7.5. Sean $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ y su transformada de Laplace

$$Lf(s)=\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx,\ s>0$$

a) Calcula $Lf(s)$ para $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ y $f(x)=\operatorname{sen}(x)$

- $$\int_0^{+\infty} xe^{-sx}dx=\left[\frac{-x}{s}e^{-sx}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx}dx=\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{s^2}$$

$u=x \quad du=dx$

$dv=e^{-sx}dx \quad v=-\frac{1}{s}e^{-sx}$

- $$\int_0^{+\infty} x^2e^{-sx}dx=\left[-\frac{x^2}{s}e^{-sx}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} 2xe^{-sx}dx=\frac{2}{s}\int_0^{+\infty} xe^{-sx}dx=$$

$u=x^2 \quad du=2x\,dx$

$dv=e^{-sx}dx \quad v=-\frac{1}{s}e^{-sx}$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{por el}\\ \text{caso anterior}}}{=}\frac{2}{s^3}$$

- $$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x)e^{-sx}dx=\overbrace{\left[-\frac{\operatorname{sen}(x)}{s}e^{-sx}\right]_0^{+\infty}}^{0}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\cos(x)dx=$$

$u=\operatorname{sen}(x) \quad du=\cos(x)$

$dv=e^{-sx}dx \quad v=-\frac{1}{s}e^{-sx}$

$$=\frac{1}{s}\left(\overbrace{\left[-\frac{1}{s}\cos(x)e^{-sx}\right]_0^{+\infty}}^{1}-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}(x)e^{-sx}dx\right)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}(x)e^{-sx}dx$$

$u_1=\cos(x) \quad du_1=-\operatorname{sen}(x)$

$dv_1=e^{-sx}dx \quad v_1=-\frac{1}{s}e^{-sx}$

Por tanto, despejando $\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}(x)e^{-sx}dx=\frac{1}{s^2}$ y así

$$\int_0^{+\infty}\operatorname{sen}(x)e^{-sx}dx=\frac{1/s^2}{1+1/s^2}=\frac{1}{1+s^2}$$

b) Si f' es la derivada de f, calcula $\mathcal{L}f'(s)$ si $\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-sx} = 0$ $s>0$.

$$\mathcal{L}f'(s) = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}dx = \left[f(x)e^{-sx}\right]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx =$$

$u = e^{-sx}$ $du = -se^{-sx}$

$dv = f'(x)dx$ $v = f(x)$

$$= -f(0) + s\mathcal{L}f(x) = s\mathcal{L}f(x) - f(0).$$

7.6. Para cada $x>0$ se define la función Gamma de Euler $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

a) Prueba que la función Γ está bien definida.

Tenemos que probar que $\forall x>0$ la integral $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ es convergente. $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

Observamos que si $t\geq 1$ entonces $e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{y-1}$ si $x\leq y$.

Por tanto si tomamos como $y = [x]+1$, deducimos que basta con demostrar que para cada $n\in\mathbb{N}$ ($[x]$: parte entera)

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt - \int_0^1 e^{-t}t^{n-1}dt$$

está acotada. Por tanto basta demostrar que

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt < +\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Veremos en el apartado c) que $\Gamma(n) = (n-1)!$ y con esto habremos garantizado que Γ está bien definida.

b) Usando la regla de integración por partes prueba que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = \underbrace{\left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty}}_{=0} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x)$$

$u = t^x$ $du = xt^{x-1}dt$

$dv = e^{-t}dt$ $v = -e^{-t}$

c) Calcular $\Gamma(1)$ y deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\Gamma(n) \underset{b)}{=} (n-1)\,\Gamma(n-1) \underset{b)}{=} (n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2) = \dots = (n-1)\dots 2\,\Gamma(2) =$$

$$= (n-1)\cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!\ \underbrace{\Gamma(1)}_{1} = (n-1)!$$

d) Con el cambio de variable $u = t^x$, prueba que:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^{\frac{1}{x}}}\, du \quad \text{y} \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^{1/x}} \cdot \frac{1}{x}\, du = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^{\frac{1}{x}}}\, du$$

$$u = t^x \qquad du = x \cdot t^{x-1}\, dt \rightarrow \frac{1}{x}\, du = t^{x-1}\, dt$$

$$\Updownarrow$$

$$t = u^{1/x} \qquad 0 \xrightarrow{t^x} 0$$

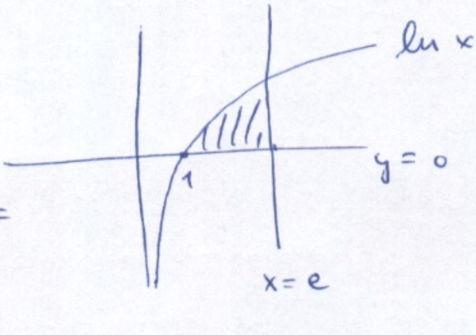
$$+\infty \xrightarrow[t^x]{} +\infty$$

En particular para $x = \frac{1}{2}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.$

7.8. Hallar el área de los recintos limitados entre las gráficas

a) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

$\ln x = 0 \iff x = 1$



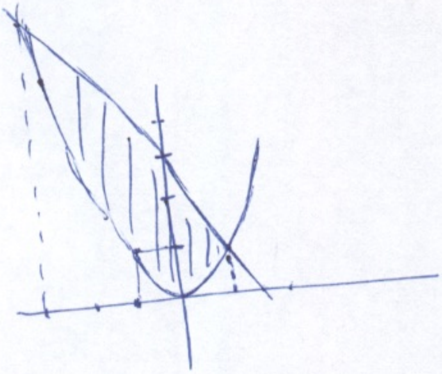
$$\int_1^e \ln x\, dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e dx =$$

$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = dx \quad v = x$

$$= e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1\, u^2$$

3) $f(x) = x^2$, $g(x) = 3-2x$



$x^2 = 3-2x$ (Puntos de corte)

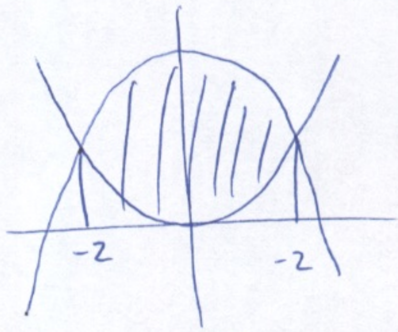
$x^2+2x-3=0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{-2\pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Área pedida $= \displaystyle\int_{-3}^{1}(3-2x)\,dx - \int_{-3}^{1} x^2\,dx = \left[3x - x^2\right]_{-3}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} =$

$= 2 - (-9-9) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 2 + 18 - \frac{1}{3} + 1 = 21 - \frac{1}{3} = \frac{62}{3}\,u^2$

5) $y = \dfrac{x^2}{3}$ $\quad y = 4 - \dfrac{2}{3}x^2$



Puntos de corte: $\dfrac{x^2}{3} = 4 - \dfrac{2}{3}x^2$

$x^2 = 4 \quad x = \pm 2$

Área pedida $= \displaystyle\int_{-2}^{2}\left(4 - \frac{2}{3}x^2\right)dx - \int_{-2}^{2}\frac{x^2}{3}\,dx = \int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx =$

$= \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 8 - \dfrac{8}{3} - \left(-8 + \dfrac{8}{3}\right) = 16 - \dfrac{16}{3} = 16\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{32}{3}\,u^2$