4.1. Supongamos que una función f satisface $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Además, sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1$. De la función g sabemos que $g(0) = 1$ y que $g'(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcula $f(0)$.

(b) Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(x)$

(a) $$f(0) = f(0+0) = f(0)\cdot g(0) + f(0)\cdot g(0) \underset{\substack{\uparrow \\ g(0)=1}}{=} 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

(b) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot g(h) + f(h)\cdot g(x) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x)\cdot(g(h)-1)}{h} + g(x)\cdot \frac{f(h)}{h} \right) =$$

$$= f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(h)-g(0)}{h} \right) + g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 1}}{=} f(x)\cdot g'(0) + g(x) = -f(x)\cdot f(0) + g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)=0}}{=} g(x)$$

Un ejemplo de funciones que cumplen lo anterior es $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$

- $f(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$
- $\cos(0) = 1$
- $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$
- $g'(x) = -\operatorname{sen}'(x) = -f(x)$
- $f'(x) = \cos(x) = g(x)$
- $f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$

4.4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+4+1}{x-2} = \dfrac{(x-2)^2+1}{x-2} = x-2+\dfrac{1}{x-2}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2}$

b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1) = \dfrac{1}{2}\ln((x-1)(x+1)) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\ln(x-1)+\ln(x+1)\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$

c) $f(x) = \left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 = \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \dfrac{2-\cos^2 x+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1 + 2\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \dfrac{+4\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} + 2\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\cos x+\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$

d) $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{(\ln(x)+1)(x-1) - x\ln(x)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-\ln(x)-1}{(x-1)^2}$

e) $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x+\operatorname{sen} x)$

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{(\cos x+\operatorname{sen} x)^2+1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2\cdot\sqrt{4-x^2}+x^3\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}}{|4-x^2|} = \dfrac{3x^2|4-x^2|+2x^4}{|4-x^2|\sqrt{4-x^2}}$

4.5. Se definen las funciones coseno hiperbólico por $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, seno hiperbólico $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ y tangente hiperbólica por $\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$.

(1) Calcula las derivadas de estas funciones.

$$\cosh'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$$

$$\operatorname{senh}'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x) - \operatorname{senh}(x)\cdot\operatorname{senh}(x)}{(\cosh(x))^2} \overset{\text{Apartado (2)}}{=} \frac{1}{(\cosh(x))^2}$$

(2) Comprueba que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$, $\frac{1}{(\cosh(x))^2} = 1 - \tanh^2(x)$ y que $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(y)\cosh(x)$.

- $$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{e^{2x}}+\cancel{e^{-2x}}+2}{4} - \frac{\cancel{e^{2x}}+\cancel{e^{-2x}}-2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

- $$\frac{1}{(\cosh(x))^2} = \frac{\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

- $$\operatorname{senh}(x+y) = \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x\cdot e^y - e^{-x}\cdot e^{-y}}{2}$$

$$\operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(y)\cosh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{e^xe^y - \cancel{e^{-x}e^y} + \cancel{e^xe^{-y}} - e^{-x}e^{-y}}{4} + \frac{e^xe^y + \cancel{e^{-x}e^y} - \cancel{e^xe^{-y}} - e^{-x}e^{-y}}{4} =$$

$$= \frac{e^xe^y - e^{-x}e^{-y}}{4} + \frac{e^xe^y - e^{-x}e^{-y}}{4} = \frac{e^xe^y - e^{-x}e^{-y}}{2} = \operatorname{senh}(x+y)$$

(3) Hallar las derivadas de las respectivas funciones inversas

- $\operatorname{arcsenh}'(x)$

$\operatorname{arcsenh}(\operatorname{senh}(x)) = x \Rightarrow \operatorname{arcsenh}'(\operatorname{senh}(x))\cdot\operatorname{senh}'(x) = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsenh}'(\operatorname{senh}(x)) = \frac{1}{\operatorname{senh}'(x)} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(x)}}$$

Si llamamos $y = \operatorname{senh}(x)$. Nos queda

$$\operatorname{arcsenh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

- $\operatorname{arccosh}'(x)$

$$\operatorname{arccosh}(\cosh(x)) = x \Rightarrow \operatorname{arccosh}'(\cosh(x)) \cdot \cosh'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccosh}'(\cosh(x)) = \frac{1}{\cosh'(x)} = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}}$$

Si llamamos $z = \cosh(x)$

$$\operatorname{arccosh}'(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$

- $\operatorname{arctanh}'(x)$

$$\operatorname{arctanh}(\tanh(x)) = x \Rightarrow \operatorname{arctanh}'(\tanh(x)) \cdot \tanh'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctanh}'(\tanh(x)) = \frac{1}{\tanh'(x)} = \frac{1}{1-\tanh^2(x)}$$

Si llamamos $t = \tanh(x)$, Nos queda

$$\operatorname{arctanh}'(x) = \frac{1}{1-t^2}$$

4.6. Halla f' en función de g' en los siguientes casos:

a) $f(x) = g(x+g(a))$

$f'(x) = g'(x+g(a))$

b) $f(x) = g(xg(a))$

$f'(x) = g'(xg(a)) \cdot g(a)$

c) $f(x) = g(xg(x))$

$f'(x) = g'(xg(x)) \cdot (g(x) + xg'(x))$

d) $f(x) = g(x) \cdot (x-a)$

$f'(x) = g'(x)(x-a) + g(x)$

e) $f(x) = g(a) \cdot (x-a)$

$f'(x) = g(a)$

f) $f(x+3) = g(x^2)$

$f'(x+3) = g'(x^2) \cdot 2x$

$f'(x) = g'((x-3)^2) \cdot 2(x-3)$

4.18. Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

(1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$

Resolvemos $x^2 + 5x - 6 = 0$ y obtenemos $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{-5 \pm 7}{2}$

$x = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$. Por tanto $x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1)$

	$(-\infty, -6)$	-6	$(-6, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+6)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Por tanto

$\{x^2 + 5x - 6 \leq 0\} = [-6, 1]$

Cotas inferiores $(-\infty, -6]$

Cotas superiores $[1, +\infty)$

Ínfimo = mínimo = -6

Supremo = máximo = 1

2) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 + x < 2\}$

Resolvemos $x^2 + x - 2 < 0$ y obtenemos $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$. Por tanto $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 + x < 2\} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (-2, 1)$

Cotas inferiores en $\mathbb{R}$ $(-\infty, -2]$

Cotas superiores en $\mathbb{R}$ $[1, +\infty)$

Ínfimo = -2

Supremo = 1

No hay ni máximo ni mínimo

3) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$

Resolvemos $x^2 - 2x = 0$ y obtenemos $x = 0, 2$. Por tanto $x^2 - 2x = x(x-2)$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\{x^2 - 2x < 0\} = (0, 2)$

Cotas inferiores $(-\infty, 0]$ Ínfimo 0 Mínimo no tiene

Cotas superiores $[2, +\infty)$ Supremo 2 Máximo no tiene

4.23. Se consideran las funciones, $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Comprueba que existe $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, pero sin embargo no existe $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- $\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ porque $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) =$

$= \lim_{x\to 0} \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 0 \cdot 1 = 0.$

- $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

El $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe mientras que $\lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (como ya hemos señalado antes). Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \text{ que no existe}$$

- $g'(x) = \cos x$ y $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$

Por tanto $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} f'(x)}{\lim_{x\to 0} g'(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} f'(x)}{1}$ que no existe

4.25. Prueba que si f es derivable en a, entonces

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Justifica que si existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$, la función f no es necesariamente derivable en a.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h) + f(a-h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \overset{①}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} - f'(a)$$

① $\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}\cdot\frac{(-1)}{(-1)} = -\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ t=-h}}{=} -\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t} = -f'(a)$$

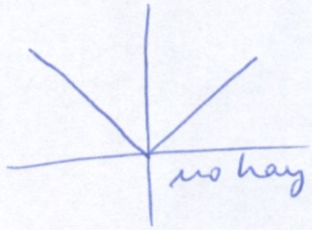
Por tanto $2f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} \Rightarrow f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

— o —

Sea $f=|x|$ y $a=0$. Observamos que $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h} = 0$$

Sin embargo f no es derivable en 0



no hay tangente en el origen

4.26. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de modo que existe $f''(x)$ para todo $x\in(a,b)$.

Prueba que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)-2f(x)}{h^2} \underset{\substack{\uparrow \\ L'H}}{\overset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} \underset{\uparrow}{=} f''(x)$$

por el ejercicio anterior aplicado a f'

4.10. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{|x|\ln|x|}$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $-1, 0, 1$ son los valores para los que se anula el denominador.

- La función es simétrica par ya que $f(x) = f(-x)$. Para entender la función basta estudiarla para $x > 0$

- Asíntotas verticales

$$x=0: \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x=1 \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\ln(x)} = +\infty \qquad x=-1 \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{|x|\ln(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x\ln(x)} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{|x|\ln(x)} = -\infty$$

- Asíntotas horizontales $y = 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ln(x)} = 0^+ \to y = 0$$

- Estudiamos crecimiento y decrecimiento para $x > 0$ (ya que la función es simétrica par)

$$f'(x) = \frac{-(\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x})}{(x\ln(x))^2} = \frac{-(\ln(x)+1)}{(x\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \ln(x) + 1 = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

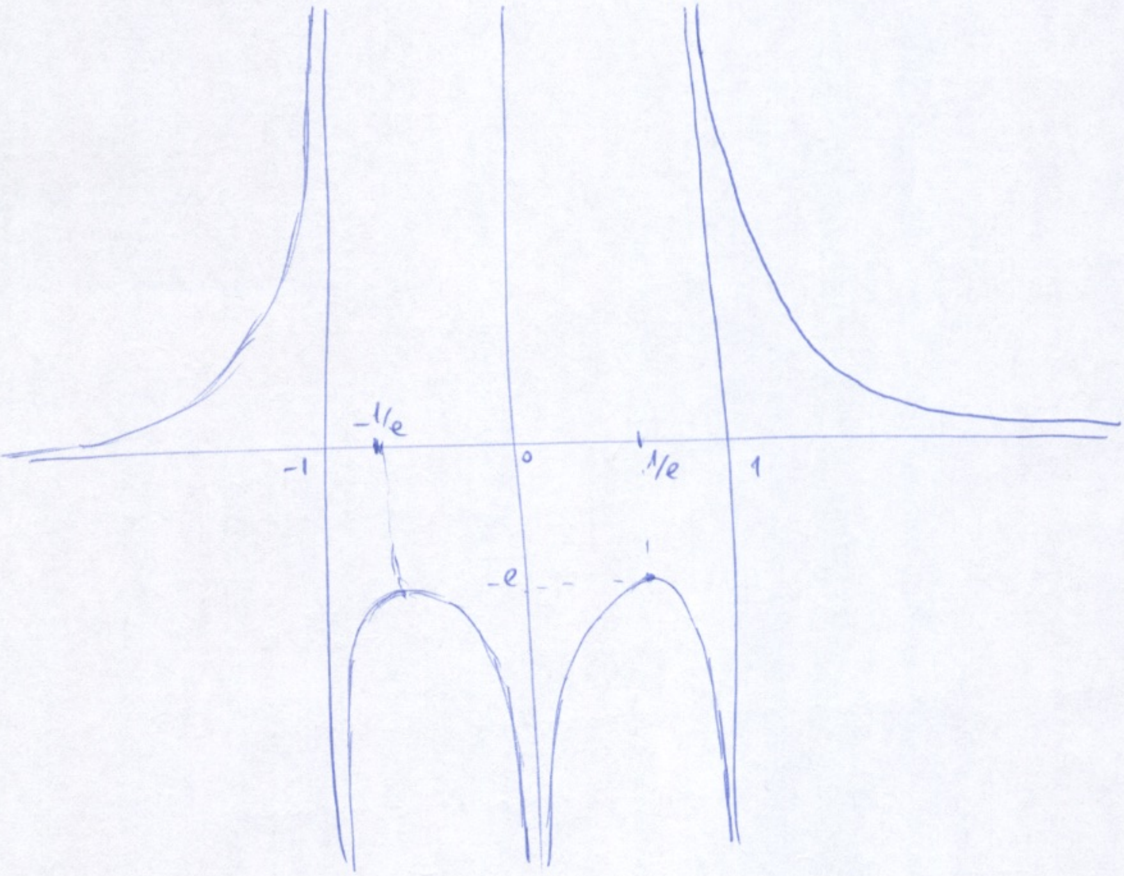
Observamos que $f'(x) \begin{cases} >0 & \text{si } x \in (0, 1/e) \to f \text{ creciente} \\ 0 & \text{si } x = 1/e \to \text{máximo} \\ <0 & \text{si } x \in (1/e, 1) \cup (1, +\infty) \to f \text{ decreciente} \end{cases}$

• Curvatura en $x>0$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\left(x\ln(x)\right)^2 + \left(\ln(x)+1\right)\cdot 2x\ln(x)\left(\ln(x)+1\right)}{\left(x\ln(x)\right)^4} =$$

$$= \frac{-\ln(x)+2\left(\ln(x)+1\right)^2}{\left(x\ln(x)\right)^3} = \frac{2\ln(x)^2+3\ln(x)+2}{x\ln(x)\ \left(x\ln(x)\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(\left(\ln(x)+3/4\right)^2+\frac{7}{16}\right)}{\left(x\ln(x)\right)^2\cdot x\ln(x)} = \begin{cases} <0 & \text{si } x\in(0,1) \ \text{Concava} \\ >0 & \text{si } x\in(1,+\infty) \ \text{Convexa} \end{cases}$$



b) $f(x) = xe^{2x} - 1$

- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- Asíntotas horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} (xe^{2x} - 1) = 0^-$$

$$\lim_{x \to \infty} (xe^{2x} - 1) = +\infty$$

- No tiene asíntotas oblicuas ni verticales.
- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$$

Como $e^{2x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, deducimos que el signo de $f'(x)$ coincide con el signo de $1+2x$ que es

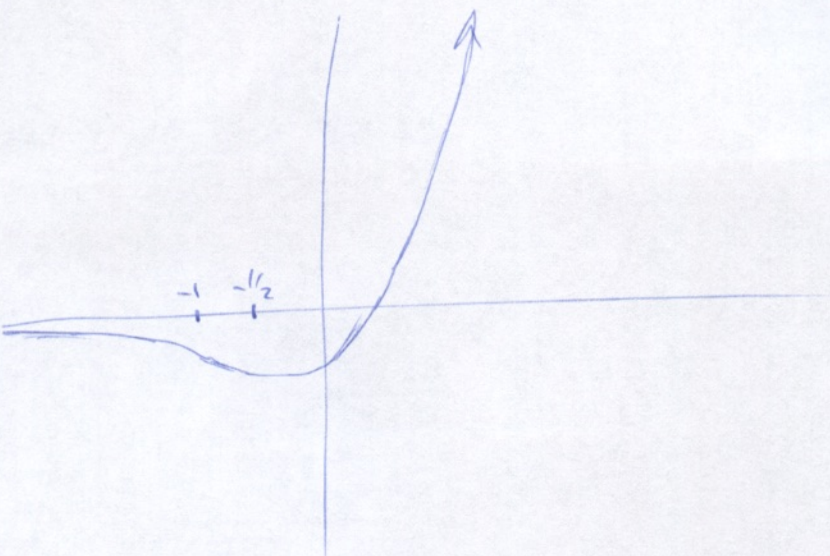
$$1+2x \begin{cases} >0 & \text{si } x > -\frac{1}{2} \to f \text{ creciente} \\ 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2} \to f \text{ tiene un mínimo} \\ <0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \to f \text{ decreciente} \end{cases}$$

- Curvatura

$$f''(x) = 2e^{2x} + (1+2x)\cdot 2e^{2x} = e^{2x}(4+4x)$$

Como $e^{2x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, deducimos que el signo de $f'(x)$ coincide con el signo de $1+x$ que es:

$$1+x \begin{cases} <0 & \text{si } x < -1 \to f \text{ cóncava} \\ =0 & \text{si } x = -1 \to f \text{ tiene un punto de inflexión} \\ >0 & \text{si } x > -1 \to f \text{ convexa} \end{cases}$$



c) $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$

$\mathrm{Dom}(f) = (0,+\infty) \setminus \{1\}$

- Asíntotas:

Verticales: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x \ln x}{x-1} = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1-\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{-\infty}{-\infty}\right] =$

$$\underset{\text{L'Hopital}}{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

No hay asíntota vertical en $x = 0^+$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hopital}}{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

No hay asíntota vertical en $x=1$ y podemos incluir $x=1$ en el dominio si imponemos $f(1)=1$. y $x=0$ si imponemos $f(0)=0$.

- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{(\ln x+1)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x\ln x - \ln x + x - 1 - x\ln x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2}$$

El signo de $f'(x)$ viene determinado por el signo de $x-1-\ln(x)$, que es >0 porque $(x-1-\ln(x))' = 1-\frac{1}{x}$ y por tanto como $(x-1-\ln(x))$ evaluado en el 1 da 0, tenemos que $x-1-\ln(x)$ es ≥ 0 si $x\geq 1$.

Si $0<x<1 \Rightarrow -\ln(x)>0$ y se comprueba que $x-1-\ln(x)$ también dado que $\lim\limits_{x\to 0^+} x-1-\ln(x) = +\infty$ y $(x-1-\ln(x))' = 1-\frac{1}{x}$ es decreciente en $(0,1)$. Por tanto $x-1-\ln(x)\geq 0$ en $(0,+\infty)$

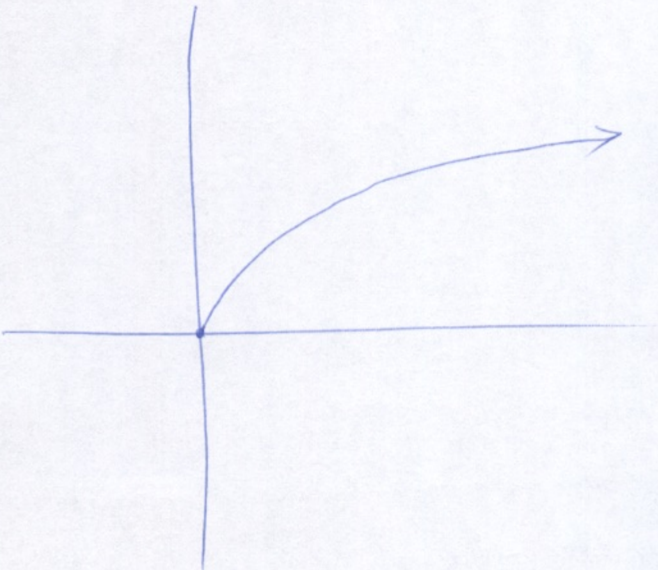
- Curvatura

$$f''(x) = \frac{(1-\frac{1}{x})(x-1)^2 - ((x-1)-\ln x)\,2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^3 - 2(x-1)x((x-1)-\ln(x))}{x(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)\left((x-1)^2 - 2x^2 + 2x + \ln(x)\right)}{x(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left(x^2+2x+1-2x^2+2x \overset{2x}{+} \ln(x)\right)}{x(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)\left(-x^2+1+2x\ln(x)\right)}{x(x-1)^4}$$

Si uno dibuja la gráfica de $-x^2+1+2x\ln(x)$ observa que siempre es negativa. Por tanto $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, con lo que f es concava



d) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x}{2x^2-x} = \frac{x^2-2x-1}{2x-1} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\left(-\frac{7}{4}\right)}{2x-1}$

- Dom$(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

- Asintotas: Verticales $x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\left(-\frac{7}{4}\right)}{2x-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\left(-\frac{7}{4}\right)}{2x-1}\right) = -\infty$$

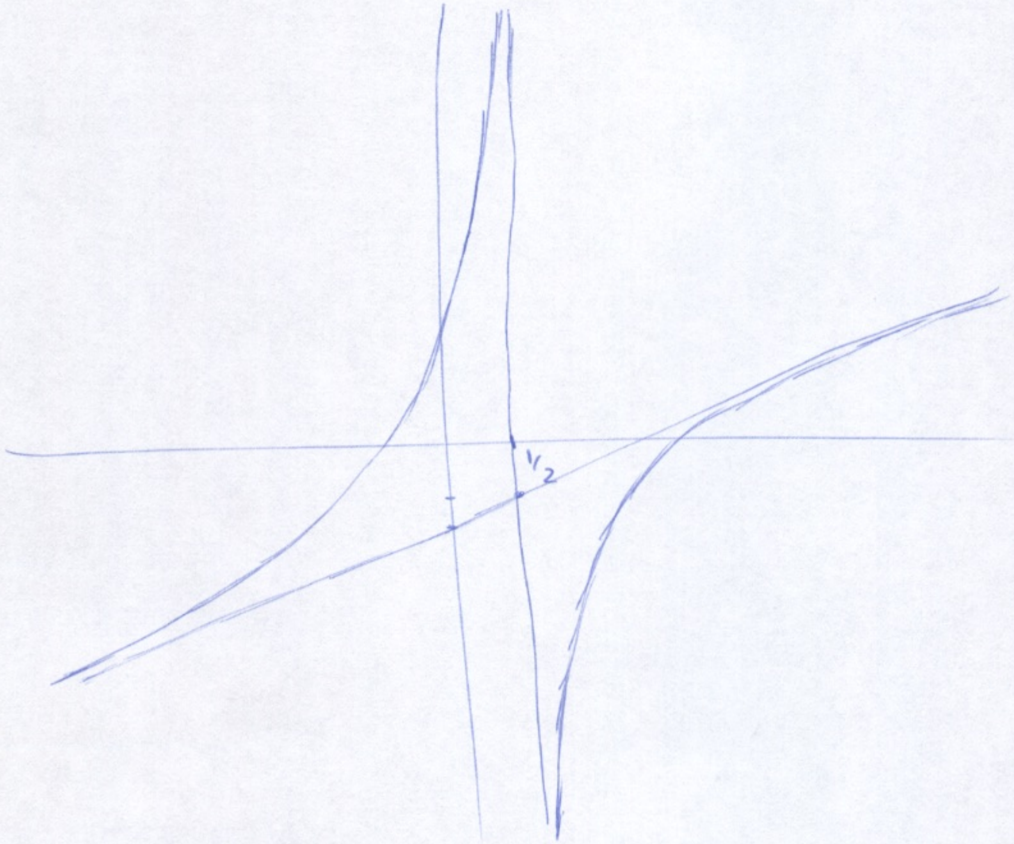
Oblicuas: dado que que $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\left(-\frac{7}{4}\right)}{2x-1}$, deducimos que f tiene una asintota oblicua en $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\left(+\frac{7}{4}\right)}{(2x-1)^2} \cdot 2 > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente siempre}$$

• Curvatura

$$f''(x) = \frac{-\frac{7}{2}}{(2x-1)^3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{-14}{(2x-1)^3} \begin{cases} > 0 & \text{si } x < +\frac{1}{2} \text{ convexa} \\ < 0 & \text{si } x > \frac{1}{2} \text{ concava} \end{cases}$$



e) $f(x) = \arctan(3x - x^3)$

• $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, como $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}(x)$, tenemos que $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ simétrica impar

• Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(3x - x^3) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan(3x - x^3) = \frac{\pi}{2}$$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

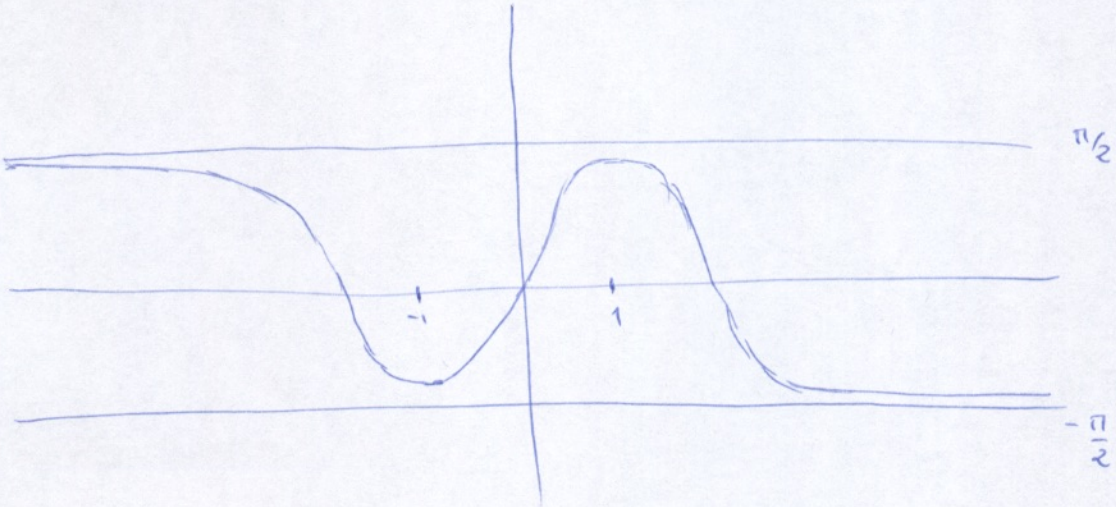
• Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{1}{(3x-x^3)^2+1} \cdot (3 - 3x^2) = \frac{3}{(3x-x^3)^2+1}(1-x^2) \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (-1,1) \\ = 0 & \text{si } x = 1 \text{ ó } -1 \\ < 0 & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

Deducimos que

$$f \text{ es } \begin{cases} \text{decreciente en } (-\infty,-1) \text{ y } (1,+\infty) \\ \text{creciente en } (-1,1) \\ \text{tiene un mínimo en } x=-1 \text{ y un máximo en } x=1 \end{cases}$$

No estudiamos la curvatura porque la derivada es complicada.



f) Hecho en clase

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-2}}$

Para calcular el dominio de f tenemos que calcular cuando la fracción

$\dfrac{x^2-1}{x-2}$ es ≥ 0 $\qquad x^2-1 = (x-1)(x+1)$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x^2-1}{x-2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$

$\text{Dom}(f) = [-1,1] \cup (2,+\infty)$

Asíntotas vertical

$$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} = +\infty \quad \to x = 2 \text{ asíntota vertical}$$

No hay asíntotas horizontales ya que $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} = +\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2(x-2)}} = 0 \Rightarrow \text{no hay asíntotas oblicuas}$$

Crecimiento y decrecimiento

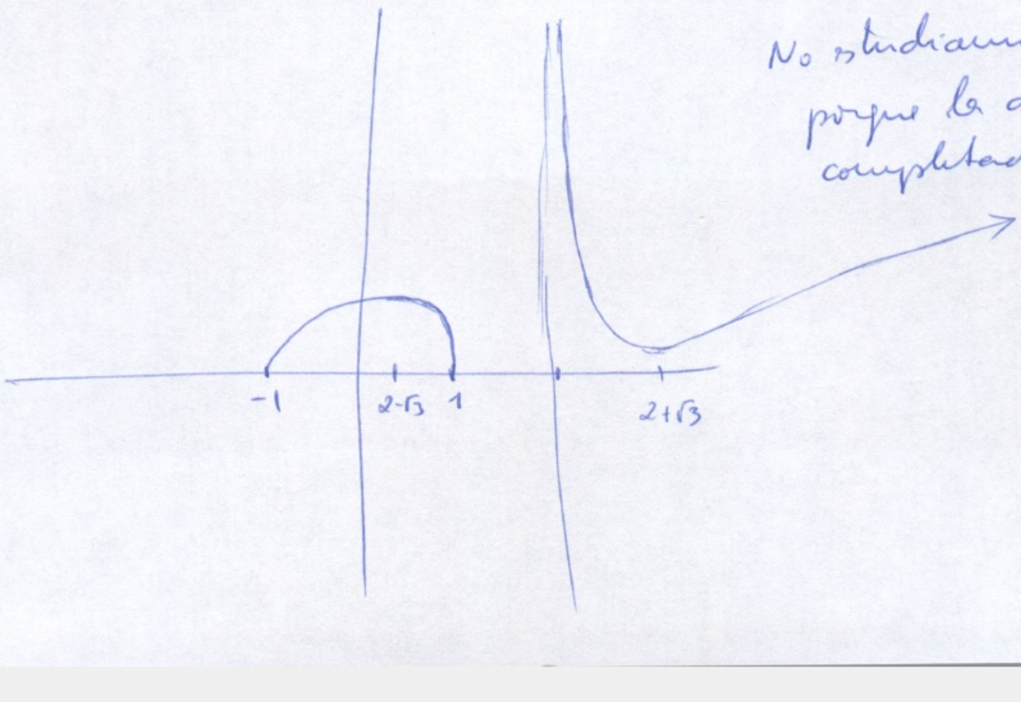
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \cdot \frac{2x(x-2) - x^2+1}{(x-2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \cdot \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

Observamos que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2-4x+1 > 0$

$$x^2-4x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Por tanto,

$$f' \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in [-1, 2-\sqrt{3}) \to f \text{ creciente} \\ = 0 & \text{si } x = 2-\sqrt{3} \to \text{tiene máximo} \\ < 0 & \text{si } x \in (2-\sqrt{3}, 1) \to f \text{ decreciente} \\ < 0 & \text{si } x \in (2, 2+\sqrt{3}) \to f \text{ decreciente} \\ = 0 & \text{si } x = 2+\sqrt{3} \to f \text{ tiene mínimo} \\ > 0 & \text{si } x \in (2+\sqrt{3}, +\infty) \to f \text{ creciente} \end{cases}$$



No estudiamos la curvatura porque la derivada es complicada

h) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 \ln(x)$

- $Dom(f) = (0, +\infty)$

- Estudio de asíntotas:

  - Verticales en $x = 0$ $\underline{NO}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln(x)\right) \underset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{4}\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{4x}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{8} = 0$$

  - Horizontales

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln(x)\right) = -\infty \quad \text{no hay}$$

  - Oblicuas

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2\ln(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{4}x\ln(x)\right) = -\infty$$

no hay

- Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}x\left(\ln(x) + \frac{1}{2}\right)$$

Como trabajamos en el intervalo $(0, +\infty)$, el signo de $f'(x)$ coincide con el signo de $-\left(\ln(x) + \frac{1}{2}\right)$

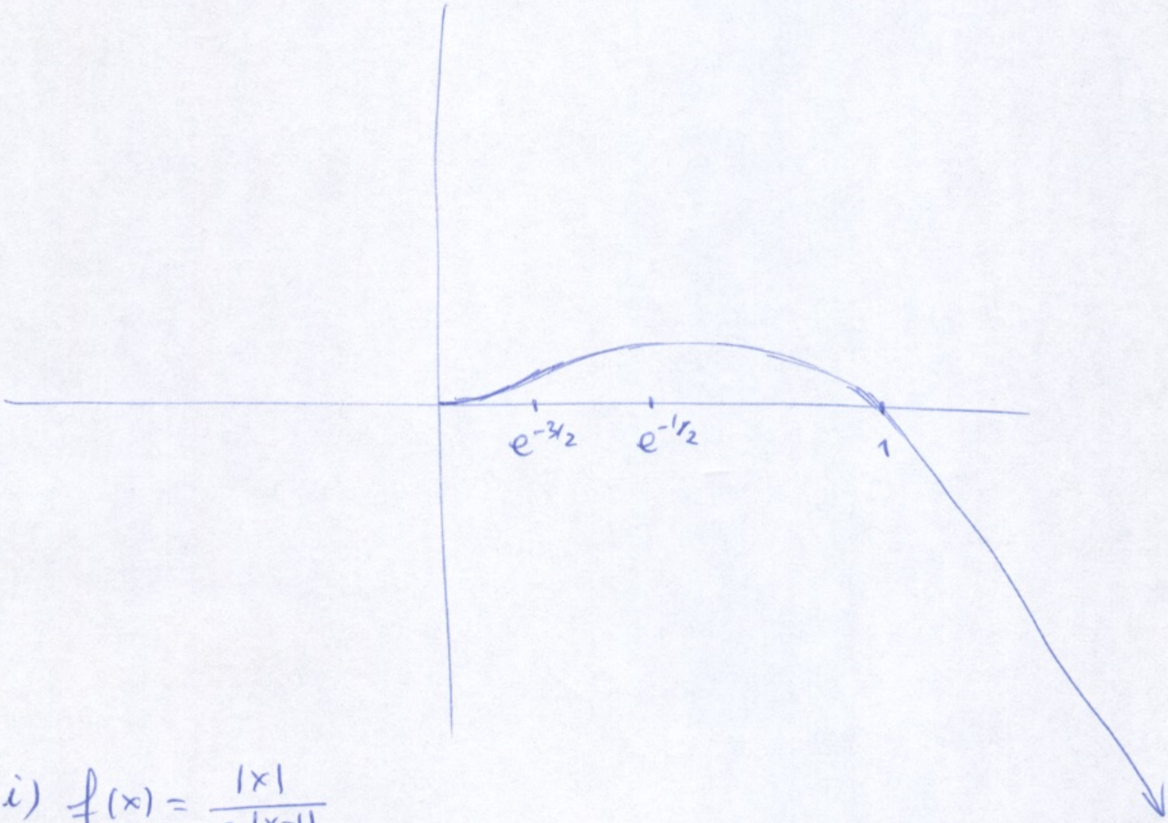
$$\ln(x) + \frac{1}{2} = 0 \iff x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$-\left(\ln(x)+\frac{1}{2}\right)\begin{cases} >0 & \text{si } x\in\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \to f \text{ creciente} \\ =0 & \text{si } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \to f \text{ tiene un máximo} \\ <0 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right) \to f \text{ decreciente}\end{cases}$$

- Curvatura

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(\ln(x) + \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln(x) + \frac{3}{2}\right)\begin{cases} >0 & \text{si } x\in(0, e^{-3/2}) \\ =0 & \text{si } x = e^{-3/2} \\ <0 & \text{si } x\in(e^{-3/2}, +\infty)\end{cases}$$

$$f \text{ es } \begin{cases} \text{convexa en } (0, e^{-3/2}) \\ \text{tiene un punto de inflexión en } x = e^{-3/2} \\ \text{concava en } (e^{-3/2}, +\infty) \end{cases}$$



i) $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$

Como la exponencial nunca se anula $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

- Asintotas horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{e^{|x-1|}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \underset{\text{L'Hopital}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\pm 1}{\pm e^{|x-1|}} = 0^+$$

- Asintotas verticales y horizontales no tiene

- Escribimos f de modo que podamos derivarla razonablemente

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{e^{-x+1}} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{e^{-x+1}} & \text{si } x \in (0,1) \\[2mm] \dfrac{x}{e^{x-1}} & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

• Crecimiento y decrecimiento

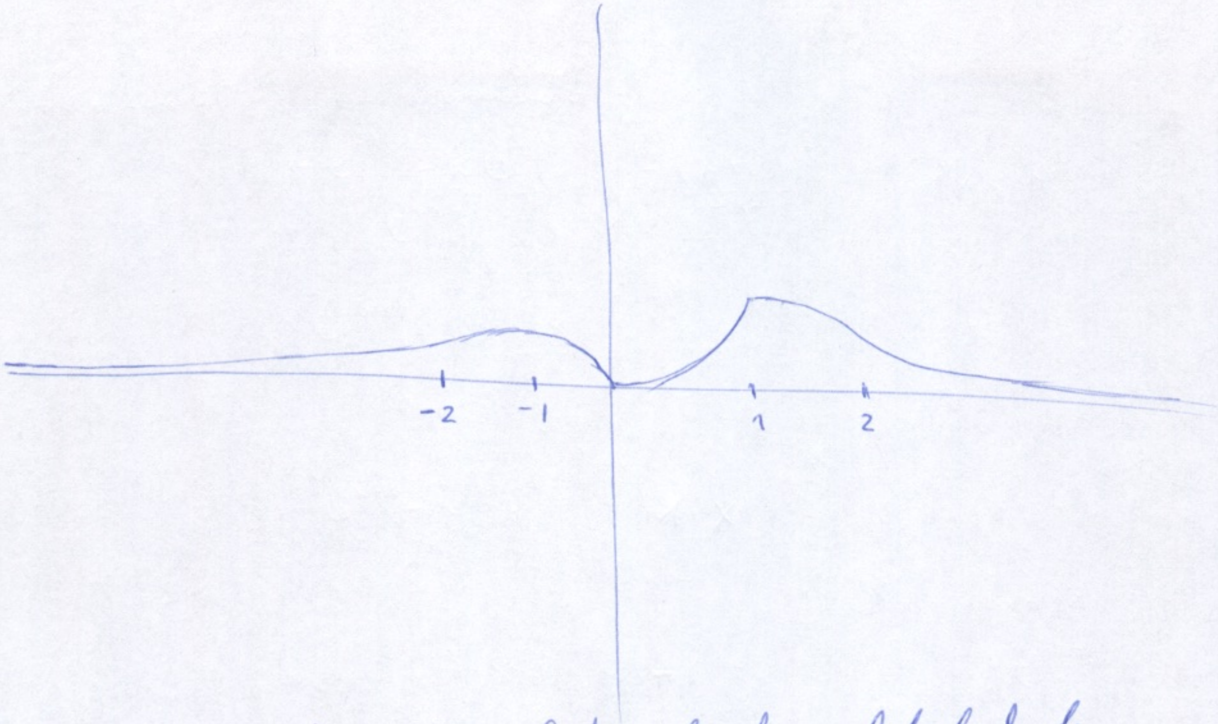
$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-e^{-x+1}-x\,e^{-x+1}}{(e^{-x+1})^2}=\dfrac{-(x+1)}{e^{-x+1}} & \text{si } x<0 \quad \begin{cases} f'>0 \text{ si } x<-1 \\ f'=0 \text{ si } x=-1 \\ f'<0 \text{ si } -1<x<0 \end{cases} \\[2ex] \dfrac{e^{-x+1}+e^{-x+1}\cdot x}{(e^{-x+1})^2}=\dfrac{x+1}{e^{-x+1}} & \text{si } x\in(0,1) \quad \left\{ f'>0 \text{ si } x\in(0,1) \right. \\[2ex] \dfrac{e^{x-1}-e^{x-1}\cdot x}{(e^{x-1})^2}=\dfrac{1-x}{e^{x-1}} & \text{si } x\in(1,+\infty) \quad \left\{ f'<0 \text{ si } x\in(1,+\infty) \right. \end{cases}$$

$$f\begin{cases} \text{creciente si } x\in(-\infty,-1) \\ \text{tiene un máximo en } x=-1 \\ \text{decreciente si } x\in(-1,0) \\ \text{creciente si } x\in(0,1) \\ \text{decreciente si } x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

• Curvatura

$$f''(x)=\begin{cases} \dfrac{-e^{-x+1}-(x+1)e^{-x+1}}{(e^{-x+1})^2}=\dfrac{-(x+2)}{e^{-x+1}} & \text{si } x<0 \quad \begin{cases} f''>0 \text{ si } x<-2 \\ f''=0 \text{ si } x=-2 \\ f''<0 \text{ si } -2<x<0 \end{cases} \\[2ex] \dfrac{e^{-x+1}+e^{-x+1}(x+1)}{(e^{-x+1})^2}=\dfrac{x+2}{e^{-x+1}} & \text{si } x\in(0,1) \quad \left\{ f''>0 \text{ si } x\in(0,1) \right. \\[2ex] \dfrac{-e^{x-1}-e^{x-1}(1-x)}{(e^{x-1})^2}=\dfrac{x-2}{e^{x-1}} & \text{si } x\in(1,+\infty) \quad \begin{cases} f''<0 \text{ si } x\in(1,2) \\ f''=0 \text{ si } x=2 \\ f''>0 \text{ si } x>2 \end{cases} \end{cases}$$

$$f\begin{cases} \text{convexa en } (-\infty,-2) \\ \text{punto de inflexión en } x=-2 \\ \text{concava en } (-2,0) \\ \text{convexa en } (0,1) \\ \text{concava en } (1,2) \\ \text{punto de inflexión de } x=2 \\ \text{convexa en } (2,+\infty) \end{cases}$$



4.7 Estudia la continuidad y la derivabilidad de

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln(e\cos(x-1)) & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

- la función $\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$ es continua y derivable en $(0,1)$ por ser cociente de funciones derivables tales que el denominador no se anula en ningún punto
- la función $\ln(e\cos(x-1))$ es continua y derivable en $(1,2)$ porque el $\cos(x-1)$ no se anula en el intervalo $[1,2]$ ya que $\cos(x)$ no se anula en el intervalo $[0,1]$

Por tanto, el único punto conflictivo es $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cos(x-1)}{1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(e\cos(x-1)) = \ln(e) = 1 \end{array}\right\} \text{Por tanto es continua.}$$

Derivable

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-1)(x-1) - \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)^2} & \text{si } 0<x<1 \\[2ex] \dfrac{-e \operatorname{sen}(x-1)}{e\cos(x-1)} = \operatorname{tg}(x-1) & \text{si } 0<x<2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos(x-1)(x-1) - \operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-\operatorname{sen}(x-1)(x-1) + \cancel{\cos(x-1)} - \cancel{\cos(x-1)}}{2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = \lim_{x\to 1^+} \operatorname{tg}(x-1) = \operatorname{tg}(0) = 0$$

Como g es continua en $x=1$ y las derivadas laterales existen y coinciden en $x=1$ $\Rightarrow$ g es derivable en $x=1$ y su derivada vale 0.

— o —

- ~~$\operatorname{Dom}(g) = (0,2]$~~
- ~~No tiene sentido estudiar asíntotas~~