Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(i)	**1**(ii)	**1**(iii)	**1**(iv)	**1**(v)	**1**(vi)	**2**	**3**	**4**	**5**

Prática 6: 28 de Noviembre de 2013

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

1. Derivar las siguientes funciones y obtener una representación simplificada de su derivada:

(i) $f_1(x) = x \ln x, \qquad f_1'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

(ii) $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{e^x}, \qquad f_2'(x) = \frac{\frac{1}{x}e^x - \ln(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x\ln(x)}{xe^x}$

(iii) $f_3(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, \qquad f_3'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$

(iv) $f_4(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)), \qquad f_4'(x) = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))\cos(\operatorname{sen} x)\cos(x)$

(v) $f_5(x) = \operatorname{sen}^2(x^2), \qquad f_5'(x) = 2\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)2x = 2x\operatorname{sen}(2x^2)$

(vi) $f_6(x) = x^{x^2}$

Vamos a calcular la derivada utilizando derivación logarítmica. Sea $g(x) = \ln(f_6(x)) = \ln(x^{x^2}) = x^2\ln(x)$. Se cumple que

$$\frac{f_6'(x)}{f_6(x)} = g'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$$

Por tanto,

$$f_6'(x) = x^{x^2}(2x\ln(x) + x) = x^{x^2+1}(2\ln(x) + 1)$$

2. Determinar a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2, \\ \sqrt{x-1} - 2 & \text{si } 2 \le x \le 5, \end{cases}$ sea derivable en el intervalo $(0,5)$.

En primer lugar, para que la función sea derivable, tiene que ser continua. La función $ax + bx^2$ es continua en $[0,2)$ independientemente de los valores de a y b por tratarse de una función polinomial. La función $\sqrt{x-1} - 2$ es continua en $(2,5]$ porque $x-1$ es estrictamente positiva y continua en dicho intervalo. Por tanto, tenemos que calcular a, b en dicho intervalo para que sea continua en $x = 2$. Para ello, $f(2^-) = f(2^+)$ y por tanto

$$2a + 4b = f(2^-) = f(2^+) = \sqrt{2-1} - 2 = -1$$

Para que sea derivable observamos en primer lugar que la función $ax + bx^2$ es derivable en $[0,2)$ independientemente de los valores de a y b por tratarse de una función polinomial. La función $\sqrt{x-1} - 2$ es derivable en $(2,5]$ porque $x-1$ es estrictamente positiva y derivable en dicho intervalo. Por tanto, tenemos que calcular a, b en dicho intervalo para que sea derivable en $x = 2$. Para ello, $f'(2^-) = f'(2^+)$

$$\begin{aligned}
f'(2^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a(2+h)+b(2+h^2)-(2a+4b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{ah+4bh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} a+4b+h = a+4b \\
f'(2^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{2+h-1}-2-(-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, $a + 4b = \frac{1}{2}$ y resolviendo el sistema $\{2a + 4b = -1, a + 4b = \frac{1}{2}\}$ nos queda $a = \frac{-3}{2}, b = \frac{1}{2}$.

3. Hallar las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Asíntotas horizontales: Como $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$, nuestra función no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales: Observamos que $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{x = 0\}$ y que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

y por tanto tiene una asíntota vertical en la recta $\{x = 0\}$.

Asíntotas oblicuas: Observamos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (g(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} =$$

Por tanto tiene una única asíntotas oblicua que es $y = x$.

4. Dada la función $h(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, hallar la ecuación de la tangente en el punto de inflexión.

Calculamos en primer lugar las dos primeras derivadas

$$h'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)-4x}{(x+1)^3} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$$h''(x) = \frac{-2(x+1)^3 + (2x-2)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-2(x+1)+(6x-6)}{(x+1)^4} = \frac{-2(x+1)+(4x-8)}{(x+1)^4} = \frac{4(x-2)}{(x+1)^4}$$

La segunda derivada se anula en $x = 2$ y es negativa a su derecha y positiva a su izquierda, con lo que tenemos un punto de inflexión. La recta tangente en dicho punto viene dada por la ecuación $y - h(2) = h'(2)(x-2)$, es decir, $y - \frac{4}{9} = \frac{-2}{27}(x-2)$.

5. Calcular el único polinomio de grado 3 que tiene un máximo en el punto $M = (0, 3)$ y un punto de inflexión en $P = (1, 1)$.

Los polinomios de grado 3 son de las forma $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Su primera derivada es $f'(x) = b + 2cx + 3dx^2$, su segunda derivada es $f''(x) = 2c + 6dx$.

Para que tenga un máximo en $(0, 3)$ tiene que ocurrir que $f(0) = 3$, es decir, $a = 3$ y que $f'(0) = 0$, es decir, $b = 0$. Además, $f''(0) \leq 0$, es decir, $2c < 0$

Para que tenga un punto de inflexión en $(1, 1)$ tiene que ocurrir que $f(1) = 1$, es decir, $a + b + c + d = 1$, y que $f''(1) = 0$, es decir, $2c + 6d = 0$. Nos que por tanto, el sistema $\{3 + c + d = 1, 2c + 6d = 0\}$ cuya solución es $c = -3, d = 1$.

Por tanto $f(x) = 3 - 3x^2 + x^3$.