Proyecciones

Gustavo A. Caffaro

Instituto Tecnológico de Santo Domingo

Nov 2021 - Ene 2022

Introducción

Contenido:

- Evaluando las proyecciones
- El sesgo, SE, MSE, y RMSE
- Proyecciones ingenuas
- Intervalos de proyección
- Proyectando en R con el paquete `forecast`

Evaluando las proyecciones

Es muy difícil predecir el futuro, porque cualquier cosa podría pasar.

- El mejor ejemplo de esto es el COVID-19.

La idea principal de los métodos que veremos en esta clase es estimar un modelo en una parte de la data y utilizar el resto para evaluar el desempeño del modelo.

- Esto se conoce como una evaluación *out-of-sample*
- Los modelos y los forecasters, como nosotros, son evaluados con su desempeño *out-of-sample*.
- Existen muchas dimensiones o estadísticas que pudieramos utilizar evaluar el desempeño de los modelos
  - usualmente se toma el promedio de los errores de pronóstico

Midiendo el desempeño del modelo

Para evaluar el desempeño de un modelo en un conjunto de datos dado, tenemos que tener una medida de qué tan bien las proyecciones se ajustan a la data observada.

Es importante que midamos el desempeño predictivo de un modelo de manera genuina.

Una técnica que recomiendo usar es siempre pensar qué información teníamos en t sobre $t + 1$, para evitar hacer "trampa".

- "En retrospectiva, tenemos visión 20/20."

Midiendo el desempeño del modelo

Como habíamos visto en clases pasadas:

- El modelo con menor error in-sample no necesariamente sea el modelo con menor error out-of-sample.
- Siempre que agregamos nuevas variables, el modelo se ajusta mejor a la data (bondad de ajuste).
- Sobre-ajustar un modelo nos da proyecciones muy pobres
    - Usualmente los modelos sobreajustados tienden a tener parámetros muy volátiles.

Midiendo el desempeño del modelo

¿Cómo entonces medimos el desempeño de un modelo en la práctica?

Usualmente tomamos 60-90 % de nuestra muestra temporal para entrenar el modelo (ej. estimar los parámetros), y el resto lo utilizamos para verificar las proyecciones.

- Claramente, la proporción que utilizamos depende de cuántos datos tenemos.

Las medidas de desempeño que veremos son varias.

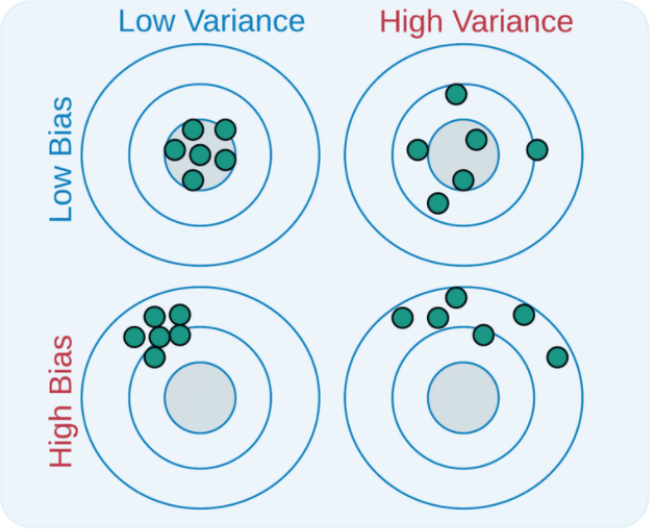
Midiendo el desempeño del modelo

Algunas medidas de desempeño:

- Sesgo: la diferencia entre las proyecciones y el valor observado (en promedio)
  - $\hat{x}_t - x_t$
- Varianza (también conocida como error estándar de predicción, SE): qué tan volátiles son las proyecciones
- Error cuadrático medio de proyección (MSFE): Una combinación del sesgo y la varianza

Mientras más pequeñas estas medidas, mejor el pronóstico.

Sesgo vs. Varianza



Midiendo el desempeño del modelo

Si x_t es una serie de tiempo, el sesgo y el error estándar se definen como:

- Sesgo (Bias):

$$BIAS = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} FE_t, \quad FE_t = (\hat{x}_t - x_t)$$

- Error estándar:

$$SE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{F}E_t - BIAS)^2}$$

Error cuadrático medio (MSE)

De igual manera, el error cuadrático medio (Mean Squared Error) viene dado por

$$MSE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{x}_t)^2.$$

A pesar de ser una medida intuitivamente atractiva, la interpretación del MSE es un poco complicada porque denota la suma de cuadrados.

Por esta razón, es más común reportar el Root Mean Squared Error.

Root Mean Squared Error (RMSE)

Si aplicamos la transformación monónota de la raíz cuadrada al MSE, solucionamos el problema de interpretación, a la vez que preservamos el objetivo y la intuición del MSE.

La raíz del error cuadrático medio se conoce como el root mean squared error (RMSE), y viene dado por:

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{x}_t)^2}$$

El RMSE es una de las medidas de desempeño más utilizadas y reportadas en la literatura. otra comunmente utilizada es el error absoluto medio (mean absolute error, MAE).

Precisión del modelo

Ignoremos momentáneamente los subíndices, sin pérdida de generalidad. Podríamos describir el proceso de proyección del vector Y de la siguiente manera:

$$Y = f(X) + \epsilon,$$

donde X denota el conjunto de variables que describen Y, f una función sobre ests varibles, y ϵ un término de error.

Precisión del modelo

Entonces, la precisión de nuestro modelo depende de dos cantidades:

$$E\left(Y-\hat{Y}\right)^2=\left(f(X)-\hat{f}(X)\right)^2+Var(\epsilon),$$

El primer término en la parte derecha de la ecuación es el término reducible y el segundo término el irreducible.

- Un buen modelo minimizará el término reducible.
- En la práctica, el término irreducible es desconocido, y genera una cota superior en la precisión de nuestro modelo.

Relación entre el MSE, SE y el sesgo

El sesgo, el MSE y el error de pronóstico (SE) se relacionan por la siguiente identidad:

$$MSE = SE^2 + BIAS^2$$

La ecuación anterior nos dice que podemos descomponer el error cuadrático medio en dos componentes: el error estándar y el sesgo.

¿Por qué?

Proporción del sesgo y varianza

La proporción del sesgo nos dice en promedio qué tan distintas son nuestras proyecciones de la serie original.

Usualmente la calculamos como

$$\text{Prop. Sesgo} = \frac{Sesgo^2}{MSE}$$

Por otro lado, la proporción de la varianza, que mide qué tanto difiere la variación de la serie vs. la variación de las estimaciones, se calcula como

$$\text{Prop. Varianza} = \frac{(\sigma_x - \sigma_{\hat{x}})^2}{MSE}$$

Ejercicio 1

Calcula el sesgo, el error estándar, el MSE y el RMSE de $\hat{x}_1$, la proyección de la serie x_1.

Proyectando x_t

Nuestro pronóstico de x_{t+1} con la información disponible en el período t viene dado por

$$\hat{x}_{t+1} = E(x_{t+1} \mid I_t)$$

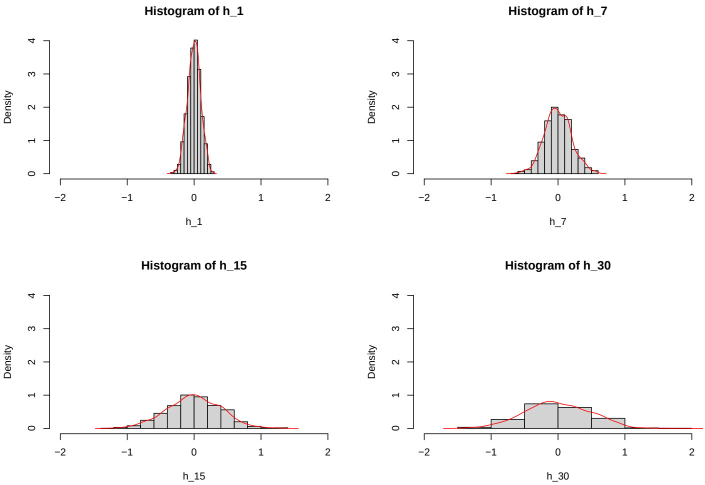
donde I_t contiene la información disponible en t.

Por lo tanto, el objetivo de las proyecciones es estimar $E(x_{t+1} \mid I_t)$ mediante rezagos de x_t y/o de otras variables.

De manera similar, tenemos que la proyección h períodos de x_t viene dada por

$$\hat{x}_{t+h} = E(x_{t+h} \mid I_t)$$

Incertidumbre de los pronósticos



Proyecciones Ingenuas

Una proyección ingenua es aquella que considera que la mejor proyección mañana es el valor de hoy, y viene dada por

$$\hat{x}_{t+1} = x_t.$$

Si tenemos un horizonte de tiempo h, se escribiría

$$\hat{x}_{t+h} = x_t.$$

Dado que las proyecciones ingenuas tienen la misma conslusión que como un modelo Random Walk, a veces decimos que estas proyecciones vienen de un modelo RW.

Proyecciones Ingenuas

En la práctica, utilizamos las proyecciones ingenuas para comparar nuestros modelos. En sentido general, si nuestro modelo desempeña peor que la proyección ingenua (que es cierto muchas veces), deberíamos evaluar otras opciones.

Por otro lado, si el modelo desempeña mejor que el RW, entonces decimos que encontramos una serie con predecibilidad (forecastability).

Theil's U_2 statistic

Podríamos medir el grado de mejoría de nuestro modelo respecto al RW mediante el estadístico U_2 de Theil:

$$U_2 = \frac{MSE(\text{modelo})}{MSE(\text{modelo RW})}$$

- Este indicador muestra qué tan bien desempeñó nuestro modelo vs. la proyección ingenua.
- Mientras menor es U_2, mejor proyecta el modelo.
  - Podemos usar este estadístico para comparar distintos modelos.
- $U_2 \geq 0$

Theil's U_2 statistic

- Si $U_2 < 1$, nuestro modelo es mejor que la proyección ingenua.
- Si $U_2 = 1$, nuestro modelo es tan bueno como la proyección ingenua.
- Si $U_2 > 1$, nuestro modelo desempeña peor que la proyección ingenua.

Proyecciones en R

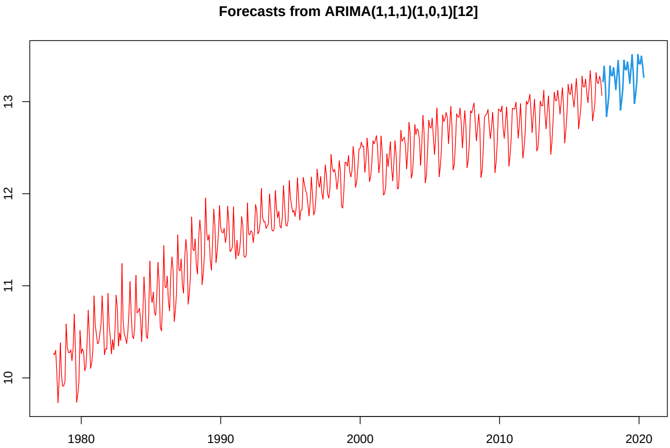
En R, podemos proyectar de manera manual a partir de los parámetros estimados por nuestro modelo.

Por ejemplo, si nuestro modelo es $\hat{y}_{t+1} = X_t\beta$, calculamos directamente a partir de X_t y los valores de β.

Sin embargo, para modelos estándar, como los de la familia ARIMA y SARIMA, el paquete `forecast` es bastante útil, y nos permite realizar proyecciones a h períodos.

```
forecast(modelo, h=h)
```

Proyectando la llegada de turistas



Intervalos de Proyección

Dado un nivel de probabilidad, los intervalos de proyección nos dan un rango en los que esperamos que la variable que proyectamos, x_t, se encuentre dentro.

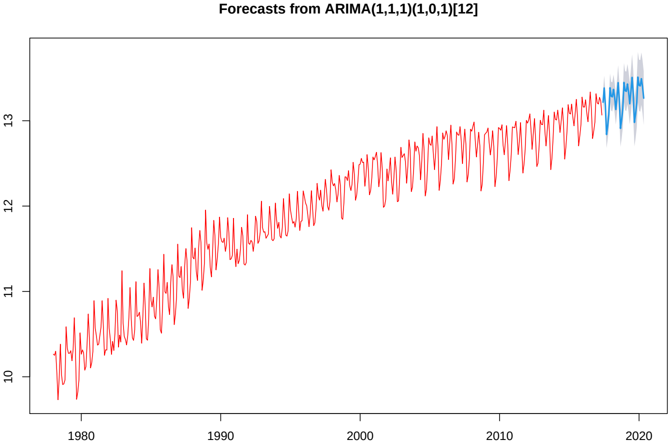
Por ejemplo, asumiendo que los errores de predicción están distribuídos normalmente, el intervalo de proyección del 90 % para una proyección en h períodos es

$$\hat{x}^t_{t+h} \pm 1.64\hat{\sigma}_h,$$

donde $\hat{\sigma}_h$ es una estimación de la desviación estándar de la distribución de nuestra proyección a h períodos.

En R es fácil computar intervalos de proyección con el argumento `level` de la función `forecast`.

Intervalos de proyección en R



Proyectando la llegada de turistas

```r
library(forecast)

#turistas <- read.csv("/data/llegada_turistas.csv")
turistas1 <- turistas %>% mutate(total=log(total)) %>% select(fecha,total)
turistas2 <- ts(turistas1$total,start=c(1978,1),frequency = 12)

# ARIMA(1,1,1)x(1,0,1)12
turistas_model <- arima(turistas2, order = c(1,1,1),
     seasonal = list(order=c(1,0,1),period=12))

forecast(turistas_model,h = 6,level=0.95)
```

```
##          Point Forecast    Lo 95    Hi 95
## Jun 2017       13.21664 13.07121 13.36206
## Jul 2017       13.38404 13.21256 13.55552
## Aug 2017       13.18173 12.99932 13.36414
## Sep 2017       12.83878 12.65038 13.02719
## Oct 2017       12.93919 12.74675 13.13164
## Nov 2017       13.07252 12.87691 13.26814
```

Ejercicio 2

Proyecta el consumo de cerveza en RD para los próximos 12 meses, utilizando las funciones `auto.arima` y `forecast`. Evalúa el desempeño del modelo y compáralo con el desempeño de un RW calculando el estadístico U_2 de Theil. De acorde a este criterio, ¿cuál es el mejor modelo?