

## FINAL JUNIO de MMI

Jueves 13 de Junio de 2013

1. Calcula el límite

$$\lim_n \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$$

2. Calcula la suma de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

3. Calcula los números reales  $a$  tales que la tangente en  $x = a$  a la función  $f(x) = x^3 - 3$  pasa por el origen de coordenadas.

4. Prueba que

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \leq \frac{\sqrt{2}+2}{2}.$$

5. Obtén una primitiva de  $f(x) = e^{-x} \sin x$  y calcula, posteriormente, la integral impropia

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

6. Demostrar que las raíces  $n$ -ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0.$$

7. Dada la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  calcula una matriz regular  $Q$  tal que  $QB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8. Resuelve la ecuación 
$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Hallar la matriz, en la base canónica, de un endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuyo núcleo es el subespacio generado por  $\vec{u}_1 = (-1, 2, 0)$  y  $\vec{u}_2 = (1, -1, 1)$ , y verifica  $f(1, 2, 2) = (2, 4, 4)$ .

10. Hallar los autovalores y autovectores del endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z).$$

~~Jueves~~ Viernes

Las notas se publicarán el ~~lunes~~ 20 a las 12 horas. La revisión se efectuará el ~~martes~~ 21 a las 15 horas en el aula 13. No es obligatorio asistir.

Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo. Cada ejercicio se resolverá en una cara de un folio.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula en los primeros 45 minutos.