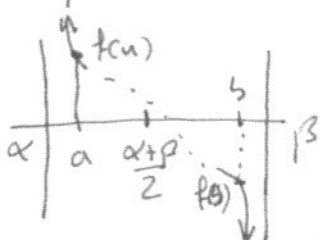
ESTÁ ACOTADA POR LA ANTERIOR

$$5^{\circ}) f(x) = \frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} \quad \text{OBSERVANTE ES CONTINUA EN } (\alpha, \beta)$$

$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \infty$  ASS  $x = \alpha$  ES UNA ASINTOTA VERTICAL Y EXISTE  
 $a \in (\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$  con  $f(a) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$$

ASS  $x = \beta$  ES UNA ASINTOTA VERTICAL Y EXISTE  
 $b \in (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$  con  $f(b) < 0$



ESTO ES ASS POR LA DEFINICIÓN DE  
LOS LÍMITES ANTERIORES, COMO

$f[a, b] \subseteq (\alpha, \beta) \rightarrow$  ES CONTINUA Y

$f(a) > 0$  y  $f(b) < 0$ , POR EL TEOREMA DE

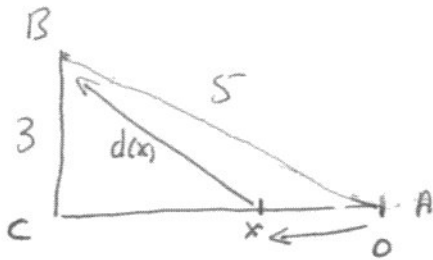
VALORES  $\exists c \in (a, b) \subseteq (\alpha, \beta)$  con  $f(c) = 0$ .

6º)  $y = f'(n)(x-n) + f(n)$  es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  por el punto  $(n, f(n))$ .

si  $f(x) = x^3 \sin x + 1 \Rightarrow f(n) = 1$   
 $f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x \Rightarrow f'(n) = -n^3$

luego  $\boxed{y = -n^3(x-n) + 1 = -n^3x + n^4 + 1}$  es la ecuación de la recta tangente.

7º) velocidad  $\times$  tiempo = espacio  
 tiempo =  $\frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}$



por Pitágoras la distancia de A a C es 4.

$$(\sqrt{3^2 + 4^2} = 5)$$

$$y \ d(x) = \sqrt{3^2 + (4-x)^2}$$

luego el tiempo empleado en el recorrido es

será  $f(x) = \frac{x}{10} + \frac{d(x)}{6} = \frac{x}{10} + \frac{\sqrt{9 + (4-x)^2}}{6}$

con  $x \in [0, 4]$ ; es claro que  $f(0) = 5/6$   
 y  $f(4) = \frac{4}{10} + \frac{3}{6} = \frac{9}{10}$

para calcular el extremo de  $f$

derivamos:  $f'(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \frac{2(4-x)}{2\sqrt{9+(4-x)^2}} \begin{cases} < 0 \text{ si } x=0 \\ > 0 \text{ si } x=4 \end{cases}; f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{6} \frac{4-x}{\sqrt{9+(4-x)^2}} \Leftrightarrow 6\sqrt{9+(4-x)^2} = 10(4-x)$$

así  $36(9 + (4-x)^2) = 100(4-x)^2$  y  $36 \times 9 = 64(4-x)^2$

luego  $\boxed{x = -\left[\sqrt{\frac{36 \times 9}{64}} - 4\right] = 4 - \frac{6 \times 3}{8} = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \in [0, 4]}$  mínimo

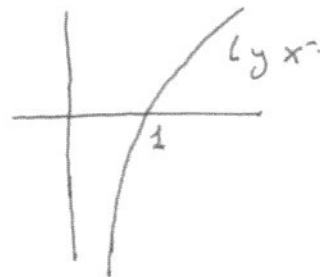
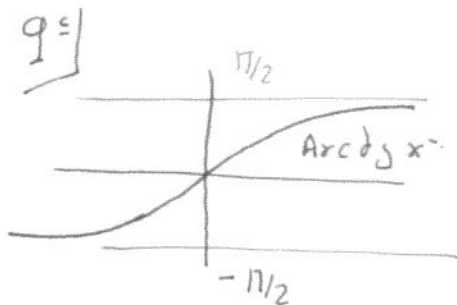
entonces  $f(7/4) = \frac{7}{40} + \frac{1}{6} \sqrt{9 + (4 - 7/4)^2} = \frac{7}{40} + \frac{1}{6} \sqrt{9 + (9/4)^2} =$

$= \frac{7}{40} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{9 \times 36 + 81} = \frac{7}{40} + \frac{1}{24} \sqrt{81 \times 5} = \frac{7}{40} + \frac{3}{8} \sqrt{5}$  tiempo mínimo empleado

8:  $\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{u(1+u)} du =$   
 CAMBIO DE VARIABLE  $u = e^x$   
 $du = e^x dx$   
 DECOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

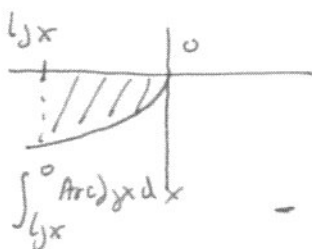
$$= \int \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} du = \ln u - \ln(1+u) =$$

$$= \ln \frac{u}{1+u} = \left( \ln \frac{e^x}{1+e^x} \right)_{u=e^x}$$



Por tanto  $F(x)$  está definido  $\forall x \in (0, \infty)$

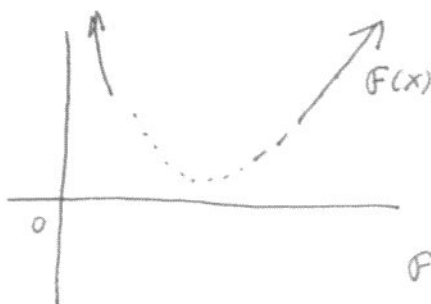
- Si  $x \in (0, 1)$   $\log x < 0$  y  $F(x) = - \int_{\log x}^0 \text{Arcctg } x dx > 0$



y así  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = - \int_{-\infty}^0 \text{Arcctg } x dx = \infty$

- Si  $x > 1$   $\log x > 0$  y  $F(x) = \int_0^{\log x} \text{Arcctg } x dx > 0$

y así  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_0^{\infty} \text{Arcctg } x dx = \infty$



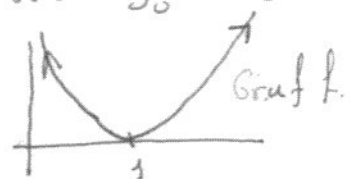
- derivando  $F$  encontramos el extremo relativo; el mínimo

$$F'(x) = \text{Arcctg}(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

según el teorema de la derivada, la regla de L'Hôpital y la regla de la derivada.

Así  $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Arcctg}(\log x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vebo en  $x=1$ ,  $F$  tiene un mínimo;  $F(1) = \int_0^{\log 1} \text{Arcctg } x dx =$   
 $= \int_0^0 \text{Arcctg } x dx = 0$



10: | Si  $f(x) = \text{Arctg } x$

$$P_{f,3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Por tanto PARA CALCULAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE GRADO 3 CENTRADO EN CERO SÓLO HAY QUE HALLAR UNAS CUANTAS DERIVADAS

$$f(x) = \text{Arctg } x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 4x^2 \cdot 2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2$$

ASI  $P_{f,3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}$

O TAMBIÉN  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} =$   
 $= 1 - \frac{x^2+x^4-x^4}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}$

ASI como  $\text{Arctg } 0 = 0$

$$\text{Arctg } x = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x 1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2} dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt$$

Y SE SIGUE QUE

$$P_{f,3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

Y  $R_{f,3,0}(x) = \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt$