2.13. c) Se considera la sucesión $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n^2}$, $a_1 = 2$. Probar que $\{a_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy y después calcular su límite.

PASO I: Vamos a probar en primer lugar que $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{6}{16}|a_n - a_{n-1}|$

$$|a_{n+1} - a_n| \le \left|2 + \frac{1}{a_n^2} - 2 - \frac{1}{a_{n-1}^2}\right| = \left|\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n-1}^2}\right| = \left|\frac{a_{n-1}^2 - a_n^2}{a_{n+1}^2\, a_n^2}\right| =$$

$$= \frac{|a_{n-1} + a_n|}{|a_{n-1}^2 \cdot a_n^2|} \cdot |a_{n-1} - a_n| \le \left(\frac{|a_{n-1}| + |a_n|}{|a_{n-1}|^2 + |a_n|^2}\right) |a_{n-1} - a_n|.$$

Veamos que $\frac{|a_{n-1}| + |a_n|}{|a_{n-1}|^2 \cdot |a_n|^2} \le 6/16$. Para ello vamos a probar que

$2 \le |a_n| \le 3$ para cada n.

En efecto como cada $a_n = 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2}$ entonces $a_n \ge 2$ $\forall n \ge 1$.

Por tanto $a_n = 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} \le 2 + \frac{1}{2^2} = 2 + \frac{1}{4} \le 3$

De este modo $\frac{|a_{n-1}| + |a_n|}{|a_{n-1}|^2 |a_n|^2} \le \frac{3+3}{2^2 \cdot 2^2} = \frac{6}{16}$.

Concluimos que $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{6}{16}|a_n - a_{n-1}|$

PASO II: Para ver que $\{a_n\}_n$ es de Cauchy tenemos que acotar adecuadamente $|a_{n+k} - a_n|$ para cualquier $k \ge 1$.

En primer lugar tenemos que

$$|a_{n+1} - a_n| \le \frac{6}{16}|a_n - a_{n-1}| \le \left(\frac{6}{16}\right)^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \le \left(\frac{6}{16}\right)^3 |a_{n-2} - a_{n-3}|$$

$$\le \dots \le \left(\frac{6}{16}\right)^{n-1} |a_2 - a_1| = \left(\frac{6}{16}\right)^{n-1} \cdot \left|2 + \frac{1}{a_1^2} - 2\right| =$$

$$= \left(\frac{6}{16}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$$

Ahora,

$$|a_{n+k}-a_n| \le |a_{n+k}-a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1}-a_{n+k-2}| + \cdots + |a_{n+1}-a_n|$$

$$\le \left(\frac{6}{16}\right)^{n+k-2}\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{6}{16}\right)^{n+k-3}\cdot\frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{6}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4} =$$

$\uparrow$

$|a_{n+1}-a_n| \le \left(\frac{6}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{6}{16}\right)^{n-1}\cdot\left(\left(\frac{6}{16}\right)^{k-1} + \left(\frac{6}{16}\right)^{k-2} + \cdots + \left(\frac{6}{16}\right)^{1} + \left(\frac{6}{16}\right)^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{6}{16}\right)^{n-1}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{6}{16}\right)^{j} \le \frac{1}{4}\left(\frac{6}{16}\right)^{n-1}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{6}{16}\right)^{j} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{6}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{6}{16}} = \frac{1}{4}\left(\frac{6}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{16}{10} = \frac{2}{5}\left(\frac{6}{16}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Por tanto, la sucesión es de Cauchy. $\Rightarrow$ la sucesión es convergente.

PASO III: Para calcular el límite haremos:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ y como $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n^2}$ deducimos que

$$\ell = 2 + \frac{1}{\ell^2} \Rightarrow \ell^3 = 2\ell^2 + 1 \Rightarrow \ell^3 - 2\ell^2 - 1 = 0$$

Consideramos la función $f(\ell) = \ell^3 - 2\ell^2 - 1$ y observamos que

$f'(\ell) = 3\ell^2 - 4\ell = 3\ell(\ell - \frac{4}{3})$ que es positiva si $\ell > \frac{4}{3}$

Como $f(2) = -1$, $f(3) = 8$ sabemos que f se anula entre 2 y 3 ~~en un único valor~~ y de hecho al ser $f'(\ell) > 0$ para $\ell > 4/3$ deducimos que f se anula en un único valor > 2, que es justamente el límite de la sucesión.

2.18 Si $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, entonces

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Falso, porque ~~$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$~~ podemos tomar $b_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = 2$

y tendremos $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$

y $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

Falso, porque podemos tomar $b_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

y tendremos $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

c) ~~$\lim_{n\to\infty}$~~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

Falso, usando el mismo ejemplo que antes pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ (por ser armónica con exponente $\frac{1}{2} < 1$)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ~~$=$~~ ∞

Falso, usando $b_n = n$, $a_n = (-1)^n n^2$. Tendremos

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(-1)^n n^2} = 0$ y

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \neq \infty$ porque es de términos alternados y

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2$ no existe.

e) Con estas condiciones no está determinado el carácter de la serie. Esta es la correcta, por descarte de las anteriores

2.19 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ donde $a_1=1,\ a_2=3,\ a_n=9\ \forall n \geq 3$

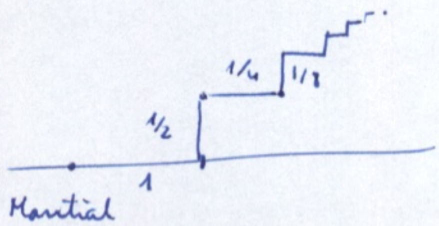
representa al número real: a) 1,3 b) 0,13 c) 1,4 d) 0,14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cancel{a_n}\,9}{10^n} = 0{,}13 + 9 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{10^n} =$$

$$= 0{,}13 + \frac{9}{1000} \cdot \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{10^{n-3}} = 0{,}13 + \frac{9}{1000} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$$

$$= 0{,}13 + \frac{9}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 0{,}13 + \frac{9}{1000} \cdot \frac{10}{9} = 0{,}13 + \frac{1}{100} = 0{,}14$$

2.20 Enunciado en la hoja



$$x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} x$$

Por tanto, $x = \frac{1}{1-1/4} = 4/3$, $y = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

El punto es el $(4/3, 2/3)$

2.21 Sean las series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^{k+}$.

Prueba que todas son absolutamente convergentes $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tenemos que probar que las series de términos positivos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k-1}}{(2k-1)!}$$ son convergentes.

Por el criterio del cociente veremos que lo son:

① $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0$$

③ $a_n = \frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{|x|^{2n-1}}{(2n-1)!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+1)2n} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)2n} = 0$$

② $a_n = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

2.22 Calcula el dominio de la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n}$

Por el criterio del cociente tenemos que:

$a_n = \frac{|x|^n}{3n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{3(n+1)}}{\frac{|x|^n}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x| n}{n+1} =$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

Por tanto, por el criterio del cociente, si $|x|$ es menor que 1 la serie es absolutamente convergente y por tanto convergente.

- Si $x>1 \Rightarrow f(x)$ es divergente por el criterio del cociente.

- Si $x<-1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(+x)^n}{3n}$ no existe (porque oscila a $+\infty$ y $-$ y por tanto la serie no puede ser convergente.)*

- Si $x=1$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

porque es la serie armónica con $p=1$

- Si $x=-1$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n}$ que es convergente por el criterio de Leibnitz

CONCLUSION: el dominio es $[-1,1)$

* Los términos pares de la sucesión $\frac{x^n}{3n}$ para $x<-1$ son

$$\frac{|x|^{2k}}{3\cdot(2k)} \quad \text{con } |x|>1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k}}{3(2k)} = \lim_{t\to\infty} \frac{|x|^{2t}}{6t} \underset{\uparrow \text{ L'Hopital}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2|x|^{2t}\cdot \log|x|}{6} = +\infty$$

* Los términos impares de la sucesión $\frac{x^n}{3n}$ para $x<-1$ son

$$(-1)\frac{|x|^{2k+1}}{3(2k+1)} \quad \text{con } |x|>1$$

$$\lim_{k\to\infty} (-1)\frac{|x|^{2k+1}}{3(2k+1)} = -\lim_{t\to\infty} \frac{|x|^{2t+1}}{6t+3} = -\lim_{t\to 0} \frac{2|x|^{2t+1}\log|x|}{6} = -\infty$$

Por tanto oscila entre $+\infty$ y $-\infty$, con lo que el $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3n}$ no existe si $x<-1$. Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ no puede converger

2.22 b) Calcular el dominio de la función $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n}$

Veamos que el dominio es todo $\mathbb{R}$: Para ello vamos a probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n}$ es absolutamente convergente para cada $x \in \mathbb{R}$. En efecto

$$\left|\frac{\cos(nx)}{3^n}\right| = \frac{|\cos(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ es convergente deducimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(nx)}{3^n}\right|$ es convergente $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n}$ es convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Calcular el dominio de la función $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cos(n\pi)x^n}{n^2}$

En primer lugar observamos que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, así que tenemos que estudiar la serie

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n^2}$$

Veamos que si $|x| > 1 \Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < -1 \\ \text{no existe} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En consecuencia para esos valores la serie será divergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-x)^n}{n^2} \underset{\text{L'Hopital}}{\overset{\left[\frac{\pm\infty}{\infty}\right] \text{ ya que } |x|>1}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{n(-x)^{n-1}}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < -1 \\ \text{no existe} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Veamos que ocurre si $|x| \leq 1$. En este caso nuestra serie es absolutamente convergente ya que $\left|\frac{(-1)^n \cdot x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente por ser la serie armónica con exponente $2 > 1$.

Por tanto el dominio de la función es $[-1, 1]$