Apuntes de EDPs

César Patiño

2020

Índice general

Notas sobre el Documento

Notación

- Misma numeración que PDF con ejercicios *EDP_resumentpdf*. Resuelto hasta 2.7.
- log es por defecto ln.
- $F = F(x)$ y $G = G(y)$.

Lista de Cambios

Feb Primera versión de los apuntes. Cambios de formato, ejercicios y soluciones. Soluciones resaltadas.

Actualizado a 9 de febrero de 2020.

Sección 2

Ejercicios Iniciales de EDP

2.1. Ejercicios

Encontrar las soluciones $u(x,y)$ *de las siguientes ecuaciones diferenciales:*
(a) $u_x = 0$ (b) $u_y = 0$

Solución 2.1

(a) **Integración:** $u = \int u_x dx = \int 0 \cdot dx = 0 + \phi(y)$

$$\boxed{u(x,y) = \phi(y)}$$

Comprobación: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_x = 0$

Ejemplos: $\phi(y) = \sin y, \quad \exp -y^2, \quad \frac{1+y^2}{y-1}$, etc.

(b) Procedimiento idéntico a 2.1 (a).

$$\boxed{u(x,y) = \phi(x)}$$

2.2. Ejercicios

Resolver: (a) $u_{xx} = 0$ (b) $u_{xy} = 0$

Solución 2.2

(a) **Integración:** $u_x = \int u_{xx}dx = 0 + \phi_0(y) \to u = \int u_x dx = \phi_0(y) \cdot x + \phi_1(y)$

$$\boxed{u(x,y) = \phi_0(y) \cdot x + \phi_1(y)}$$

Comprobación: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

Ejemplos: $u(x,y) = \sin y \cdot x + \cos y, \quad e^{-y^2} \cdot x + \log y$, etc.

(b) Procedimiento idéntico a 2.2 (a). $u(x,y) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$

Nota: Las funciones $\phi_1(x)$ y $\phi_2(y)$ deben ser de clase C^1.

Ejemplo: $u(x,y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y$, etc.

2.3. Ejercicios

Resolver: (a) $u_{xx} - u = 0$ (b) $u_{xx} + 4u = 0$

Solución 2.3

(a) **Separando variables:** $u(x,y) = F(x)G(y) \to u_{xx} = F''(x)G(y)$

Sustituyendo: $F''(x)\cancel{G(y)} - F(x)\cancel{G(y)} = 0$

$F''(x) = F(x)$, $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$, con $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

$F(x) = c_1 \cdot e^{+x} + c_2 \cdot e^{-x}$, y $G(y)$ función arbitraria de y.

$$\boxed{u(x,y) = \left(c_1 \cdot e^{+x} + c_2 \cdot e^{-x}\right) \cdot G(y)}$$

(b) Procedimiento idéntico a 2.3 (a).

$p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

$$\boxed{u(x,y) = (c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x) \cdot G(y)}$$

2.4. Ejercicios

Resolver: (a) $u_y - 2yu = 0$ (b) $u_x = 2xyu$

Solución 2.4

(a) **Separación de variables:** $u(x,y) = F(x)G(y) \rightarrow u_y = F(x)G'(y)$

Entonces: $\cancel{F(x)}G'(y) + 2y\cancel{F(x)}G(y) = 0$

$\frac{G'}{G} = -2y \rightarrow \int \frac{G'}{G} = -2\int y\ dy \rightarrow \log G = -y^2 \rightarrow G(y) = e^{-y^2}$

$$\boxed{u(x,y) = F(x) \cdot e^{-y^2}}$$

(b) **Método de las Características Ejercicio 2.4 (b)**

Se puede aplicar el método de las características en toda ecuación de la forma:

$$Au_y + Bu_x = Hu + F$$

donde A, B, H, F son $f(x,y)$. Pero como en este caso la ecuación es incompleta, se consigue lo mismo que con integración directa.
Cabe destacar que la ecuación característica, $y = K$, implica que aparecerá una función arbitraria de y.

Integración Directa Ejercicio 2.4 (b)

$$\int \frac{u'}{u} = 2y \cdot \int x\ dx \rightarrow \log u = yx^2 + \phi(y)$$

$$\boxed{u(x,y) = G(y) \cdot e^{yx^2}}$$

2.5. Ejercicios

Resolver: (a) $u_{xy} = -u_x$

Solución 2.5

(a) **Separación de variables:** $u(x,y) \equiv F(x)G(y)$

Entonces: $u_{xy} = F'G' \rightarrow \cancel{F'}G' = -\cancel{F'}G$

De donde: $G' = -G \rightarrow G(y) = c_1 e^{-y}$

$$\boxed{u(x,y) = F(x) \cdot e^{-y}}$$

(b) Procedimiento idéntico a 2.5 (a).

Donde: $G'' = -G \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$$\boxed{u(x,y) = F(x) \cdot (c_1 \cdot \cos y + c_2 \cdot \sin y)}$$

2.6. Ejercicios

Resolver: (a) $u_{xyy} + u_x = 0$

Solución 2.6

(a) **Separación:** $\cancel{F'}G'' + \cancel{F'}G = 0 \rightarrow G'' = -G$, entonces: $G(y) = c_1 \cdot \cos y + c_2 \cdot \sin y$

$$\boxed{u(x,y) = F(x) \cdot (c_1 \cdot \cos y + c_2 \cdot \sin y)}$$

2.7. Ejercicios. Problema de Valor Inicial

Resolver para $u(x,t)$ con $q(x)$ y $u_0(x)$ conocidas:

- $\frac{\partial u}{\partial t} = -q(x)u(x,t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0$
- $u(x,0) \equiv u_0(x), \quad 0 < x < \infty, \quad t = 0$
- ¿signo de $q(x)$ tal que $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$?

Solución 2.7

(a) **Integración:** $\displaystyle\int \frac{du}{u} = q(x) \cdot \int dt \to \log u = -q(x)t + \phi(x)$

$$\boxed{u(x,t) = e^{-q(x)t+\phi(x)} = F(x) \cdot e^{-q(x)t}}$$

Condición inicial: $u(x,0) = u_0(x) \Rightarrow F(x) = u_0(x)$, con $u_0(x)$ conocida.

Límite: $\lim_{t\to\infty} u = 0 \Leftrightarrow F(x) \cdot e^{-q\cdot\infty}$, que solo se cumple cuando $e^{-\infty} = 0$, es decir, $q(x) > 0$.

Sección 3

Más Ejercicios

Ejercicios

Anexo I: Resumen EDOs

Anexo I

Anexo II: Resumen EDPs

Anexo II

Bibliografía

Bibliografía