4.7. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

e) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

- Dominio $(f) = (0, +\infty)$
- No es simétrica
- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}-1}{x} = -\infty \rightsquigarrow x=0$$

L'H

- Asíntotas horizontales:

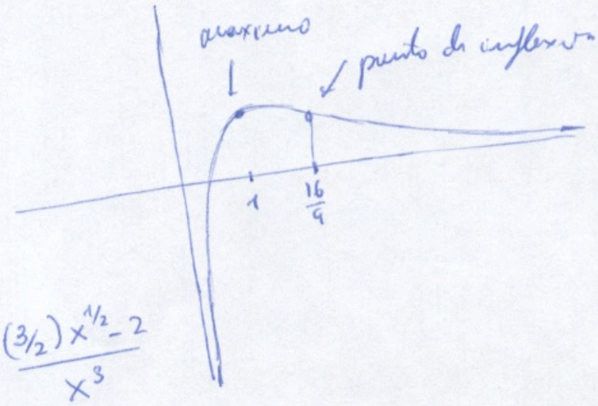
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}-1}{x} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \rightsquigarrow y=0$$

No hay asíntotas oblicuas

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = -x^{-3/2} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^{3/2}} + \frac{1}{x^2} = -\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2} \begin{cases} >0 & \text{si } 0<x<1 \\ =0 & \text{si } x=1 \\ <0 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Por tanto $\begin{cases} x<1 & \text{Creciente} \\ x=1 & \text{Maximo} \\ x>1 & \text{Decreciente} \end{cases}$



- Curvatura:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^{-5/2} - \frac{2}{x^3} = \frac{3}{2}\frac{x^{1/2}}{x^3} - \frac{2}{x^3} = \frac{(3/2)x^{1/2}-2}{x^3}$$

$$f''(x) \begin{cases} >0 & x > \frac{16}{9} \quad \text{Convexa} \\ =0 & \text{Punto de inflexión} \\ <0 & x < \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \quad \text{Concava} \end{cases}$$

f) $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$

• Dom(f) = $[-2,2]$

• Simetría: es simétrica impar

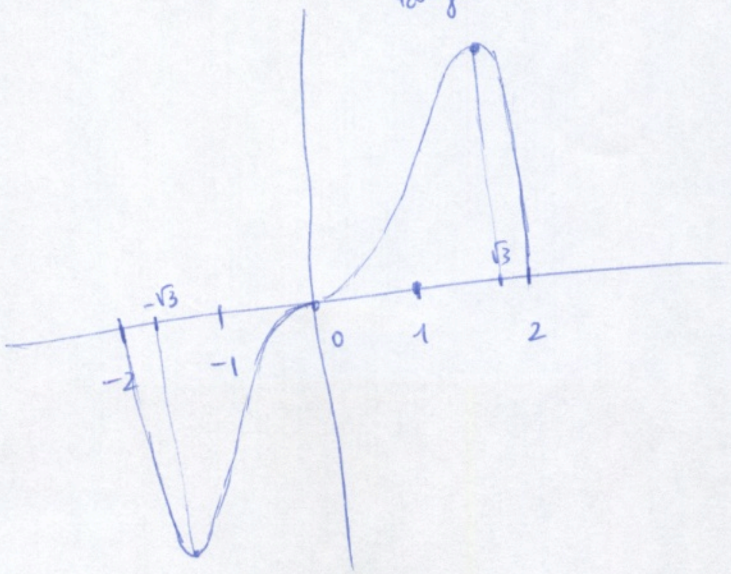
Como la función está definida en un intervalo cerrado y acotado y es continua en dicho intervalo, no tiene sentido buscar asíntotas

• Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{4-x^2} + x^3\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{3x^2(4-x^2)-x^4}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{12x^2-4x^4}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4(3-x^2)x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

Puntos críticos: $4(3-x^2)x^2 = 0 \iff x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$

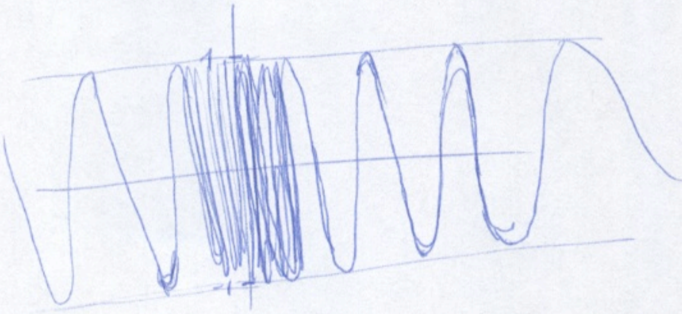
	$[-2,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},2]$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$\sqrt{3}-x$	+	+	+	+	+	0	−
$\sqrt{3}+x$	−	0	+	+	+	+	+
f'	−	0	+	0	+	0	−
	Decreciente	Mínimo	Creciente	Punto con tangente horizontal	Creciente	Máximo	Decreciente



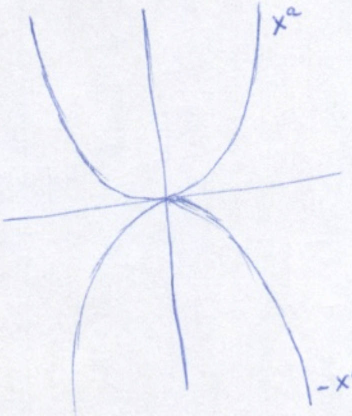
g) Aparece en la práctica con $a=3$

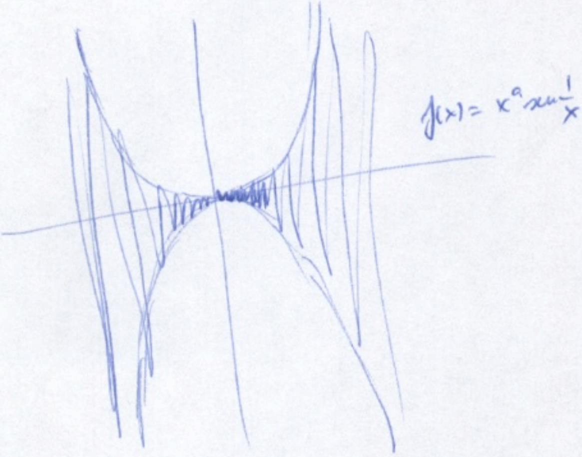
h) $f(x) = x^a \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

CASO $a=0$: $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

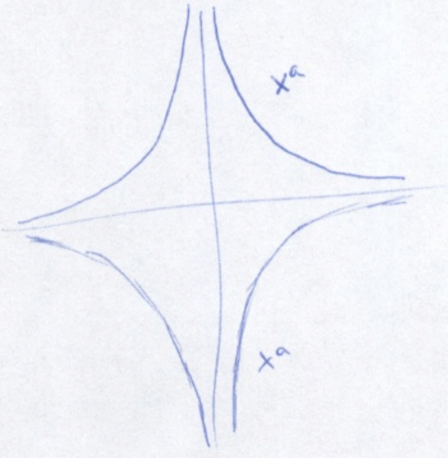


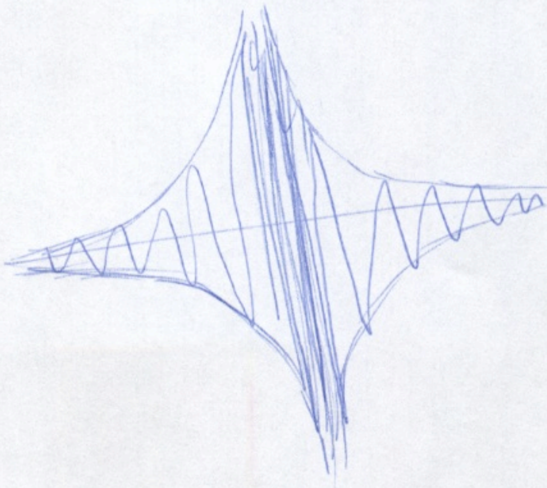
CASO $a>0$: $f(x) = x^a \operatorname{sen} \frac{1}{x}$





CASO $a<0$ $f(x) = x^a \operatorname{sen} \frac{1}{x}$





i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+1+1}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}$

- $Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- Simetría = no hay
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x-1+\dfrac{1}{x-1}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x-1+\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty\end{array}\right\}\to \text{Asíntota vertical } x=1$$

- Asíntotas horizontales: No tiene, ya que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$$

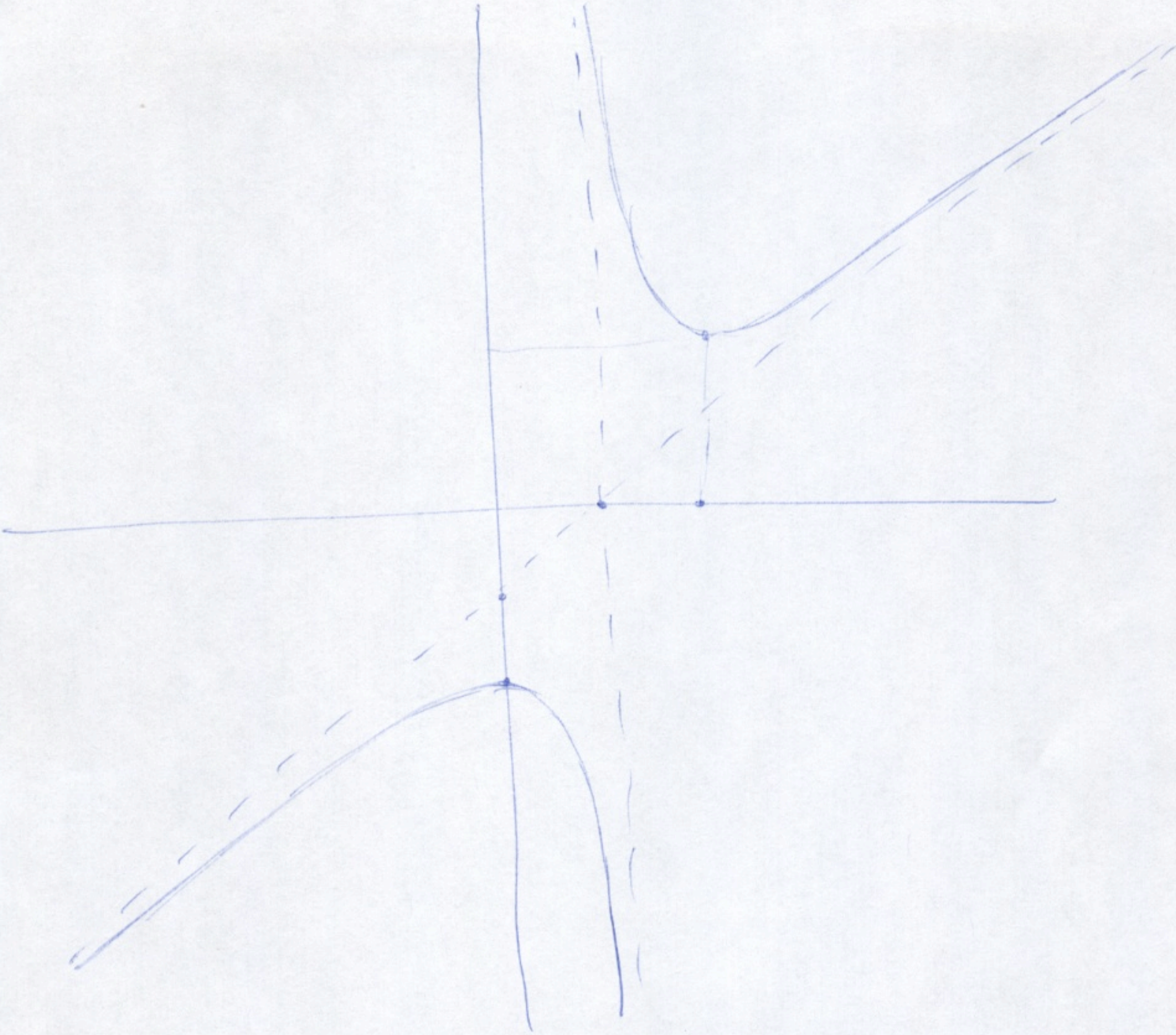
- Asíntotas oblicuas:

$$\left.\begin{array}{l}m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x(x-1)}=1\to m=1\\ n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-1+\dfrac{1}{x-1}=-1\to n=-1\end{array}\right\}\to y=x-1$$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ó } x=2$$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
	Creciente	Máximo	Decreciente	Mínimo	Creciente



4.13 a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x)^2 - x^2}{x^2(\operatorname{sen} x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Antes de calcular el límite recordamos que: $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x) \end{cases}$

Por tanto $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ y haremos esta sustitución para calcular el límite porque simplifica notablemente las cuentas.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen} x)^2 - x^2}{x^2(\operatorname{sen} x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos(2x)}{2} - x^2}{x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}\right)} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x) - 2x}{x - x\cos(2x) + x^2\operatorname{sen}(2x)} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\cdot 2 - 2}{1 - \cos(2x) + \underbrace{2x\operatorname{sen}(2x) + 2x\operatorname{sen}(2x)}_{4x\operatorname{sen}(2x)} + x^2\cos(2x)\cdot 2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-4\operatorname{sen}(2x)}{+\operatorname{sen}(2x)\cdot 2 + 4\operatorname{sen}(2x) + 4x\cos(2x)\cdot 2 + 2x\cos(2x)\cdot 2 + x^2\operatorname{sen}(2x)\cdot 2\cdot 2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-4\operatorname{sen}(2x)}{6\operatorname{sen}(2x) + 12x\cos(2x) - 4x^2\operatorname{sen}(2x)} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{L'H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos(2x)}{12\cos(2x)+12\cos(2x)-12x\,\text{sen}(2x)\cdot 2-8x\,\text{sen}(2x)-4x^2\cos(2x)\cdot 2}$$

$$= \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3}.$$

4.18. Si f es derivable y $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, prueba que f es monótona creciente o decreciente. Deduce que f es inyectiva.

(1) Supongamos que f no es estrictamente monótona, entonces existen $x_1<x_2$ $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tales que $f(x_1)=f(x_2)$. Por el teorema del valor medio, existe $\xi\in(x_1,x_2)$ tal que

$$\frac{0}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\underset{\neq 0}{f'(\xi)} \quad !!$$

Por tanto, f es estrictamente monótono.

(2) Veamos que f es inyectiva. Si no lo fuera, existirían $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ con $x_1<x_2$ tal que $f(x_1)=f(x_2)$!! porque f es estrictamente monótona.

4.19. Prueba que si f es derivable en a, entonces $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

Pon un ejemplo que pruebe que si $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$, la función f no es necesariamente derivable.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)+f(a-h)-f(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\overset{①}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}-f'(a)$$

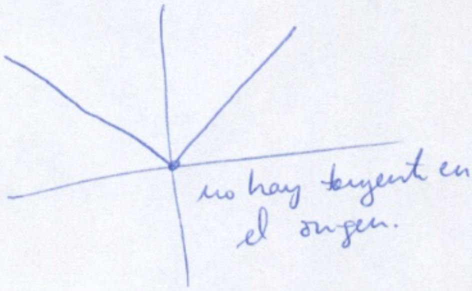
$$① \lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{+h}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=$$

$$\underset{t=-h}{=}-\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=-f'(a)$$

Por tanto, $2f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h} \Rightarrow f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

Sea $f=|x|$ y $a=0$. Observamos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|h|}{2h} = 0$ y sin embargo f no es derivable en 0.



4.20. Sea $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ de modo que existe $f''(x)$ $\forall x\in(a,b)$. Prueba que

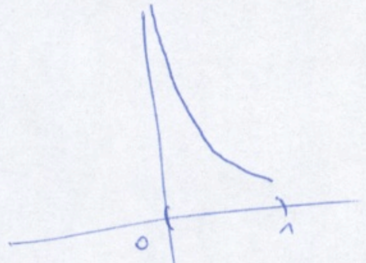
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{L'H}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} = f''(x)$$

Por el ejercicio anterior

4.22. a) Pon un ejemplo de una función f, derivable sobre un intervalo acotado, de modo que f no esté acotada.

Sea $f(x)=\frac{1}{x}$ y consideramos el intervalo $(0,1)$



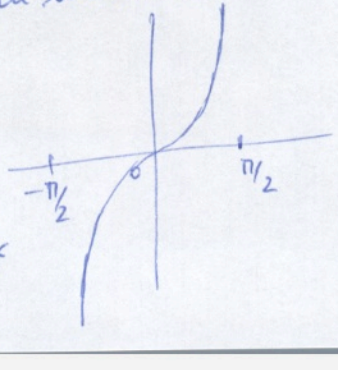
Sabemos que f es derivable en dicho intervalo

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

y sin embargo f no está acotada en dicho intervalo

b) Pon un ejemplo de una función derivable sobre un intervalo acotado, de modo que f no tenga maximo ni mínimo en el intervalo.

Sea $f(x)=$ ~~arc~~tg(x) en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.



$f'(x) = 1+tg^2(x)$. con lo que f es derivable Sin embargo no tiene max ni mínimo.

23| Justifica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

(1) Las siguientes funciones son derivables en $x=0$

(a) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Como es continua, para ver si es derivable o no, calculamos

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$
$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} -2x = 0$ $\Rightarrow f'(0) = 0$ y f es derivable

(b) $f(x) = |x| \operatorname{sen} x = \begin{cases} x \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + x\cos x & \text{si } x > 0 \\ -\operatorname{sen} x - x \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Como es continua, para ver si es derivable o no, calculamos

$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x + x\cos x) = 0 \\ f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} (-\operatorname{sen} x - x\cos x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) = 0$ y f es derivable

d) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ acotado

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \overset{0}{2x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{no existe}}$

Por tanto no es derivable

e) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 - x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Como es continua, para ver si es derivable o no, calculamos

$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \\ f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} 3x^2 - 2x = 0 \end{array}\right| \Rightarrow f'(0) = 0$ y f es derivable

c) $f(x) = \operatorname{sen}|x| = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \\ \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x > 0 \\ -\cos x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Como es continua, para ver si es derivable o no, calculamos

$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 \\ f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} -\cos x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$ luego no es derivable

(f) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 0 \\ x-2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Esta función no es continua en $x=0$ y por tanto no es derivab

2) $\forall x \in (2, +\infty)$ se cumple que:

(a) Si $f(x) = e^{x^2}$, entonces $f''(x) = e^{x^2}$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \rightsquigarrow f''(x) = 2e^{x^2} + e^{x^2} \cdot (2x)^2 = (4x^2+2)e^{x^2}$$

Por tanto es falso.

(b) Si $f(x) = e^{x^2}$, entonces $f''(x) = 2e^{x^2}$

Falso a la vista de los calculos hechos en el apartado (a)

(c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ implica $f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$. Por tanto es falso

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f''(x) = \operatorname{sen}(x+\pi) = \operatorname{sen}(x) \cdot \overset{-1}{\cos(\pi)} + \cos(x) \cdot \overset{0}{\operatorname{sen}(\pi)} =$

$= \operatorname{sen}(x) \cdot (-1) = -\operatorname{sen} x$

$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+\pi)$. Por tanto es verdadero

(e) $f(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = \cos(x+\pi) = \cos(x) \cdot \overset{-1}{\cos(\pi)} - \operatorname{sen}(x) \overset{0}{\operatorname{sen}(\pi)} =$

$= -\cos x$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$. Por tanto es verdadero.

3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{2x} - 1$. Entonces:

(a) $f'(x) = (x+1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{2x} + xe^{2x} = e^{2x}(x+1)$, así que, es verdadero.

b) f es creciente en $(-1/2, +\infty)$

$f'(x) = (x+1)e^{2x}$. Como e^{2x} es positivo siempre, el signo de $f'(x)$ solo depende del signo de $x+1$, que es >0 si $x>-1$. Por tanto $f'(x)$ es >0 en $(-1,+\infty)$ y por tanto f es creciente en $(-1,+\infty)$ y por tanto tambien lo es en $(-1/2, +\infty)$. Por tanto, verdadera

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{2x}-1 = +\infty$. Verdadera

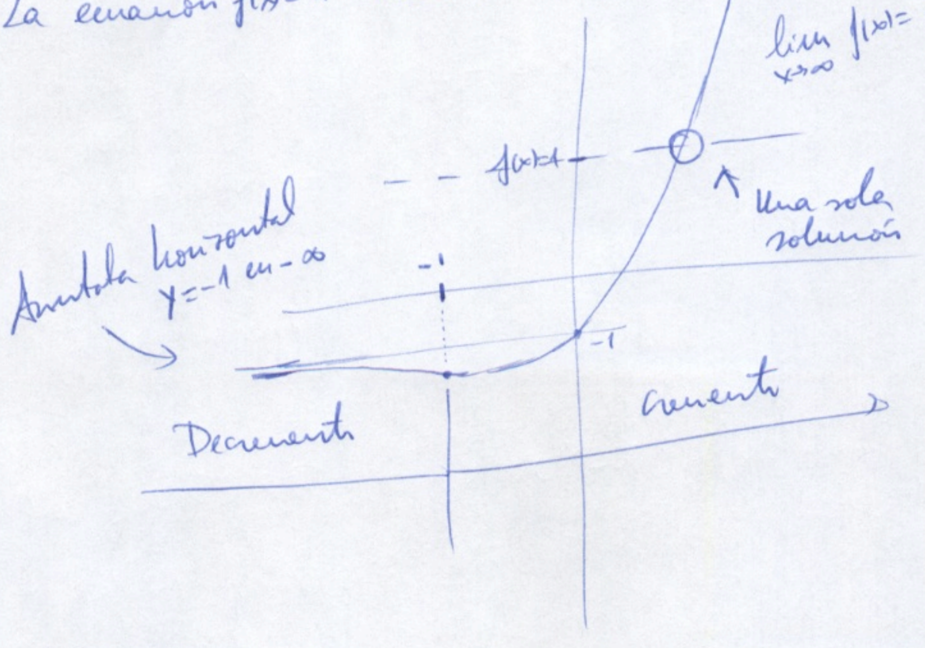
d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x}-1 = -1 + \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = -1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-2x}} \underset{\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]}{\overset{L'H}{=}}$

$= -1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = -1+0 = -1$

Por tanto no es $-\infty$, como dice el enunciado. Falsa

e) La ecuación $f(x)=1$ tiene una única solución

El aspecto de gráfica es el siguiente



4) Consideramos la función definida por $f(x) = \log(\log|x|)$ y sean D su dominio y ℓ su gráfica.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

Falso, $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{|x| \log|x|}$

Falso, $f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{x \log(x)} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{-1}{-x \log(-x)} = \dfrac{1}{x \log(-x)} & \text{si } x < 0 \end{array} \right\} = \dfrac{1}{x \log|x|}$

c) La recta tangente a ℓ en el punto $(e, f(e))$ es $y = \dfrac{x-e}{e}$

Ecuación de la recta tangente: $y - f(e) = f'(e)(x-e)$

$$y - 0 = \frac{1}{e}(x-e) \rightsquigarrow y = \frac{1}{e}(x-e) \text{. Verdadero.}$$

d) Para todo a, b con $e \leq a < b$, tenemos que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} > \dfrac{1}{e}$

- Por el teorema del valor medio, se cumple que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \quad \text{para cierto } \xi \in (a,b)$$

- Además, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$

- Veamos ahora que ocurre con $f'(x)$, es decir, vamos a analizar si esta función es creciente o decreciente. Para ello, calculamos su derivada $f''(x)$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\log|x|} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1}{(\log|x|)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\log|x|} + \frac{1}{(\log|x|)^2}\right) < 0$$

con lo que f' es decreciente. De este modo, si $\xi \in (a,b)$ y $e < a$

$\Rightarrow e < \xi$ y como f' es decreciente $f'(e) > f'(\xi)$, es decir

$$f'(e) = \frac{1}{e} > f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$, con lo que el enunciado es falso.

(5) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que su gráfica es simétrica respecto de la recta $x=2$. Entonces:

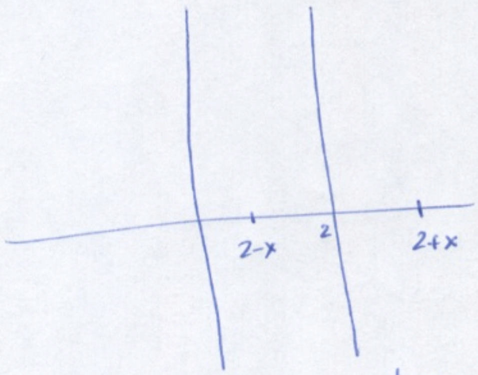
a) $f(x+2) = f(2-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Verdadero.

Una función es simétrica respecto a la recta $x=0$ si cumple

$$f(x) = f(-x)$$

Si trasladamos nuestra situación a la recta $x=2$, tendremos

$$f(2+x) = f(2-x)$$



(b) $f(x) = f(\cancel{4}-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hacemos $t = x+2$ y por tanto $x = t-2 \to 2-x = 4-t$. Así

$$f(x+2) = f(t) = f(4-t) = f(2-x)$$

con lo que es cierto. Verdadera.

(c) $f'(x+2) = f'(2-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Derivamos la igualdad $f(x+2) = f(2-x)$ y obtenemos

$$f'(x+2) = -f'(2-x)$$, con lo que es falsa

(d) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

$$1 = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(4-x) \underset{y=-x}{=} \lim_{y\to-\infty} f(4+y) = \lim_{y\to-\infty} f(y)$$

Por tanto es cierta.

e) Si $\lim_{x\to\infty} f'(x)=1$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-1$.

Como $f(x)=f(4-x)$, entonces $f'(x)=-f'(4-x)$

Por tanto

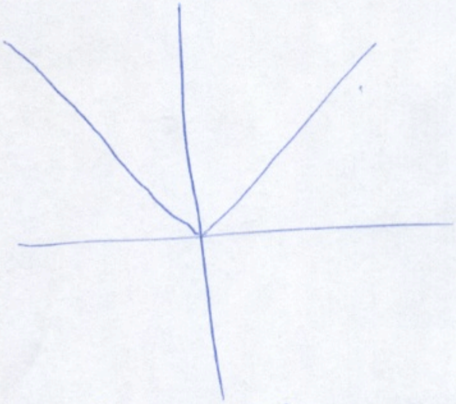
$$1=\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}(-f'(4-x))=-\lim_{x\to\infty} f'(4-x)\underset{y=-x}{=}-\lim_{y\to\infty} f'(4+y)=$$

$$=-\lim_{y\to\infty} f'(y) \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f'(x)=-1$$

Por tanto verdadera.

6) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, decreciente en $(-\infty,0)$, creciente en $(0,+\infty)$ y con $f(0)=1$. Una fórmula para f puede ser:

a) $f(x)=|x|+1$, Verdadero



b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{|x|+1}$, Falso.

Veamos que f no es creciente y decreciente como dice el enunciado

Para ello, calculamos la derivada

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(|x|+1)^2} & \text{si } x>0\\[2ex] \dfrac{2x(-x+1)+(x^2+1)}{(|x|+1)^2} & \text{si } x<0\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{x^2+2x-1}{(|x|+1)^2} & \text{si } x>0\\[2ex] \dfrac{-x^2+2x+1}{(|x|+1)^2} & \text{si } x<0\end{cases}$$

observamos que $f'(\frac{1}{3})=\dfrac{1/9+\frac{2}{3}-1}{(\frac{1}{3}+1)^2}<0$ con lo que f no es creciente en $(0,+\infty)$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Verdadera. Es una función par y es creciente en $(0,+\infty)$. Además $f(0)=1$.

x creciente en $(0,+\infty)$
x^2 creciente en $(0,+\infty)$
x^2+1 creciente en $(0,+\infty)$
$\sqrt{x^2+1}$ creciente en $(0,+\infty)$

d) $f(x) = \log(x^2+1) + 1$

Si, ya que es una función simétrica par, $f(0) = 1$. y es creciente en $(0,+\infty)$

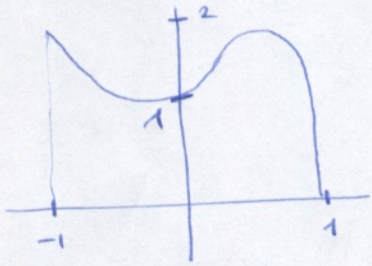
- x es creciente en $(0,+\infty)$
- x^2 es creciente en $(0,+\infty)$
- x^2+1 es creciente en $(0,+\infty)$
- $\log(x^2+1)$ es creciente en $(0,+\infty)$
- $\log(x^2+1)+1$ es creciente en $(0,+\infty)$.

e) $f(x) = e^x - x$

Si, ya que $f'(x) = e^x - 1$

$$e^x - 1 = 0 \iff x = 0 \quad \begin{cases} e^x - 1 < 0 \text{ si } x < 0 & \text{Decreciente} \\ e^x - 1 > 0 \text{ si } x > 0 & \text{Creciente} \end{cases}$$

7) Sea $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ y sea f' su derivada, cuya gráfica es la del dibujo:



a) f es monótona en $[-1,1]$.

Como $f'(x) > 0$ en $[-1,1]$ deducimos que $f(x)$ es estrictamente monótona creciente.

b) f admite un extremo en $x=0$.

No, ya que $f'(0) = 1$ y si fuera un extremo se tendría que cumplir $f'(0)=0$

c) En el punto de abscisa $x=0$, la gráfica de f tiene una tangente paralela a la recta $y=x$

Si, ya que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es $m = f'(0) = 1$

d) Para todo $x \in [-1,1]$, $f(x) \geq 0$

constante

A priori no lo podemos asegurar porque las funciones $f(x)+C$ tienen la misma derivada y si no sabemos con cual de ellas estamos trabajando.

e) f se anula al menos una vez en $[-1,1]$

No lo podemos asegurar por el mismo motivo expuesto en (d)