



# Estimando la fuerza de fricción en la caída de una servilleta

**López Oscar Danilo\***  
**Seijas Donovan Paul\*\***

*Universidad Industrial de Santander*  
*Cra. 27 Calle 9 Ciudad Universitaria, Bucaramanga, Santander, Colombia*

17 de mayo de 2023

## Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3. Marco teórico</b>	<b>2</b>
<b>4. Metodología</b>	<b>3</b>
<b>5. Resultados y análisis</b>	<b>5</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>10</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>10</b>

## 1. Resumen

Con el objetivo de analizar el movimiento de caída libre y el comportamiento de las variables que intervienen en este mismo, realizaremos dos experimentos con una servilleta, con el fin también de estimar la acción de la fricción del aire en este movimiento. Ejecutaremos el experimento en dos condiciones distintas, la primera con la servilleta comprimida y la segunda con la servilleta extendida.

Efectuaremos modelos experimentales para cada experimento al igual que su respectiva simulación computacional, a partir de ello encontraremos los datos del movimiento en cada experimento y esto

---

\* e-mail: oscar2230659@correo.uis.edu.co

\*\* e-mail: donovan2230667@correo.uis.edu.co

nos permitirá estimar finalmente las variables que queremos encontrar.

Para la ejecución de todo esto nos apoyaremos en las bases teóricas del movimiento de caída libre, y en dos softwares (Tracker y el lenguaje de programación Python) los cuales no ayudarán para la ejecución de la toma de datos, la realización de cálculos y la simulación misma de todo el experimento. Todo esto para terminar obteniendo un valor pertinente para el coeficiente de fricción del aire, el cual denotaremos con la letra  $K$ .

## 2. Introducción

La caída libre es un fenómeno estudiado por el campo de la cinemática de la física, donde un cuerpo cae de forma ininterrumpida sin ningún tipo de obstáculo, siendo afectado únicamente por la fuerza de atracción que le ejerce la tierra al objeto, tomando esta fuerza como la aceleración del objeto al momento de su caída. Otras condiciones importantes dentro de este tipo de movimiento es que posee una altura inicial, que es desde donde inicia su trayectoria con una velocidad inicial igual a cero. Sin embargo, estas condiciones no describen con total exactitud el movimiento que realiza un objeto al hacer una caída libre en el mundo real, pues existe un elemento que interviene en la caída libre de un cuerpo y que la mayoría de veces no se tiene en cuenta para el estudio. Este elemento es la resistencia del aire o también llamado la fricción del aire. El objetivo con este experimento es hallar el valor de la fricción del aire, con ayuda de un modelo experimental y otro modelo computacional, en el cual emplearemos distintas herramientas computacionales. Para esto realizaremos el experimento con dos condiciones distintas. La primera con una servilleta extendida, en esta notaremos la acción de la resistencia del aire. Para la segunda condición realizaremos el mismo experimento y tendremos la misma servilleta, pero esta vez comprimida, donde el actuar de la resistencia del aire será tan mínima que terminará siendo despreciable. Además se realizará el modelo computacional de cada experimento, con el objetivo de comparar los datos encontrados respecto al modelo experimental.

## 3. Marco teórico

La caída libre es un fenómeno físico que describe cuando un objeto se deja caer desde cierta altura y solo se ve afectado por la fuerza gravitacional. Sin embargo, la presencia de otros factores, como la fricción del aire, puede modificar significativamente el movimiento descrito de dicho objeto. En este marco teórico, se explorará la caída libre de una servilleta en dos escenarios, cuando esta se encuentra comprimida por lo cual no actúa la fuerza de fricción (Es despreciable), y cuando la servilleta se encuentra extendida, situación donde sí se puede notar el actuar de la fuerza de fricción.

En una caída libre sin fricción del aire, el objeto cae sin ninguna fuerza resistiva actuando sobre él aparte de la gravedad. En este caso, la servilleta comprimida experimentará una aceleración constante hacia abajo debido a la fuerza gravitacional. Según la Segunda Ley de Newton, la aceleración se calcula dividiendo la fuerza neta que actúa sobre la servilleta por su masa. En este caso, la fuerza neta es simplemente el peso de la servilleta, por lo que la aceleración será constante

durante todo el proceso de caída.

$$a = \frac{F}{m}$$

En el otro caso, en una caída libre con fricción del aire, la presencia de dicha fricción produce una fuerza resistiva opuesta al movimiento de la servilleta. A medida que la servilleta cae, la fuerza de la fricción aumenta proporcionalmente a la velocidad, hasta alcanzar un punto en el que iguala al peso de la servilleta, entrando en equilibrio el sistema, pues ambas fuerzas se anulan mutuamente. En ese momento, la servilleta alcanza una velocidad constante. La fuerza de fricción y el peso se equilibran, por lo que la aceleración comienza a ser nula.

En resumen, la caída libre de una servilleta comprimida se caracteriza por despreciar la fuerza de fricción, por lo que dicho movimiento posee una aceleración constante hacia abajo, mientras que en el caso de la servilleta extendida, la fuerza de fricción del aire no es despreciable, por ello la servilleta experimentará una aceleración inicial hasta que a medida que la fuerza de fricción aumenta, la aceleración va disminuyendo hasta ser 0, punto en el que el sistema alcanza el equilibrio. La comprensión de estos conceptos resulta fundamental para analizar y entender el comportamiento de cada variable involucrada en la caída libre de la servilleta comprimida y extendida.

## 4. Metodología

Los experimentos fueron realizados bajo las mismas condiciones ambientales, buscando que el movimiento de la caída libre de la servilleta tuviera los menores obstáculos posibles en su trayectoria, así evitando cambios bruscos de dirección ocasionados por ventiscas de aire. Se grabaron cerca de 10 tomas de cada experimento. Los videos fueron grabados con la cámara de un dispositivo móvil, la cual grabo a 30 fps. Para el análisis y recolección de datos se utilizó el software Tracker. En este programa se insertaron los videos correspondiente a cada prueba, para obtener mejores resultados se realizaron diez tomas de cada uno de los experimentos. Se usó como vara de calibración en el programa una regla de 16cm que fue puesta en la pared posterior a donde se realizaba cada toma, lo que nos permitió en tracker tomar las medidas del movimiento realizado y de esta manera hallar la distancia recorrida por la servilleta. En el caso del experimento con la servilleta extendida, se tomaron los primeros 17 fotogramas de cada video. Esto nos permitió tener 10 experimentos equivalentes en los cuales podíamos comparar la distancia recorrida para un mismo instante del movimiento. Mientras que en el experimento con la servilleta comprimida se tomaron 13 instantes.

Con la experimentación terminada continuamos con la simulación computacional y el cálculo de las variables. Para ello empleamos el lenguaje de programación Python, en la elaboración de gráficas y el cálculo de las distintas variables tales como el valor de la gravedad y la resistencia del aire. Estas variables para la servilleta comprimida las calculamos por medio de las ecuaciones de caída libre con aceleración constante, las cuales las reproducimos en nuestro código de Python. En el caso de

la servilleta extendida, el análisis del movimiento se tuvo que dividir en intervalos, y en cada uno de ellos considerar la presencia de una aceleración constante distinta para cada intervalo. Esto nos permitió realizar las estimaciones con mayor facilidad y reproducir un código en Python el cual nos permitía hallar la variación de la gravedad y el coeficiente de fricción que tenía el aire en este movimiento.

En Jupyterlab recopilamos los datos que recolectamos de tracker, y creamos dos códigos distintos para el análisis de cada experimento. En cada código subimos el archivo de datos de cada una de las tomas realizadas, logrando sacar un promedio de datos. De esta manera obtuvimos la media aritmética de tiempo y de distancia para cada instante. Esto nos permitió que a la hora de realizar los cálculos obtuviéramos valores más cercanos a los teóricamente esperados. A los datos promedios que obtuvimos les aplicamos las distintas fórmulas de movimiento caída libre respectivas a cada experimento.

En el caso de la servilleta comprimida, el análisis fue más sencillo, pues la fricción era despreciable, por lo que la aceleración actúa de manera constante. Además empleando las leyes de los logaritmos, convertimos la ecuación cuadrática en una lineal. Esto nos permitió luego calcular la gravedad en cada toma del experimento con la servilleta comprimida en Python .

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h$$

$$\ln(y) = \ln\left(-\frac{1}{2}gt^2 + vt + h\right)$$

En el modelo teórico con la servilleta extendida, empleamos las siguientes fórmulas para calcular las variables en cada instante

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{a_0 \cdot dt^2}{2} + v_0 \cdot dt + y_0 \\ v_1 &= a_0 \cdot dt + v_0 \\ a_1 &= g - B \cdot v_1 \\ B &= \frac{k}{m} \end{aligned}$$

Siendo  $a$  la aceleración en ese instante,  $y$  la posición de la servilleta,  $v$  la velocidad en dicho instante y  $B$  que representa la relación entre el coeficiente de fricción y la masa de la servilleta. En Python aplicamos una función, para que dichas ecuaciones se repitieran en intervalos de 0.005 segundos.

Para el cálculo de variable de  $B$  en este caso se tiene un problema, y es la variación de la aceleración durante el tiempo debido a la fuerza de fricción del aire. Para remediar dicha situación se analizara el movimiento por intervalos pequeños, esto nos va permitir mantener la aceleración constante en cada intervalo. Realizamos este proceso para una cantidad de  $n$  intervalos de tiempo en el experimento.

$$[t_0, t_f] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \dots \cup [t_{n-2}, t_{n-1}] \cup [t_{n-1}, t_n = t_f]$$

De esta manera logramos realizar una simulación teórica del movimiento de la servilleta extendida. Este modelo teórico nos permitió comparar los datos obtenidos en el experimento con los teóricamente planteados.

## 5. Resultados y análisis

Como ya nombramos en la metodología, inicialmente calculamos un promedio en las variables de tiempo y distancia en ambos experimentos, para que de esta manera obtuviéramos valores más cercanos a los teóricamente planteados a la hora de calcular las distintas variables. En el experimento de la servilleta comprimida, la resistencia del aire es despreciable. Se tomaron en cuenta los valores del tiempo,  $t(s)$  medido en segundos, y la distancia recorrida durante la trayectoria de la servilleta  $y(m)$ , la cual fue medida en metros. Estos datos fueron tomados en el software Tracker y posteriormente fueron empleados para el cálculo de las variables, como la aceleración de la gravedad y el coeficiente de fricción del aire. En este caso al promediar las aceleraciones encontradas en cada uno de los intentos, se consiguió un valor promedio de  $9,009m\frac{m}{s^2}$ . El cual es muy cercano al valor de la gravedad teórica, con un margen de error del 1.76043729. La siguiente tabla muestra datos tomados de cada experimento y aceleración obtenida en cada uno de ellos.(Ver tabla 2)

DATOS	TIEMPO (s)	TRAYECTORIA (m)	ACELERACIÓN( $m/s^2$ )
1.1	0.4	0.724	7.50
1.2	0.4356	0.625	10.030
1.3	0.4	0.704	7.502
1.4	0.402	0.796	10.010
1.5	0.4	0.724	10.010
1.6	0.4	0.721	12.862
1.7	0.41	0.732	8.277
1.8	0.4	0.814	8.057
1.9	0.4	0.764	7.385
1.10	0.402	0.796	10.010
ACELERACIÓN PROMEDIADA			9.009

*Tabla 2. Datos del experimento con la servilleta comprimida*

Los datos para la servilleta comprimida se obtuvieron a partir de los promedios de los datos pertenecientes a cada instante. Esto nos permitió encontrar unos datos más precisos y con un margen de error menor, en contraste con analizar un único intento. A continuación se presenta la grafica de distancia recorrida en función del tiempo(Ver figura 1). Esto nos permite ver como la servilleta comprimida marca un movimiento acelerado, en el cual su gráfica de distancia en función del tiempo es una parábola creciente, de esta manera denotando la acción de una aceleración constante, la cual es producida por la fuerza de gravitación que actúa sobre la servilleta.

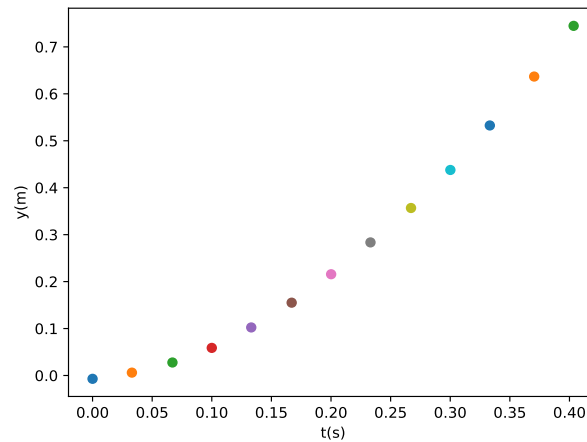


Figura 1. Gráfica  $y$  en función de  $t$ , de la servilleta comprimida

Para el cálculo de la aceleración en el caso de la servilleta comprimida recurrimos al uso de las leyes de los logaritmos. De esta manera se logró convertir la función cuadrática en una lineal, dando como resultado la siguiente gráfica (Ver figura 2) que representa la aceleración en función del tiempo. Como observar la gráfica es una línea recta, lo que significa que la aceleración es constante.

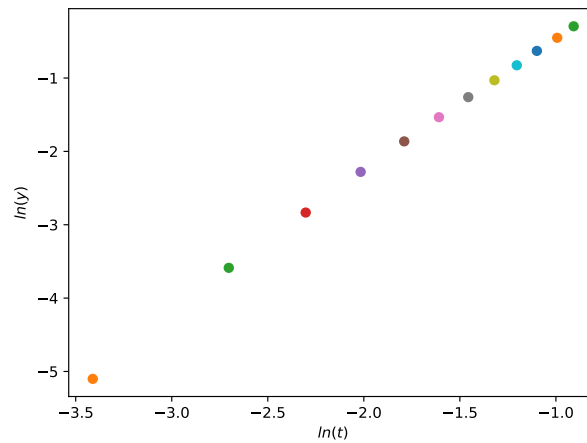


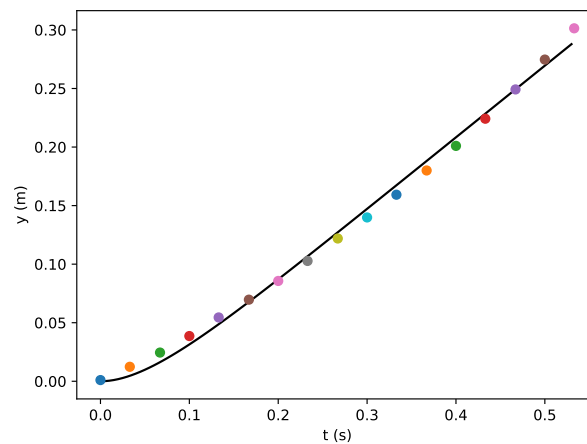
Figura 2. Gráfica de  $a$  en función de  $t$ , de la servilleta comprimida

En la Tabla 2 podemos observar los datos obtenidos luego de promediar la distancia recorrida en cada instante de los 10 experimentos realizados con la servilleta extendida. Esta tabla cuenta con 17 datos ya que se analizaron solamente los primeros 17 fotogramas de cada video, iniciando con el instante  $t = 0$ . El tiempo está en unidades de segundos y representa tiempo transcurrido en dicho instante. La distancia se encuentra en metros y representa la distancia recorrida en ese instante. Los datos expuestos en la tabla, fueron los utilizados para el cálculo de las variables para la servilleta extendida en Python.

DATOS	TIEMPO (s)	DISTANCIA(m)
1	0	0.00101886
2	0.033	0.0123713
3	0.067	0.024511
4	0.1	0.038617
5	0.133	0.0545
6	0.167	0.069676
7	0.2	0.08566
8	0.233	0.102745
9	0.267	0.121922
10	0.3	0.139896
11	0.333	0.1593
12	0.367	0.18
13	0.4	0.201
14	0.433	0.2242
15	0.467	0.2492
16	0.5	0.2747
17	0.533	0.3014

Tabla 2. Datos del experimento con la servilleta extendida

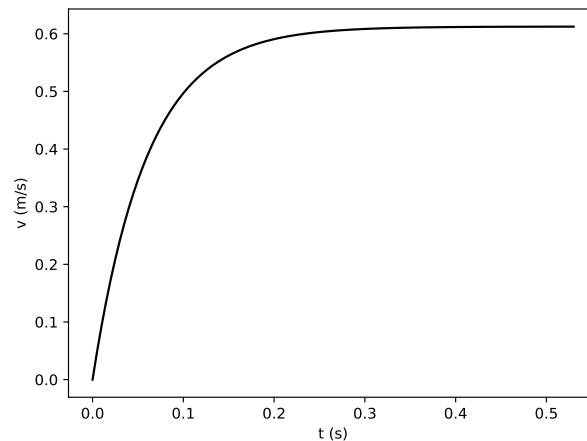
Con los datos del experimento de la servilleta extendida listos, ejecutamos en el código de Python las distintas fórmulas para realizar una estimación teórica respecto al movimiento. De esta manera, pudimos realizar una gráfica (Ver figura 3) en la cual se encuentra la estimación teórica de la distancia respecto al tiempo en el movimiento, y otra gráfica de la distancia respecto al tiempo, pero de los datos en el experimento. Además, con los datos promediados por medio de un código de Python, pudimos encontrar el margen de error de  $y$  en este experimento. Siendo  $Y_{error} = 0,09200545$ . Este valor correspondería a que tan alejados se encuentran nuestros datos en promedio, en otras palabras el margen de error respecto a los datos de distancia en el experimento de la servilleta extendida.



*Figura 3. Gráfica de  $y$  en función de  $t$ , de la servilleta extendida*

En la figura 1 se puede comparar los datos obtenidos en nuestro modelo experimental en contraste con los hallados en el modelo computacional. Los puntos de colores representan los datos del modelo experimental, si nos fijamos detenidamente son 17 puntos, cada uno de ellos representa la distancia recorrida por la servilleta en ese instante de tiempo. La línea negra son los datos obtenidos en Python al aplicar las fórmulas para encontrar la distancia en cada intervalo de tiempo, en este caso es una gráfica continua. Como podemos observar ambos modelos nos arrojan gráficas muy similares, hasta el punto en el que en algunos instantes ambas gráficas se sobreponen.

También realizamos una gráfica para la velocidad en función del tiempo, a partir de los resultados del modelo computacional realizado en Python. (Ver figura 4). En esta gráfica podemos analizar el comportamiento de la velocidad en los instantes tomados, podemos ver cómo inicia con una velocidad de 0 y va aumentando, hasta que tiende a convertirse en una constante. Esto sucede debido al actuar de la fricción del aire, la cual hace que la aceleración vaya disminuyendo a medida que avanza el movimiento, hasta el punto que la aceleración termina valiendo 0 por lo que la velocidad se vuelve constante.

*Figura 4. Gráfica de  $v$  en función de  $t$ , de la servilleta extendida*

Para la aceleración también realizamos una gráfica (Ver figura 5). Como las anteriores gráficas, esta también se basó en los datos obtenidos a partir del modelo computacional. Esta gráfica nos permite analizar el comportamiento de la aceleración a lo largo del movimiento, y es en esta gráfica donde se muestra de manera más evidente el actuar de la fricción del aire. Como podemos observar la aceleración no es una constante en  $9,8m/s^2$ , sino que esta va disminuyendo a medida que va



pasando el tiempo. Esto ocurre debido al actuar de la fuerza de fricción del aire la cual va en contra de la gravedad, provocando que se terminen anulando mutuamente. Esto causa que la aceleración de la servilleta vaya disminuyendo hasta volverse 0, pues en un sistema donde la sumatoria de fuerzas es 0, la aceleración es nula.

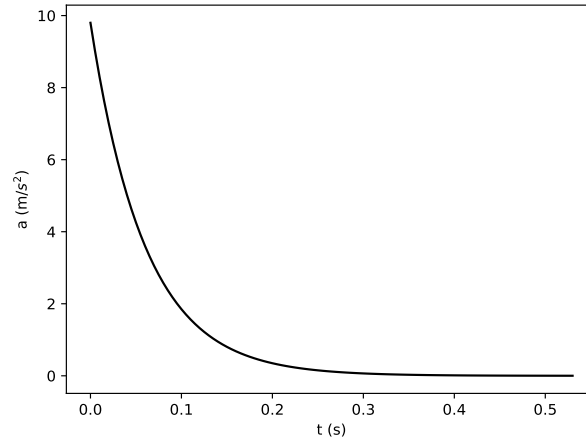
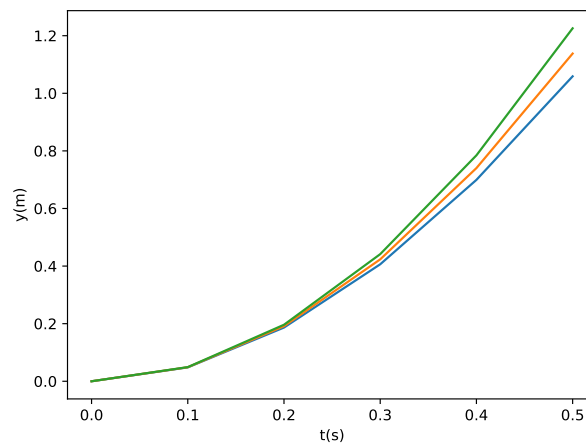


Figura 5. Gráfica de  $a$  en función de  $t$ , de la servilleta extendida

El cálculo del coeficiente de rozamiento del aire,  $k$  se consiguió con el valor  $B$ , dado por la fórmula  $B = k/ms$ , donde  $m$  es la masa de la servilleta, la cual fue medida dando como resultado  $0.22g$ . Para el cálculo de  $B$  tomamos como valores iniciales una gravedad de  $9.8 \frac{m}{s^2}$  un  $t_0 = 0$ ,  $t_f = 0,3014$  y  $\Delta t = 0,033$ . Estos valores serán usados para las ecuaciones de caída libre de aceleración constante, la cual podemos usar gracias a que dividimos nuestro movimiento en pequeños intervalos de tiempo.

$$v_f = v_0 + gt \quad \text{y} \quad y = v_0 t + g \frac{t^2}{2}$$

Gracias a estos cálculos conseguimos calcular el valor teórico de  $B = 16,87988661959446$ . En la figura 6 podemos observar una gráfica de  $y$  en función de  $t$ , basada en el modelo teórico del código de python. A partir de esta es que se calcula el valor de  $B$ .



*Figura 6. Gráfica de  $y$  en función de  $t$ , de la servilleta extendida*

Conociendo el valor de  $B=17$ , se puede despejar  $k$  de la ecuación de la siguiente manera:

$$B = \frac{k}{ms}$$

$$B \cdot ms = k$$

$$17g^{-1} \cdot 0,22g = k$$

$$3,74 = k$$

Cabe aclarar que  $k$  es un valor adimensional.

De esta manera habríamos encontrado el coeficiente de rozamiento del aire, otorgándole el valor de  $K = 3,34$

## 6. Conclusiones

En resumen a partir del experimento logramos estudiar el movimiento de caída libre desde dos sistemas distintos. Analizando cada uno y contrastando estos mismos, permitiéndonos denotar el actuar de la fricción del aire y cómo esta puede llegar a afectar las distintas variables del experimento. Logrando que, se pudiera otorgar un valor específico al coeficiente de la fricción del aire.

También, en definitiva, logramos realizar dos modelos para un mismo experimento, pues pudimos realizar un modelo experimental y otro computacional. Esto nos permitió luego comparar los datos obtenidos en nuestro modelo experimental encontrando un margen de error y llegando a unos datos más cercanos a los teóricamente planteados.

Finalmente el experimento nos permitió explorar y conocer las herramientas computacionales a mayor profundidad. En especial Tracker y el lenguaje de programación Python, los cuales fueron empleados para la realización del modelo computacional, permitiéndonos aprender a utilizarlas con una mayor eficiencia, y dándonos a conocer los distintos usos y funciones que pueden tener estas mismas.

## 7. Referencias

Núñez, L. A., & Rago, H. (2020, julio). Estimando la fuerza de fricción en la caída de una servilleta. <https://www.overleaf.com/project/5f0a2a960df1f70001e5adac>