EXAMEN PARCIAL MMI. 11 Febrero 2011

1. Demuestra por inducción que: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}$

2. Relaciona el límite $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$ con la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$; calcula el límite superior.

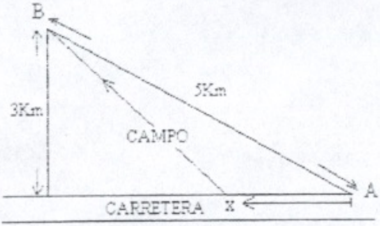
3. Calcula la suma de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{3^n}$

4. Estudia la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{2n^3-1}$. ($\lg x$ es la función logaritmo neperiano).

5. Si $\alpha<\beta$, prueba que la ecuación $\frac{x^2+1}{x-\alpha}+\frac{x^6+1}{x-\beta}=0$ tiene al menos una solución en el intervalo (α,β)

6. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $f(x)=x^3 senx+1$ por el punto $(\pi,1)$.

7. Observa el plano. Se requiere ir del punto A al B. Se puede ir por el campo a la velocidad $V_{car}=6km/h$ o por la carretera (a velocidad $V_{car}=10km/h$) y el campo. Encuentra x, en el cual hay que desviarse, para que el tiempo usado en el trayecto sea mínimo. ¿Cuánto tiempo es éste?



8. Calcula la siguiente primitiva $\int\frac{1}{1+e^x}dx$

9. Halla los extremos relativos de la función $F(x)=\int_0^{\lg x} arctg(t)dt$. (Observación: el rango de la $arctgx$ es $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$)

10. Obtener el polinomio de Taylor de grado tres centrado en $x=0$ de la función $f(x)=arctgx$

EXAMEN PARCIAL MMI

Viernes 11 de Febrero de 2011

1.- Demuestra por inducción que: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}$.

2.- Relaciona el límite: $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{n+n})$ con la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$; calcula el límite anterior.

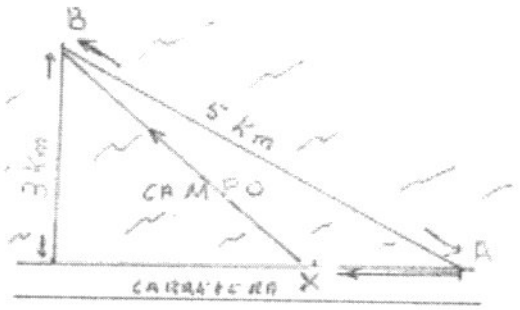
3.- Calcula la suma de: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{3^n}$.

4.-Estudia la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{2n^3-1}$. ($\lg x$ es la función logaritmo neperiano).

5.-Si $\alpha<\beta$, prueba que la ecuación $\frac{x^2+1}{x-\alpha}+\frac{x^6+1}{x-\beta}=0$ tiene al menos una solución en el intervalo (α,β).

6.- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $f(x)=x^3\operatorname{sen}x+1$ por el punto $(\pi,1)$.

7.- Observa el plano. Se quiere ir del punto A al B. Se puede ir por el campo a la velocidad $V_{cam}=6km/h$ o por la carretera (a velocidad $V_{Car}=10km/h$) y el campo. Encuentra x, en el cuál hay que desviarse, para que el tiempo usado en el trayecto sea mínimo. ¿Cuánto tiempo es éste?



8.- Calcula la siguiente primitiva $\int\frac{1}{1+e^x}dx$

9.- Halla los extremos relativos de la función: $F(x)=\int_0^{\lg x}\operatorname{arc\,tg}(t)dt$. (**Observación:** el rango de la $\operatorname{arc\,tg}x$ es $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$).

10.- Obtener el polinomio de Taylor de grado tres centrado en $x=0$ de la función $f(x)=\operatorname{arc\,tg}x$.

La revisión del examen se efectuará el día 23 a las 15 horas en el aula 6. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada pregunta se resolverá en una cara de un folio y todas las preguntas se contestarán por orden.

El examen dura 3 horas. Uno vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

EXAMEN PARCIAL MMI

FEBRERO 2011

1º) PARA $n=1$ $\quad 1+\frac{1}{2^1} \geqslant 1+\frac{1}{2}$

SUPONGAMOS QUE $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n} \geqslant 1+\frac{n}{2}$

ASÍ $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}} \geqslant$

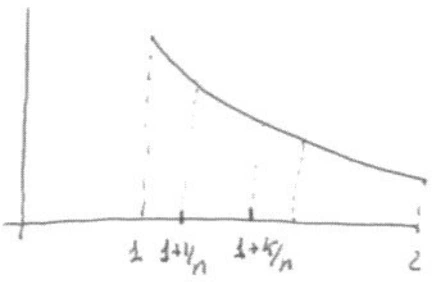
$$\geqslant \left(1+\frac{n}{2}\right)+\underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ SUMANDOS}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(1+\frac{n}{2}\right)+2^n\frac{1}{2^{n+1}} = 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{n+1}{2}$$

$\frac{1}{2^{n+1}}$ ES EL MÁS PEQUEÑO DE LOS SUMANDOS

LUEGO POR EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN, LA DESIGUALDAD QUEDA PROBADA $\forall n \in \mathbb{N}$.

2º) $f(x)=\frac{1}{x}$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN $[1,2]$.



SI DIVIDIMOS EL INTERVALO $[1,2]$ EN n PARTES IGUALES SE SIGUE QUE

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

COMO $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = Lg\, x\Big|_1^2 = Lg\, 2$; EL LÍMITE PEDIDO ES $Lg\, 2$.

3º) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^3 2^n}{3^n} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$\underset{\downarrow}{=} 8 \frac{2/3}{1-2/3} = 16.$$

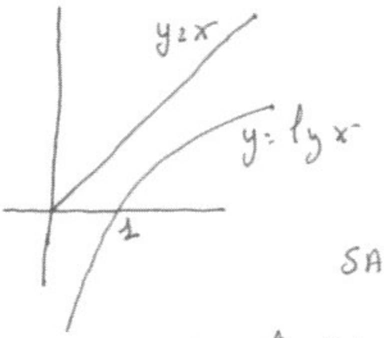
SUMA DE LA SERIE GEOMÉTRICA DE RAZÓN $2/3$

4º) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n^3-1}$$

SI $n \geq 1$ CLARAMENTE

$$\frac{\lg n}{2n^3-1} \geq 0$$

LUEGO ES UNA SERIE DE TÉRMINOS POSITIVOS



POR OTRO LADO $\lg n < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ASÍ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n^3-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-1}$$

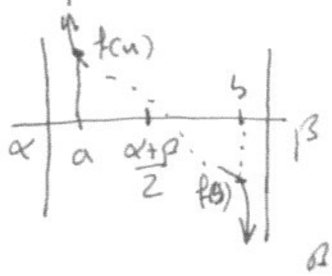
SABEMOS QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ES CONVERGENTE

Y COMO $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2n^3-1}}{1/n^2} = 1/2$, EL CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE NOS DICE QUE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3-1}$ ES CONVERGENTE Y POR TANTO TAMBIÉN LO ES LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{2n^3-1}$ YA QUE ESTÁ ACOTADA POR LA ANTERIOR

5º) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta}$ OBVIAMENTE ES CONTINUA EN (α, β)

$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \infty$ ASÍ $x=\alpha$ ES UNA ASÍNTOTA VERTICAL Y EXISTE $a \in (\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2})$ CON $f(a) > 0$

$\lim_{x\to\beta^-} f(x) = -\infty$ ASÍ $x=\beta$ ES UNA ASÍNTOTA VERTICAL Y EXISTE $b \in (\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta)$ CON $f(b) < 0$



ESTO ES ASÍ POR LA DEFINICIÓN DE LOS LÍMITES ANTERIORES. COMO $f\,[a,b] \subseteq (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ ES CONTINUA Y $f(a) > 0$ Y $f(b) < 0$, POR EL TEOREMA DE BOLZANO $\exists c \in (a,b) \subseteq (\alpha,\beta)$ CON $f(c) = 0$.

6º) $y = f'(\pi)(x-\pi) + f(\pi)$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(\pi, f(\pi))$.

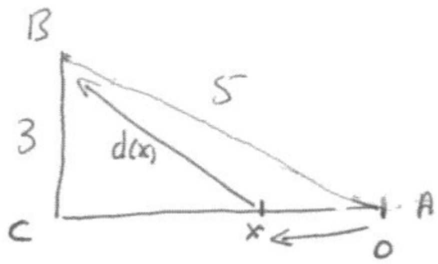
Si $f(x) = x^3 \operatorname{sen} x + 1 \Rightarrow f(\pi) = 1.$

$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x \Rightarrow f'(\pi) = -\pi^3$

Luego $\boxed{y = -\pi^3(x-\pi) + 1 = -\pi^3 x + \pi^4 + 1}$ es la ecuación pedida.

7º) velocidad × tiempo = espacio luego

tiempo = $\dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}$



Por Pitágoras la distancia de A a C es 4.

$(\sqrt{3^2+4^2} = 5)$

y $d(x) = \sqrt{3^2 + (4-x)^2}$.

Luego el tiempo empleado en el recorrido será

$$f(x) = \frac{x}{10} + \frac{d(x)}{6} = \frac{x}{10} + \frac{\sqrt{9+(4-x)^2}}{6}$$

con $x \in [0, 4]$; es claro que $f(0) = 5/6$

y $f(4) = \frac{4}{10} + \frac{3}{6} = \frac{9}{10}$

Para calcular los extremos de f derivamos: $f'(x) = \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\,\frac{2(4-x)}{2\sqrt{9+(4-x)^2}}$ $\begin{cases} <0 & \text{si } x=0 \\ >0 & \text{si } x=4 \end{cases}$; $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{6}\,\frac{4-x}{\sqrt{9+(4-x)^2}} \iff 6\sqrt{9+(4-x)^2} = 10(4-x)$$

Así $36(9+(4-x)^2) = 100(4-x)^2$ y $36 \times 9 = 64(4-x)^2$

Luego $\boxed{x = -\left[\sqrt{\frac{36\times 9}{64}} - 4\right] = 4 - \frac{6\times 3}{8} = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4} \in [0,4]}$ mínimo

Además $f(7/4) = \frac{7}{40} + \frac{1}{6}\sqrt{9 + (4 - 7/4)^2} = \frac{7}{40} + 1/6\sqrt{9 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} =$

$= \frac{7}{40} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{9\times 36 + 81} = \frac{7}{40} + \frac{1}{24}\sqrt{81\times 5} = \frac{7}{40} + \frac{3}{8}\sqrt{5}$ tiempo mínimo empleado

8:] $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \underset{\downarrow}{=} \int \frac{1}{u(1+u)}\,du \underset{\downarrow}{=}$

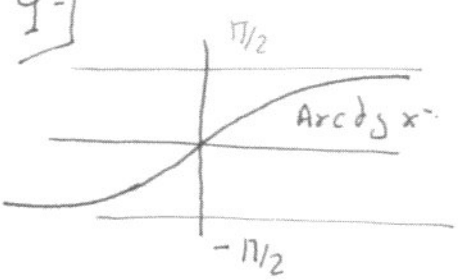
CAMBIO DE VARIABLE
$u = e^x$
$du = e^x\,dx$

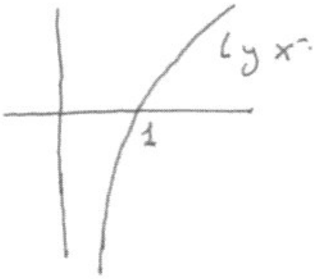
DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$$= \int \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\,du = Lg\,u - Lg(1+u) =$$

$$= Lg\,\frac{u}{1+u} \underset{u=e^x}{=} \left(Lg\,\frac{e^x}{1+e^x} \right)$$

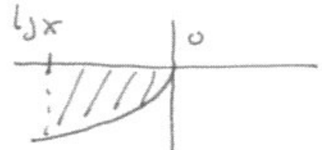
9:]





POR TANTO F(x) ESTÁ DEFINIDO $\forall x \in (0,\infty)$

- SI $x \in (0,1)$ $\quad lg\,x < 0$ Y $F(x) = -\displaystyle\int_{lg\,x}^{0} Arctg\,x\,dx > 0$

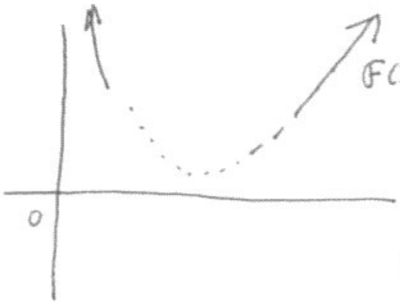


$\displaystyle\int_{lg\,x}^{0} Arctg\,x\,dx$

Y ASÍ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\int_{-\infty}^{0} Arctg\,x\,dx = \infty$

- SI $x > 1$ $\quad lg\,x > 0$ Y $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{lg\,x} Arctg\,x\,dx > 0$

Y ASÍ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_{0}^{\infty} Arctg\,x\,dx = \infty$



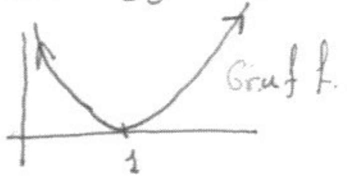
- DERIVANDO F ENCONTRAREMOS LOS EXTREMOS RELATIVOS; AL MENOS UN MÍNIMO

$F'(x) = Arctg(Lg\,x)\cdot\frac{1}{x}$ SEGÚN EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y LA REGLA DE LA CADENA.

ASÍ $F'(x) = 0 \iff Arctg(lg\,x) = 0 \iff lg\,x = 0 \iff x = 1$

LUEGO EN $x=1$, F TIENE UN MÍNIMO; $F(1) = \displaystyle\int_0^{lg\,1} Arctg\,x\,dx =$

$= \displaystyle\int_0^{0} Arctg\,x\,dx = 0$



10°) SI $f(x) = \operatorname{Arctg} x$

$$P_{f,3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

POR TANTO PARA CALCULAR EL POLINOMIO DE TAYLOR DE GRADO 3 CENTRADO EN CERO SOLO HAY QUE HALLAR UNAS POCAS DERIVADAS

$$f(x) = \operatorname{Arctg} x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 4x^2 2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow f'''(0) = -2$$

ASI $P_{f,3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}$

— o —

O TAMBIEN $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} =$

$$= 1 - \frac{x^2+x^4-x^4}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}$$

ASI COMO $\operatorname{Arctg} 0 = 0$

$$\operatorname{Arctg} x = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x 1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2}\,dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2}\,dt$$

Y SE SIGUE QUE

$P_{f,3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3}$

Y $R_{f,3,0}(x) = \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2}\,dt$