

EXAMEN FINAL MMI

Miércoles 13 de Junio de 2012

1. Demostrar por inducción:

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad \text{si } r \neq 0.$$

2. Calcular el siguiente límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n} \right)^{2n}$

3. Calcular a y b para que sea derivable en el intervalo $(0, 5)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ \sqrt{x-1} - 2, & \text{si } 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

4. Integrando por partes, calcular

$$\int x(\ln x)^2 dx$$

5. Estudiar la convergencia y hallar, si es posible, la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

6. Determinar los números complejos que verifican $z^3 + 1 - i = 0$ y exprésalos en forma exponencial.

7. Hallar la forma normal de Hermite por filas y el rango de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $(V_3, +, \cdot \mathbb{R})$ y $(V_4, +, \cdot \mathbb{R})$ tal que $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 - 2\vec{v}_4$, $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$ y $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_2 - \vec{v}_4$, donde $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ son las bases correspondientes. Hallar el núcleo, las ecuaciones de la imagen y las dimensiones de ambos.

9. Prueba, sin desarrollar, la siguiente igualdad de determinantes, sabiendo que $x \neq 0$, $y \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 4 & y^2 \\ x^3 & 8 & y^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & xy & 2x \\ x & 2 & y \\ x^2 & 4 & y^2 \end{vmatrix}$$

10. Discutir para qué valores del parámetro k es diagonalizable la matriz: $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -k-2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

La revisión se efectuará el día 22 a las 16 horas en el aula 14. No es obligatorio asistir.

Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara de un folio.

El examen dura 3 horas. No se podrá salir del aula en los primeros 45 minutos.