EXAMEN MMI. 19 Septiembre 2011

1. Si $a \leq b$ y $\forall \in > 0$ ocurre que $b < a + \in$, prueba que $a = b$.

2. Estudia la convergencia absoluta y condicional de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!}$

3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, x \neq 0$. ¿Se puede definir $f(0)$ de modo que la función sea continua? ¿Por qué?

4. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\lg x}{x}$. Determina cuál es el máximo del conjunto $A = \{e^{\pi}, \pi^{e}\}$.

5. Estudia la convergencia y calcula, si es posible, la integral impropia $\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$

6. Halla todas las matrices que conmuten con la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

7. Demuestra que el conjunto formado por los vectores

$$\{1 + x, x^2, 1 + x^2, 3x - 2x^2\}$$

es linealmente independiente en el espacio de los polinomios con coeficientes racionales.

8. Sea la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_3}/2$ y $Ker f = \mathcal{L}(2\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_3})$. Donde $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ es una base de $\mathbf{R}^3$.
Calcula la dimensión y las ecuaciones de $\operatorname{Im}(f)$.

9. Demuestra, sin desarrollar, que es nulo el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

10. Estudia para qué valores de los parámetros es diagonalizable la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}$$

EXAMEN DE SEPTIEMBRE MMI

Lunes 19 de Septiembre de 2011

1.-Si $a \leq b$ y $\forall \epsilon > 0$ ocurre que $b < a + \epsilon$, prueba que $a = b$.

2.- Estudia la convergencia absoluta y condicional de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!}$.

3.- Se considera la función $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, x \neq 0$ ¿ Se puede definir $f(0)$ de modo que la función sea continua? ¿Por qué?

4.- Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\lg x}{x}$. Determina cuál es el máximo del conjunto $A = \{e^{\pi}, \pi^{e}\}$.

5.- Estudia la convergencia y calcula, si es posible, la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

6.- Halla todas las matrices que conmuten con la matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

7.- Demuestra que el conjunto formado por los vectores

$$\{1 + x, x^2, 1 + x^2, 3x - 2x^2\}$$

es linealmente dependiente en el espacio de los polinomios con coeficientes racionales.

8.- Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_3}/2$ y $Ker(f) = \mathcal{L}(2\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3})$. Donde $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
Calcula la dimensión y las ecuaciones de $Im(f)$.

9.- Demuestra, sin desarrollar, que es nulo el determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

10.- Estudia para qué valores de los parámetros es diagonalizable la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

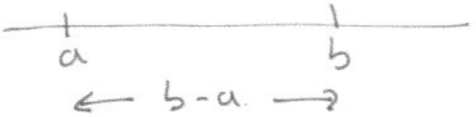
La revisión del examen se efectuará el día.....a las.....horas en el aula...... No es obligatorio asistir a al revisión.

EXAMEN DE SEPTIEMBRE MMI

14-IX-2011

1:] Si $a \le b$ ó bien $a = b$ ó bien $a < b$.

Veamos que $a < b$ no puede ocurrir



Sea $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ ya que $b > a$.

Por hipótesis $b < a + \varepsilon$, ①

por otro lado $\boxed{a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b}$ ②

(si $a<b$)

① y ② son contradicciones luego $a < b$ no puede ocurrir.

2:] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!}$

en valor absoluto $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(25)^n}{n!} = e^{25} - 1$

ya que $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

o de otra forma, usando el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(25)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{25^n}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{25}{n+1} = 0 < 1$$ luego la serie es convergente en valor absoluto;

luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{2n}}{n!}$ converge absolutamente

y por tanto la serie es convergente

3:) SI $f(0)=f_0$ ES CONTINUA, DEBE OCURRIR

QUE $f(0)=f_0=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$

$$\underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-e^{1/x}\cdot -1/x^2}{e^{1/x}(-1/x^2)}=\lim_{x\to 0^+}-1=-1$$

POR OTRO LADO $\lim_{x\to 0^-}\frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}=1$. COMO NO EXISTE EL LÍMITE DE f EN CERO, f NO ES CONTINUA PARA CUALQUIER VALOR $a=f(0)$ QUE PUDIERAMOS ASIGNARLE

4:) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\quad$ Dom f $\{x\in\mathbb{R};\ x>0\}$.

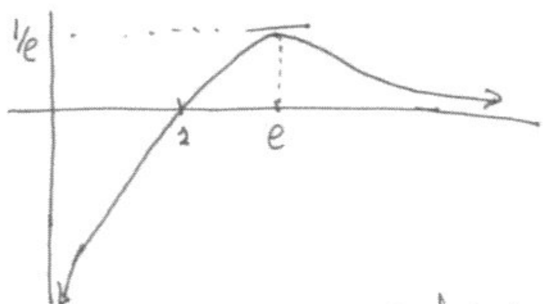
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{\text{L'HÔPITAL}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

$f(1)=\frac{\ln 1}{1}=0$ $\quad$ SI $x\in(0,1)$ $f(x)<0$

SI $x>1$ $\quad f(x)>0$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\begin{cases}<0 & \text{SI } x>e\\ =0 & \text{SI } x=e\\ >0 & \text{SI } x\in(0,e)\end{cases}\qquad f(e)=\frac{1}{e}\ \text{MÁXIMO}$$



AHORA $\ln e^n=n\ln e$

$\ln n^e=e\ln n$

COMO $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln n}{n}$ (POR QUE EL MÁXIMO DE f SE ALCANZA EN $x=e$) SE SIGUE QUE

$$n\ln e=\ln e^n>e\ln n=\ln n^e$$

COMO $\ln x$ ES UNA FUNCIÓN CRECIENTE

$$\boxed{e^n>n^e.}$$

5º) $$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^r x e^{-x^2} dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_0^r \left(\frac{-2x e^{-x^2}}{-2}\right) dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{2} \int_0^r -2x e^{-x^2} dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty} -1/2 \left[e^{-x^2} \right]_0^r =$$

$$= -1/2 \lim_{r\to\infty} \left(e^{-r^2} - 1\right) = -1/2\,(-1) = 1/2$$

LUEGO LA INTEGRAL IMPROPIA ES CONVERGENTE POR DEFINICIÓN Y SU VALOR ES 1/2

6º) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ $\quad A\cdot B = BA \iff$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{aligned} \cancel{3a_1} - 2a_2 &= \cancel{3a_1} + 2a_3 \\ 2a_1 - 3a_2 &= 3a_2 + 2a_4 \\ 3a_3 - 2a_4 &= -2a_1 - 3a_3 \\ 2a_3 - \cancel{3a_4} &= -2a_2 - \cancel{3a_4} \end{aligned}$$

CUATRO ECUACIONES LINEALES CON CUATRO INCÓGNITAS

$$\iff \begin{cases} a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 - 6a_2 - 2a_4 = 0 \\ 2a_1 + 6a_3 - 2a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

MATRIZ COEFICIENTES

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{a_2 = -a_3} \\ 2a_1 - 6a_2 = 2a_4 \end{cases} \quad \text{ASÍ } \boxed{a_1 = a_4 + 3a_2 = -3a_3 + a_4}$$

$a_3, a_4 \in \mathbb{R}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$

Y $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

RANGO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES 2

$$A = \begin{pmatrix} -3a_3 + a_4 & -a_3 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha + \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

7.) SEA LA COMBINACIÓN LINEAL

$$0 = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(x^2) + \lambda_3(1+x^2) + \lambda_4(3x-2x^2)$$

$$= (\lambda_1+\lambda_3) + (\lambda_1+3\lambda_4)x + (\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4)x^2$$

ASÍ $\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = \lambda_1 + 3\lambda_4 \\ 0 = \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 \end{cases}$ SISTEMA DE 3 ECUACIONES CON CUATRO INCÓGNITAS

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{YA QUE} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

LUEGO LA DIMENSIÓN DEL CONJUNTO SOLUCIÓN ES $1\ (= 4-3)$. LA SOLUCIÓN ES INFINITA INDETERMINADA, POR TANTO EXISTEN $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ NO TODOS NULOS QUE VERIFICAN LA RELACIÓN DE ARRIBA

<u>OTRA FORMA</u> $\{1, x, x^2\}$ FORMAN UNA BASE DE TODOS LOS POLINOMIOS DE GRADO A LO MÁS DOS Y COEFICIENTES EN $\mathbb{Q}$. POR TANTO

$$1+x,\ x^2,\ 1+x^2 \text{ y } 3x-2x^2 \in L[1, x, x^2]$$

COMO $\dim L[1, x, x^2] \leq 3$ Y TENGO CUATRO VECTORES, NECESARIAMENTE POR EL TEOREMA DE LA BASE, ESTOS HAN DE SER LINEALMENTE DEPENDIENTES.

8º) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ APLICA LINEAL

$$\vec{u}_1 \longrightarrow f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\vec{u}_2 \longrightarrow f(\vec{u}_2) = u_1 - u_3/2$$

$$2\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \longrightarrow f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = 0$$

COMO $f(2\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = 2f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_3) = 2[\vec{u}_1 + \vec{u}_2] + f(\vec{u}_3) = 0$

SE SIGUE QUE $f(\vec{u}_3) = -2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$

ASÍ LA MATRIZ M_f ASOCIADA A LA APLICACIÓN f ES

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang $M_f = 2$ YA QUE $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

LUEGO $\dim \operatorname{Im} f = 2$ Y $\operatorname{Im} f = L\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2)\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in L\{(1,1,0),(1,0,-1/2)\}\} =$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 0\right\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y - z = 0\}$

ECUACIÓN DE LA Im f.

9º)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} \underset{C_4 + (C_2 + C_3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

YA QUE EL DETERM. TIENE DOS COLUMNAS IGUALES.

10:) $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

AUTOVALORES $0 = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & q \\ 3 & 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & q \\ 0 & \beta-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(1+\lambda)(\beta-\lambda).$

ASI SI $\beta \neq 5$ y $\beta \neq -1$, C TIENE TRES AUTOVALORES DISTINTOS Y POR TANTO ES DIAGONALIZABLE (INDEPENDIENTEMENTE DE q)

AHORA SI $\beta = 5$ 5 ES AUTOVALOR DOBLE. LOS AUTOVECTORES ASOCIADOS VIENEN DADOS POR.

$$\begin{aligned} -6y + 4z &= 0 \\ 3x \qquad &= 0 \end{aligned} \qquad \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & -6 & q \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

LUEGO LA DIMENSIÓN DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ES 1; LUEGO C CON $\beta = 5$ NO ES DIAGONALIZABLE $\forall q \in \mathbb{R}$

SI $\beta = -1$ -1 ES UN AUTOVALOR DOBLE. LOS AUTOVECTORES ASOCIADOS VIENEN DADOS POR

$$\begin{aligned} 6x \qquad &= 0 \\ qz &= 0 \\ 3x \qquad &= 0 \end{aligned}$$

SI $q \neq 0$ $\text{Rang} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ y C NO ES DIAGONALIZABLE

SI $q = 0$ $x = 0 \iff L[(0,1,0),(0,0,1)]$
LUEGO HAY DOS AUTOVECTORES INDEPENDIENTES ASOCIADOS AL AUTOVALOR $\lambda = -1$
EN ESTE CASO $\beta = -1$ y $q = 0$ C ES DIAGONALIZABLE.