Problema a resolver para optar a calificación de Matricula de Honor

Sean $F_1, \dots, F_\ell \in \mathbb{K}\langle\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle\rangle := \mathbb{K}\langle\langle \mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{y}_1, \dots, \mathtt{y}_m \rangle\rangle$ tales que $\ell \leq m$ y $F_k(0,0) = 0$ para $k = 1, \dots, \ell$. Denotamos $\mathfrak{J}$ al ideal de $\mathbb{K}\langle\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle\rangle$ generado por los menores de orden ℓ de la matriz de series

$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial \mathtt{y}_j}\right)_{\substack{1 \leq k \leq \ell \\ 1 \leq j \leq m}}$$

y $\mathfrak{m}_n$ al ideal maximal de $\mathbb{K}\langle\langle \mathtt{x} \rangle\rangle$. Dada una tupla de series $h := (h_1, \dots, h_m) \in (\mathfrak{m}_n)^m$ denotamos

$$\varphi_h : \mathbb{K}\langle\langle \mathtt{x}, \mathtt{y} \rangle\rangle \to \mathbb{K}\langle\langle \mathtt{x} \rangle\rangle, \ f(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \mapsto f(\mathtt{x}, h_1, \dots, h_m)$$

el homomorfismo evaluación (suprayectivo) correspondiente a la sustituación de las variables $\mathtt{y}_1, \dots, \mathtt{y}_m$ por la series $h_1, \dots, h_m$. Sea $r \geq 1$ y supongamos que existe una tupla de series $g := (g_1, \dots, g_m) \in (\mathfrak{m}_n)^m$ tal que

$$\varphi_g(F_i) \in \varphi(\mathfrak{J}^2)\mathfrak{m}_n^r$$

para $i = 1, \dots, \ell$. Demostrar que existe una tupla de series $g^* := (g_1^*, \dots, g_m^*) \in (\mathfrak{m}_n)^m$ tal que

$$\varphi_{g^*}(F_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell,$$
$$g_i \in \varphi(\mathfrak{J})\mathfrak{m}_n^r \quad \forall j = 1, \dots, m.$$