Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(a)	**1**(b)	**2**(a)	**2**(b)	**2**(c)	**3**(a)	**3**(b)	**4**	**5**	**6**

Prática 5: 21 de Noviembre de 2013

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

1. Halla el dominio de las funciones:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$

La función f está definida en aquellos puntos $x \in \mathbb{R}$ en los que $3x - 2 > 0$ (ya que solo podemos calcular la raíz cuadrada de números ≥ 0 y el inverso de números no nulos). Por tanto, $\mathrm{Dom}(f) = (2/3, +\infty)$.

(b) $g(x) := \sqrt{1 - |1-x|}$

La función g está definida en los puntos $x \in \mathbb{R}$ en los que $1 - |1-x| \geq 0$ (ya que solo podemos calcular la raíz cuadrada de números ≥ 0). La expresión anterior es equivalente a $|1-x| \leq 1$, es decir, los números reales cuya distancia a 1 es ≤ 1. Por tanto, $\mathrm{Dom}(g) = [0, 2]$.

2. Calcula los límites siguientes:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2/x^2)}{(1/x^2)-(x^2/x^2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(1/x^2)-1} = -1.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}\frac{(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x}$
$\displaystyle = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2) = 4$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)}{2x} \rightsquigarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)}{2x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)}{2x} = +\infty \end{cases}$

3. Estudia si son continuas en el punto $x=1$ las funciones:

(a) $f(x) := \begin{cases} x^2-2, \text{ si } x \geq 1, \\ 2-3x, \text{ si } x < 1. \end{cases}$

Observamos que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(1^-) &:= \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2-3x = -1 \\ f(1^+) &:= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2-2 = -1 \\ f(1) &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en $x=1$.

(b) $g(x) := \dfrac{|x-1|}{x+1}$

Escribimos $g(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ donde $g_1(x) = |x-1|$ y $g_2(x) = x+1$. Como g_1 y g_2 son continua en $x=1$ y $g_2(1) = 2 \neq 0$, deducimos que $g(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ es continua en $x=1$.

4. Demuestra que la ecuación $2x^3-5x^2+x+2=0$ tiene al menos una raíz real.

Sea $f(x) = 2x^3-5x^2+x+2$ que es una función continua en $\mathbb{R}$ por tratarse de un polinomio. Observamos que $f(-1) = -6$ y $f(0) = 2$. Por el teorema de Bolzano, f admite una raíz en el intervalo $(-1,0)$ y por tanto tiene al menso una raíz real.

5. Puede asegurarse, utilizando el teorema de la acotación de Weierstrass, que la función

$$f(x) := \frac{3x^2+4}{x^3-x^2+x-1} \qquad \text{está acotada en } [0,3]?$$

La función f no esta definida ni admite una extensión continua en el punto $x=1$. Esto es así, porque si escribimos $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ donde $f_1(x) = 3x^2+4$ y $f_2(x) = x^3-x^2+x-1$, se cumple que $f_1(1) = 7$ y $f_2(1) = 0$. Por tanto, a pesar de que nos piden estudiar si f está acotada en el intervalo compacto $[0,3]$, como no es continua en ficho intervalo, no podemos aplicar el teorema de Weierstrass. De hecho se cumple que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2+4}{(x^2+1)(x-1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x^2+4}{(x^2+1)(x-1)} = +\infty \end{cases}$$

y por tanto f no esta acotada ni superior ni inferiormente en el intervalo $[0,3]$.

6. Estudia si la función $h(x) = \dfrac{2}{3-x}$ es uniformemente continua en el intervalo $[0,3)$.

Veamos por reducción al absurdo que la función anterior no es uniformemente continua en $[0,3]$. Para ello, suponemos que h es uniformemente continua. Fijamos $\varepsilon = 1 > 0$ y supongamos que existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|h(x)-h(y)| < 1$. Elegimos x en $[0,3)$ e $y := x - \frac{\delta}{2}$. Observamos que $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ y por tanto se tiene que cumplir

$$1 > |h(x)-h(y)| = \left|\frac{2}{3-x} - \frac{2}{3-y}\right| = 2\left|\frac{3-y-3+x}{(3-x)(3-y)}\right| = 2\frac{\delta/2}{(3-x)(3-x+\frac{\delta}{2})} = \frac{\delta}{(3-x)(3-x+\frac{\delta}{2})}$$

Pero la fracción de la derecha tiende a $+\infty$ cuando x tiende a 3^- y no puede estar acotada por 1. Contradicción! Por tanto, h no es uniformemente continua en $[0,3)$.