Modelos Probabilísticos.

Un modelo Probabilístico busca representar un Fenómeno de la vida real a Futuro.

$P(x) = 0{,}4$

Función para calcular Probabilidad

- Variable aleatoria:

$\underset{S}{(w)} \xrightarrow{X} \underset{\mathbb{R}}{X(w)}$ — Discreta: # Finito o infinito; Continuas: Cualidades representadas en números.

Transformar una variable en números $\mathbb{R}$

*** Discretas:**

Propiedades

1. $0 < P(x) < 1$
2. $\sum P(x) = 1$
3. $P(a \leq x \leq B) = \sum_{x=a}^{B} P(x)$

* Valor esperado:

Es el Promedio de una variable aleatoria.

$E(x) = \mu = \sum(x_i P(x_i))$

* Varianza: $V(x) = \sum(x_i \times P(x_i))^2$

- Distribución Binomial:

- Evento binario (Éxito, Fracaso)
- Probabilidad de Éxito. P, $1-P=q$
- Realizan n ensayos.

X= "# de éxitos que ocurren en los n ensayos"

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

- $E(x) = n \times p$
- $V(x) = n \times p \times q$

$0 \leq P \leq 1$

$x = \{0, \dots, n\}$

$\left.\begin{matrix} n \\ p \end{matrix}\right\}$ Parámetros

Ejemplo 1.

La Prob. de que un bombillo salga malo es de 0,08. Si revisa un lote de 20 bombillos. Calcular:

a) No salga ni uno malo
b) 2 defectuosos
c) menos de 4
d) # esperado de bombillos defectuosos.

$n = 20$
$p = 0{,}08$

$P(X=x) = \binom{20}{x} 0{,}08^x (1-0{,}08)^{20-x}$

a) $P(0) = \binom{20}{0} 0{,}08^0 (1-0{,}08)^{20-0} = \boxed{0{,}188}$

b) $P(2) = \binom{20}{2} 0{,}08^2 (1-0{,}08)^{20-2} = \boxed{0{,}271}$

c) $P(x<4) = \sum_{x=0}^{3} \binom{20}{x} 0{,}08^x (1-0{,}08)^{20-x} = \boxed{0{,}929}$

d) $E[x] = n \times p = 20 \times 0{,}08 = \boxed{1{,}6}$

e) $P(X \geq 2) = 1 - P(x<2)$

$1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

N objetos diferentes $\quad N-K$

K Tienen un atributo A

n Muestra aleatoria

$$P(X=x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Parámetros: N, K, n

- $E[x]=\frac{n.k}{N}$
- $V[x]=\frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$

X= "# de objetos con el atributo A que salen en la muestra"

Ejemplo 1

En una planta de distribución se tienen instalados 20 motores, de los cuales 6 son de la marca siemens. Si ingeniero de mantenimiento toma una muestra de 8 motores para reparar. Calcule:

a) La probabilidad de que no se repare ningún motor de la marca Siemens.

b) La probabilidad de que se reparen como mínimo 4 motores de la marca Siemens

c) La probabilidad de que se reparen a lo más de 2 motores de la marca Siemens

d) El numero esperado de motores de la marca Siemens que van a ser reparados

$N=20$
$k=6$
$n=8$

$x=0,\dots\dots,6$

$$P(X=x)=\frac{\binom{6}{x}\binom{20-6}{8-x}}{\binom{20}{8}}$$

a) $P(X=0)=\frac{\binom{6}{0}\binom{14}{8}}{\binom{20}{8}}=\boxed{0,0238}$

b) $P[x\geq4]=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

$=\sum_{x=4}^{6}\frac{\binom{6}{x}\binom{20-6}{8-x}}{\binom{20}{8}}=$

c) $P(X\leq2)$

d) $E[x]=\frac{n.k}{N}=\frac{8.6}{20}=\boxed{2,4}$

DISTRIBUCIÓN POISSON

X= "# Ocurrencias de un evento en unidad de referencia"

λ= "Tasa Promedio de ocurrencia del evento"

$x=0,1,2,\dots,\infty$

$$P(X=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!};$$

$\lambda>0$
$x=0,\dots$

- $E[x]=\lambda$
- $V[x]=\lambda$

Ejemplo

Se sabe que la tasa promedio de impactos de partículas en la estación espacial internacional es de 8 partículas por metro cuadrado. Si este fenómeno se puede modelar con la distribución poisson calcule:

a) La prob de que no impacto ninguna partícula en 1 Metro cuadrado

b) La prob de que impactan como mucho 4 partículas en 1 Metro cuadrado

c) La prob de que impacto por lo menos 6 partículas en 1 Metro cuadrado

d) La prob de que impactan 8 partículas medio Metro cuadrado

$P(X=x)=e^{-8}\frac{8^x}{x!}$ $\quad \lambda=8\ imp/m^2$ $\quad P(A')=1-P(A)$

a) $P(x=0)=e^{-8}\frac{8^0}{0!}=\boxed{0,000335}$

b) $P(X\leq4)=\sum_{x=0}^{4}e^{-8}\frac{8^x}{x!}=\boxed{0,0996}$

c) $P(X\geq6)=1-P(X<6)=1-\sum_{x=0}^{5}e^{-8}\frac{8^x}{x!}=\boxed{0,8087}$

d) $\lambda=8imp\times mt^2 \longrightarrow$ $\left.\begin{matrix}8\rightarrow 1\ mt^2\\ \lambda\rightarrow \frac{1}{2}mt^2\end{matrix}\right\}\lambda=4$

$P(x=8)=e^{-4}\frac{4^8}{(8)!}=\boxed{0,0297}$

Resumen

- Binomial

$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

$E[x]=n\cdot p$

$V[x]=n\cdot p\cdot q$

- Hipergeométrica

$P(X=x)=\dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

$E[x]=\dfrac{n\cdot k}{N}$

- Poisson

$P(X=x)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

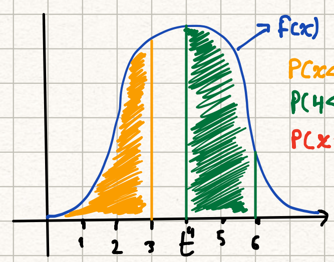
$E[x]=\lambda$

$V[x]=\lambda$

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

$f(x)$= Función de densidad de Probabilidades

→ Propiedades:
1. $f(x)>0$
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1$
3. $P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx$



$P(x<3)=\int_0^3 F(x)dx$

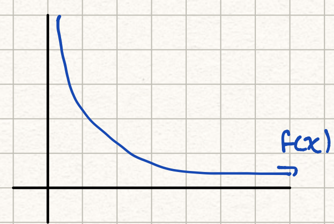
$P(4<x<6)=\int_4^6 F(x)dx$

$P(x=3)=0$

DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

→ Se usa para modelar tiempos

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$
λ = Parámetro	θ = Parámetro
$E[x]=\frac{1}{\lambda}$	$E[x]=\theta$
$V[x]=\frac{1}{\lambda^2}$	$V[x]=\theta^2$



$P(x<a)=1-e^{-\lambda a}$ $=F(a)$

$P(x>a)=1-F(a)$

$P(a<x<b)=F(b)-F(a)$

Ejemplo 1

Los tiempos de atención de ventas en la cafetería se comportan de manera exponencial, con un promedio de 1.5 minutos. Calcule:

A) la prob de que el tiempo de atención sea de 1.2 minutos

B) la prob de que el tiempo de atención sea menor a 1.2 minutos

C) la prob de que el tiempo de atención sea mayor a 1 minuto

D) la prob de que el tiempo de atención esté entre 1 y 1.2 minutos

$E[x]=\frac{1}{\lambda}=1{,}5$

$\lambda=\frac{1}{1{,}5}$ $f(x)=\frac{1}{1{,}5}e^{-\frac{1}{1{,}5}x}$

A) $P(X=1{,}2)=0$

B) $P(x<1{,}2)=\int_0^{1{,}2}\frac{1}{1{,}5}e^{-\frac{1}{1{,}5}x}dx=\left[\frac{1}{\cancel{1{,}5}}\cdot -\cancel{1{,}5}\, e^{-\frac{1}{1{,}5}x}\right]_0^{1{,}2}=\left[-e^{-\frac{1}{1{,}5}(1{,}2)}+e^{-\frac{1}{1{,}5}(0)}\right]$

$P(x<1{,}2)=0{,}55$

C) $P(x>1)=1-F(1)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{1{,}5}(1)}\right)=0{,}51$

D) $P(1<x<1{,}2)=F(1{,}2)-F(1)=0{,}55-0{,}48=0{,}07$

DISTRIBUCIÓN NORMAL (GAUSS)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad ; -\infty < x < \infty$$

$E[x] = \mu \qquad \mu = \sum \frac{x_i}{N}$

$V[x] = \sigma^2 \qquad \sigma^2 = \sum \frac{(x_i-\mu)^2}{n}$ } Varianza

Ejemplo

Las estaturas de los estudiantes de UV siguen una distribución aproximadamente normal con un promedio de 1.69mt y una desviación estándar de 0.8mt. Si se elige in estudiante al azar, calcule la probabilidad de:

A) tenga una estatura menor a 1.65 mt

B) tenga una estatura mayor a 1.72 mt

C) tenga una estatura entren1.59 y 1.67 mt

ⓐ $P(x<1{,}65) = \int_{-\infty}^{1{,}65} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,0{,}8} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-1{,}69)^2}{0{,}8^2}} dx = 0{,}48$

ⓑ $P(x>1{,}72) = 1 - P(x<1{,}72) = 1 - 0{,}51 = 0{,}485$

ⓒ $P(1{,}59 < x < 1{,}67) = 0{,}039$

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR $(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$

Ejemplo: $P(X<1{,}65) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{1{,}65-1{,}69}{0{,}8}\right) = P(z < -0{,}05) = 0{,}48$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

→ Estandarización: $\frac{x-\mu}{\sigma} = z \longrightarrow z \sim N(\mu=0, \sigma^2=1)$

Ejemplo 2:

En una fábrica de aceros la longitud de la varillas fabricadas se diste unen aproximadamente normal con media 2.1 metros y desviación estándar de 0.9 metros.

a) Calcule la probabilidad de que una varilla tenga una longitud máxima a 2 metros

B) Calcule la probabilidad de que una varilla tenga una longitud minima de 2.3 metros

C) Calcule la probabilidad de que una varilla tenga una longitud entre 2 y 2.4 metros

a) $P(X<2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = 0{,}456$

b) $P(X>2{,}3) = \int_{2{,}3}^{\infty} f(x)\,dx = 0{,}412$

c) $P(2 < x < 2{,}3) = \int_{2}^{2{,}3} f(x)\,dx =$

D) $P(X \leq x) = 0{,}28$

invNorm(0,28, 2,1, 0.9)

E) $P(X > x) = 0{,}75$

$P(X < x) = 0{,}85$