



Estimando la fuerza de fricción en la caída de una servilleta

Gael G. Gonzalez y Luis E. Niño

Pregrado en Física

Universidad Industrial de Santander

Bucaramanga, Colombia

18 de mayo de 2023

Índice

1. Introducción	2
2. Marco Teorico	2
3. Metodologia	3
3.1. Montaje	3
3.2. Modelo Numérico	3
3.2.1. Caída con fricción despreciable:	4
3.2.2. Caída con fricción significativa:	5
4. Resultados	6
4.0.1. Caída con fricción despreciable:	6
4.0.2. Caída con fricción significativa:	7
5. Analisis	7
6. Errores e impresiones	8

Resumen


Este informe es concebido como la recopilación y análisis del proyecto propuesto en la materia *Intr. a las herramientas computacionales de la física* en donde por medio de herramientas computacionales hallar la fuerza de rozamiento que experimenta una servilleta en caída libre, al estar comprimida en forma esférica, y sin modificaciones a su forma original, buscando resultados lo más realistas posibles.

Con la herramienta *Tracker*, será recopilado el componente vertical de la servilleta en caída libre a lo largo del tiempo, con esta información y las herramientas matemáticas que ofrece

Python y sus librerías, se determinarán los valores para la fuerza de rozamiento y gravedad. Todo con el fin de ejercitar y profundizar el conocimiento y dominio sobre estas herramientas. Se proyectan lecturas con un margen de error del 7% con respecto a los valores reales de la gravedad y fuerza de rozamiento. Debido al tamaño de la muestra e imprecisiones en los instrumentos de medición.

Todos estos productos estan depositados en el ambiente MiLAB para garantizar su reproducibilidad.


1. Introducción

En el presente informe se analiza la caída de una servilleta comprimida y extendida, con tal de hallar los valores de  aceleración gravitacional y fuerza de rozamiento que experimenta la misma en la caída.

La servilleta se lanzará en dos modalidades desde una altura fija en un ambiente sin regulación atmosférica, la primera modalidad de lanzamiento será con la servilleta comprimida esféricamente y la segunda es con la servilleta extendida.

Ya recopilados, los datos son matemáticamente modelados por medio de JupyterLab, y comparados con modelos idóneos con tal de extraer la aceleración gravitacional y constante de rozamiento en cada modalidad de lanzamiento.

2. Marco Teorico

La Segunda Ley de Newton establece que las aceleraciones que experimenta un cuerpo son proporcionales a las fuerzas  recibe $\sum F_{ext} = m \cdot a$. En la física de bachillerato las ecuaciones toman a $\sum F_{ext}$ como una constante, bajo estas condiciones $v_f = v_0 + gt$ y $d = v_0 t + g \frac{t^2}{2}$ son una herramienta adecuada para encontrar la velocidad final y distancia recorrida por un cuerpo en caída libre. Esta afirmación es verdadera en entornos ideales sin resistencia del aire y en donde la aceleración es igual a la aceleración gravitacional. Para usar estas fórmulas de manera efectiva en la caída de una servilleta que si experimenta resistencia por parte del aire es necesario dividir el intervalo de tiempo en N subintervalos en donde la aceleración es constante en cada uno de ellos y la velocidad final v_{i+1} de un intervalo de tiempo $[t_i, t_{i+1}]$ será la velocidad inicial del próximo intervalo $[t_{i+1}, t_{i+2}]$.

$$[t_0, t_f] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \dots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_f] ,$$

La ecuación que describe el movimiento de un cuerpo cayendo bajo la acción de la gravedad y frenado por la resistencia de un fluido es:

$$ma = \sum_i F_{ext} \quad \Rightarrow \quad ma = mg - \kappa v , \quad (1)$$

Donde m es la masa del cuerpo, a su aceleración, v su velocidad, g la aceleración gravitacional y κ es la constante de fricción, esta depende de la forma del cuerpo en caída libre y valor a estimar.

3. Metodología

3.1. Montaje

El montaje del experimento se realizará con dos tipos de lanzamientos de la servilleta: cuando está abierta y cuando está arrugada. En un espacio no controlado de una residencia común, se agrega en una pared una línea recta de cinta con medida de 180 cm. Con respecto a su extremo superior, se deja caer una servilleta completamente abierta y se graba con un dispositivo móvil su caída. El vídeo se analiza en la aplicación **Tracker** para conseguir las distancias y tiempos por fotograma del vídeo del movimiento. Es necesario poner la medida de la cinta sobre la pared para usarse como vara de calibración y procurar la mayor exactitud posible. El proceso con la servilleta cerrada es exactamente el mismo. Posteriormente, repetiremos el procedimiento con cada tipo de servilleta 10 veces, con el fin promediar cada conjunto de datos por tipo de servilleta en las dos variables que se toman a consideración: Alturas (y) y Tiempos (t).



Figura 1: Extracción en Tracker

3.2. Modelo Numérico

Con el montaje numérico se realizará el modelo, se comparará con los datos de las mediciones y se estimará el valor de la constante k . Se analizará ambos casos, el primero donde la fricción se considera

despreciable para construir el movimiento sin la fuerza de fricción. Posteriormente, construir el modelo donde la fricción es considerable, al compararlos, por medio del valor experimental de la gravedad, se estimará el valor de k . Se hará uso del software **jupyterlab** para el procesamiento de cada operación matemática

3.2.1. Caída con fricción despreciable:

Se realizará el modelado de los promedios de cada medición en el software **jupyterlab**. Posteriormente, se realizará el modelado teórico con logaritmo natural para determinar el valor de la gravedad. lineal.

Se supondrá que la aceleración en la servilleta cerrada será constante, por lo que se podrá usar la segunda ley de newton para representar las fuerzas que intervienen sobre servilleta. La fricción despreciable implica que el valor de k sea 0. De esta manera, se puede simplificar la ecuación de movimiento de esta manera.

$$ma = \sum_i F_{ext} \Rightarrow ma = mg \Rightarrow a = g \quad (2)$$

Usando las ecuaciones que describen el movimiento se puede calcular la velocidad y la posición final de la servilleta comprimida de la siguiente manera:

$$v_f = v_0 + gt \quad (3)$$

$$d = v_0 t + g \frac{t^2}{2} \quad (4)$$

Para conseguir el valor de la gravedad, es útil realizar un modelo con el logaritmo natural, debido a que esta expresión se transformará en una ecuación lineal de la manera $Y = mx + b$:

$$d = g \frac{t^2}{2} \Rightarrow \ln d = \ln g \frac{t^2}{2} \Rightarrow \ln d = \ln \frac{1}{2} g + 2 \ln t \quad (5)$$

$$y = mx + b \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\ln \frac{1}{2} g}_m \quad \underbrace{2 \ln t}_b \quad (6)$$

Con la ecuación lineal establecida en (6), se despeja el valor de g de la siguiente manera:

$$m = \ln \frac{1}{2} g \quad \Rightarrow \quad e^m = \frac{1}{2} g \quad \Rightarrow \quad g = 2 \cdot e^m \quad (7)$$

El valor b en (6) es el número al que tiene que tender el modelo experimental lineal.

v_0 Es 0 debido que al tratarse de una caída libre la servilleta esta ganando velocidad con respecto al tiempo que cae.

3.2.2. Caída con fricción significativa:

Se realizará el modelado de los promedios de cada medición en el software jupyterlab. Posteriormente, se realizará el modelado de comparación con el modelo de la servilleta cerrada (por la gravedad), el modelo experimental y el modelo teorico con el uso de minimos cuadrados no lineal:

Cuando la servilleta esta extendida, la fuerza de rozamiento que experimenta no puede ser despreciada. Si F_{ext} ya no es una constante la igualdad (2) es falsa. La ecuación que describe el movimiento de un cuerpo cayendo bajo la acción de la gravedad y frenado por una fuerza de fricción en un fluido es:

$$ma = \sum_i F_{ext} \quad \Rightarrow \quad ma = mg - \kappa v, \quad (8)$$

Para determinar la aceleración de la servilleta, el tiempo en que esta cae se dividirá en pequeños intervalos, en los que la aceleración se pueda valorar como prácticamente constante.

$$[t_0, t_f] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup [t_2, t_3] \cup \dots \cup [t_i, t_{i+1}] \cup \dots \cup [t_{N-2}, t_{N-1}] \cup [t_{N-1}, t_N = t_f],$$

La velocidad final v_{i+1} de cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es la inicial del siguiente $[t_{i+1}, t_{i+2}]$. Interpretando la aceleración de esta forma las ecuaciones (3) y (4) son efectivas para encontrar la velocidad final y distancia recorrida por la servilleta en cada intervalo de tiempo.

$$\begin{aligned} [t_0, t_1] : \quad \left. \begin{array}{l} v(t_0) = v_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \quad \begin{array}{l} v(t_1) = v_1 = v_0 + a(x_0, v_0, t_0) [t_1 - t_0] \\ x(t_1) = x_1 = v_0 [t_1 - t_0] + a(x_0, v_0, t_0) \frac{[t_1 - t_0]^2}{2}, \end{array} \quad (9) \\ [t_1, t_2] : \quad \left. \begin{array}{l} v(t_1) = v_1 \\ x(t_1) = x_1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \quad \begin{array}{l} v_2 = v_1 + a(x_1, v_1, t_1) [t_2 - t_1] \\ x_2 = x_1 + v_1 [t_2 - t_1] + a(x_1, v_1, t_1) \frac{[t_2 - t_1]^2}{2}. \end{array} \end{aligned}$$

Si extendemos el procedimiento para una N-ésima cantidad de intervalos obtendremos el siguiente esquema de ecuaciones:

$$[t_i, t_{i+1}] : \quad \left. \begin{array}{l} v(t_i) = v_i \\ x(t_i) = x_i \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v_{i+1} = v_i + a(x_i, v_i, t_i) [t_{i+1} - t_i] \\ x_{i+1} = x_i + v_i [t_{i+1} - t_i] + a(x_i, v_i, t_i) \frac{[t_{i+1} - t_i]^2}{2}; \end{array}$$

hasta $i = N - 1$:

$$[t_{N-1}, t_N] : \left. \begin{array}{l} v(t_{N-1}) = v_{N-1} \\ x(t_{N-1}) = x_{N-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_N = v_{N-1} + a(x_{N-1}, v_{N-1}, t_{N-1}) [t_N - t_{N-1}] \\ x_N = x_{N-1} + v_{N-1} [t_N - t_{N-1}] + a(x_{N-1}, v_{N-1}, t_{N-1}) \frac{[t_N - t_{N-1}]^2}{2} \end{array}.$$

Tras construir un Script en JupyterLab que reproduce este esquema, determinamos en el mismo todos los parámetros conocidos. Dejando a $C = \frac{\kappa}{m}$ como única variable, con tal de encontrar el valor de la misma. Se probaron y graficaron distintos valores en C , valores que fueron comparados con los resultados experimentales. Hasta dar con valores de C que se aproximaran a las observaciones experimentales.

4. Resultados

Con ayuda del software jupyterlab, y usando código de python, se podrá generar las gráficas correspondientes tras realizar nuestro montaje.

4.0.1. Caída con fricción despreciable:

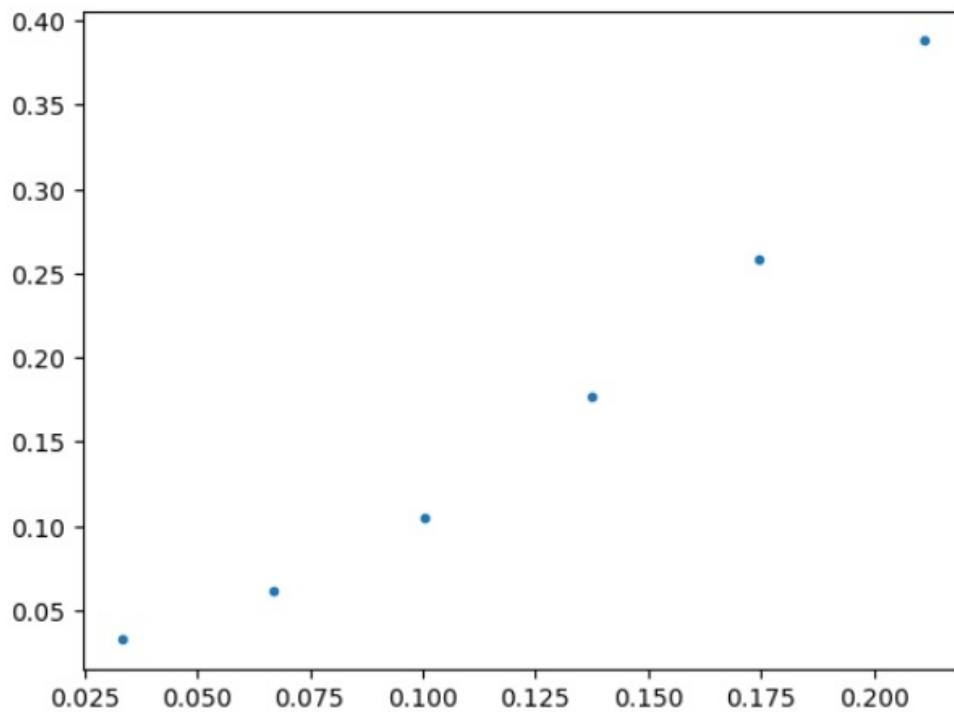


Figura 2: Modelo mediciones servilleta cerrada

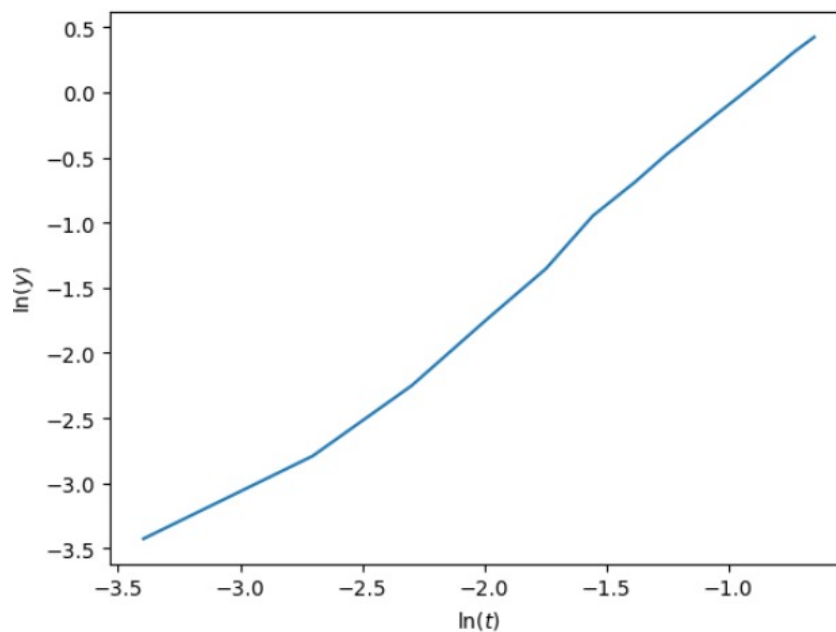


Figura 3: Modelo experimental de manera lineal

4.0.2. Caída con fricción significativa:

5. Analisis

Las gráficas presentadas en resultados de la servilleta cerrada se suelen asimilar con una función lineal creciente, esto debido a que, al ser su fricción despreciable, el crecimiento será de manera lineal. De esta manera, el modelo teórico con logaritmos naturales otorga un valor experimental de la gravedad = 7.784219414344269. Este se encuentra en un número diferente de 2, = 0.14769673, por lo que se encuentra en un gran margen de error los resultados que se analizaron.

El modelo de mediciones en servilleta abierta muestra como es el compartimiento del promedio de las alturas sobre el promedio de los tiempos en los 10 intentos. También permite ver la barra de error que se encuentra en cada punto localizado, siendo estos la desviación estándar que tiene cada medición. Al usar el modelo de mediciones servilleta abierta y realizar las operaciones para la aceleración al combinarla con el valor de la gravedad (g) extraído en el experimento de la servilleta cerrada, nos determina una curva ideal (un modelo teórico por medio del método mínimos cuadrados no lineales) el cual representa el valor de C en nuestro experimento. $C = 9.804993396947099$.

Ahora se calcula la fuerza de fricción (k) por medio del valor de C, de la siguiente manera:

$$C = \frac{\kappa}{m} \quad (10)$$

$$Cm = \kappa \quad (11)$$

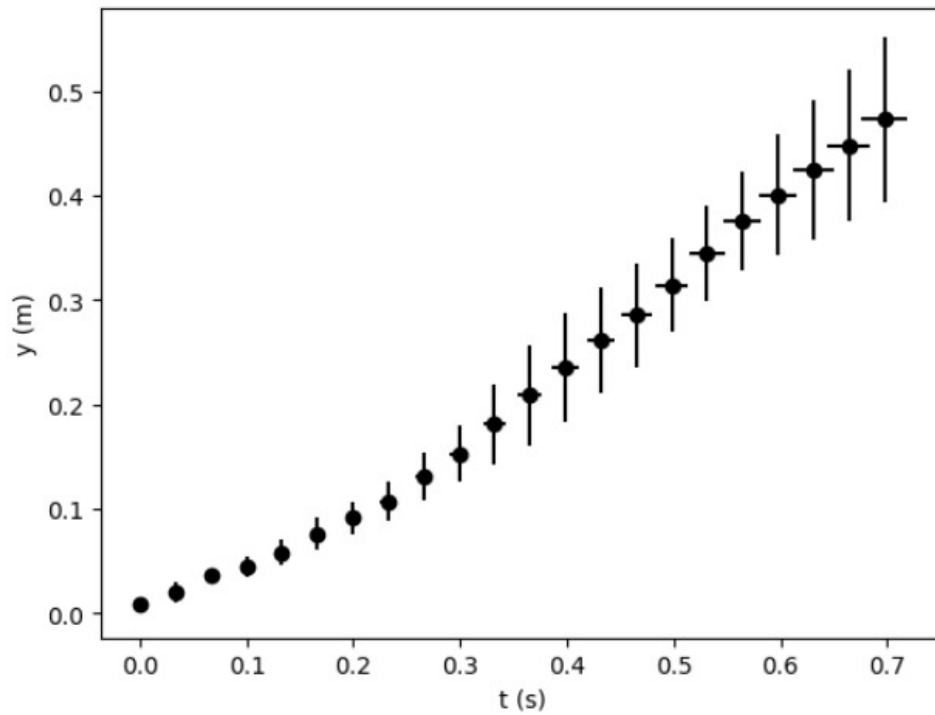


Figura 4: Modelo mediciones servilleta abierta

Siendo la masa de una servilleta de 0,00153kg, tenemos:

$$9,804993396947099 \cdot 0,00163 = \kappa \quad (12)$$

$$0,0159821337 \quad (13)$$

Siendo así (13) el valor de la constante de fricción del experimento de la servilleta en caída libre de manera abierta siendo la fuerza de fricción considerativa.

6. Errores e impresiones

Para garantizar la posibilidad de promediar los datos, en la servilleta cerrada se recortaron los datos donde los números fueron similares, logrando así que cada medición tenga la misma cantidad de valores. con el mismo fin, en la servilleta abierta, se recortó el vídeo a una misma cantidad de fotogramas donde el movimiento de cada servilleta fuera similar y de esta manera priorizar que cada medición tenga la misma cantidad de datos y poder así ser promediados.

Cada medición fue tomada bajo la sensibilidad del dispositivo que es de 0,033, por ende, pueden perderse valores muy pequeños en cada medición.

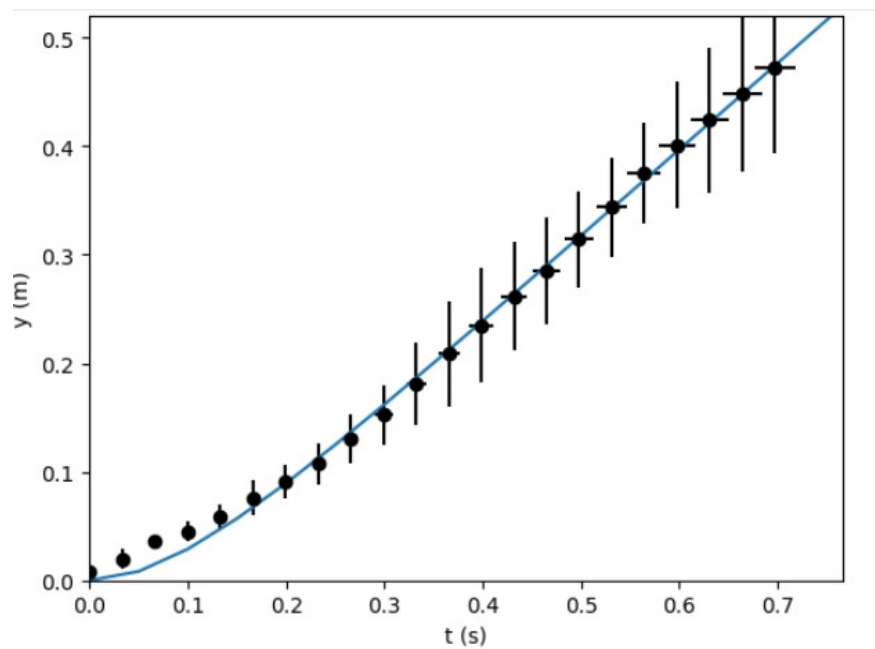


Figura 5: Modelo mínimos cuadrados no lineal (C)

En el montaje numérico se produjeron errores: la imprecisión en el modelo de logaritmo natural de la servilleta cerrada se separó el valor deseado (2), debido que surgió un valor de 0.14769673.

La gravedad se aproximó de una manera no natural dando un valor tan pequeño, $=7,8$. Debido a los pocos fotogramas que se agarraron en las mediciones de la servilleta abierta.

El valor de la constante de fricción k surgió es un valor experimental aproximado.

Referencias

