3.4. En los siguientes apartados, algunas afirmaciones son verdaderas. Otras son falsas. Justifica cómo es cada una:

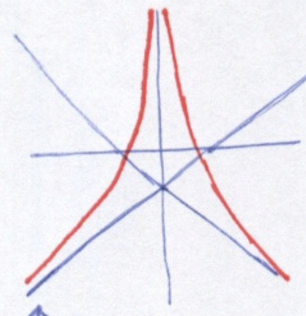
1) Para toda función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que su gráfica admite como asíntota a la recta de ecuación $y = x-1$ se tiene que:

A) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Falso:

$$f(x) = -|x| + \frac{1}{|x|} - 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

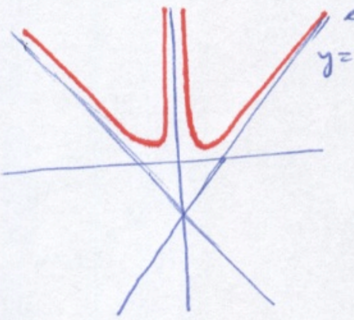


B) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Falso:

$$f(x) = |x| + \frac{1}{|x|} + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$



C) $\lim_{x\to\infty} (f(x)-x) = 0$

Falso: $f(x) = -|x| + \frac{1}{|x|} - 1$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to\infty}\left(-x+\frac{1}{x}-1-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-2x+\frac{1}{x}-1\right) = \infty$$

D) Existe $a\in[0,\infty)$ tal que $x\in[a,\infty)$, se verifica que $f(x)\geq 5$

Falso, véase el ejemplo A) $f(x) = -|x| + \frac{1}{|x|} - 1$

E) Existe $b\in[0,\infty)$ tal que para todo $x\in[b,\infty)$, se verifica que $f(x)\leq 5$

Falso, véase el ejemplo B) $f(x) = |x| + \frac{1}{|x|} - 1$

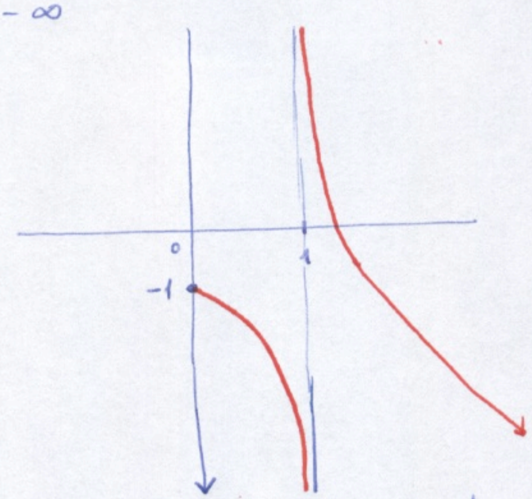
2) Hecho en clase

3) Sea la función $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

Como vimos en clase, el dominio de esta función es $[0,+\infty) \setminus \{1\}$

Tiene una asíntota vertical en $x=1$ y es estrictamente decreciente.

Además $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



A) La restricción de f al intervalo $[0,1)$ es una biyección de $[0,1)$ con $[-1,+\infty)$.

Falso, ya que $f([0,1)) = (-\infty,-1]$. continua y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

Como f es estrictamente decreciente, entonces la restricción de f al intervalo $[0,1)$ induce una biyección con $(-\infty,-1]$

B) La restricción de f al intervalo $[1,\infty)$ admite una función inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to [-1,\infty)$. Falso

Observamos que f no está definida 1 y que no se puede extender de forma continua a 1 ya que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Sin embargo, observamos que f es continua en $(1,+\infty)$, es estrictamente decreciente y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Por tanto $f(1,+\infty) = \mathbb{R}$ y es estrictamente decreciente con lo que la restricción de f a $(1,+\infty)$ induce una biyección entre $(1,+\infty)$ y $\mathbb{R}$.

Por tanto, la restricción de f al intervalo $(1,+\infty)$ admite inversa

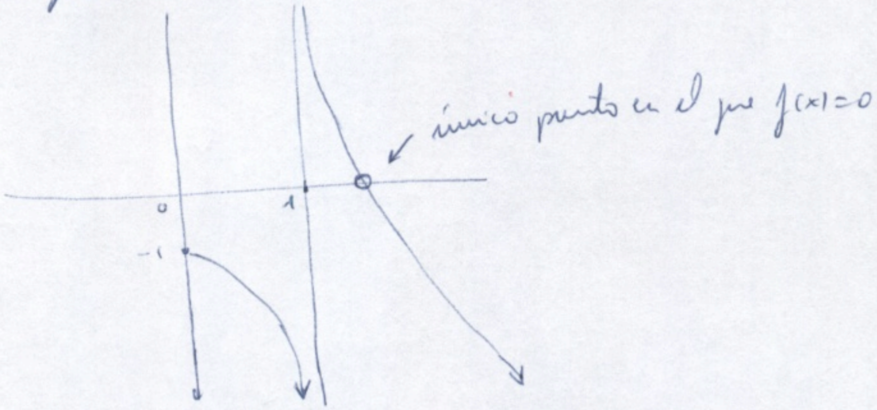
$$f^{-1}: \mathbb{R} \to (1,+\infty).$$

c) La ecuación $1+\frac{1}{\sqrt{x}} = x$ tiene una única solución.

Observamos que $1+\frac{1}{\sqrt{x}} = x \Leftrightarrow 1-x = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow$ ~~xxxxx~~

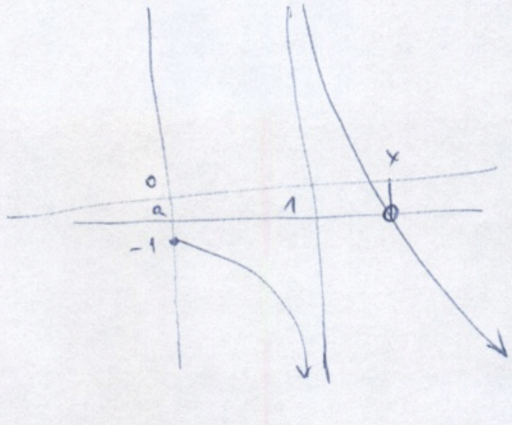
$$\sqrt{x} = -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$$

A la vista de la gráfica de f deducimos que existe un único x tal que $f(x)=0$, con lo que la respuesta es Verdadero.



D) Para todo $a<0$, la ecuación $f(x)=a$ admite dos soluciones diferentes

Falso, para los valores a entre ~~ξ~~ -1 y 0, es decir, del intervalo $(-1,0)$ cada punto tiene una única preimagen, es decir, la ecuación $f(x)=a$ tiene una única solución

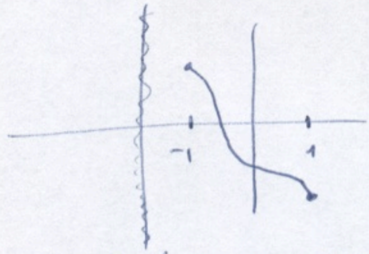


4) Resuelto en clase.

3.7. a) Prueba que la ecuación $x^{15} + \frac{x^4 - 17x + 13}{(x^2-1)^2} = 0$ tiene al menos una solución.

Encontrar una solución de la ecuación anterior, es equivalente a encontrar una solución de $\frac{x^{15}(x^2-1)^2 + x^4 - 17x + 13}{(x^2-1)^2} = 0$

o equivalentemente a obtener una solución de la ecuación polinómica $f(x) = x^{15}(x^2-1)^2 + x^4 - 17x + 13 = 0$ distinta de 1 o -1 que son los valores para los que se anula el denominador y por tanto no vale. Observamos que



$$f(1) = 1 - 17 + 13 = -3 < 0$$

$$f(-1) = 1 + 17 + 13 = 31 > 0.$$

Por tanto $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$ y además, por el teorema de Bolzano se cumple que existe $x_0 \in (-1, 1)$ tal que $f(x_0) = 0$, pues $f(1) < 0$ y $f(-1) > 0$.

b) Si $\alpha < \beta$, prueba que la ecuación $\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (α, β).

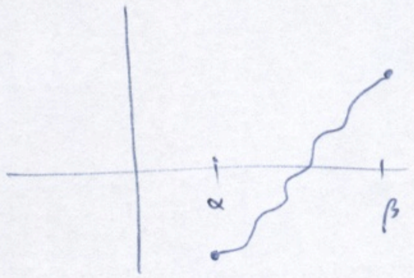
Encontrar una solución de la ecuación anterior, es equivalente a encontrar una solución de $\frac{(x^2+1)(x-\beta) + (x^6+1)(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = 0$ en el intervalo (α, β). Esto es equivalente a obtener una solución de la ecuación polinómica $f(x) = (x^2+1)(x-\beta) + (x^6+1)(x-\alpha)$ en el intervalo (α, β).

Observamos que

$$f(\beta) = (\beta^6+1)(\beta-\alpha) > 0 \quad \text{ya que } \beta^6+1 > 0 \text{ y } \beta-\alpha > 0 \text{ pues } \alpha < \beta$$

$$f(\alpha) = (\alpha^2+1)(\alpha-\beta) < 0 \quad \text{ya que } \alpha^2+1 > 0 \text{ y } \alpha-\beta < 0 \text{ pues } \alpha < \beta$$

Por tanto, $f(\alpha) < 0$ y $f(\beta) > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(x_0) = 0$.



c) Prueba que la ecuación $x^3 - 37x^2 - 8 = 0$ tiene una raíz mayor que 37. Aproxima dicha raíz con un error menor que 10^{-6}.

$$\lim_{x \to \infty} x^3 - 37x^2 - 8 = +\infty$$

Escribimos $f(x) = x^3 - 37x^2 - 8$ y observamos que $f(37) = 37^3 - 37^3 - 8 = -$ < 0. Por el teorema de Bolzano, deducimos que existe $x_0 \in (37, +\infty)$ tal que $f(x_0) = 0$. Escribimos $f(x) = x^2(x-37) - 8$

$$f(37{,}1) = (37{,}1)^2 \cdot (0{,}1) - 8 = 129.641 > 0$$

$$f(37{,}01) = (37{,}01)^2 \cdot (0{,}01) - 8 = 5.697401 > 0$$

$$f(37{,}001) = (37.001)^2 (0.001) - 8 = -6.630926 < 0$$

$$\left.\begin{aligned} f(37{,}005) &= (37.005)^2 (0.005) - 8 = -1.15315 < 0 \\ f(37{,}006) &= (37{,}006)^2 (0.006) - 8 = 0{,}216664 > 0 \end{aligned}\right\}$$

Por el teorema de Bolzano existe una raíz de f en el intervalo $(37.005, 37.006)$

$$f(37.0055) = (37.0055)^2 (0.0055) - 8 = -0.468261 < 0$$

$$\left.\begin{aligned} f(37.0058) &= (37.0058)^2 (0.0058) - 8 = -0.05731 < 0 \\ f(37.0059) &= (37.0059)^2 (0.0059) - 8 = 0.079676 > 0 \end{aligned}\right\}$$

Por el teorema de Bolzano existe una raíz de f en el intervalo $(37.0058, 37.0059)$

$$\left.\begin{aligned} f(37.00585) &= (37.00585)^2 (0.00585) - 8 = 0.011183 > 0 \\ f(37.00584) &= (37.00584)^2 (0.00584) - 8 = -0.002516 < 0 \end{aligned}\right\}$$

Por el teorema de Bolzano existe una raíz de f en el intervalo $(37.00584, 37.0058$

$f(37.005845) = (37.005845)^2 (0.005845) - 8 = 0.004333 > 0$

$f(37.005842) = (37.005842)^2 (0.005842) - 8 = 0.000224 > 0$

$f(37.005841) = (37.005841)^2 (0.005841) - 8 = -0.001146 < 0$

Por el teorema de Bolzano existe una raíz en el intervalo $(37.005841, 37.005842)$

Por tanto, la raíz es 37.0058415 con un error inferior a 10^{-6}.

3.10) Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, números reales distintos. Encuentra una función polinómica f de grado $n-1$ de modo que $f(x_i) = a_i$ donde $a_1, \dots, a_n$ son números dados. Encuentra un polinomio de grado 3 P tal que $P(1) = 3$, $P(0) = 7$, $P(1/2) = 2$ y $P(1/3) = 1/4$.

Consideramos el polinomio:

$$Q_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

tiene grado $n-1$

(Polinomio interpolador de Lagrange)

Observamos que $Q_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$

Consideramos el polinomio $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i Q_i(x)$ y observamos que

$$f(x_l) = \sum_{i=1}^{n} a_i Q_i(x_l) = a_l \underbrace{Q_l(x_l)}_{=1} = a_l$$

$Q_i(x_l) = 0$ si $i \neq l$

Por tanto, f tiene grado $\leq n-1$ ya que cada polinomio Q_i tiene grado $n-1$.

En nuestro caso

$$f(x) = 3\,\frac{(x)(x-1/2)(x-1/3)}{(1)(1-1/2)(1-1/3)} + 7\,\frac{(x-1)(x-1/2)(x-1/3)}{(-1)(-1/2)(-1/3)} +$$

$$+\,2\,\frac{(x-1)\,x\,(x-1/3)}{(1/2-1)\,\frac{1}{2}\,(1/2-1/3)} + 1/4\,\frac{(x-1)\,x\,(x-1/2)}{(1/3-1)\,1/3\,(1/3-1/2)} = \dots =$$

$$= -72x^3+120x^2-52x+7$$

Otra forma de resolverlo es considerar el sistema de ecuaciones lineales siguiente.

Escribimos $f(x) = c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$

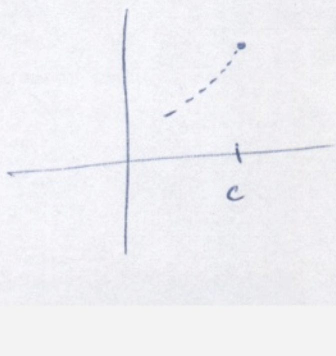
$$\left.\begin{array}{lll} f(1)=3 & \text{nos da} & c_3+c_2+c_1+c_0=3 \\ f(0)=7 & \text{nos da} & c_0=7 \\ f(1/2)=2 & \text{nos da} & \frac{1}{8}c_3+\frac{1}{4}c_2+\frac{1}{2}c_1+c_0=2 \\ f(1/3)=1/4 & \text{nos da} & \frac{1}{27}c_3+\frac{1}{9}c_2+\frac{1}{3}c_1+c_0=1/4 \end{array}\right\}$$

cuya solución es: $c_0=7$, $c_1=-52$, $c_2=120$, $c_3=-72$ y nos proporciona el polinomio $f(x) = -72x^3+120x^2-52x+7$.

3.11. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ monótona creciente. Para cada $c\in(a,b)$ prueba que:

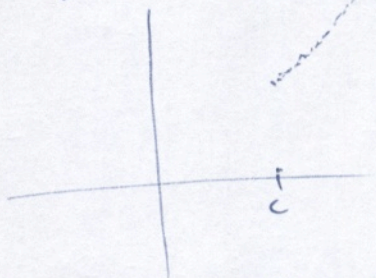
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x<c\} \leq \inf\{f(x) : x>c\} = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Como f es creciente, el aspecto de f a la izquierda de c será



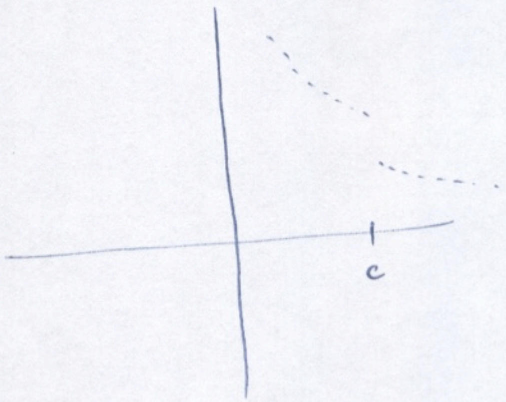
De este modo, $\sup\{f(x) : x < c\} = \lim_{x \to c^-} f(x)$

Por otro lado, el aspecto de f a la derecha de c será



Por tanto, $\inf\{f(x) : x < c\} = \lim_{x \to c^+} f(x)$

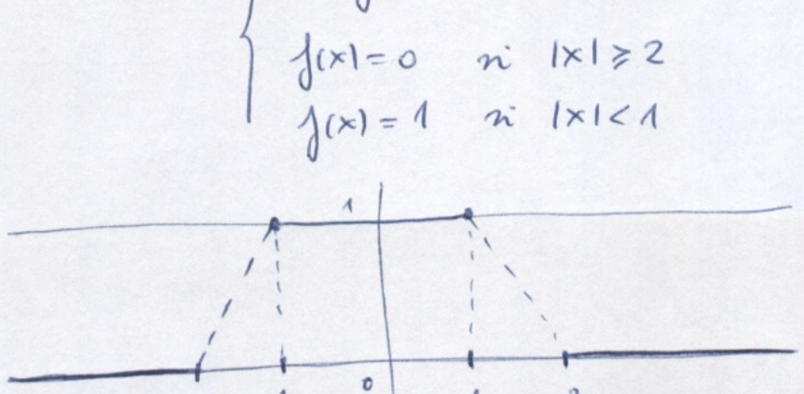
Si f es decreciente, el resultado análogo es el siguiente



$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \inf\{f(x) : x < c\} \geq \sup\{f(x) : x > c\} = \lim_{x \to c^+} f(x).$$

3.12. Construye $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifique

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 2 \\ f(x) = 1 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$



la función se encuentra en esta franja

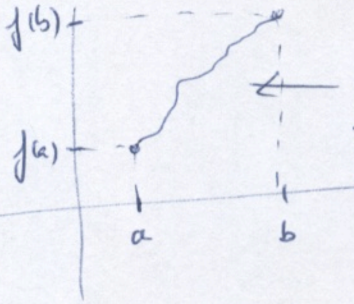
Como f tiene que ser continua en $\mathbb{R}$ y tiene que estar en la franja $\mathbb{R} \times [0, 1]$ deducimos que una posible solución es definir f en $[-2,-1]$ como el segmento que une $(-2,0)$ con $(-1,1)$

y en $[1,2]$ como el segmento que $(1,1)$ con $(2,0)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty,-2] \\ x+2 & \text{si } x \in [-2,-1] \\ 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ -x+2 & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

3.13 Prueba que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua, inyectiva y $f(a) \le f(b)$ para un par $a,b \in \mathbb{R}$ y $a<b$, entonces $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$

¿Qué sucede si $f(b) \le f(a)$?

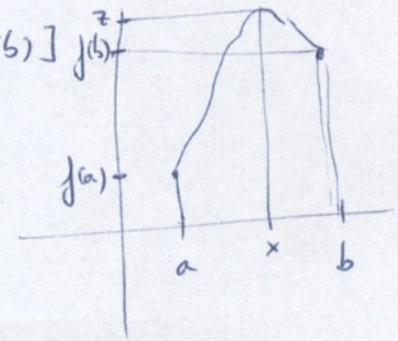


f tiene que ser creciente para que sea inyectiva

Veamos que $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$

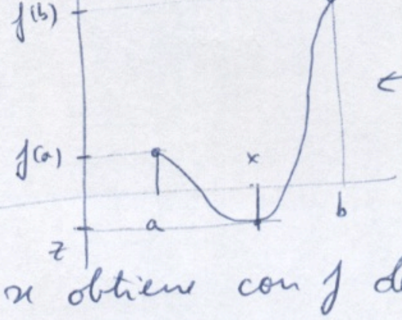
$\supset$) Sea $y \in [f(a),f(b)]$. Por el teorema de Darboux existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x)=y$. Por tanto, $y=f(x) \in f([a,b])$

$\subset$) Supongamos que $f([a,b]) \not\subset [f(a),f(b)]$, entonces existe $z \in f([a,b])$ tal que $z \notin [f(a),f(b)]$



$\leftarrow z > f(b)$

Entonces f no es ~~creciente~~ inyectiva $\longrightarrow$



$\leftarrow z < f(a)$

Entonces f no es ~~creciente~~ inyectiva $\longrightarrow$

Si $f(b) \le f(a)$, el resultado análogo se obtiene con f decreciente