SUCESIONES Y SERIES

Sucesión numérica

Una **sucesión numérica** o simplemente **sucesión** es una función con **dominio** en el **conjunto** $\mathbb{N}$ y **recorrido incluido en** $\mathbb{R}$**,** es decir:

$$u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Una **sucesión numérica** es un conjunto de pares ordenados, y la denotaremos por (u_n),

$$(u_n) = \{(n, u_n)/n \in \mathbb{N}\} = \{(1,u_1),(2,u_2),\dots,(n,u_n),\dots\}$$

Omitiendo las primera componentes, escribiremos simplemente como
$(u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ con $n \epsilon \mathbb{N}$.

El número u_n es el término de lugar n o **término n-ésimo** de la sucesión y contiene la ley de formación de la misma.

Ejemplo1: Escriba los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $(n^2) = (1,4,9,16,25,\dots)$

C.A
Sabiendo que el término n-ésimo es: $u_n = n^2$

$u_1 = 1^2 = 1$
$u_2 = 2^2 = 4$
$u_3 = 3^2 = 9$
$u_4 = 4^2 = 16$
$u_5 = 5^2 = 25$

b) $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

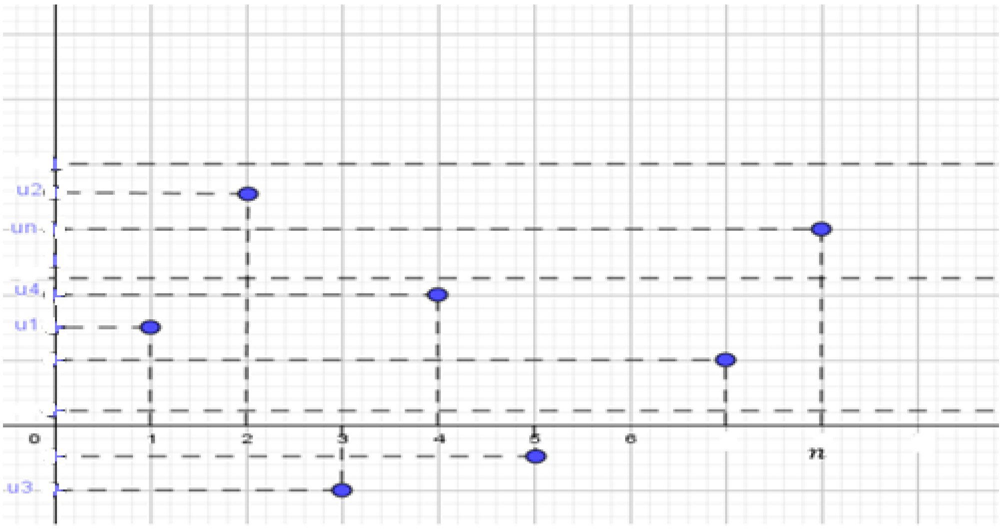
Ejemplo2: Escriba el término de lugar n de la sucesión:

a) $(3, 5, 7, 9, \dots) = (2n + 1)$
b) $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots\right) = \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

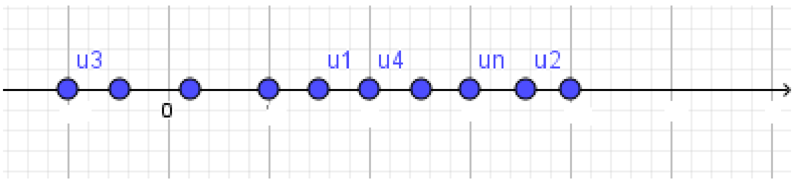
Representación geométrica

Las sucesiones numéricas pueden representarse en el plano xy.

$$(u_n) = \{(n, u_n)/n \in \mathrm{N}\} = \{(1,u_1),(2,u_2),\dots,(n,u_n),\dots\}$$



Es usual representar las sucesiones numéricas $(u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ con $n \epsilon \mathbb{N}$.
en la recta real, como se muestra a continuación



<u>Sucesión convergente</u>

Si una sucesión (u_n) tiene **límite finito**, se dice que es una **sucesión convergente**, y que la sucesión **converge** al límite. En caso contrario, la sucesión es **divergente.**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall n: (n > \delta \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)]$$

Que una sucesión (u_n) tenga límite finito l, significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, en el entorno con centro l y radio ε están todos los términos de la sucesión con la posible excepción de un número finito de ellos.

Nota: El número δ depende de ε, y además no es único, pues la definición también se cumple para cualquier número positivo δ' mayor que δ $(\delta' > \delta)$.

Ejemplo: Muestre que la sucesión b) del ejemplo 1 es convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall n: \left(n > \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right)\right]$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \underbrace{<}_{1} \frac{1}{\delta}$$

Para que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ bastará con que $\frac{1}{\delta} < \varepsilon$, Eligiendo $\delta \geq \frac{1}{\varepsilon}$ se cumple que, para cada índice n, si $n > \delta$ entonces $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Calculo Auxiliar:

1. Por hipótesis $n > \delta$

$$n > \delta \rightarrow \frac{n}{n.\delta} > \frac{\delta}{n.\delta} \rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\delta}} > \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$$

$$\frac{1}{\delta} \underbrace{\leq}_{deseo} \varepsilon \rightarrow \frac{1.\delta}{\delta} < \varepsilon.\delta \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \delta$$

Importante

- Si una sucesión **tiene límite infinito**, se dice que es una **sucesión divergente**. La sucesión $(u_n) = (n^2)$ es una sucesión divergente.
- Si una sucesión **no tiene límite finito ni límite infinito**, se dice que es una **sucesión oscilante.** La sucesión $(u_n) = ((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ es una sucesión oscilante.

<u>Propiedades del límite de sucesiones</u>

Si $c \epsilon \mathbb{R}$, (s_n) y (t_n) dos sucesiones convergentes, cuyos límites son $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ y $\lim_{n\to\infty} t_n = T$, entonces existe

- $\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = S + T$
- $\lim_{n\to\infty} (s_n - t_n) = S - T$
- $\lim_{n\to\infty} (c\,.\,s_n) = cS$
- $\lim_{n\to\infty} (s_n . t_n) = S.T$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{S}{T}$, siempre que $T \neq 0$

<u>Sucesiones acotadas</u>

- Una sucesión (u_n) está **acotada superiormente**, si existe un número $c \epsilon \mathbb{R}$ tal que, para todo índice n se verifica $u_n \leq c$. El número c es una **cota superior** de la sucesión (u_n).
- Una sucesión (u_n) está **acotada inferiormente**, si existe un número $k \epsilon \mathbb{R}$ tal que, para todo índice n se verifica $k \leq u_n$. El número k es una **cota inferior** de la sucesión (u_n).
- Una sucesión (u_n) **está acotada**, si lo está superior e inferiormente. Para todo índice n : $k \leq u_n \leq c$

Una sucesión acotada superiormente, en virtud del axioma de completitud, admite **supremo** y este es la menor de las cotas superiores.

Una sucesión acotada inferiormente , en virtud del axioma de completitud ,admite **ínfimo** y este es la mayor de las cotas inferiores.

Ejemplo: Analice las sucesiones del ejemplo 1.

$b)\ \left(\frac{1}{n}\right)$=$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\right)$

Está acotada entre 0 y 1, una cota sup=1 y una cota inf=0

Supremo= 1 ínfimo=0

<u>Sucesiones monótonas</u>

- Una sucesión (u_n) es **creciente** si y solo si, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$
- Una sucesión (u_n) es **estrictamente creciente** si y solo si , $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n < u_{n+1}$
- Una sucesión (u_n) es **decreciente** si y solo si, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_{n+1}$.
- Una sucesión (u_n) es **estrictamente decreciente** si y solo si, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n > u_{n+1}$.
- Una sucesión (u_n) es **monótona** si es creciente o decreciente y es **estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Ejemplo: Analice las sucesiones del ejemplo 2.

a) Sea la sucesión (u_n)=$(2n + 1)$

$$u_n = 2n + 1$$

$$u_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 2 + 1 = 2n + 3 \quad \rightarrow \quad u_{n+1} = 2n + 3$$

De donde es claro que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $2n + 1 < 2n + 3$, es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n < u_{n+1}$

Por lo tanto la sucesión $(u_n) = (2n + 1)$ es estrictamente creciente.

$b)(u_n) = \left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3^{n+2}}$$

Comparamos fracciones

$\frac{1}{3^{n+1}} > \frac{1}{3^{n+2}}$ → $u_n > u_{n+1}$ para cualquier n natural,

$1.3^{n+2} > 1.\,3^{n+1}$

Teorema: Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Nota: El otras palabras, el teorema asegura que:
Si (u_n) es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces es convergente.
Si (u_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente.