EXAMEN FINAL MMI. Junio 2012

1. Demostrar por inducción: $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ si $r \neq 0$

2. Calcular el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{2n}$

3. Calcular a y b para que sea derivable en el intervalo $(0,5)$ la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & si\ 0 \le x \le 2 \\ \sqrt{x-1}-2, & si\ 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

4. Integrando por partes calcular $\int x(\ln x)^2\,dx$

5. Estudiar la convergencia y hallar, si es posible, la integral impropia: $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

6. Determinar los números complejos que verifican $x^3+1-i=0$ y exprésalos en forma exponencial.

7. Hallar la forma normal de Hermite por filas y el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $(V_3,+,\cdot\mathbf{R})$ y $(V_4,+,\cdot\mathbf{R})$ tal que $f(\overrightarrow{u_1})=\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_3}-2\overrightarrow{v_4}$, $f(\overrightarrow{u_2})=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_3}$ y $f(\overrightarrow{u_3})=\overrightarrow{v_2}-\overrightarrow{v_4}$ donde $B_1=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ y $B_2=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4}\}$ son las bases correspondientes. Hallar el núcleo, las ecuaciones de la imagen y las dimensiones de ambos.

9. Prueba, sin desarrollar, la siguiente igualdad de determinantes, sabiendo que $x \neq 0$, $y \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 4 & y^2 \\ x^3 & 8 & y^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & xy & 2x \\ x & 2 & y \\ x^2 & 4 & y^2 \end{vmatrix}$$

10. Discutir para qué valores del parámetro k es diagonalizable la matriz: $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -k-2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

EXAMEN FINAL MMI

Miércoles 13 de Junio de 2012

1. Demostrar por inducción:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 0.$$

2. Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{2n}$

3. Calcular a y b para que sea derivable en el intervalo $(0,5)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{x-1}-2, & \text{si } 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

4. Integrando por partes, calcular

$$\int x(\ln x)^2 dx$$

5. Estudiar la convergencia y hallar, si es posible, la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$$

6. Determinar los números complejos que verifican $z^3+1-i=0$ y exprésalos en forma exponencial.

7. Hallar la forma normal de Hermite por filas y el rango de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $(V_3,+,\cdot\mathbb{R})$ y $(V_4,+,\cdot\mathbb{R})$ tal que $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} - 2\overrightarrow{v_4}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}$ y $f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_4}$, donde $B_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $B_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ son las bases correspondientes. Hallar el núcleo, las ecuaciones de la imagen y las dimensiones de ambos.

9. Prueba, sin desarrollar, la siguiente igualdad de determinantes, sabiendo que $x \neq 0$, $y \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 4 & y^2 \\ x^3 & 8 & y^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & xy & 2x \\ x & 2 & y \\ x^2 & 4 & y^2 \end{vmatrix}$$

10. Discutir para qué valores del parámetro k es diagonalizable la matriz: $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -k-2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

La revisión se efectuará el día 22 a las 16 horas en el aula 14. No es obligatorio asistir.

Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara de un folio.

El examen dura 3 horas. No se podrá salir del aula en los primeros 45 minutos.