MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

5. Sistemas lineales

5.1. Resuelve por la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Resuelve por Cramer:

$$\text{a)}\quad \left.\begin{array}{r} x+y-z=4 \\ -x+y-z=2 \\ y-z=3 \end{array}\right\} \text{b)}\quad \left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ -x-y+z=5 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \text{c)}\quad \left.\begin{array}{r} x+y-z-w=0 \\ x-y+z-w=6 \\ x\qquad\qquad -w=3 \\ 2x-y+z-2w=9 \\ 3x-2y+2z-3w=15 \end{array}\right\}$$

5.3. En el sistema siguiente, calcula el valor de m para que tenga alguna solución distinta de la trivial y resuélvelo para ese valor, por la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+3y-z=0 \\ -4x-2y+mz=0 \\ 3x+4y+6z=0 \end{array}\right\}$$

5.4. Discute y resuelve, en los casos en que sea posible, por Cramer:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{array}\right. \quad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{r} mx+y-z=1 \\ x-2y+z=1 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{array}\right.$$

5.5. Discute por Rouché y resuelve, si es posible:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{r} y=x \\ x+y=0 \\ ax+by=0 \end{array}\right. \quad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{r} 2x-y+z=a \\ 3x+2y-az=4 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$$

5.6. Discute por Rouché y resuelve en $\mathbb{R}^3$:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{c} x+y+z=a-1 \\ y+z=b \\ (a^2-b^2)z=a+b \end{array}\right. \quad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{c} mx+y+z=2m \\ x-my+z=0 \\ x+my+z=2 \end{array}\right.$$

5.7. Un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y 3 pollos una moneda. Con 100 monedas queremos comprar 100 aves ¿Cuántos gallos, gallinas y polluelos podemos comprar?
(*Problema de las 100 aves,* sacado del libro "*Zhang Qiujian Suanjing*"s. V d.C.)

5.8. Dados dos vectores $\vec{x} = (x_1, .., x_n), \vec{y} = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$, se llama **producto escalar** de los vectores anteriores al número $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k =< \vec{x}, \vec{y} >$; la segunda parte de la igualdad es la notación que se usa.

a) Para los siguientes pares de vectores calcula sus respectivos productos escalares: 1) $(7, 5)$ y $(3, 3/2)$ 2) $(1, 7, 2)$ y $(3, \pi, 6/7)$ 3) $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 0)$.

b) Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ¿por qué $\sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >}$ es la distancia que hay de $\vec{x}$ a $\vec{0}$? ¿Por qué $\sqrt{< \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} >}$ es la distancia que hay de $\vec{x}$ a $\vec{y}$?

c) Dos vectores de $\mathbb{R}^n$ se llaman **ortogonales** si su producto escalar es cero. Encuentra dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^2$, otro par en $\mathbb{R}^3$ y otro en $\mathbb{R}^4$. Dibuja cuando sea posible los pares de vectores.

d)Dados dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, se llama **producto vectorial** de los vectores anteriores al vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} \times \vec{y} = (\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix})$$

¿Por qué el vector $\vec{x} \times \vec{y}$ es ortogonal a los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$?

5.9. Elimina los parámetros de los siguientes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2a + b + c - 1 \\ x_2 = -a - 2b + c + 2 \\ x_3 = a + 3b - 2c - 5 \\ x_4 = 4a - 2b + 6c + 4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3p + 2q \\ y = 2 + p + q \\ z = -2p + q \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 4\lambda + 2\mu \\ y = 2 - 2\lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{array} \right.$$

5.10. Demuestra que el sistema siguiente tiene solución única si $abc \neq 0$. Resuélvelo:

$$\left. \begin{array}{r} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{array} \right\}$$

5.11. Discute por Rouché:

$$\left. \begin{array}{r} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + y - 4z - t = 3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{r} (m+2)x + y + z = m - 1 \\ mx + (m-1)y + z = m - 1 \\ (m+1)x + (m+1)z = m - 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{array} \right\}$$

5.12. Discute por Rouché los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:

$$\left\{\begin{array}{r} 3y - ax + 2z = 2 \\ 2z + 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} ax + by = a \\ ay + bz = b \\ az + bt = a^2 \\ bx + at = b^2 \end{array}\right.$$

5.13. ¿Cuál es la condición analítica para que el vector $(1, 0, -1, 2)$ de $\mathbb{R}^4$ tenga originales en la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, cuya matriz, respecto de las bases canónicas, es M. Halla todos sus originales.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.14. Calcula todos los originales del $(2, 0, -2)$ en la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, sabiendo que $(2, 1, 0, -1)$ es uno de ellos y que la matriz de f respecto de las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$