5.1 Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n$

$$P(0) = a_0 = 1$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$P'(0) = a_1 = 0$$

$$P''(x) = 2a_2 + 3.2 a_3 x + 4.3 a_4 x^2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$P''(0) = 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$P'''(x) = 6a_3 + 4.3.2 a_4 x + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$$

$$P'''(0) = 6a_3 = 2 \Rightarrow a_3 = 1/3$$

luego es

$$P(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n$$

$$\forall a_4, a_5, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 4.$$

Esos son todos los polinomios que cumplen las condiciones.

El grado mínimo es 3, que corresponde al polinomio

$$1 + \frac{1}{3}x^3.$$

5.2 a)

$$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'''(0) = 0$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}$$

b)

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = (1+x^2)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2} \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -2(1+x^2)^{-3}[1-3x^2] \qquad f'''(0) = -2$$

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{1}{3}x^3$$

c)

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$f''(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x+\pi) \qquad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \qquad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f^{(2n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + 2n\frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{(2n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

5.2 d) $f(x) = e^x \qquad f^{(k)}(x) = e^x \qquad f^{(k)}(1) = e$

$$P_n(x) = e + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \dots + \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

---

e)

$f(x) = x^5 + x^3 + x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = 20x^3 + 6x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = 60x^2 + 6$	$f'''(0) = 6$
$f^{(4)}(x) = 120x$	$f^{(4)}(0) = 0$

$$P_5(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{6}{3!}x^3 + 0 =$$

$$= x + x^3$$

---

f)

$f(x) = \ln x$	$f(2) = \ln 2$
$f'(x) = x^{-1}$	$f'(2) = \frac{1}{2}$
$f''(x) = -x^{-2}$	$f''(2) = \frac{-1}{4}$
$f'''(x) = 2x^{-3}$	$f'''(2) = \frac{1}{4}$
$f^{(4)}(x) = -3 \cdot 2x^{-4}$	$f^{(4)}(2) = \frac{-3}{8}$

$$P_4(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}\frac{x}{1!} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{x^4}{4!} =$$

$$= \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64}.$$

5.21 g)

$$f(x) = (x+1)^{-1}$$
$$f'(x) = -(x+1)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(x+1)^{-3}$$
$$f'''(x) = -3!\,(x+1)^{-4}$$
$$f^{(4)}(x) = 4!\,(x+1)^{-5}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n!\,(x+1)^{-n-1}$$

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = -1$$
$$f''(0) = 2$$
$$f'''(0) = -3!$$
$$f^{(4)}(0) = 4!$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} n!$$

$$P_n(x) = 1 - \frac{1x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} - \frac{3!\,x^3}{3!} + \frac{4!\,x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!\,x^n}{n!} =$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^{n+1} x^n$$

h)

Se trata de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Por el apartado anterior es

$$\frac{1}{x+1} \simeq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^{2n+1} x^{2n}$$

luego

$$\frac{1}{x^2+1} \simeq 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^{2n+1} x^{4n}$$

luego

$$\frac{x}{x^2+1} \simeq x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \cdots + (-1)^{2n+1} x^{4n+1}$$

es el polinomio pedido.

5.3 a) $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ es $P_5(x)$ y $P_6(x)$, luego

$$|\operatorname{sen} x - P_6(x)| = |T_6| = \left| \frac{\operatorname{sen}(\alpha + 7\frac{\pi}{2})}{7!} x^7 \right| < \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$$

ya que $|x| \leq 1$, y como α verifica $0 < \alpha < x \leq 1$

$$\operatorname{sen}(\alpha + 7\tfrac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\alpha - \tfrac{\pi}{2} + 4\pi) = \operatorname{sen}(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$$

como $\alpha \in (0,1) \subset (0, \frac{\pi}{2})$, $|\cos\alpha| \leq 1$.

b) Se pide

$$\left| \cos x - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \right| < 10^{-4}, \text{ con } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

es decir

$$\left| \cos x - P_{2n+1}(x) \right| = \left| T_{2n+1}(x) \right| = \left| \frac{\cos(\alpha + (2n+2)\frac{\pi}{2})}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right|$$

Como es $0 < \alpha < x \leq \frac{\pi}{2} = 1{,}57\ldots < 1{,}58 < \frac{7}{4}$ y

$|\cos(\alpha + (2n+2)\frac{\pi}{2})| \leq 1$ y $|x| < \frac{7}{4}$, queda

$$|T_{2n+1}(x)| < \frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{7}{4}\right)^{2n+2} < 10^{-4}. \text{ es decir}$$

$$7^{2n+2} \cdot 10^4 < 4^{2n+2} \cdot (2n+2)!$$

para $n=3$ es $7^8 \cdot 10^4 \not< 4^8 \cdot 8!$ pues $5{,}76 \cdot 10^{10} > 2{,}64 \cdot 10^9$

para $n=4$ es $7^{10} \cdot 10^4 < 4^{10} \cdot 10!$ pues $2{,}82 \cdot 10^{12} < 3{,}80 \cdot 10^{12}$

luego $n_0 = 4$.

5.4] a)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + T_{2n+1}$$

como $T_{2n+1}(x) = \dfrac{\cos(\alpha + (2n+2)\frac{\pi}{2})}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}$

para $x=1$, como $|\cos u| \leq 1$ $\quad |T_{2n+1}| < \dfrac{1}{(2n+2)!} < 10^{-5}$

es decir $(2n+2)! > 10^5$

para $n=3$ no se cumple: $8! = 40320 < 10^5$

para $n=4$ sí se cumple: $10! \simeq 3{,}6 \cdot 10^6 > 10^5$

luego

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4.3.2} - \frac{1}{6.5.4.3.2} + \frac{1}{8!} \simeq \frac{21785}{8!} =$$

$$= \underline{0{,}54030}25 \qquad [\cos 1 = 0{,}5403023]$$

b) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + T_n$

$T_n = \dfrac{e^\alpha x^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad$ para $x=1$ $\quad$ $T_n = \dfrac{e^\alpha \cdot 1}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$

$0 < \alpha < 1$

es decir $(n+1)! > 3 \cdot 10^5$

para $n=7$ $\Rightarrow$ $8! = 40320 < 300000$

para $n=8$ $\Rightarrow$ $9! = 362880 > 300000$

luego es

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} =$$

$$= \frac{109601}{40320} = \underline{2{,}71827}88 \qquad [\text{es } e = 2{,}7182818]$$

5.4 c)

$f(x) = \text{arctg } x$

$f'(x) = (1+x^2)^{-1}$

$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$

$f'''(x) = (-2+6x^2)(1+x^2)^{-3}$

$f^{(4)}(x) = 24(x-x^3)(1+x^2)^{-4}$

$f^{(5)}(x) = 24(1-10x^2+5x^4)(1+x^2)^{-5}$ no se ve una forma general.

Como sabemos que

$$\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + T_{2n+1}$$

si tomamos

$$\text{arctg } \frac{1}{10} \simeq \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500\,000}$$

[En series alternadas:

el error cometido en valor absoluto es menor que el termino siguiente, es decir

$$T_{2n+1} < \frac{1}{7 \cdot 10^7} < \frac{1}{10^5} \quad \text{porque } 10^5 < 7 \cdot 10^7$$

así que

$$\text{arctg } \frac{1}{10} \simeq 0{,}1 - 0{,}000333 + 0{,}000002 = 0{,}099668$$

con calculadora: $\text{arctg } \frac{1}{10} = 0{,}0996686$,

no se puede con menos porque $\frac{1}{50000} \nless \frac{1}{100000}$.

5.5 Sabemos que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + T_n(x)$$

con $T_n(x) = \frac{(-1)^n (1+\alpha)^{-n-1}}{n+1} x^{n+1}$

ya que $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \cdot (1+x)^{-n-1}$

por tanto

$$\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \right) \right| =$$

$$= \left| T_n(x) \right| = \left| \frac{(-1)^n (1+\alpha)^{-n-1}}{n+1} x^{n+1} \right| = \frac{1}{|1+\alpha|^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} <$$

y como si $x \in [0,1]$, si $0 < \alpha < 1$, luego

$$< \frac{1}{1^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ya que $1+0 < 1+\alpha < 1+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+0} > \frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+\alpha)^{n+1}} < \frac{1}{(1+0)^{n+1}} = 1.$$

5.6 Es $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ porque elevando al cuadrado

queda $1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ es decir $0 \leq \frac{x^2}{2}$.

Es $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}$ porque elevando al cuadrado

queda $\frac{x^4}{64} - \frac{x^3}{8} \leq 0$ es decir $\frac{x^3(x-8)}{64} \leq 0$ lo que es

cierto si $x \geqslant 0$ y $x \leq 8$.

Para $x = 0,2$ tenemos $1 + 0,1 - 0,05 \leq \sqrt{1,2} \leq 1 + 0,1$

es decir $1,05 \leq \sqrt{1,2} \leq 1,1$, con error $e < 1,1 - 1,05 = 0,05$.

Para $x = 1$ tenemos $1 + 0,5 - 0,125 \leq \sqrt{2} \leq 1 + 0,5$

es decir $1,375 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$, con error $e < 1,5 - 1,375 = 0,125$.

Como $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{-1}$

$$f'(x) = -(1+x)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(1+x)^{-3}$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 1 - x + x^2$$

y entonces

$$\sqrt{1,2} \simeq P_2(0,2) = 1 - 0,2 + 0,2^2 = 0,8 + 0,04 = 0,84$$

$$\sqrt{2} \simeq P_2(1) = 1 - 1 + 1^2 = 1$$

que ~~da~~ <u>peores</u> aproximaciones que las anteriores.

5.7) a) Si son $p = \text{arctg}\, x$, $q = \text{arctg}\, y$, entonces

$\text{tg}\, p = x$, $\text{tg}\, q = y$ y por la fórmula

$$\text{tg}(p+q) = \frac{\text{tg}\, p + \text{tg}\, q}{1 - \text{tg}\, p \cdot \text{tg}\, q} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow$$

$$\text{arctg}\, \frac{x+y}{1-xy} = p+q = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\, y.$$

b) Haciendo $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ se tiene

$$\text{arctg}\, \frac{1}{2} + \text{arctg}\, \frac{1}{3} = \text{arctg}\, \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \text{arctg}\, \frac{5/6}{5/6} = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$$

A partir de esta igualdad y del desarrollo

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{queda:}$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \cdots \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \cdots \simeq$$

$$\simeq 0{,}833333 - 0{,}054012 + 0{,}007073 - \cdots =$$

$$= 0{,}786394$$

luego $\pi \simeq 4 \cdot 0{,}786394 = 3{,}145576$

5.8

a)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + T_n(x)$$

es el desarrollo de Maclaurin, luego

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

b) Como $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm T_n(x)$

haciendo $x = t-1$ queda

$$\ln t = (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3}$$ es decir

$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$ y elevando al cuadrado

$(\ln x)^2 = (x-1)^2 - (x-1)^3 + \underbrace{\frac{(x-1)^4}{4}}$ este es muy pequeño si $x \approx 1$.

5.9

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

basta que sea $\frac{x^4}{4!} < 0{,}01 \Rightarrow x^4 < 0{,}24 \Rightarrow |x| < 0{,}6999\ldots$

luego $x \in (-0{,}6999;\ 0{,}6999)$.

5.10

Como $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$

y $f'' + f = 0 \Rightarrow f''(0) = -f(0) = 0 \Rightarrow f^{(k)} = 0 \ \forall k$,

luego $f = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots = 0$.