2.1. Usa la definición de límite de una sucesión para probar que:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$

Tenemos que demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\left| \dfrac{1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$.

Por tanto, fijado $\varepsilon > 0$, tenemos que calcular n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^2+1 \iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n^2 \iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1} < n$$

Por tanto, tomando $n_0 := E\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\right] + 1$ hemos terminado

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{4n} = \dfrac{3}{4}$. Halla un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tenga que $\left| \dfrac{3n-1}{4n} - \dfrac{3}{4} \right| < 10^{-3}$

Tenemos que demostrar que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\left| \dfrac{3n-1}{4n} - \dfrac{3}{4} \right| < \varepsilon$.

Por tanto, fijado $\varepsilon > 0$, tenemos que calcular n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\left| \frac{3n-1}{4n} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{-1}{4n} \right| = \frac{1}{4n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 4n \iff \frac{1}{4\varepsilon} < n$$

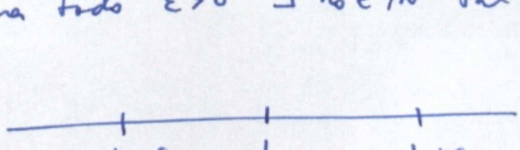
Por tanto, tomando $n_0 := E\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 1$ hemos terminado

Si $\varepsilon = 10^{-3} \Rightarrow n_0 = E\left[\frac{1}{4\cdot 10^{-3}}\right] + 1 = E\left[\frac{1000}{4}\right] + 1 = 251.$

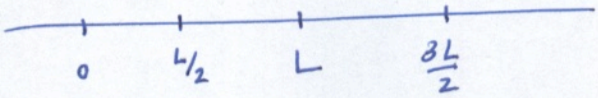
2.2. De la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se sabe que es convergente y que sus términos son alternativamente positivos y negativos. ¿Cuál es límite? Razona tu respuesta. Pon un ejemplo.

Sabemos que $a_n \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ < 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

Sea L el límite de la sucesión. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow$ $|a_n - L| < \varepsilon$



Supongamos que $L > 0$ y tomamos $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$. Entonces



Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{L}{2}$, es decir,

$$0 < \frac{L}{2} < a_n < \frac{3L}{2} \quad !! \quad \text{ya que sabemos que } a_n \begin{cases} > 0 \text{ si } n \text{ impar} \\ < 0 \text{ si } n \text{ par} \end{cases}$$

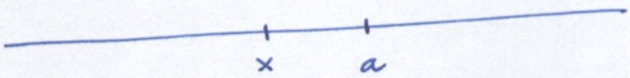
Análogamente si suponemos que $L < 0$ llegamos a contradicción.

Por tanto $L = 0$.

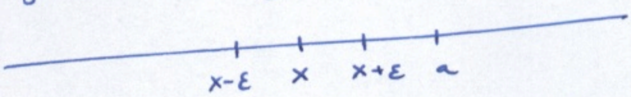
Ejemplo $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ es convergente, tiene terminos positivos y negativos alternativamente y su límite es el 0.

2.3 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a un punto x

a) Si $a > x$, prueba que existe un n_0 tal que $a > x_n$ para todo $n \geq n_0$



Elegimos $\varepsilon = \frac{a-x}{2} > 0$



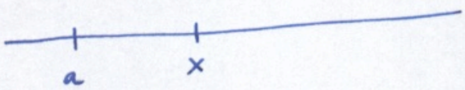
Usando la definición de límite.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x - x_n| < \varepsilon$, es decir,

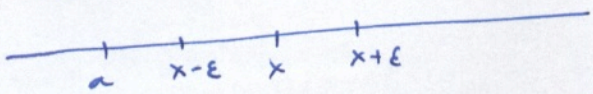
$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon = x + \frac{a-x}{2} = \frac{a+x}{2} \underset{x<a}{<} \frac{a+a}{2} = a$$

Por tanto, $\forall n \geq n_0$ se cumple que $x_n < a$.

b) Si $a < x$, prueba que existe un n_0 tal que $a < x_n$ para todo $n \geq n_0$



Elegimos $\varepsilon = \frac{x-a}{2} > 0$



Usando la definicion de límite

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|x - x_n| < \varepsilon$, es decir

$$x + \varepsilon > x_n > x - \varepsilon = x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} \underset{a<x}{>} \frac{a+a}{2} = a$$

Por tanto, $\forall n \geq n_0$ tenemos $x_n > a$.

2.4. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ se dice que converge a infinito y se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ si $\forall M>0$ existe n_0 tal que si $n>n_0$ entonces $x_n > M$. (a) ¿Qué significa entonces que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$?

Significa que $\forall M>0$ existe n_0 tal que si $n>n_0$ entonces

$$x_n < -M.$$

(b) Prueba que toda sucesión no acotada tiene una subsucesión convergente a ∞ o a $-\infty$.

① Una subsucesión de una sucesión es una subfamilia infinita de términos de la sucesión ordenada, según el orden creciente de sus índices. Por ejemplo:

(1) Los términos pares: $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \dots$

(2) Los términos impares: $x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots$

(3) Los múltiplos de tres: $x_3, x_6, x_9, x_{12}, x_{15}, \dots$

(4) Los términos a partir del 1000: $x_{1001}, x_{1002}, x_{1003}, x_{1004}, \dots$

② Como nuestra sucesión no está acotada, sucede que para todo $m \in \mathbb{N}$, existe un término de la sucesión x_{n_m} que no pertenece al intervalo $(-m, m)$. Podemos elegir $n_{m+1} > n_m$ $\forall m$. Consideramos la sucesión $y_m = x_{n_m}$. Sabemos que

$$y_m \notin (-m, m) \quad \forall m \geq 1.$$

Como tenemos infinitos valores, o bien hay infinitos valores positivos o bien infinitos valores negativos. Por simplicidad suponemos que hay infinitos valores positivos. Dichos valores positivos forman una subsucesión de $\{y_m\}_m$ y por tanto de $\{x_n\}_n$ si la ordenamos en orden creciente de sus índices. Ahora como el términos $y_m > 0$ y $y_m \notin (-m, m)$ deducimos que $y_m > m$ $\forall m$ y por tanto $y_m \to \infty$.

Si hay infinitos términos negativos, razonamos de forma análoga y obtenemos una subsucesión que tiende a $-\infty$.

2.6. Prueba que la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada (superiormente); por tanto convergente. Se define el número e como:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Veamos en primer lugar que la sucesión $x_n = (1+1/n)^n$ es creciente, es decir, $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n$. Para ello utilizaremos el binomio de Newton $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Por tanto, $$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot 1^{n+1-k}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\,\frac{\overbrace{(n+1)\,n\cdot\ldots\cdot(n+1-k+1)}^{k \text{ términos}}}{\underbrace{(n+1)(n+1)\ldots(n+1)}_{k \text{ términos}}}$$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n+1-k+1)\cancel{(n+1-k)(n+1-k-1)\ldots 1}}{\cancel{(n+1-k)(n+1-k-1)\ldots 1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1-k+1}{n+1} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \quad (*)$$

Observamos ahora que $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k =$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,\frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}^{k \text{ términos}}}{n\cdot n\ldots n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$= (*)$. Por tanto $x_{n+1} \geqslant x_n$ y la sucesión es creciente

Veamos ahora que la sucesión es acotada superiormente.

Hemos visto que

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{\underbrace{2\cdot\ldots\cdot 2}_{n-1 \text{ veces}}} = 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}} = 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}$$

$$= 1+2\left(1-(1/2)^n\right) \leq 1+2 = 3.$$

Por tanto está acotada superiormente por 3.

—o—

Calcula los límites de las sucesiones siguientes

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}} = e$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n}} = e^2$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}} = e^{1/2}$

2.7. Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, entonces se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n b_n = 0$. Pon ejemplos en los que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ no esté acotada y que $\lim_{n\to\infty} x_n b_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} x_n b_n = 0$ o bien $\lim_{n\to\infty} x_n b_n$ no exista.

① Como $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada $\Rightarrow$ $\exists\, M>0$ tal que $|b_n| < M$ $\forall n \geq 1$. Por tanto,

$$0 \leq |x_n b_n| = |x_n|\,|b_n| \leq |x_n|\cdot M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

porque $|x_n| \to 0$ ya que $x_n \to 0$

Por tanto, tenemos que $|x_n b_n| \longrightarrow 0$, lo que implica que

$x_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ~~$x_n b_n \leq c x_n$~~

③ Sea $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Sea ahora:
- $b_n = n^2$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$
- $b_n = n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $b_n = n^3$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

2.9. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

(1) Con un solo dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción, es decir, $a_1 = 1$.

(2) Con n datos de entrada usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo, es decir, $a_n = 4n + a_{n-1}$.

Se pide: (a) Definir la sucesión recurrente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 4n + a_{n-1} \end{cases}$$

(b) Estudia la monotonía y acotación de la misma.

$a_{n-1} \leq a_{n-1} + 4n = a_n$, por tanto es creciente

$a_n - a_{n-1} = 4n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, por tanto la sucesión no es acotada, porque si lo fuera, sería convergente y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - a_{n-1} = 0$!!

(c) Probar por inducción que $|a_n - 2n^2| < 2n$ para todo n.

Para $n=1$, tenemos que $|a_1 - 2| = |1-2| = 1 < 2$.

Supongamos el resultado cierto para n y veamos que también es cierto para $n+1$.

$$|a_{n+1} - 2(n+1)^2| = |a_n + 4n - 2(n^2 + 2n + 1)| =$$

$$= |a_n + 4n - 2n^2 - 4n - 2| = |a_n - 2n^2 - 2| < |a_n - 2n^2| + |-2|$$

$$= |a_n - 2n^2| + 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inducción}}}{<} 2n + 2 = 2(n+1)$$

Por tanto, se cumple que $|a_{n+1} - 2(n+1)^2| < 2(n+1)$ y se cumple la propiedad por inducción.

(d) Deducir que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$.

Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$ es equivalente a probar que

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2} - 1 = 0$ y para ello, basta probar que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{2n^2} - 1\right| = 0$.

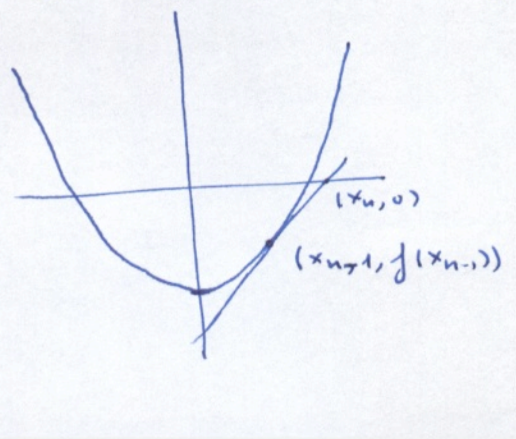
Para probar que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{2n^2} - 1\right| = 0$, usamos c)

$$0 \le \left|\frac{a_n}{2n^2} - 1\right| = \left|\frac{a_n - 2n^2}{2n^2}\right| < \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por el criterio del SANDWICH, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{2n^2} - 1\right| = 0$.

2.10. Sea $x_0 = 2$. Consideramos la función $f(x) = x^2 - 2$. Sea el punto del eje OX, $P_n := (x_n, 0)$ intersección de las rectas $y = 0$ y la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $n = 1, 2, 3, \dots$

(a) Encuentra una fórmula recurrente para la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$



la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ es

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\begin{cases} y-(x_{n-1}^2-2) = 2x_{n-1}(x-x_{n-1}) & \text{(Recta tangente)} \\ y=0 \end{cases}$$

Por tanto, $(x_n - x_{n-1}) \cdot 2x_{n-1} = -(x_{n-1}^2 - 2)$, es decir,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}}$$

También, podemos escribir $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}$

(b) Prueba que la sucesión anterior es convergente ¿Cual es su límite?

La sucesión es convergente por el ejercicio 2.8, (4) con $m=2$.

Además, allí probamos que el límite es $\sqrt{2}$.

(c) Encuentra un algoritmo para calcular $\sqrt[m]{x_0}$, con $x_0 > 0$ y $m \in \mathbb{N}$.

Consideramos la función $f(x) = x^m - x_0$. Sea el punto del eje OX, $P_n := (x_n, 0)$ intersección de las rectas $y=0$ y la recta tangente a la gráfica de f por el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ es:

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$$

$$f'(x) = m\,x^{m-1}$$

$$\begin{cases} y - (x_{n-1}^m - x_0) = m\,x_{n-1}^{m-1}(x - x_{n-1}) \\ y = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $(x_n - x_{n-1})\, m\, x_{n-1}^{m-1} = -(x_{n-1}^m - x_0)$

$$x_n := x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^m - x_0}{m\,x_{n-1}^{m-1}} = \frac{(m-1)\,x_{n-1}^m + x_0}{m\,x_{n-1}^{m-1}}$$

2.11. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones de números reales definidas por su primer término $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ y por las relaciones $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$ y $b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$.

Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes expresiones

(a) La sucesión $u_n := a_n + b_n$ es constante

$$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) + \frac{1}{4}(3a_n + b_n) =$$

$$= a_n + b_n = u_n$$

Por tanto, la sucesión $u_{n+1} = u_n$ es constante y así $u_n = u_0 = 2 + 4 = 6$.

(b) La sucesión $v_n := a_n - b_n$ es una sucesión geométrica

$$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n - \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{4}b_n =$$
$$= -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_n - b_n) = -\frac{1}{2}v_n$$

Por tanto, $v_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 v_{n-1} = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} v_0 =$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(a_0 - b_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(-2).$$

De este modo, $v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(-2)$

(c) El punto medio del segmento $[a_n, b_n]$ es el punto 3

Punto medio: $\dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{u_n}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

(d) Para cada n se cumple que $\begin{cases} a_n = 3 - 1/2^n \\ b_n = 3 + 1/2^n \end{cases}$

$$\begin{cases} u_n = 6 \\ v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n(-2) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_n + b_n = 6 \\ a_n - b_n = (-1/2)^n(-2) \end{cases}$$

Sumando las expresiones anteriores $2a_n = 6 - 2(-1/2)^n$ y así $a_n = 3 - (-1/2)^n$

Restando $2b_n = 6 + 2(-1/2)^n$ y así $b_n = 3 + (-1/2)^n$

2.13. Sea (u_n) una serie geométrica de primer término $u_0 = 1$ y razón $q \in (0,\infty)$. Llamaremos $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes expresiones:

(a) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \geq 2009$, entonces $q > 1$. (Verdadero.

Supongamos que $q \leq 1 \Rightarrow q^n \leq 1^n = 1$!! Por tanto $q > 1$.

(b) Si $q < 1$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < u_n < 1/2$. (Verdadera.

Como $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow$

$|(u_n := q^n) - 0| < 1/2$. En particular $0 < u_n < \frac{1}{2}$

(c) Si $q > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. (Verdadero)

Recordamos que $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (visto en la hoja 1). Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \infty$

porque como $q > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$.

(d) Si $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$, entonces $q = 1/2$ (Verdadera)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2$$

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$, entonces $q < 1$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q} = 2$. De este modo, $\frac{1}{2} = 1 - q \Rightarrow q = 1/2$

(e) Si $q = 2$, entonces $S_4 = 15$ (Falsa)

Si $q = 2$, $S_4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

2.15. Prueba que si $(a_n)_n$ es una sucesión decreciente de números reales positivos y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$

① Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\exists \lim_{m\to\infty} S_m = L$ donde $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$, entonces $|S_m - L| < \varepsilon$, es decir

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m} a_n \right| = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n < \varepsilon.$$

Como todos los términos son positivos

$$\sum_{n=m+1}^{2m} a_n \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$$

Además, como la sucesion $(a_m)_m$ es decreciente

$$m \cdot a_{2m} \leq \sum_{n=m+1}^{2m} a_n < \varepsilon$$

Por tanto, la sucesión $m\, a_{2m} \xrightarrow{m\to\infty} 0 \Rightarrow 2m\, a_{2m} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

Por otra parte,

$$0 \leq (2m+1)\, a_{2m+1} \leq \Bigl(\underset{\downarrow \atop 1}{\frac{2m+1}{2m}} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{\underline{2m\, a_{2m}}} \Bigr) \longrightarrow 0$$

Por el criterio del SANDWICH, la sucesión $(2m+1)\, a_{2m+1} \longrightarrow 0$.

Como los términos pares y los términos impares de la sucesion $n a_n \to 0$ tienden a 0, la sucesión tiende a 0.

2.18. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$, entonces

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ Falso.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{0}{1} = 0$!!

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ Falso

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{0}{\infty} = 0$!!

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (Verdadero)

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

si $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \geq 1 \Rightarrow b_n \geq a_n$ para cada $n \geq n_0$.

Por tanto, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (Falso)

Véase el apartado c)

2.19 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ donde $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_n = 9 \ \forall n \geq 3$

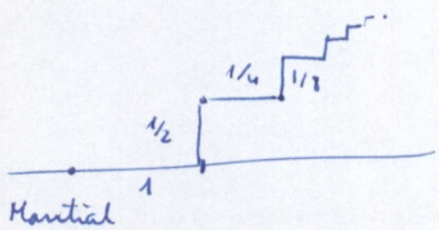
representa al número real: a) 1,3 b) 0,13 c) 1,4 d) 0,14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 0,13 + 9 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{10^n} =$$

$$= 0,13 + \frac{9}{1000} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{10^{n-3}} = 0,13 + \frac{9}{1000} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$$

$$= 0,13 + \frac{9}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 0,13 + \frac{9}{1000} \cdot \frac{10}{9} = 0,13 + \frac{1}{100} = 0,14$$

2.20 Enunciado en la hoja



$$x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} x$$

Por tanto, $x = \frac{1}{1-1/4} = 4/3$, $y = \frac{1}{2} \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

El punto es el $(4/3, 2/3)$

2.21 Sean las series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^{k+1}$.

Prueba que todas son absolutamente convergentes $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tenemos que probar que las series de términos positivos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k-1}}{(2k-1)!}$$ son convergentes.

Por el criterio del cociente veremos que lo son:

① $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0$$

③ $a_n = \frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+1)2n} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)2n} = 0$$

② $a_n = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

2.22 Calcula el dominio de la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$

Por el criterio del cociente tenemos que:

$a_n = \frac{|x|^n}{3n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{3(n+1)}}{\frac{|x|^n}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x| n}{n+1} =$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Por tanto, por el criterio del cociente, si $|x|$ es menor que 1 la serie es absolutamente convergente y por tanto convergente.

- Si $x>1 \Rightarrow f(x)$ es divergente por el criterio del cociente.

- Si $x<-1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(+x)^n}{3n}$ no existe (porque oscila a $+\infty$ y $-$ y por tanto la serie no puede ser convergente.)*

- Si $x=1$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

porque es la serie armónica con $p=1$

- Si $x=-1$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ que es convergente por el criterio de Leibnitz

CONCLUSION: el dominio es $[-1,1)$

* Los términos pares de la sucesión $\frac{x^n}{3n}$ para $x<-1$ son

$$\frac{|x|^{2k}}{3\cdot(2k)} \quad \text{con } |x|>1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k}}{3(2k)} = \lim_{t\to\infty} \frac{|x|^{2t}}{6t} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2\,|x|^{2t}\cdot \log|x|}{6} = +\infty$$

* Los términos impares de la sucesión $\frac{x^n}{3n}$ para $x<-1$ son

$$(-1)\frac{|x|^{2k+1}}{3(2k+1)} \quad \text{con } |x|>1$$

$$\lim_{k\to\infty} (-1)\frac{|x|^{2k+1}}{3(2k+1)} = -\lim_{t\to\infty} \frac{|x|^{2t+1}}{6t+3} = -\lim_{t\to 0} \frac{2\,|x|^{2t+1}\log|x|}{6} = -\infty$$

Por tanto oscila entre $+\infty$ y $-\infty$, con lo que el $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3n}$ no existe si $x<-1$. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$ no puede converger