1.6 Resulve la emarión: 12-1×11=2+1×1

Elevando al cuadrado la expresión anterior obtenemos postivos 12-1x112= (2+1x1)2 (2-1x1)2= (2+1x1)2 (3

 $\iff 4-4|x|+x^2=4+4|x|+x^2 \iff -4|x|=4|x| \iff 8|x|=0 \iff |x|=0$

Por fante, el único candidats a odución es x=0, que efectivamente acuple la emanon anterior.

1.7. Dementra lo signienti:

(a) Si ax= a para algun a ≠0, entoures x=1.

 $ax = a \iff ax - a = 0 \iff a(x-1) = 0$.

El produito de dos mineros males es 0 (al monos umo de ellos es cero. Como a +o, entorres x-1=0 => x=1.

- (b) $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- (c) $x^2 y^2 = x^2 xy + xy y^2 = (x y)(x + y)$
- (d) Si x2= y2, entours x=y o hien x=-y.

 $x^2 = y^2 \iff x^2 - y^2 = 0 \iff (x - y)(x + y) = 0$ El produito de dos micesos reales es 0 (al meros mos de ellos es ano Por tauto (x-y)(x+y)=0 (> x-y=0 o' x+y=0 (> x=y o' x=-y.

(e) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ $(x-y)(x^2+xy+y^2) = \begin{cases} x^3+x^2y+xy^2 \\ -x^2y-xy^2-y^3 \end{cases} = x^3-y^3$

(1) xh-yn = (x-y) (xn-1+xn-2y+--+xyn-2+yn-1) $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})=$ $= \begin{cases} x^n+x^{n-1}y+\cdots+x^2y^{n-2}+xy^{n-1} \\ -x^{n-1}y-\cdots-x^2y^{n-2}-xy^{n-1}-y^n \end{cases}$ 1.8. Si 0<a
b son dos mineros reales, prenha que se verifica que

@ 2ab < Vab = 2ab < a+b = (Va)2+ (Tb)2

a,b>0

(o < (Va)^2+(Vb)^2- 2 Va Vb = (Vb + Va)^2 lo males mente porque o < a < b y por fauto Va < Vb

@ Tab < a+b = 2 TaTb < a+b, le cual ya heuros visto en @ que es acerto.

arento.

3
$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff (\frac{a+b}{2})^2 < \frac{a^2+b^2}{2} \iff \frac{a^2+b^2+2ab}{4} < \frac{a^2+b^2}{2} \iff \frac{a^2+b^2+2ab}{4} < \frac{a^2+b^2}{2} \iff \frac{a^2+b^2+2ab}{4} < \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

 $\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+2ab}{2} \langle a^2+b^2 \rangle \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab \langle 2a^2+2b^2 \rangle \Leftrightarrow$

(b-a)²
(b-a)²
(b-a)²

1.9. Si $a \le b$ y para todo E > 0 se verifica que $a \le b \le a + E$, psueba que a = b. Del puisuro modo psueba que si para todo E > 0 se verifica que $b - E \le a \le b$, entones a = b.

• Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que a < b. Entomas b-a>0. Elegimos $E=\frac{b-a}{2}>0$. Entomes para esta elemon de E>0 se ample que:

 $a \le b \le a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$ Por fauto, llegamos a contradición. Como $a \le b$ y a < b no esposible, nos quede que a = b.

. El regundo apartado se have viguel (y sive el mismo $\varepsilon=\frac{b-a}{2}>0$ para llegar a contradicción)

1.10. Sea A un conjunto uo vario y acotado de R. Sea Ao E A con Ao 7. Pruba que Ao exa avotado y que ing A & cuf Ao & sup Ao & sup A @ Como A esta audado => I a, b e R tales que a < x < b \text{ \text{\text{\$V\$}} \in A} a b Sea aliona y e Ao. Como Ao E A, entornes y e A y por tanto asysb tyeA. @ · inf Ao = prayor de las cotas confereres de Ao ing A = mayor de las cotas enjenous de As Si ye Ao > y & A > inj A < y For fauto, on A & y Vy & Ao > on A es cota inferior de Ao y portanto cry A & cry Ao. · inf Ao & sup Ao (neugh ne mugh) sup Ao = menor de las cotas superiores de Ao sup A = menor de las cotas superiores de A · Sup Ao & Sup A Sige A => y & A >> y & mp A Por fanto, yenip A &y & Ao > mp A es cota superior de Ao y por

tanto mp Ao & mp A.

1.11 Sean A, B E R, no varios y sa X E R. Se definen los signientes subconjun

A+B = 1xeR: x= a+b donde a e A y b e B} $\alpha A = 1 \times eR$: $x = \alpha a$ doude $a \in A$?

Prueba que:

(i) sup (A+B) = sup(A) + sup(B)

· Veemos en primer lugar que sup (A+B) < sup(A)+sup(B) Sea X E A+B => X=a+b doude a E A y b E B

Como $a \in A \Rightarrow a \leq \sup(A)$ $\Rightarrow x = a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$ Como $b \in B \Rightarrow b \leq \sup(B)$

Por facts tx E A+B x cumple que x \le sup(A)+ sup(B)

Por lo que sup(A)+sup(B) es una cota superior >> sup(A+B) \in sup(A)

· Veamos ahora que sup (A+B) = sup (A)+ sup (B). Para ello worknor el ejercicio 1.9. Vanor a demostrer que # E > 0Sup(A)+ Sup(B) $\stackrel{E}{\leq}$ Sup(A+B) $\stackrel{E}{\leftrightarrow}$ y deduciremos usando el generaio 1.9. que sup(A)+sup(B) = sup(A+B).

Sea $\varepsilon > 0$. Entonos sup $(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota superior de A. Por facti

existe $\alpha \in A$ fal give $sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha \leq sup(A)$ Analogamente sup (B)- & mos acta superior de B. Por fainto

existe be B tal que sup (B) - E/2 < b = sup (B)

Sea X = a+b & A+B. Se cumple que

 $\sup(A) + \sup(B) - \mathcal{E} = \sup(A) - \mathcal{E}_2 + \sup(B) - \mathcal{E}_2 <$

Por tanto sup(A)+ sup(B)-E mos cota supenor y por touts sup(A) + sup(B) - € ≤ sup(A+B) (que slo pro gueriano demostrer) (ii) cuf (A+B) = cuf (A) + ing (B) · Veamos en primer lugar que inj(A)+inj(B) = onj(A+B) Sa XEA+B => X= a+b doude a EA y b EB Como $a \in A \Rightarrow a \ge cnj(A)$ $\Rightarrow x = a+b \ge cnj(A) + inj(B)$ Como $b \in B \Rightarrow b \ge cnj(B)$ Por tanto, $\forall x \in A+B$ se comple que $x \geq cry(A) + cry(B)$, es deux ing (A) sing (B) es una cota inferior = eng(A)+ing (B) < ing (A+1 · Veamos abora que inf (A+B) = inf(A) tinf(B). Para ello, usaren el ejercicio 1.9. Varios a demostrar que VE>0 cmj (A+B) < cmj(A) + + inj(B)+& y dedeniremos por el ejercicio 1.9 que inj(A+B)= inj(A)+ inj Sea E>0. Enforces on (A)+ & no es cota inferior de A. Por tanto, existe $a \in A$ tal que ony $(A) \leq a \leq inf(A) + \ell_2$. Analogamentes inf (B)+ & mos cote inferior de B. Por fants, existe be B tal que cry (B) < b < cry (B) + 8/2. Sea x=a+b & A+B. Se cumple que: $x = a + b < cnf(A) + \frac{\epsilon}{2} + cnf(B) + \frac{\epsilon}{2} = cnf(A) + cnf(B) + \epsilon$ Por tanto enj(A) + enj(B) + E mo es eta inpuior de A+B y por tanto cry (A+B) ≤ cry(A)+ (ry(B)+E que es la que gueriamos demostrar

- (iii) on (xA)=xing(A) y sup(xA)=xsup(A) sieupre que x>0.
 - (a) $\operatorname{cnj}(A) \leq \operatorname{xinj}(A)$ Sea $x \in A \Rightarrow \alpha x \in \alpha A \Rightarrow \operatorname{cnj}(\alpha A) \leq \alpha x \Rightarrow \frac{\operatorname{cnj}(\alpha A)}{\alpha} \leq x$. Cono esto se amyste $\forall x \in A \Rightarrow \frac{\operatorname{cnj}(\alpha A)}{\alpha}$ es and coto cnjenior de $A \Rightarrow \operatorname{cnj}(\alpha A) \leq \operatorname{xinj}(A)$.
 - ② inf $(\alpha A) \ge \alpha inf(A)$ Sea $g \in \alpha A \Rightarrow \exists a \in A \text{ for } g = \alpha a \Rightarrow \frac{4}{\alpha} = a \in A \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{4}{\alpha} \ge inf(A) \Rightarrow g \ge \alpha inf(A)$. Come esto a comple $\forall g \in \alpha A \Rightarrow \alpha inf(A)$ es une cota inferior de $\alpha A \Rightarrow \alpha inf(A) \le inf(\alpha A)$.

 - ② $\sup_{X} (xA) \leq x \sup_{X} (A)$ Sea $y \in xA \Rightarrow \exists a \in A \text{ dol gue } y = xa \Rightarrow \frac{y}{\alpha} = a \in A \Rightarrow$ $\frac{y}{\alpha} = a \times \sup_{X} (A) \Rightarrow y \leq x \sup_{X} (A)$ $\frac{y}{\alpha} = a \times \sup_{X} (A) \Rightarrow y \leq x \sup_{X} (A)$ Como eto se comple $\forall y \in xA \Rightarrow x \sup_{X} (A)$ es une cota superior $x \in xA \Rightarrow \sup_{X} (xA) \leq x \sup_{X} (A)$

(iv) inf (dA) = a sup(A) y sup(dA) = xinf(A) riempre que a < 0. Hagamos primero el caro x=-1. Es deur ing (-A)=-sup(A) y sup(-A)=-ing(A) @ cry (-A) ≤ - sup (A) Sea y e A => -y e (-A) => -y > inj (-A) => y < - inj (-A) Como esto se ample $\forall y \in A \Rightarrow -inj(-A)$ es cota superior de A ⇒ sup(A) <-inf(-A) ⇒ cry(-A) <-sup(A). @ inj (-A) > - sup (A) Sea XE (-A) => X=-a para viento a E A > - X = a E A => => -× ≤ sup(A) => × >-sup(A) Como esto se comple $\forall x \in (-A) \Rightarrow -sup(A)$ es cota conferior de (-, \Rightarrow cry $(-A) \ge - \sup(A)$ B:=-ASup (-A) = Sup (B) =-inj (-B) =-inj (-(-A)) =-inj (A) Sea $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = (-1)\beta$ donde $\beta = -\alpha > 0$. Usando (iii) y la anterio

[cry (x A) = cry (1-1)BA) = - sup (BA) = - Bsup (A) = & sup (A)] sup(xA) = sup (1-1)BA) = - inj (BA) = - Binj (A) = xinj (A)