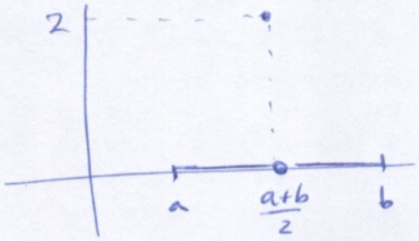
6.3. Prueba si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1) f integrable, $f \geq 0$ y $\int_a^b f = 0$, entonces $f(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$

Falso. Consideramos $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{a+b}{2} \\ 2 & \text{si } x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$



2) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y con una cantidad finita de discontinuidades, entonces f es integrable

Verdadero. Como f tiene una cantidad finita de discontinuidades entonces podemos dividir ~~f~~ $[a,b]$ como unión finita de intervalos disjuntos $[a, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, b]$ de modo que f es continua y acotada en cada ~~d~~ uno de esos intervalos y por tanto es integrable. De este modo

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f + \int_{x_n}^b f.$$

y cada una de las integrales de la derecha existe (por ser f continua y acotada)

3) Supongamos que $f \geq 0$ y $\int_a^b f = 0$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ y f es continua en x_0, demuestra que $f(x_0) = 0$

Si $f(x_0) > 0$, entonces por el teorema de conservación local del signo, existe $\delta > 0$ tal que f es > 0 en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Por tanto, $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f > 0$ y así $\underset{0}{\underset{\parallel}{\int_a^b f}} = \underset{0}{\underset{\vee\!\!|}{\int_a^{x_0-\delta} f}} + \underset{0}{\underset{\vee}{\int_{x_0+\delta}^{x_0+\delta} f}} + \underset{0}{\underset{\vee\!\!|}{\int_{x_0+\delta}^{b} f}}$!!

6.4. Analiza la integrabilidad de las siguientes funciones

(1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1) \\ x-2 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{\text{integrable}} + \underbrace{\int_1^2 x-2\,dx}_{\text{integrable}}$$

Por tanto es integrable

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

Sea $P: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\max(f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k])}_{\substack{= 1 \text{ ya que en este} \\ \text{intervalo hay} \\ \text{algún número racional}}} (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) =$$

$$= t_n - t_0 = 1$$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\min(f(x) : x \in [t_{k-1}, t_k])}_{\substack{= 0 \text{ ya que en este} \\ \text{intervalo hay algún} \\ \text{número irracional}}} (t_k - t_{k-1}) = 0$$

Por tanto $\overline{\int_a^b} f = \cancel{\sup} \inf \{ \overset{= 1}{\overline{S}(f,P)} : P \text{ recorre las particiones del intervalo } [0,1] \} =$

$$= 1$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{ \underline{S}(f,P) : P \text{ recorre las particiones del intervalo } [0,1] \} =$$

$$= 0$$

De este modo, no puede ser integrable

6.5. Calcular, utilizando la definición de integral, $\int_0^1 x^2 dx$ y $\int_0^1 x^3 dx$.

Ayuda: utilizar que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = (1/6)\, n(n+1)(2n+1)$ y que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

(1) Como la función $f(x) = x^2$ es continua en $[0,1]$ es integrable y por tanto se cumple que:

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\,\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

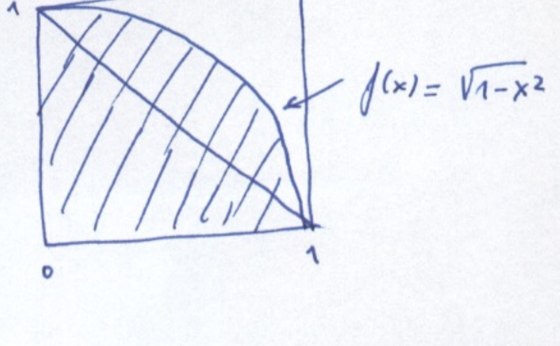
(2) Como la función $f(x) = x^2$ es continua en $[0,1]$, es integrable y por tanto se cumple

$$\int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right)) = 1/4.$$

6.6. Prueba que $1/2 \le \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \le 1$.



A la vista del dibujo

$$\frac{1}{2} \le \text{Area del cuarto de circulo} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \le 1$$

6.10. $F(x) = \int_0^x (-3t^2 + 24t - 45)\, dt$ ¿Cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas?

(a) F es decreciente en $\mathbb{R}$. Falsa

Si F fuera decreciente en $\mathbb{R}$, entonces $F'(x) = -3x^2 + 24x - 45$ tiene que ser ≤ 0 siempre; pero $F'(4) = -48 + 96 - 45 = 3 > 0$!!

(b) La ecuación $F(x) = 0$ tiene tres raices reales. Falsa

Observamos que $F(x) = \left[-t^3 + 12t^2 - 45t\right]_0^x = -x^3 + 12x^2 - 45x$

que tiene una raiz en $x = 0$ ya que $F(x) = -x(x^2 - 12x + 45)$

Si F tuviera más raices estas deberían de ser raices de $x^2 - 12x + 45$

y por tanto deberían ser soluciones reales de la ecuación

$$x^2 - 12x + 45 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 180}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{36}\, i}{2} = 6 \pm 3i$$ que no son raices reales

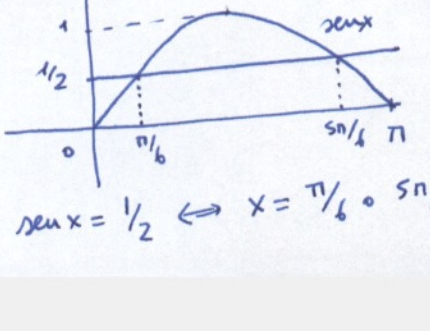
(c) $F(x) < 0$ si $x < 0$. Falsa, ya que $F(-1) = -1 + 12 + 45 = 56 > 0$.

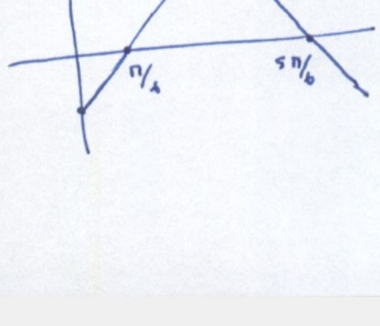
(d) F es convexa si $x < 4$. Verdadera.

$$F'(x) = -3x^2 + 24x - 45$$
$$F''(x) = -6x + 24 = -6(x-4) > 0 \text{ si } x < 4$$

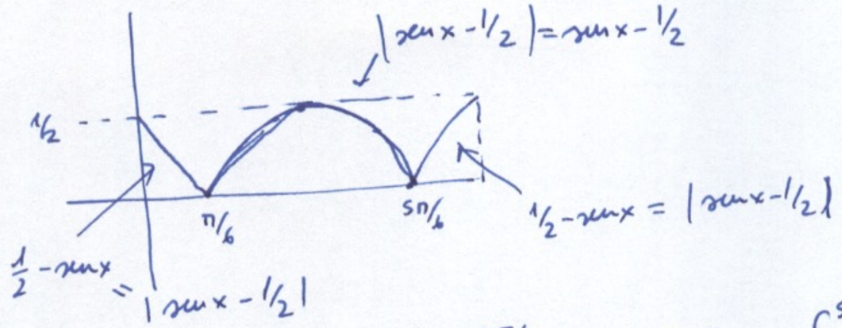
Por tanto F es convexa si $x < 4$

6.12. Calcular $\int_0^{\pi} \left| \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \right| dx$





$\operatorname{sen} x = 1/2 \iff x = \pi/6 \text{ o } 5\pi/6$



$$\int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x - 1/2|\, dx = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right) dx + \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\operatorname{sen} x - 1/2\right) dx + \int_{5\pi/6}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right) dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2} x + \cos x \right]_0^{\pi/6} + \left[-\cos x - \tfrac{1}{2} x \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} + \left[\tfrac{1}{2} x + \cos x \right]_{5\pi/6}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \cos(\pi/6) - \cos(0)\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \cdot 5\pi/6 + \cos(\pi/6) + \frac{\pi}{12} + \left(\frac{1}{2}\pi + \cos(\pi) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{5\pi}{6} - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi - 1 - \frac{5\pi}{12}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 2(\sqrt{3} - 1) - \frac{4\pi}{6} = 2(\sqrt{3}-1) - \frac{2\pi}{3}.$$

6.14 Integra por parts

1) $$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - \left[2x e^x - \int 2 e^x dx \right] =$$

$u = x^2 \quad du = 2x\, dx$

$dv = e^x dx \quad v = e^x$

$u = x \quad du = dx$

$dv = 2e^x dx \quad v = 2e^x$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

2) $$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \int \frac{1}{b} \cos(bx)\, a e^{ax} dx =$$

$u = e^{ax} \quad du = a e^{ax} dx$

$dv = \operatorname{sen}(bx)\, dx \quad v = -\frac{1}{b} \cos(bx)$

$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \left[\frac{e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx)}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \cdot \operatorname{sen}(bx)\, dx \right]$$

$u = e^{ax} \quad du = a e^{ax} dx$

$dv = \cos(bx)\, dx \quad v = \frac{\operatorname{sen}(bx)}{b}$

Por tanto,

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax}\operatorname{sen}(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\, dx$$

Despejando

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$

Por tanto

$$\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\, dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a e^{ax}\operatorname{sen}(bx) - b e^{ax}\cos(bx)\right) + C$$

3) $$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\, dx = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$u = x^2 \quad du = 2x\, dx$

$dv = \operatorname{sen} x\, dx \quad v = -\cos x$

$u = x \quad du = dx$

$dv = \cos x\, dx \quad v = \operatorname{sen} x$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

4) $$\int x(\log x)^2\, dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{x}\log x\, dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x\log x\, dx = ⊗$$

$\cancel{u = x \quad du = dx}$

$\cancel{dv = (\log x)^2}$

$u = (\log x)^2 \quad du = 2(\log x)\frac{1}{x}\, dx$

$dv = x\, dx \quad v = \frac{x^2}{2}$

$$⊗ = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}(\log x) + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}(\log x) + \int \frac{x}{2}\, dx = \bullet$$

$u = \log x \quad du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x\, dx \quad v = \frac{x^2}{2}$

$$\bullet = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}(\log x) + \frac{x^2}{4} + C.$$

6.15 Prueba las siguientes fórmulas de reducción

2) $\int (\cos x)^n dx = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int (\cos x)^{n-2} dx \quad n > 2$ y par

$$\int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cdot \cos x \, dx = (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen} x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \cdot \operatorname{sen}^2 x \, dx =$$

$u = (\cos x)^{n-1} \quad du = (n-1) \cdot (\cos x)^{n-2} \cdot (-\operatorname{sen} x) dx$

$dv = \cos x \, dx \quad v = \operatorname{sen} x$

$$= (\cos x)^{n-1} \operatorname{sen} x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - (\cos x)^2) \, dx =$$

$$= (\cos x)^{n-1} \operatorname{sen} x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx - (n-1) \int (\cos x)^n dx$$

Despejando: $n \int (\cos x)^n dx = (\cos x)^{n-1} \operatorname{sen} x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx$

$$\Rightarrow \int (\cos x)^n dx = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int (\cos x)^{n-2} dx.$$