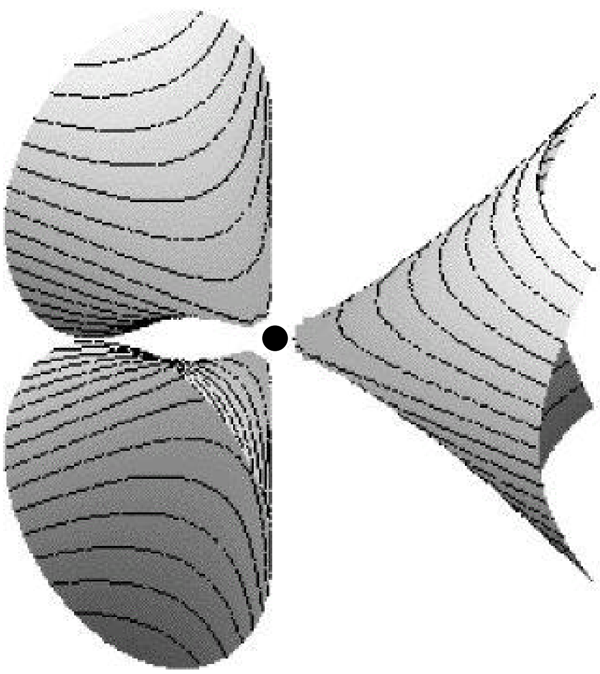
SUMAS DE CUADRADOS DE GERMENES DE FUNCION ANALITICA



Memoria presentada por

José F. Fernando Galván.

Dirigida por el profesor

Jesús M. Ruiz Sancho (U.C.M.).

Resumen: Resultados principales

I. El número de Pitágoras de un germen de superficie es finito.

Cotas $= f$(multiplicidades,codimensión)

II. **Lista** de todos los gérmenes de superficie de $\mathbb{R}^3$ tales que psd = sos.

Todos tienen número de Pitágoras 2

PRELIMINARES

1. Planteamiento general para el espectro real

- $\mathcal{P}(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{psd's} \\ \text{de } A \end{array} \right\} = \{f \in A : \ f(\alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in \operatorname{Spec}_r(A)\}$

- $\Sigma(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{sumas de} \\ \text{cuadrados} \\ \text{de } A \end{array} \right\}; \qquad \Sigma_q(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{sumas de } q \\ \text{cuadrados} \\ \text{de } A \end{array} \right\}$

- *Número de Pitágoras:* $p(A) = \inf\{q \in \mathbb{N} : \Sigma(A) = \Sigma_q(A)\}$

> *Problema cualitativo:* Es $\mathcal{P}(A) = \Sigma(A)$?
>
> *Problema cuantitativo:* Estimar $p(A)$

Consecuencia: Si $p(A) \leq p < +\infty$ entonces

> *Problema cualitativo:*
>
> Determinar si las ecuaciones
>
> $f = Y_1^2 + \cdots + Y_p^2$ para f psd
>
> tienen siempre solución.

2. Un poco de historia.

- **Orígenes:** Problema 17 Hilbert para $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$, [E.Ar,27]

- **Generalización**

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \text{Formulación geométrica} \\ \text{para funciones en} \\ \text{variedades reales} \end{array} \right\} \overset{\text{Tarski}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{Formulación abstracta} \\ \text{en el espectro real} \end{array} \right\}}$$

- **Algunos resultados**

$$\begin{array}{c} \text{Conjuntos} \\ \text{algebraicos} \\ \text{irreducibles} \end{array} \left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{P}\begin{pmatrix} \text{fun. racionales} \\ \text{var. irred. real} \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} \text{fun. racionales} \\ \text{var. irred. real} \end{pmatrix} \quad \text{[E.Ar,27]} \\[2em]
\dim + 2 \leq p \begin{pmatrix} \text{fun. racionales} \\ \text{variedad real} \\ \dim \geq 2 \end{pmatrix} \leq 2^{\dim} \quad \text{[CaElPf,71]} \\[2em]
p \begin{pmatrix} \text{fun. polinómicas} \\ \text{curva irred. real} \end{pmatrix} < +\infty,\ p[\mathbb{R}] = 2 \quad \text{[ChDLR,80]} \\[2em]
p \begin{pmatrix} \text{fun. polinómicas} \\ \text{superficie irred. real} \end{pmatrix} \overset{?}{=} +\infty,\ p[\mathbb{R}^2] = +\infty \ \text{[ChDLR,80]} \\[2em]
p \begin{pmatrix} \text{fun. polinómicas} \\ \text{variedad real} \\ \dim \geq 3 \end{pmatrix} = +\infty \quad \text{[ChDLR,80]}
\end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Variedades}\\ \text{de Nash}\\ \text{conexas}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\mathcal{P}\begin{pmatrix}\text{fun. racionales}\\ \text{Nash}\end{pmatrix} = \varSigma\begin{pmatrix}\text{fun. racionales}\\ \text{Nash}\end{pmatrix}\ \text{[Mw,76]}\\[4ex] p\begin{pmatrix}\text{fun. racionales}\\ \text{Nash}\end{pmatrix} \leq 2^{\mathrm{dim}}\quad \text{[BCR,87]}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Variedades}\\ \text{analíticas}\\ \text{conexas}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\mathcal{P}\begin{pmatrix}\text{fun. meromorfas}\\ \text{var. compacta}\end{pmatrix} = \varSigma\begin{pmatrix}\text{fun. meromorfas}\\ \text{var. compacta}\end{pmatrix}\ \text{[Jw,Rz,85]}\\[4ex] p\begin{pmatrix}\text{fun. analíticas}\\ \text{curva lisa}\\ \text{compacta}\end{pmatrix} = 2\quad \text{[Jw,82]}\\[4ex] p\begin{pmatrix}\text{fun. analíticas}\\ \text{curva lisa}\\ \text{no compacta}\end{pmatrix} = 1\quad \text{[Jw,82]}\\[4ex] p\begin{pmatrix}\text{fun. analíticas}\\ \text{superficie lisa}\\ \text{compacta}\end{pmatrix} = 3\quad \text{[BKS,81]}\\[4ex] p\begin{pmatrix}\text{fun. analíticas}\\ \text{superficie lisa}\\ \text{no compacta}\end{pmatrix} = 2\quad \text{[BKS,81]}\end{array}\right.$$

3. Gérmenes analíticos

Notaciones

- *Anillo analítico:* $A = \mathbb{R}\{x\}/I, x = (x_1, \ldots, x_n)$

- *Germen de ceros:* $X = \mathcal{Z}(I) \subset \mathbb{R}^n$

- $\mathcal{J}(X) = \begin{array}{c}\text{radical-real}\\ \text{de } I\end{array} = \textit{ideal de } X = \begin{array}{c}\text{ideal de gérmenes}\\ \text{nulos de } X\end{array}$ [Ri,76]

- $\mathcal{O}(X) = \mathbb{R}\{x\}/\mathcal{J}(X) = \begin{array}{c}\text{reducción-real}\\ \text{de } A\end{array} = \begin{array}{c}\text{anillo de gérmenes}\\ \text{analíticos de } X\end{array}$

- $\mathcal{M}(X) = \begin{array}{c}\text{anillo total de}\\ \text{fracciones de } \mathcal{O}(X)\end{array} = \begin{array}{c}\text{anillo de gérmenes}\\ \text{meromorfos de } X\end{array}$

- $\mathcal{P}(X) = \left\{\begin{array}{c}\text{psd's}\\ \text{sobre } X\end{array}\right\} = \mathcal{P}(\mathcal{O}(X))$ [Ri,76] [Rz,83]

- $\Sigma(X) = \Sigma(\mathcal{O}(X)); \qquad \Sigma_q(X) = \Sigma_q(\mathcal{O}(X))$

- $p[X] = p(\mathcal{O}(X)); \qquad p(X) = p(\mathcal{M}(X))$

Algunos resultados:

$$
\text{Gérmenes meromorfos}\left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{P}\begin{pmatrix}\text{gérmenes fun.}\\ \text{meromorfa}\end{pmatrix} = \Sigma\begin{pmatrix}\text{gérmenes fun.}\\ \text{meromorfa}\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l}\text{[Ri,76]}\\ \text{[Rz,83]}\end{array}\\[2em]
p(X) = 1 \qquad \text{si } d = 1\\[2em]
p(X) \leq p(\mathbb{R}^d)\cdot m \leq \left\{\begin{array}{lll} 2m & \text{si } d = 2 & \text{[BoRi,75]}\\ 8m & \text{si } d = 3 & \text{[Jw,92]}\\ ? & \text{si } d \geq 4 & \end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

Problema cualitativo anillos analíticos

Curvas:

$$\mathcal{P}(X) = \Sigma(X) \iff \left\{ \begin{array}{c} \text{X = unión} \\ \text{rectas indep.} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{[Or,88]} \\ \text{[Sch,01]} \end{array}$$

dim ≥ 3**:**

A local **regular** $\Rightarrow \mathcal{P}(A) \neq \Sigma(A)$ [Sch,99]

X germen analítico$, \dim X \geq 4 \Rightarrow \mathcal{P}(X) \neq \Sigma(X)$ [Rz,99]

Conjetura: $A = \mathbb{R}\{x\}/I$ anillo analítico$, \dim \mathcal{Z}(I) \geq 3$
$\Rightarrow \mathcal{P}(A) \neq \Sigma(A)$

Problema cuantitativo anillos analíticos

Curvas:

$p[X] \leq \text{mult}(X)$ si X es irreducible [Qz,01]

dim ≥ 3**:**

A local **regular** $\Rightarrow p(A) = +\infty$ [ChDLR,80]

X germen analítico$, \dim X \geq 4 \Rightarrow p[X] = +\infty$ [Rz,83]

Conjetura: $A = \mathbb{R}\{x\}/I$ anillo analítico$, \dim \mathcal{Z}(I) \geq 3$
$\Rightarrow p(A) = +\infty$

RESULTADOS CENTRALES
CAPITULO I

- *Strong Question* de [ChDLR,80] para módulos sobre $R = \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $\mathbb{R}\{x\}[y]$ y $\mathbb{R}\{x,y\}$:

> Sea A un anillo que es un módulo finito generado, digamos por m generadores, sobre R. Entonces $p(A) \leq p(R)m$.

- $A = \mathbb{R}\{x_1,\dots,x_n\}/I$, $\dim(A) = 2 \Rightarrow p(A) < +\infty$

- Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un germen de superficie analítica. Entonces

$$\boxed{E\big[\log_2\big(\omega(I(X))+1\big)\big] \leq p[X] \leq 2\,\mathrm{mult_T}(X)^{\mathrm{codim}(X)}}$$

Además, $p[X] \geq 2$

RESULTADOS CENTRALES
CAPITULO II

- Los gérmenes de superficie singular $X \subset \mathbb{R}^3$ tales que $\mathcal{P}(X) = \Sigma(X)$ son exactamente los siguientes:

$$\begin{cases} z^2 - x^3 - y^5 = 0 & \text{(Singularidad de Brieskorn, [Rz,99])} \\ z^2 - x^3 - xy^3 = 0, & z^2 - x^3 - y^4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 - x^2 = 0 & \text{(Par de planos, [Rz,99])} \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0, & z^2 - x^2 - y^k = 0,\ k \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 - x^2 y = 0 & \text{(Paraguas de Whitney, [Rz,99])} \\ z^2 - x^2 y + y^3 = 0, & z^2 - x^2 y - (-1)^k y^k = 0,\ k \geq 4 \end{cases}$$

- Además, en **todos** estos casos $p[X] = p(X) = 2$.

- Obtención de **otros** gérmenes en dimensión de inmersión > 3 con $\mathcal{P} = \Sigma_2$

CAP. I: NUMERO DE PITAGORAS

1. Sumas de dos cuadrados en dos variables

Objetivo: Demostrar que todo elemento semidefinido positivo (=psd) de $\mathbb{R}\{x\}[y]$ se puede expresar como suma de dos cuadrados de elementos de $\mathbb{R}\{x\}[y]$.

Notaciones: Dado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, sean

- $\Omega_{\mathbb{K}}$ =anillo series Puiseux convergentes con coeficientes en $\mathbb{K}$
- $\Phi_{\mathbb{K}} = cf(\Omega_{\mathbb{K}})$
- $\mathbb{K}(\{x\}) = cf(\mathbb{K}\{x\})$

Ordenes del cuerpo $\mathbb{R}(\{x\})$. Son exactamente los dos siguientes y su cierre real es $\Phi_{\mathbb{R}}$:

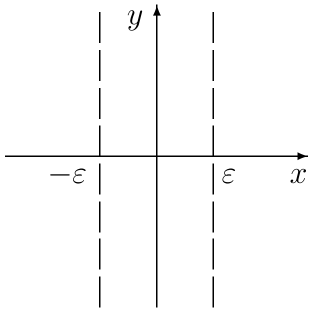
- $(\mathbb{R}(\{x\}), <)$ orden tal que x es positivo e infinitesimal

$$\begin{aligned} f = a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + \cdots > 0 \quad &\iff \quad a_r > 0 \\ f/g > 0 \quad &\iff \quad fg > 0. \end{aligned}$$

- $(\mathbb{R}(\{x\}), \prec)$ orden tal que x es negativo e infinitesimal

$$\begin{aligned} f = a_r x^r + a_{r+1}x^{r+1} + \cdots \succ 0 \quad &\iff \quad (-1)^r a_r > 0 \\ f/g \succ 0 \quad &\iff \quad fg \succ 0. \end{aligned}$$

Caracterización de los psd's de $\mathbb{R}(\{x\})[y]$:



Sea $f \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $f \neq 0$. Son equivalentes:

a) f es un psd del anillo $\mathbb{R}(\{x\})[y]$.

b) f es un psd del cuerpo $cf(\mathbb{R}\{x\}[y])$.

c) Existen $r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ tales que $x^{2r} f \in \mathbb{R}\{x\}[y]$ y está definida y es ≥ 0 en la franja vertical $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}$.

d) Para cada $\xi \in \Phi_{\mathbb{R}}$ las series de Puiseux $f(x, \xi)$, $f(-x, \xi)$ son elementos positivos de $\Phi_{\mathbb{R}}$.

Resultado:

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{R}\{x\}[y]) = \Sigma_2(\mathbb{R}\{x\}[y])}$$

Idea para la demostración. Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\{x\}[y])$

- Se comprueba que $\mathrm{grad}_y(f) = n$ es par y que su coeficiente director a_n es un cuadrado.
- Descomponemos f/a_n en factores irreducibles en $\mathbb{R}(\{x\})[y]$.
- Comprobamos que los factores de multiplicidad impar son reducibles en $\mathbb{C}(\{x\})[y]$ y por tanto suma de **dos** cuadrados.
- Deducimos que f es suma de **dos** cuadrados en $\mathbb{R}\{x\}[y]$.

2. Diagonalización sobre dos variables

Objetivos: Demostrar que:

> Las formas cuadráticas semidefinidas positivas sobre $\mathbb{R}(\{x\})[y]$ son diagonalizables sobre $\mathbb{C}(\{x\})[y]$.

> **Consecuencia:** Un anillo A que es un módulo con m generadores sobre $R = \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $\mathbb{R}\{x\}[y]$ o $\mathbb{R}\{x, y\}$ cumple
> $$p(A) \leq p(R)m = 2m$$

Inspiración: Ideas de Djoković para demostrar que:

> Las formas cuadráticas semidefinidas positivas sobre $\mathbb{R}[x]$ son diagonalizables sobre $\mathbb{C}[x]$.

Notaciones:

- $a = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ es la matriz con diagonal principal $a_1, \ldots, a_n$.

- Dada $a = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ con coeficientes en $\mathbb{C}(\{x\})[y]$, su *traspuesta conjugada* es:

$$\boxed{a^* = \overline{a^t} = (\overline{a_{ji}})_{1\leq i,j\leq n}}$$

Herramienta fundamental: *Diagonalización en DIP's:*

Sean R *un dominio de ideales principales y* $a \in \mathfrak{M}_n(R)$ *una matriz de rango* r*. Entonces existen dos matrices invertibles* u, v *y una diagonal*

$$e = \langle e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0 \rangle,$$

tales que $e_1 | e_2 | \dots | e_r$ *y* $a = uev$*; además, los ideales*

$$(e_1), (e_2), \dots, (e_r)$$

son únicos, y los elementos $e_1, e_2, \dots, e_r$ *de la diagonal de* e *se llaman* factores invariantes de a*. La matriz diagonal* $e = \langle e_1, \dots, e_r, 0, \dots, 0 \rangle$ *es una* matriz de factores invariantes de a*.*

Definición: Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}(\{x\})[y])$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tal que $a = a^*$:

- $\Rightarrow z^* a z \in \mathbb{R}(\{x\})[y]$ $\forall z \in \mathbb{K}(\{x\})^n$
- Decimos que

$$a \geq 0 \iff z^* a z \text{ es psd en } \mathbb{R}(\{x\})[y] \ \forall z \in \mathbb{K}(\{x\})^n.$$

Diagonalización: Dada $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que $a \geq 0$ existe $b \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que $a = b^*b$.

Idea para la demostración. Varias etapas de reducción:

(a) Podemos suponer $a \geq 0$ y de rango máximo.

(b) Podemos suponer $a \geq 0$ e invertible.

(c) Podemos suponer $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\}))$, $a \geq 0$ y diagonal.

(d) En las hipótesis de *(c)* existe $g \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\}))$ diagonal tal que $a = gg = g^*g$. ∎

Resultado fundamental:

Sean $L_1, \ldots, L_r$ formas lineales en n variables sobre $R = \mathbb{R}(\{x\})[y]$, $\mathbb{R}\{x\}[y]$ ó $\mathbb{R}\{x, y\}$, y $\varphi = L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_r^2$. Existen formas lineales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2n}$ sobre R tales que

$$\varphi = Q_1^2 + Q_2^2 + \cdots + Q_{2n}^2.$$

Idea para la demostración.

(a) $R = \mathbb{R}(\{x\})[y]$. Sea $a \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ la matriz asociada a φ que es ≥ 0:

- Existe $b \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}(\{x\})[y])$ tal que $a = b^* b$.
- $b = b_1 + ib_2$ con $b_1, b_2 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}(\{x\})[y])$ y entonces

$$a = (b_1^t - ib_2^t)(b_1 + ib_2) = b_1^t b_1 + b_2^t b_2 + i(b_1^t b_2 - b_2^t b_1)$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} a &= b_1^t b_1 + b_2^t b_2 \\ b_1^t b_2 &= b_2^t b_1 \end{aligned}$$

De este modo

$$\varphi = Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots + Q_{2n}^2.$$

(b) $R = \mathbb{R}\{x\}[y]$. Se procede igual que antes y se comprueba que el denominador es una unidad de $\mathbb{R}\{x\}$

(c) $R = \mathbb{R}\{x, y\}$. Se toman jets adecuados y se aplica el *Teorema de Aproximación de M. Artin.* $\blacksquare$

3. Multiplicidades

Objetivo: Recordar propiedades generales de la *multiplicidad* de un anillo local, y deducir una descripción particular para anillos analíticos.

(3.1) Multiplicidad en un anillo local. Sean A anillo local con cuerpo de coeficientes κ e ideal maximal $\mathfrak{m}$ y M módulo f.g. sobre A. La *función característica de* M es

$$L_M : k \mapsto \dim_\kappa(M/\mathfrak{m}^k M).$$

Existe $Q_M \in \mathbb{Q}[T]$ tal que

$$L_M(k) = Q_M(k) \quad \text{para} \quad k >> 0$$

Q_M = *polinomio característico de* M:

- $\mathrm{grad}(Q_M) = d = \dim_A(M) =$ dimensión de Krull de $A/(\mathrm{ann}\, M)$.
- Coeficiente director $= \mathfrak{e}(M)$.
- *Multiplicidad de* M:

$$\boxed{\mathrm{mult}(M) = d!\ \mathfrak{e}(M) \geq 1}$$

(3.2) Multiplicidad total. Supongamos $M = A/I$ siendo I un ideal radical de altura r:

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{p}_{s+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_l$$

$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ asociados primos de altura r,

$\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{p}_l$ asociados primos de altura $> r$.

Se cumple:

$$\boxed{\mathrm{mult}(M) = \textstyle\sum_{i=1}^{s} \mathrm{mult}(A/\mathfrak{p}_i)}$$

Consecuencia: La noción habitual de *multiplicidad* olvida los asociados primos que no tienen altura mínima, y por ello debemos considerar la *multiplicidad total*:

$$\boxed{\mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(M) = \textstyle\sum_{i=1}^{l} \mathrm{mult}(A/\mathfrak{p}_i)}$$

(3.3) Multiplicidad en anillos analíticos. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $\mathcal{O}_n$ de altura $r = n - d$. Tras un cambio lineal específico:

$$\boxed{\mathrm{mult}(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) = [cf(\mathcal{O}_n/\mathfrak{p}) : cf(\mathcal{O}_d)]}$$

4. Acotaciones

Resultados:

1. *Acotación inferior*: Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un germen analítico, $n \geq 3$. Entonces

$$\boxed{p[X] \geq E\big[\log_2\big(\omega(I(X))+1\big)\big]}$$

Idea para la demostración. Se procede por *reducción al absurdo* utilizando los homogeneizados de ciertos polinomios de $\mathbb{R}[x,y]$ de grado $q = 2^p - 2$ que son suma de cuadrados de polinomios, pero no menos de p [ChDLR,80]. ■

2. *Acotación superior*: Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un germen de superficie. Entonces

$$\boxed{p[X] \leq 2\,\mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(X)^{\mathrm{codim}(X)}}$$

Idea para la demostración. Basta acotar $\gamma_X =$ mínimo número de generadores de $\mathcal{O}(X)$ como $\mathbb{R}\{x,y\}$-módulo, mediante

$$\boxed{\gamma_X \leq \mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(X)^{\mathrm{codim}(X)}}$$

y aplicar los resultados de la sección I.2 ■

5. Ejemplos

Objetivo: Mostrar que no existe una cota superior del número de Pitágoras de un germen de superficie que dependa sólo de la multiplicidad, es decir, **la multiplicidad total es necesaria**.

Resultado: Para cada $q \in \mathbb{N}$ existe un germen de superficie analítica $X \subset \mathbb{R}^3$ de multiplicidad 1 y número de Pitágoras $\geq q$.

Idea para la demostración. Dos etapas:

(a) Existe un germen de curva $Y \subset \mathbb{R}^3$ tal que $p[Y] \geq q$.

$$\forall k \geq 1 \ \exists\, Y_k \ \begin{array}{c}\text{germen}\\ \text{curva}\\ \text{irreducible}\end{array} : \omega(\mathcal{J}(Y_k)) > k. \text{ A saber,}$$

$Y_k : (t^a, t^b, t^c), a = p$ primo $\geq k^2+2,\ b = p(p-1)+k,\ c = p^2+1$

(b) Sea $X = Y \cup \{z=0\}$ germen analítico de dimensión 2, que cumple

$\mathrm{mult}(X) = \mathrm{mult}(\{z=0\}) = 1$

$\mathrm{mult}_{\mathrm{T}}(X) = \mathrm{mult}(Y) + 1$

$p[X] \geq p[Y] \geq q$ (por ser $\mathcal{O}(Y)$ un cociente de $\mathcal{O}(X)$). ■

CAP. II: SUMAS DE DOS CUADRADOS

ESTRATEGIA

Generación de la lista.

Dos etapas:

- Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un germen analítico tal que $\mathcal{P}(X) = \Sigma(X)$, entonces
$$\boxed{\omega(\mathcal{J}(X)) = 2}$$

- Si $X \subset \mathbb{R}^3$ tiene $\dim X = 2$, $\mathcal{P}(X) = \Sigma(X)$ y $\omega(\mathcal{J}(X)) = 2$, entonces X es uno de los gérmenes de la lista [Rz,99].

Método general para atacar $\mathcal{P} = \Sigma_2$.

1. ***Reducción polinomial*:** Consideramos S_X la *superficie algebraica asociada* a X, y probamos que el conjunto de polinomios *definidos positivos* en S_X, vistos como gérmenes, es *denso* en el conjunto de germenes de función psd de X.

2. ***Explosión*:** utilizando una explosión adecuada, obtenemos una equivalencia birregular entre un abierto denso de S_X y un abierto denso del plano o de la superficie de Brieskorn.

3. ***Solución en el caso polinomial*:** utilizando la equivalencia birregular anterior, el hecho de que el plano y la singularidad de Brieskorn poseen la propiedad $\mathcal{P} = \Sigma_2$ y ciertas ecuaciones estándar de sumas de cuadrados, demostramos que todo polinomio *definido positivo* sobre S_X es suma de dos cuadrados de gérmenes de función analítica en X.

4. ***Solución en el caso general*:** extendemos la propiedad anterior de polinomios a gérmenes de función analítica utilizando el *Teorema de Aproximación de M. Artin.*

Para el par de planos y el paraguas de Whitney, la nueva demostración es una especie de *paso al límite* del resultado que cumplen sus deformaciones.

1. El cono

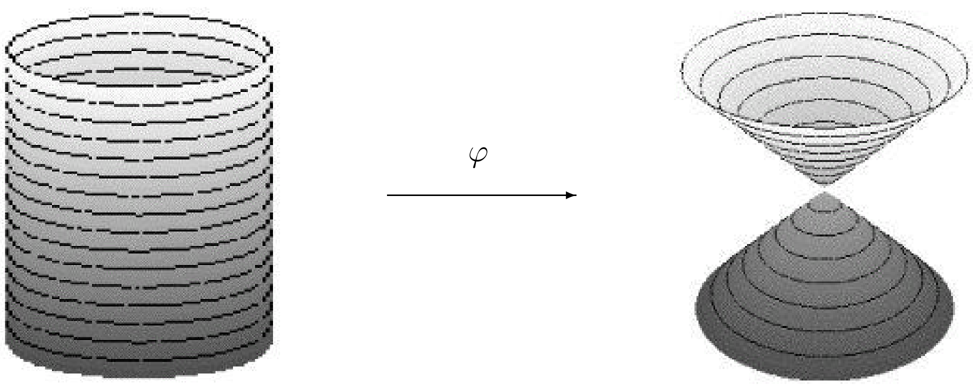
Resultado: Si $X : z^2 = x^2 + y^2$ es la singularidad del cono, entonces cualquier germen analítico no negativo sobre X se puede expresar como suma de dos cuadrados de gérmenes analíticos.

Idea para la demostración. Varias etapas:

(a) Si $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ y $f + zg$ (*forma canónica* de un elemento de $\mathcal{O}(X)$) es psd sobre $X \Rightarrow$ existe $m \geq 0$, tal que $z^m(f + zg)$ es suma de dos cuadrados en $\mathcal{O}(X)$.

Consideramos la explosión

$C : u^2 + v^2 = 1$ $\qquad\qquad$ $X : x^2 + y^2 = z^2$



$$(u, v, t) \xrightarrow{\ \varphi\ } (ut, vt, t)$$

$$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, z\right) \overset{\psi}{\longleftarrow\!\!\!-\!\!\!-} (x, y, z)$$

Nuestro argumento es una especie de revisión parametrizada de la demostración clásica de Polya de que todo polinomio psd sobre la circunferencia es suma de dos cuadrados de polinomios.

(b) Eliminación del denominador z^m.

(c) Comprobación de que el conjunto de polinomios psd en X es *denso* en $\mathcal{P}(X)$, utilizando el *algoritmo de Newton-Puiseux*.

(d) Aplicación del Teorema de Aproximación de M. Artin para resolver el caso analítico. $\blacksquare$

2. Reducción polinomial

Notaciones: Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ un germen de superficie analítica en el origen con ecuación $z^2 = F(x, y)$, $F \in \mathbb{R}[x, y]$

$S_X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z^2 - F(x, y) = 0\}$ es la *superficie algebraica asociada a* X (cumple $(S_X)_0 = X$),

$\mathcal{P}(S_X)$=$\{$polinomios $P(x, y) + zQ(x, y) \geq 0$ en $S_X\}$.

Reducción polinomial: Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ un germen analítico de ecuación $z^2 - F(x, y) = 0$, $F \in \mathbb{R}[x, y]$, $F(0, 0) = 0$. Si $k \geq 1$

$$\boxed{\mathcal{P}(S_X) \subset \Sigma_k(X) \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \Sigma_k(X)}$$

Idea para la demostración. Varias etapas:

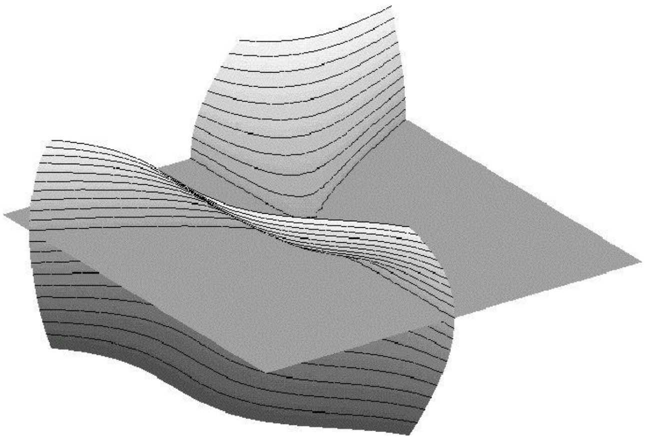
(a) Densidad polinomial débil: Si $Z \subset \mathbb{R}^2$ es un germen semianalítico cerrado y $f \in \mathcal{O}(Z)$ es definido positivo o *pd* en Z (es decir, $f|_{Z\setminus\{0\}} > 0$), existe $r \in \mathbb{N}$ tal que si $g \equiv f \mod (x, y)^r \Rightarrow$ g es pd en Z.

(b) Estudio de $\mathcal{O}(X)$:

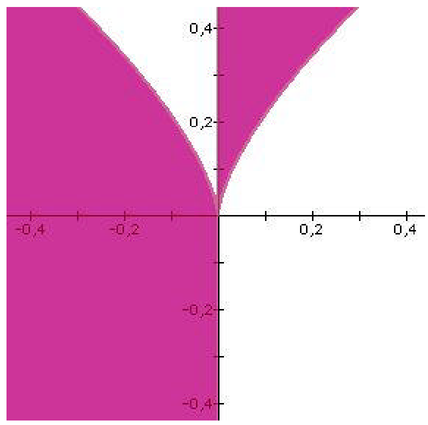
$\mathcal{O}(X) = \{f(x,y) + zg(x,y) : \ f, g \in \mathbb{R}\{x,y\}\}$

$\mathcal{P}(X) = \{f + zg : \ f \in \mathcal{P}(F \geq 0), f^2 - Fg^2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)\}.$

$X : z^2 = F(x,y)$



$Z : F(x,y) \geq 0$



(c) Densidad polinomial fuerte: Si $\varphi = f + zg \in \mathcal{P}(X)$ entonces para cada $m \geq 1$ existe un polinomio

$$h_m = P(x,y) + zQ(x,y) \in \mathcal{P}(S_X)$$

tal que $\omega(\varphi - h_m) \geq m$ (utilizando *(a)*, *(b)*)

(d) Utilización de las hipótesis y el paso *(c)* y aplicación del Teorema de Aproximación de M. Artin para resolver las ecuaciones

$$\varphi = f + zg = X_1^2 + \cdots + X_k^2 + (z^2 - F)Y$$

en $\mathbb{R}\{x,y,z\}$ ∎

Ejemplo de aplicación de nuestro método

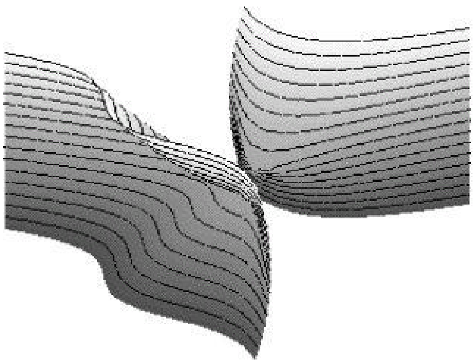
Veamos que $\mathcal{P}(X : z^2 - x^3 - xy^3 = 0) = \Sigma_2(X)$.

1. ***Reducción polinomial*:** basta probar

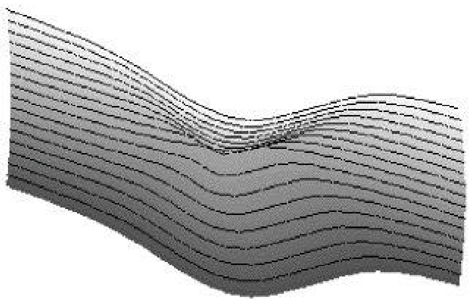
$$\mathcal{P}(S_X) \subset \Sigma_2(X).$$

2. ***Explosión:***

$X : z^2 = x^3 + xy^3$ $\qquad\qquad$ $E_8 : v^2 = x^5 + y^3$



$$\xrightarrow{\phi}$$



$$(x, y, z) = \left(x, \frac{u}{x}, \frac{v}{x}\right) \longrightarrow (x, xy, xz) = (x, u, v)$$

3. ***Solución del caso polinomial:*** Si $P + zQ \in \mathcal{P}(S_X)$ utilizando la transformación anterior y el hecho de

$$\mathcal{P}((E_8)_o) = \Sigma_2((E_8)_o)$$

se prueba que existen $r \geq 0$, $\alpha's, \beta's, q_0 \in \mathbb{R}\{x, y\}$ tales que

$$x^{2r}(P + zQ) = (\alpha_0 + z\alpha_1)^2 + (\beta_0 + z\beta_1)^2 - (z^2 - x^3 - xy^3)q_0.$$

Para terminar, procedemos a eliminar x^{2r}. Igualando coeficientes respecto a z obtenemos

(0) $x^{2r}P = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + q_0(x^3 + xy^3) = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + q_0x(x^2 + y^3)$

(1) $x^{2r}Q = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1)$

(2) $q_0 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$

Ahora:
(0) $\Rightarrow x|\alpha_0^2 + \beta_0^2 \Rightarrow x|\alpha_0, \beta_0 \Rightarrow x|q_0$.
(2) $\Rightarrow x|\alpha_1^2 + \beta_1^2 \Rightarrow x|\alpha_1, \beta_1 \Rightarrow x^2|q_0$.

Lo que prueba

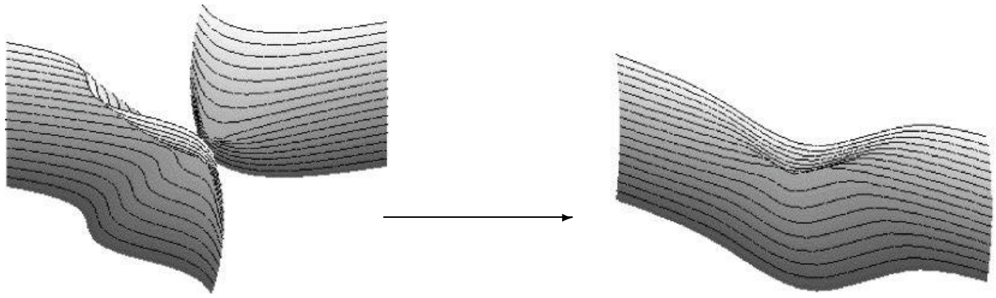
$$x^{2(r-1)}(P+zQ) = (\alpha_0'+z\alpha_1')^2+(\beta_0'+z\beta_1')^2-(z^2-x^3-xy^3)q_0'.$$

Aplicando $r - 1$ veces más este proceso, deducimos que

$$(P + zQ) = (a_0 + za_1)^2 + (b_0 + zb_1)^2 - (z^2 - x^3 - xy^3)h_0.$$

■

3. La singularidad de Brieskorn y sus explosiones



$X : z^2 = x^3 + xy^3$ $\qquad$ $E_8 : v^2 = x^5 + y^3$

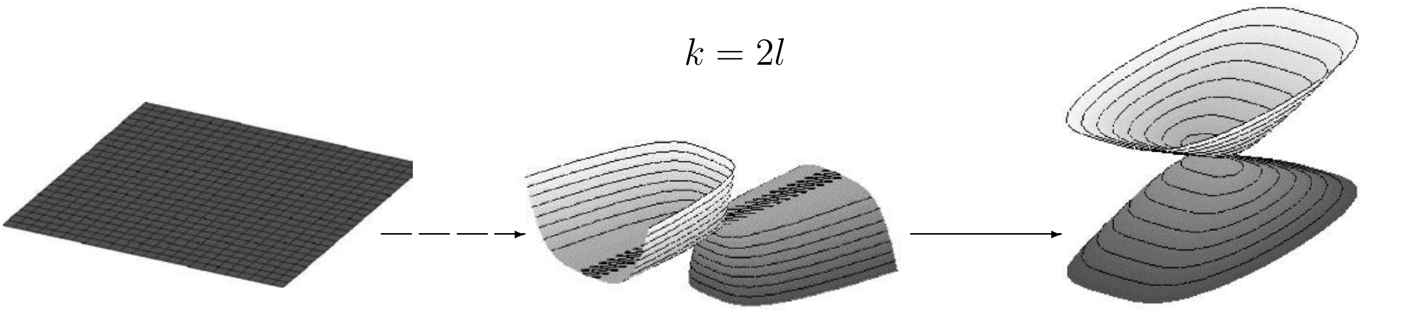
Explosión

$Y : z^2 = x^3 + y^4$ $\qquad$ $Z : z^2 = x^3 - zy^2$ $\qquad$ $X : u^2 = -z^3 + zx^3$

Cambio de coordenadas	*Explosión*

4. El par de planos y sus deformaciones

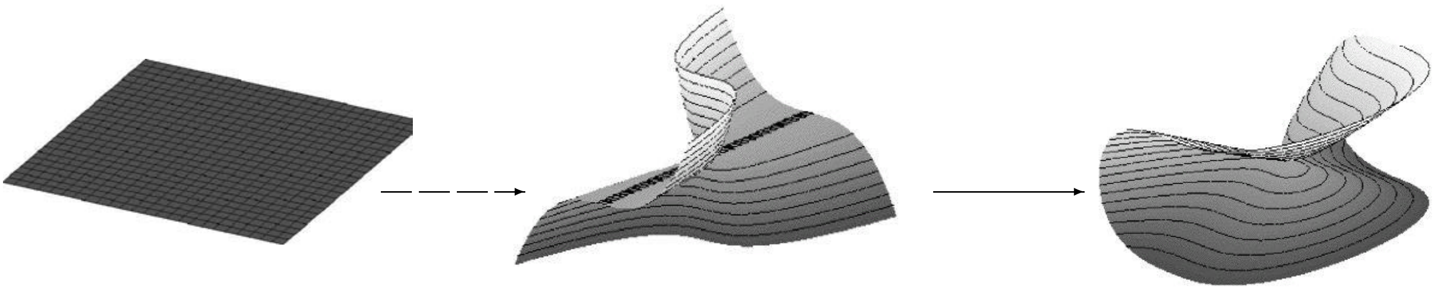
$k = 2l$



$\mathbb{R}^2$ $\qquad$ $Y_k : y^{2l} = uv$ $\qquad$ $X_k : z^2 = x^2 + y^{2l}$

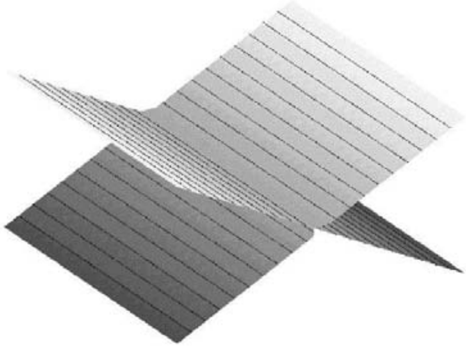
Explosión	*Cambio de coordenadas*

$k = 2l + 1$



$\mathbb{R}^2$ $\qquad$ $Y_k : y^{2l+1} = uv$ $\qquad$ $X_k : z^2 = x^2 + y^{2l+1}$

Explosión	*Cambio de coordenadas*



$X : z^2 = x^2$

Resuelta por *paso al límite*

Paso al límite

Para el par de planos $\mathcal{P}(X : z^2 - x^2 = 0) = \Sigma_2(X)$ se resuelve *por paso al límite*:

Sea $f + zg \in \mathcal{P}(z^2 - x^2 = 0)$, existe $m_0 \geq 1$ tal que $\forall m \geq m_0$ existe $r \geq 2m$ tal que el germen $f + (x^2 + y^2)^m + zg \in \mathcal{O}(X_{2r})$ es pd en $X_{2r} : z^2 - x^2 - y^{2r} = 0$.

Se cumple

$$f + (x^2 + y^2)^m + zg = \alpha^2 + \beta^2 - (z^2 - x^2 - y^{2r})h$$

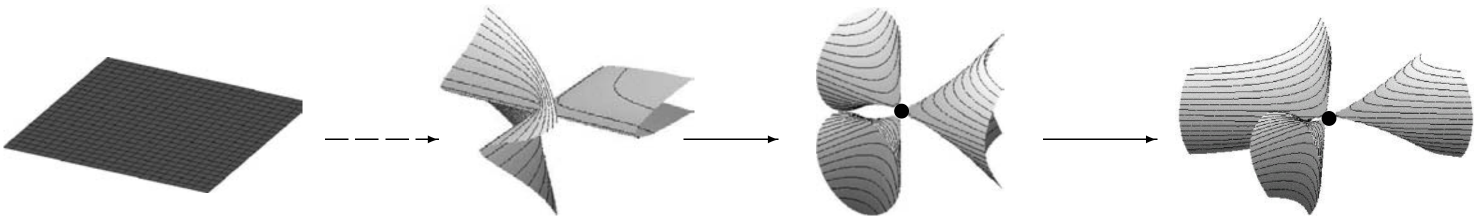
y por tanto

$$f + zg \equiv \alpha^2 + \beta^2 - (z^2 - x^2)h \qquad \mathrm{mod}\ (x, y)^{2m}$$

Por el Teorema de Aproximación de M. Artin

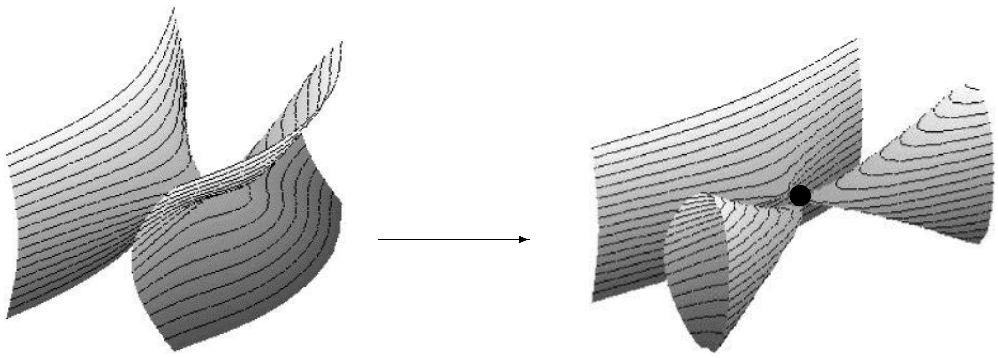
$$f + zg = a^2 + b^2 - (z^2 - x^2)q.$$

5. El paraguas de Whitney y sus deformaciones



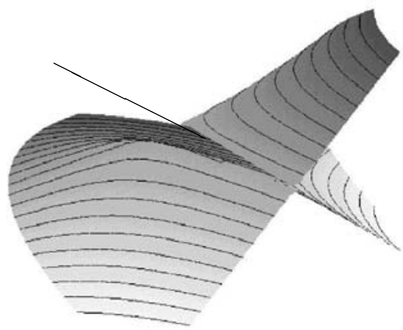
$\mathbb{R}^2$ $\qquad$ $M_k : w^2(x - y^k) = xy$ $\qquad$ $Z_k : z^2 = xy(x - y^k)$ $\qquad$ $X_k : z^2 = x^2y - y^{2k+1}$

$2^{\underline{a}}$ *Explosión*	$1^{\underline{a}}$ *Explosión*	*Cambio de coordenadas*



$Y_k : z^2 = x^2y + y^{2k}$ $\qquad$ $X_k : w^2 = z^2y - y^{2k+1}$

Explosión



$X : z^2 = x^2y$

Resuelta por *paso al límite*

6. Gérmenes de codimensión mayor

Objetivo: Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe un germen de superficie con $\operatorname{emb}\dim = n+1$ tal que $\mathcal{P} = \Sigma_2$.

Gérmenes y superficies asociadas: *Cono real de Veronese*

Gérmenes: $X_n = (S_n)_o \subset \mathbb{R}^{n+1}_o$,

$$S_n : \; F_{ij} = x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1}, \qquad 1 \leq i \leq j \leq n-1$$

Superficies algebraicas asociadas: $S_{X_n} = S_n$

Parametrización de la complexificación de S_n*:*

$$\gamma(z,w) = (z^n, z^{n-1}w, \ldots, zw^{n-1}, w^n)$$

Parametrizaciones de S_n*:*

- n par:
  $\gamma^+ = \gamma_{|\mathbb{R}^2}$ parametriza $S_n \cap \{x_0 \geq 0\}$,
  $\gamma^- = -\gamma_{|\mathbb{R}^2}$ parametriza $S_n \cap \{x_0 \leq 0\}$.
- n impar:
  $\gamma^+ = \gamma_{|\mathbb{R}^2}$ parametriza S_n,
  $\gamma^- = -\gamma_{|\mathbb{R}^2}$ parametriza S_n.

Resultado: $\mathcal{P}(X_n) = \Sigma_2(X_n)$

a) Reducción polinomial: Es suficiente probar:

$$\mathcal{P}(S_n) \subset \Sigma_2(X_n).$$

b) Explosión:

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{x_0 = 0\} &\rightarrow S_n \setminus \{x_0 = 0\} \\ (x_0, x_1) &\mapsto \left(x_0, x_1, \frac{x_1^2}{x_0}, \dots, \frac{x_1^k}{x_0^{k-1}}, \dots, \frac{x_1^n}{x_0^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

c) Solución del caso polinomial: Si $f \in \mathcal{P}(S_n)$ utilizando la transformación anterior se prueba que

$$x_0^{2r} f \equiv (a^2 + b^2) \mod I(X_n)$$

Utilizando la parametrización γ^+ se comprueba que podemos dividir por x_0^{2r}.