1.1. A) Encuentra el número más pequeño de los siguientes conjuntos de números naturales

a) $A := \{2n : n \geq 5\} = \{$ números pares $\geq 10\}$

b) $B := \{2K^2+7 : 2 \leq K \leq 8\} = \{15, 25, 39, 57, 79, 105, 135\}$

Número más pequeño de A es 10

Número más pequeño de B es 15

¿Cuál es el elemento más grande de cada conjunto?

· A no tiene un elemento más grande

· B sí lo tiene y es 135

B) ¿Es verdad que si $E \subseteq \mathbb{N}$ y $E \neq \emptyset$, existe un elemento $a \in E$ de modo que $a \leq b \ \forall b \in E$?

Sí, porque $\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado y todos sus subconjuntos no vacíos tienen mínimo

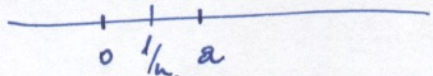
C) Observa el conjunto de los números racionales $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ¿En este subconjunto existe un elemento que es el más pequeño de todos?

¿Existe alguno que es el más grande?

$S := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$

No existe un elemento que sea el más pequeño de todos porque la sucesión tiende a 0 y por tanto el elemento más pequeño de todos debería de ser el 0, que no está.

En efecto, sea $a \in S$ tal que $a \leq x \ \forall x \in S$. Como todos los elementos de S son positivos, entonces $a > 0$. Como $\frac{1}{n} \to 0$, entonces



existe n_0 grande tal que $0 < \frac{1}{n_0} < a$!! porque $\frac{1}{n_0} \in S$ y $a \leq x \ \forall x \in S$

Por tanto no existe $a \in S$ tal que $a \leq x \ \forall x \in S$

Observamos que $1 \geq x \ \forall x \in S$ y por tanto 1 es el elemento más grande de S

1.3. Usando que todo número entero $n \in \mathbb{N}$ se descompone como producto de potencias de primos distintos, prueba que:

(a) Si $p, n \in \mathbb{N}$ y p es un número primo entonces que p divide a n^2 es equivalente a que p divida a n

(b) y que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, siempre que p sea un número primo

(a) Escribimos $n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$: q_i son números primos distintos y $\alpha_i \geq 1$.

Entonces $n^2 = q_1^{2\alpha_1} \cdots q_r^{2\alpha_r}$. Como p divide a n^2 existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 = p \cdot b$. Escribimos $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$: los p_j son primos distintos y los $\beta_j \geq 1$.

Por tanto $q_1^{2\alpha_1} \cdots q_r^{2\alpha_r} = p\, p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$. Por la unicidad de la descomposición de un número entero como producto de primos, deducimos que p es igual a uno de los q_i $\Rightarrow n = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{i-1}^{\alpha_{i-1}} q_i^{\alpha_i - 1} \cdot p\, q_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots q_r^{\alpha_r} \Rightarrow p | n$. ($p$ divide a n)

(b) $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Supongamos que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$. Podemos suponer que la fracción a/b es una fracción reducida es decir, $mcd(a,b) = 1$. Elevando al cuadrado la igualdad $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ tenemos:

$$p = \frac{a^2}{b^2}, \text{ es decir, } b^2 p = a^2$$

(p divide a a)

Como p es primo y divide a a^2, por el apartado anterior $p | a \Rightarrow$ $a = cp$. Sustituyendo en $b^2 p = a^2$, tenemos que

$$b^2 p = (cp)^2 = c^2 p^2 \Rightarrow c^2 p = b^2$$

De nuevo como p es primo y divide a b^2, por el apartado anterior $p | b$ (p divide a b).

Por tanto, hemos deducido que $p | a$ y $p | b$ (p divide a a y p divide a b) lo cual es una contradicción porque $mcd(a,b) = 1$

1.4. Sea $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$ y sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prueba que $p+x$ y $p \cdot x$ son irracionales, es decir, pertenecen a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Como $p \in \mathbb{Q}$, si $p+x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \overset{\mathbb{Q}}{(p+x)} - \overset{\mathbb{Q}}{p} \in \mathbb{Q}$!! Por tanto $p+x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Como $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$, si $p \cdot x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \underset{\mathbb{Q}}{\frac{1}{p}} \cdot \underset{\mathbb{Q}}{(px)} \in \mathbb{Q}$!! Por tanto $p \cdot x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1.6. Simplifica las siguientes expresiones

a) $\dfrac{x^2 - a^2}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x+a)}{(x-a)} = x+a$

b) $\dfrac{x^2 + 2ax + a^2}{x+a} = \dfrac{(x+a)^2}{x+a} = x+a$

c) $\dfrac{x^3 - a^3}{x-a} = \dfrac{(x-a)(x^2 + xa + a^2)}{(x-a)} = x^2 + xa + a^2$

1.9. Halla todos los números x, que satisfacen, en cada caso, las siguientes ecuaciones

a) $x^2 - 4 \geq |2x+4|$

1) Si $2x+4 \geq 0$ nos queda la ecuación $x^2 - 4 \geq 2x+4 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ tiene por soluciones $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Por tanto $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

Además $2x+4 \geq 0 \Longleftrightarrow x+2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -2$

	-2	$(-2, 4)$	4	$4, +\infty$
$x+2$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-4)(x+2)$	0	$-$	0	$+$

Por tanto, la primera solución es $S_1 := \{-2\} \cup [4, +\infty)$

2) Si $2x+4 < 0$ nos queda la ecuación $x^2 - 4 \geq -(2x+4) = -2x-4$, es decir,

$x^2 \geq -2x \Longleftrightarrow x^2 + 2x \geq 0 \Longleftrightarrow x(x+2) \geq 0$

Además $2x+4<0 \iff x+2<0 \iff x<-2$

	$(-\infty,-2)$
x	$-$
$x+2$	$-$
$x(x+2)$	$+$

Por tanto, la segunda solución es $S_2 = (-\infty,-2)$

Así la solución del ejercicio es $S := (-\infty,-2] \cup [4,+\infty)$

d) $|x-1|+|x-2|>1$

Si $x \geq 2$ entonces $x-1 \geq 0$, $x-2 \geq 0$ y nos queda la ecuación

$x-1+x-2>1$ luego $2x>4$ es decir $x>2$

Si $1 \leq x < 2$ entonces $x-1 \geq 0$, $x-2<0$ y nos queda la ecuación

$x-1-(x-2)>1$ es decir $x-1-x+2>1$ o lo que

es lo mismo $1>1$!!

Si $x \leq 1$ entonces $x-1 \leq 0$, $x-2 \leq 0$ y nos queda la ecuación

$-(x-1) + (x-2) > 1$ es decir $-2x+3>1$ o lo que es lo

mismo $\cancel{1}$ $2>2x$ es decir $1>x$

Por tanto la solución es $S := (-\infty, 1) \cup (2,+\infty)$

1.10. Resuelve las ecuaciones $|x-3|+|x-7|=4$

Si $x \geq 7$ entonces $x-3 \geq 0$, $x-7 \geq 0$ luego nos queda la ecuación

$x-3+x-7=4 \iff 2x-10=4 \iff x=7$

Si $3 \leq x < 7$ entonces $x-3 \geq 0$, $x-7<0$ luego nos queda la ecuación

$x+3-(x-7)=4 \iff x-3-x+7=4 \iff 4=4$

luego todos los valores valen

Si $x<3$ entonces $x-3 \leq 0$, $x-7 \leq 0$, luego nos queda la ecuación

$$-(x-3)-(x-7)=4 \iff -2x+10=4 \iff 2x=6 \iff x=3$$

Por tanto la solución es $S := [3,7]$

1.17. Calcula cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos (si existen) de los siguientes conjuntos

1) $\{3, 3.3, 3.33, 3.333, \dots\}$

$$3$$
$$3+\frac{3}{10}$$
$$3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}$$
$$3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}$$
$$\vdots$$
$$3+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\dots+\frac{3}{10^n} = 3\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\dots+\frac{1}{10^n}\right)$$

Cuando hacemos $n\to\infty$ nos queda $3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) =$

$$= 3\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

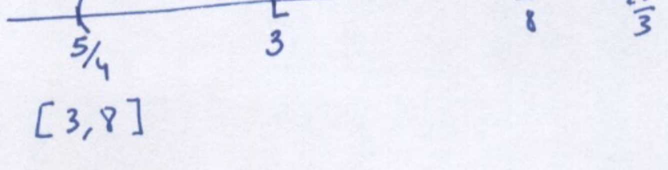
Como la sucesión anterior es creciente nos queda que el supremo del conjunto anterior es $\frac{10}{3}$

Además el ínfimo es 3

Por tanto, las cotas superiores son $\left[\frac{10}{3}, +\infty\right)$

las cotas inferiores son $(-\infty, 3]$

2) $\left[3, \frac{25}{3}\right] \cap \left(\frac{5}{4}, 8\right]$



Por tanto, la intersección es $[3,8]$

Así el supremo del conjunto es 8
el ínfimo del conjunto es 3

Las cotas superiores son $[8,+\infty)$

Las cotas inferiores son $(-\infty,3]$

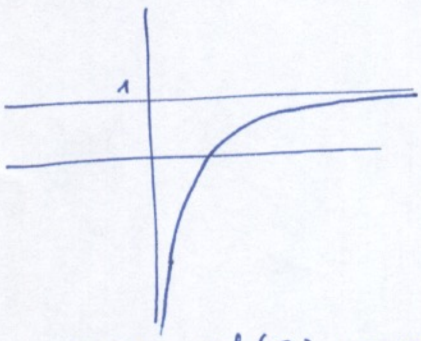
3) $\{x\in\mathbb{R} : x = 1-\frac{1}{r} \text{ con } r>0\} = (-\infty,1) = S$

¿Por qué? la función $1-\frac{1}{r}$ es continua en $(0,+\infty)$

Además su derivada es $\frac{1}{r^2}$ que es positiva y por tanto es creciente

Como $\lim_{r\to 0} 1-\frac{1}{r} = -\infty$ y $\lim_{r\to\infty} 1-\frac{1}{r} = 1$ deducimos que

nuestro conjunto es $(-\infty,1)$



Observamos que $\inf(S)$ no existe
$\sup(S)=1$
cotas inferiores de S no hay
cotas superiores de S $[1,+\infty)$

4) $A\subseteq\mathbb{R}$ de modo que si $x\in A$ y su forma decimal es $x = c.a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$

se tiene que $a_{2k}=1$ para todo $k\in\mathbb{N}$

Sobre c no nos dicen nada, así que c puede tomar cualquier valor

Puntos que estan en A son

$n.010101\ldots$ con $n\in\mathbb{Z}$

Por tanto A no tiene ni ínfimo ni supremo y no tiene cotas inferiores ni superiores.

1.13. Si $a \leq b$ y para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $a \leq b \leq a+\varepsilon$, prueba que $a = b$. Del mismo modo prueba que si para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $b - \varepsilon \leq a \leq b$, entonces $a = b$.

- Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $a < b$. Entonces $b - a > 0$. Elegimos $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Entonces para esta elección de $\varepsilon > 0$ se cumple que:

$$a \leq b \leq a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$$

Por tanto, llegamos a contradicción. Como $a \leq b$ y $a < b$ no es posible, nos queda que $a = b$.

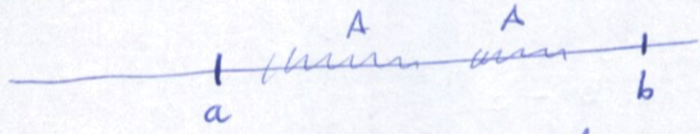
- El segundo apartado se hace igual (y sirve el mismo $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ para llegar a contradicción)

1.14. Sea A un conjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $A_0 \subseteq A$ con $A_0 \neq \phi$

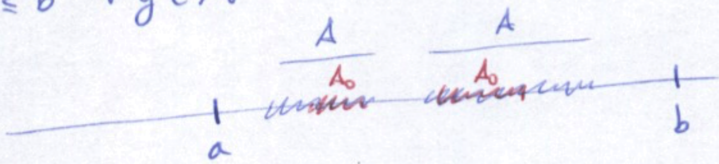
Prueba que A_0 está acotado y que

$$\inf A \leq \inf A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A$$

① Como A está acotado $\Rightarrow$ $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b \;\; \forall x \in A$



Sea ahora $y \in A_0$. Como $A_0 \subseteq A$, entonces $y \in A$ y por tanto $a \leq y \leq b \;\; \forall y \in A_0$



② • $\inf A_0$ = mayor de las cotas inferiores de A_0

$\inf A$ = mayor de las cotas inferiores de A_0

Si $y \in A_0 \underset{A_0 \subset A}{\Rightarrow} y \in A \Rightarrow \inf A \leq y$

Por tanto, $\inf A \leq y \;\; \forall y \in A_0 \Rightarrow \inf A$ es cota inferior de A_0 y por tanto $\inf A \leq \inf A_0$.

• $\inf A_0 \leq \sup A_0$ (siempre se cumple)

• $\sup A_0 \leq \sup A$

$\sup A_0$ = menor de las cotas superiores de A_0

$\sup A$ = menor de las cotas superiores de A

Si $y \in A_0 \underset{A_0 \subset A}{\Rightarrow} y \in A \Rightarrow y \leq \sup A$

Por tanto, $y \leq \sup A \;\; \forall y \in A_0 \Rightarrow \sup A$ es cota superior de A_0 y por tanto $\sup A_0 \leq \sup A$.

1.13 después de 1.14

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A+B = \{x \in \mathbb{R} : x = a+b \text{ donde } a \in A \text{ y } b \in B\}$$

$$\alpha A = \{x \in \mathbb{R} : x = \alpha a \text{ donde } a \in A\}$$

Prueba que:

(i) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

- Veamos en primer lugar que $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

  Sea $x \in A+B \Rightarrow x = a+b$ donde $a \in A$ y $b \in B$

  $\left.\begin{array}{l}\text{Como } a \in A \Rightarrow a \leq \sup(A) \\ \text{Como } b \in B \Rightarrow b \leq \sup(B)\end{array}\right| \Rightarrow x = a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$

  Por tanto $\forall x \in A+B$ se cumple que $x \leq \sup(A) + \sup(B)$

  Por lo que $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota superior $\Rightarrow \sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$

- Veamos ahora que $\sup(A+B) \geq \sup(A) + \sup(B)$. Para ello usaremos el ejercicio 1.9. Vamos a demostrar que $\forall \varepsilon > 0$

  $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon \leq \sup(A+B)$ y deduciremos usando el ejercicio 1.9. que $\sup(A) + \sup(B) = \sup(A+B)$.

  Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota superior de A. Por tanto existe $a \in A$ tal que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \sup(A)$

  Análogamente $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota superior de B. Por tanto existe $b \in B$ tal que $\sup(B) - \varepsilon/2 < b \leq \sup(B)$

  Sea $x = a+b \in A+B$. Se cumple que

  $$\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon = \sup(A) - \varepsilon/2 + \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} <$$
  $$< a+b = x$$

  Por tanto $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$ no es cota superior y por tanto $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon \leq \sup(A+B)$ (que es lo que queríamos demostrar)

(ii) $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

- Veamos en primer lugar que $\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A+B)$

 Sea $x \in A+B \Rightarrow x = a+b$ donde $a \in A$ y $b \in B$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } a \in A \Rightarrow a \geq \inf(A) \\ \text{Como } b \in B \Rightarrow b \geq \inf(B) \end{array}\right| \Rightarrow x = a+b \geq \inf(A) + \inf(B)$$

 Por tanto, $\forall x \in A+B$ se cumple que $x \geq \inf(A) + \inf(B)$, es decir, $\inf(A) + \inf(B)$ es una cota inferior $\Rightarrow \inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A+B)$

- Veamos ahora que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$. Para ello, usaremos el ejercicio 1.9. Vamos a demostrar que $\forall \varepsilon > 0$ $\inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$ y deduciremos por el ejercicio 1.9 que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\inf(A) + \varepsilon/2$ no es cota inferior de A. Por tanto, existe $a \in A$ tal que $\inf(A) \leq a < \inf(A) + \varepsilon/2$. Análogamente, $\inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota inferior de B. Por tanto, existe $b \in B$ tal que $\inf(B) \leq b < \inf(B) + \varepsilon/2$.

 Sea $x = a+b \in A+B$. Se cumple que:

$$x = a+b < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2} + \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2} = \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$$

 Por tanto $\inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$ no es cota inferior de $A+B$ y por tanto

$$\inf(A+B) \leq \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$$

que es lo que queríamos demostrar

(iii) $\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A)$ y $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ siempre que $\alpha > 0$.

① $\inf(\alpha A) \leq \alpha \inf(A)$

Sea $x \in A \Rightarrow \alpha x \in \alpha A \Rightarrow \inf(\alpha A) \leq \alpha x \Rightarrow \frac{\inf(\alpha A)}{\alpha} \leq x$.

Como esto se cumple $\forall x \in A \Rightarrow \frac{\inf(\alpha A)}{\alpha}$ es una cota inferior de $A \Rightarrow \frac{\inf(\alpha A)}{\alpha} \leq \inf(A) \Rightarrow \inf(\alpha A) \leq \alpha \inf(A)$.

② $\inf(\alpha A) \geq \alpha \inf(A)$

Sea $y \in \alpha A \Rightarrow \exists a \in A$ tal que $y = \alpha a \Rightarrow \frac{y}{\alpha} = a \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y}{\alpha} \geq \inf(A) \Rightarrow y \geq \alpha \inf(A)$.

Como esto se cumple $\forall y \in \alpha A \Rightarrow \alpha \inf(A)$ es una cota inferior de $\alpha A \Rightarrow \alpha \inf(A) \leq \inf(\alpha A)$.

① $\sup(\alpha A) \geq \alpha \sup(A)$

Sea $x \in A \Rightarrow \alpha x \in \alpha A \Rightarrow \alpha x \leq \sup(\alpha A) \Rightarrow x \leq \frac{\sup(\alpha A)}{\alpha}$

Como esto se cumple $\forall x \in A \Rightarrow \frac{\sup(\alpha A)}{\alpha}$ es una cota superior de $A \Rightarrow \sup(A) \leq \frac{\sup(\alpha A)}{\alpha} \Rightarrow \alpha \sup(A) \leq \sup(\alpha A)$

② $\sup(\alpha A) \leq \alpha \sup(A)$

Sea $y \in \alpha A \Rightarrow \exists a \in A$ tal que $y = \alpha a \Rightarrow \frac{y}{\alpha} = a \in A \Rightarrow$

$\frac{y}{\alpha} = a \leq \sup(A) \Rightarrow y \leq \alpha \sup(A)$

Como esto se cumple $\forall y \in \alpha A \Rightarrow \alpha \sup(A)$ es una cota superior de $\alpha A \Rightarrow \sup(\alpha A) \leq \alpha \sup(A)$

(iv) $\inf(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ y $\sup(\alpha A) = \alpha \inf(A)$ siempre que $\alpha < 0$.

Hagamos primero el caso $\alpha = -1$. Es decir

$$\inf(-A) = -\sup(A) \quad y \quad \sup(-A) = -\inf(A)$$

① $\inf(-A) \leq -\sup(A)$

Sea $y \in A \Rightarrow -y \in (-A) \Rightarrow -y \geq \inf(-A) \Rightarrow y \leq -\inf(-A)$

Como esto se cumple $\forall y \in A \Rightarrow -\inf(-A)$ es cota superior de A

$\Rightarrow \sup(A) \leq -\inf(-A) \Rightarrow \inf(-A) \leq -\sup(A)$.

② $\inf(-A) \geq -\sup(A)$

Sea $x \in (-A) \Rightarrow x = -a$ para cierto $a \in A \Rightarrow -x = a \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow -x \leq \sup(A) \Rightarrow x \geq -\sup(A)$

Como esto se cumple $\forall x \in (-A) \Rightarrow -\sup(A)$ es cota inferior de $(-A)$

$\Rightarrow \inf(-A) \geq -\sup(A)$

③ $\sup(-A) \overset{B:=-A}{=} \sup(B) = -\inf(-B) = -\inf(-(-A)) = -\inf(A)$

usando el ~~apartado~~ caso anterior para $B := -A$

— ∘ —

Sea $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = (-1)\beta$ donde $\beta = -\alpha > 0$. Usando (iii) y lo anterior

$$\begin{cases} \inf(\alpha A) = \inf((-1)\beta A) = -\sup(\beta A) = -\beta \sup(A) = \alpha \sup(A) \\ \sup(\alpha A) = \sup((-1)\beta A) = -\inf(\beta A) = -\beta \inf(A) = \alpha \inf(A) \end{cases}$$

1.16. Sea α una cota superior de $A \subseteq \mathbb{R}$

A) Prueba que si $\alpha \in A$, entonces $\alpha = \sup(A)$

B) Prueba que $\alpha = \sup(A) \iff \forall r > 0 \; \exists a \in A$ de modo que $\alpha - r \leq a$

A) $\sup(A)$ es la menor de las cotas superiores.

Sea b una cota superior de $A \Rightarrow b \geq x \; \forall x \in A$. En particular como $\alpha \in A$ α cumple que $\alpha \leq b$. Como α es también cota superior deducimos que es la menor de las cotas superiores y por tanto es el supremo.

B) Supongamos primero que $\alpha = \sup(A)$

Sea $r > 0$, entonces $\alpha - r$ no es cota superior de A (ya que α es la menor de las cotas superiores) por tanto $\exists a \in A$ tal que $\alpha - r \leq a$. (porque si no existiese $\alpha - r$ sería cota superior y no puede serlo porque α es la menor)

Supongamos ahora que $\forall r > 0 \; \exists a \in A$ de modo que $\alpha - r \leq a$

Sabemos por hipótesis que α es cota superior. Veremos ahora que es la menor de las cotas superiores. Sea β una cota estrictamente menor que $\alpha \Rightarrow r := \alpha - \beta > 0$ y $\beta = \alpha - r$. Por hipótesis existe $a \in A$ tal que $\beta = \alpha - r \leq a$. Para asegurarnos de que todo está bien necesitamos encontrar $a \in A$ tal que $\beta < a$.

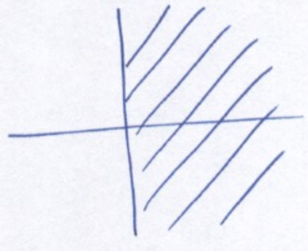
Para ello, elegimos $r' = \frac{r}{2} > 0$ y tenemos que

$$\beta = \alpha - r < \alpha - \frac{r}{2} = \alpha - r'$$

Por hipótesis existe $a' \in A$ tal que $\beta < \alpha - r' \leq a'$ luego β no es cota superior!! Por tanto α es la menor de las cotas superiores, es decir, α es el supremo de A.

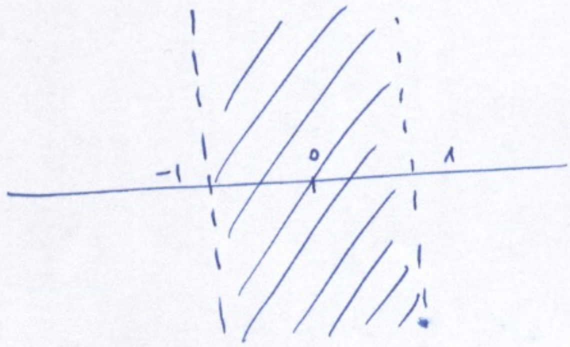
1.18. Representar en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$



esta línea vertical no está en el conjunto

(2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$



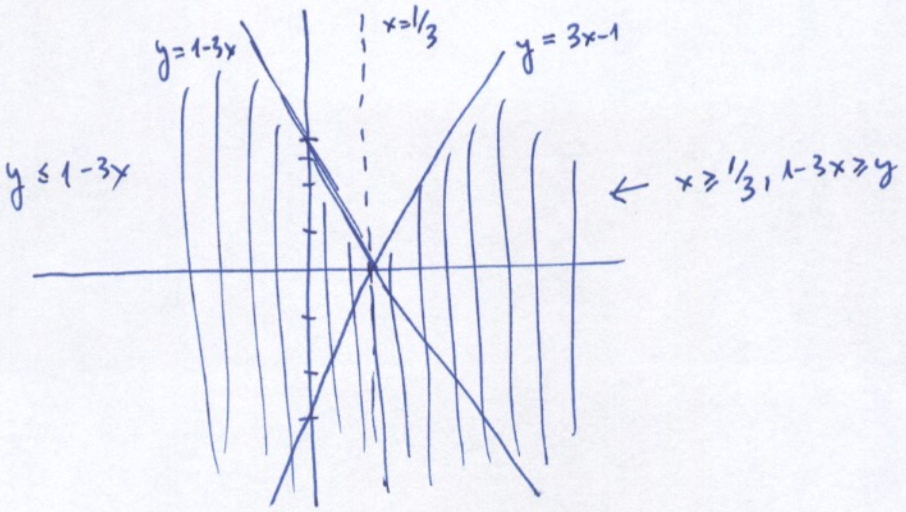
(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |3x-1| \geq y\}$

Si $3x-1 \geq 0$ nuestro conjunto vendría dado por $3x-1 \geq y$

Si $3x-1 < 0$ nuestro conjunto vendría dado por $1-3x \geq y$

La condición $3x-1 \geq 0 \iff x \geq 1/3$ y entonces $3x-1 \geq y$

La condición $3x-1 < 0 \iff x < 1/3$ y entonces $1-3x \geq y$



4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x^2-x|+x>y\}$

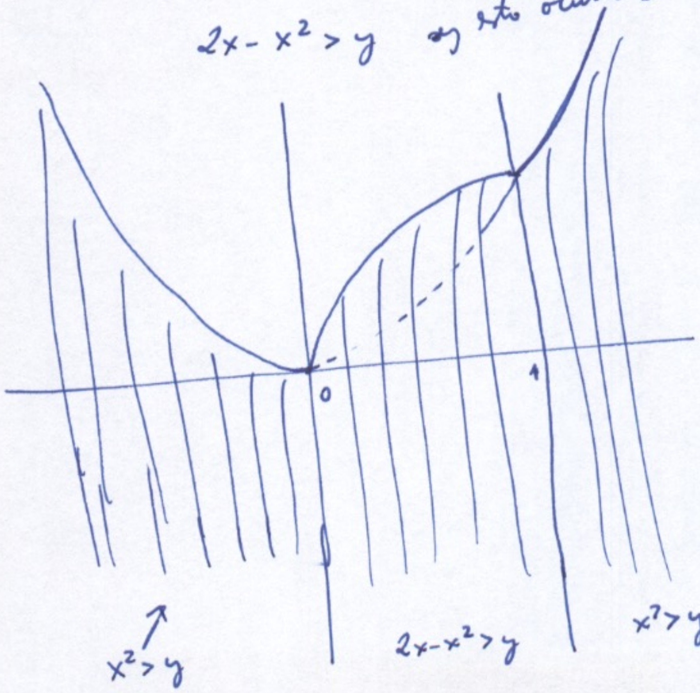
• Si $x^2-x\geq 0$ la ecuación $|x^2-x|+x>y$ nos queda $x^2-x+x>y$ es decir $x^2>y$ o lo que es lo mismo $y<x^2$.

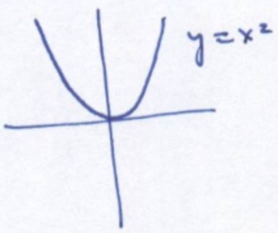
Observamos que $x^2-x=x(x-1)\geq 0$ en la siguiente región

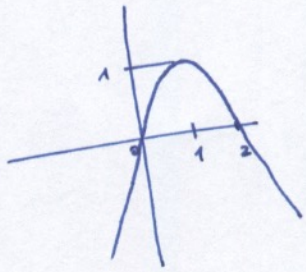
	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-x	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto $x^2-x\geq 0$ si y sólo si $x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

• Si $x^2-x<0$ la ecuación $|x^2-x|+x>y$ nos queda $x-x^2+x>y$ es decir $2x-x^2>y$ y esto ocurre en la región $x\in(0,1)$







5) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ = conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^2$ que distan del origen <1.