EXAMEN FINAL MMI. 13 Junio 2013

1. Calcula el límite $$\lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

2. Calcula la suma de la serie $$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

3. Calcula los números reales a tales que la tangente en $x = a$ a la función $f(x) = x^2 - 3$ pasa por el origen de coordenadas.

4. Prueba que $$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \le \frac{\sqrt{2}+2}{2}$$

5. Obtén una primitiva de $f(x) = e^{-x} senx$ y calcula posteriormente la integral impropia
$$\int_0^{\infty} e^{-x} senx dx$$

6. Demostrar que las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación:
$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

7. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ calcula una matriz regular Q tal que $QB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. Resuelve la ecuación $$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

9. Hallar la matriz en la base canónica de un endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuyo núcleo es el subespacio generado por $\overrightarrow{u_1} = (-1,2,0)$ y $\overrightarrow{u_2} = (1,-1,1)$ y verifica $f(1,2,2) = (2,4,4)$.

10. Hallar los autovalores y autovectores del endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ dado por
$$f(x,y,z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z)$$

FINAL JUNIO de MMI

Jueves 13 de Junio de 2013

1. Calcula el límite

$$\lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

2. Calcula la suma de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

3. Calcula los números reales a tales que la tangente en $x = a$ a la función $f(x) = x^3 - 3$ pasa por el origen de coordenadas.

4. Prueba que

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \leq \frac{\sqrt{2}+2}{2}.$$

5. Obtén una primitiva de $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$ y calcula, posteriormente, la integral impropia

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x dx.$$

6. Demostrar que las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0.$$

7. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ calcula una matriz regular Q tal que $QB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0.$

9. Hallar la matriz, en la base canónica, de un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo es el subespacio generado por $\overrightarrow{u_1} = (-1, 2, 0)$ y $\overrightarrow{u_2} = (1, -1, 1)$, y verifica $f(1, 2, 2) = (2, 4, 4)$.

10. Hallar los autovalores y autovectores del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z).$$

Las notas se publicarán el ~~lunes~~ Jueves 20 a las 12 horas. La revisión se efectuará el ~~martes~~ Viernes 21 a las 15 horas en el aula 13. No es obligatorio asistir.

Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara de un folio.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula en los primeros 45 minutos.