Nombre (1):		Calificación
Apellidos (1):		
Nombre (2)		
Apellidos (2)		

1(a)	**1**(b)	**1**(c)	**1**(d)	**2**(a)	**2**(b)	**2**(c)	**2**(d)	**3**(a)	**3**(b)

Prática 3: 24 de Octubre de 2013

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente esta hoja con la solución de los ejercicios. Podéis utilizar todas la hojas de sucio que deseéis pero sólo recogeré esta hoja. Deberéis escribir tanto vuestro nombre como el de la persona con la que habéis realizado la Práctica.

1. Encontrar alguna fórmula sencilla que defina la sucesión:

(a) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \qquad a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$

(b) $1, 2, 6, 24, 120, \dots \qquad a_n := n! = n(a_{n-1})$

(c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots \qquad a_n := \frac{1}{2^{n-1}}$

(d) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \qquad a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$

2. Calcula los siguientes límites de sucesiones:

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. Escribimos $a_n := 1+2+3+\cdots+n$ que tiene a infinito (cuando $n \to \infty$) y $b_n := n^2+n+1$ que tiene a infinito (cuando $n \to \infty$). Por el teorema de Stulz, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n+1-(n-1)^2-(n-1)-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n+1-n^2+n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+3}{3n-3}\right)^{3n} = [1^\infty]$. Por tanto, sabemos que tenemos un límite del tipo e^L. Si escribimos $a_n := \dfrac{3n+3}{3n-3}$ (que tiende a 1) y $b_n := 3n$ (que tiende a $+\infty$). Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+3}{3n-3}\right)^{3n} = e^L.$$

donde

$$L := \lim_{n\to\infty} b_n(a_n - 1) = \lim_{n\to\infty} 3n\Big(\frac{3n+3}{3n-3} - 1\Big) = \lim_{n\to\infty} 3n\Big(\frac{3n+3-3n+3}{3n-3}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{18n}{3n-3} = 6$$

Por tanto nuestro límite vale e^6.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+3^n}{5^n}}{\frac{4^n+5^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = 0$ ya que $0 < \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} < 1$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ donde $a_n := \sqrt[3]{n+1}$ que tiene a infinito (cuando $n \to \infty$) y $b_n := \sqrt{n+1}$ que tiene a infinito (cuando $n \to \infty$). Por el teorema de Stulz se cumple que

$$\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{2}{6}}}{(n+1)^{\frac{3}{6}}} = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{6}}} = 0$$

3. Sea $a > 0$. Definimos $x_1 = \sqrt{a}$ y $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Prueba usando inducción que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada superiormente. *Ayuda: Puede ser util demostrar que una cota superior es $2+a$.*

Creciente: Tenemos que probar que $x_n \leq x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$, es decir, $x_n \leq \sqrt{a+x_n}$. Demostremos la desigualdad anterior por inducción. Para $n = 1$, tenemos que

$$x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a+\sqrt{a}} = \sqrt{a+x_1}.$$

Supongamos el resultado cierto para x_n y veamos que también es cierto para x_{n+1}. Tenemos que probar que $x_{n+1} \leq \sqrt{a+x_{n+1}}$, o equivalentemente, que $x_{n+1}^2 \leq a + x_{n+1}$. Sustituyendo $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$, tenemos que probar $a + x_n \leq a + \sqrt{a+x_n}$, es decir, $x_n \leq \sqrt{a+x_n}$ lo que es cierto por hipótesis de inducción.

Acotada superiormente: Veamos que $x_n \leq 2 + a$ por inducción. Para $n = 1$, tenemos que probar

$$x_1 = \sqrt{a} < 2 + a \iff a < (2+a)^2 = 4 + 4a + a^2$$

lo cual es cierto. Supongamos el resultado cierto para x_n y veamos que tambien es cierto para x_{n+1}. Tenemos que demostrar que

$$x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < 2 + a.$$

Elevando al cuadrado, tenemos que probar que $a + x_n < (2+a)^2 = 4 + 4a + a^2$. Como $x_n < 2 + a$ (por hipótesis de inducción), se cumple que

$$x_{n+1}^2 = a + x_n < a + 2 + a = 2 + 2a < (2+2a) + 2 + 2a + a^2 = 4 + 4a + a^2 = (2+a)^2$$

y por tanto $x_{n+1} < 2 + a$.

Convergente: Como la sucesión es convergente y acotada superiormente, deducimos que la sucesión es convergente.

(b) Prueba que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente y calcula su límite.

Para calcular el límite L, hacemos tender $n \to \infty$ a ambos lados de la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$ deducimos que $L = \sqrt{a+L}$ y por tanto $L^2 - L - a = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado, obtenemos que

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

Como $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} < 0$ y todos los términos de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ son positivos, este no puede ser el límite y por tanto deducimos que $L = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.