Vectores Autorregresivos

Gustavo A. Caffaro

Instituto Tecnológico de Santo Domingo

Nov 2021 - Ene 2022

Introducción

Contenido:

- Vectores Autorregresivos (VAR)
- VAR reducido/no restringido
- VAR estructural
- Impulso-respuesta
- FAVAR

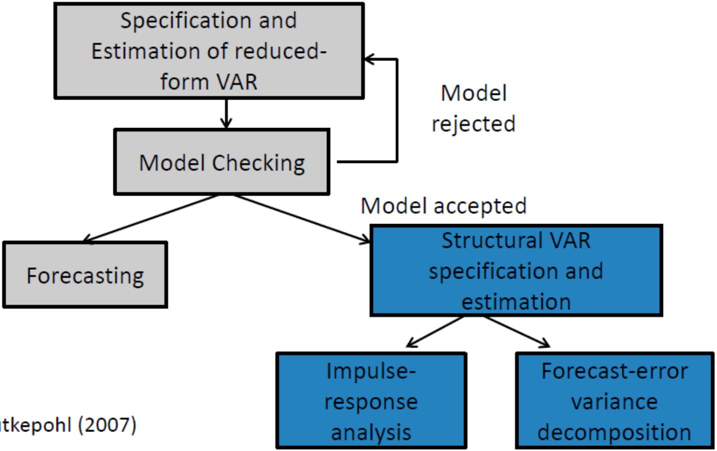
¿Qué son los VARs?

- son modelos lineales de series multivariadas
- son la generalización de los modelos autoregresivos
- las variables endógenas son funciones de los rezagos de todas las demás variables endógenas
- son una alternativa simple y flexible de los modelos de sistemas de ecuaciones

¿Para qué se usan los VARs?

- proyecciones
  - VAR reducido
- análisis estructural
  - VAR estructural

Roadmap



Source:Lutkepohl (2007)

VAR no restringido

Digamos que Y_t es un vector de n variables en el período t:

$$Y_t = [y_{1,t}, t_{2,t}, \ldots, y_{n,t}]'$$

Un proceso de vectores autorregresivos de orden p generaliza un proceso AR(p) para n variables:

$$Y_t = G_0 + G_1 Y_{t-1} + G_2 Y_{t-2} + \cdots + G_p Y_{t-p} + e_t,$$

donde

- G_0: es un vector $(n \times 1)$ de constantes
- G_j: es una matriz $(n \times n)$ de coeficientes
- e_t: es un vector $(n \times 1)$ de ruidos blancos
- $E(e_t) = 0$ y $E(e_t e_s') = \Omega$ si $t = s$ y $E(e_t e_s') = 0$ si $t \neq s$.

Ejemplo: VAR(1) con 2 variables (sin intercepto)

$$y_{1,t} = g_{11} y_{1,t-1} + g_{12} y_{2,t-1} + e_{1,t}$$
$$y_{2,t} = g_{21} y_{1,t-1} + g_{22} y_{2,t-1} + e_{2,t}$$

Podemos escribir este sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$Y_t = G_1 Y_{t-1} + e_t,$$

donde

$$Y_t = [y_{1,t} \quad y_{2,t}]' \qquad e_t = [e_{1,t} \quad e_{2,t}]$$
$$G_1 = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$E(e_t e_t') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \Omega \qquad E(e_t e_s') = 0, \; t \neq s$$

Ejemplo: VAR(1) con 2 variables

Digamos que queremos escribir un VAR de las variables inflación y PIB. ¿Cómo escribiríamos esta relación?

Estimando un VAR por OLS

- Podemos estimar un VAR aplicando OLS a cada ecuación
- Los estimadores resultantes serán:
    - consistentes
    - eficientes
    - equivalentes a GLS

Especificando el modelo

- La selección de variables para incluir en un VAR usualmente van de acorde a la teoría.
    - Por ej. en economía, basadas en evidencias empíricas o teoría económica
- Los modelos VAR permiten el uso de variables exógenas
    - constantes, tendencias, y otros
- Al igual que con la mayoría de los modelos que hemos visto hasta ahora, las variables no estacionarias deben ser tratadas
- El modelo debe ser lo más parsimonioso posible

La maldición de la dimensionalidad

Los modelos VAR son altamente parametrizados

- En un VAR(p) tenemos p matrices de dimensión $(n \times n): G_1, \dots, G_p$
- La mayoría de las veces tenemos un vector de interceptos $(n \times 1)$

Por lo tanto, el total de parámetros que estimaremos será:

$$n + n \times n \times p = n(1 + n \times p)$$

VARs estacionarios

Se dice que un VAR(p) es covariance-stationary si:

1. El valor esperado de y_t no depende del tiempo

$$E(Y_t) = E(Y_{t+h}) = \mu = [\mu_1, \dots, \mu_n])'$$

2. La matriz de covarianza de Y_t y Y_{t+h} depende del tiempo transcurrido, h, no del período en cuestión, t:

$$E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)'] = E[(Y_s - \mu)(Y_{s+h} - \mu)'] = \Gamma_h$$

En otras palabras, los primeros dos momentos son finitos e independientes del tiempo.

Condiciones para la estacionariedad

- Las condiciones para que un VAR sea estacionario son similares a las condiciones de un AR univariado:

$$Y_t = G_0 + \sum_{i=1}^{p} G_i Y_{t-i} + e_t$$

$$Y_t - \sum_{i=1}^{p} G_i Y_{t-i} = G_0 + e_t$$

$$\left(I_n - \sum_{i=1}^{p} G_i L^i \right) Y_t = G_0 + e_t$$

$$G(L) Y_t = G_0 + e_t,$$

donde $G(L)$ es el polinomio rezago.

Condiciones para la estacionariedad

- Para que Y_t sea estacionario, $G(L)$ tiene que ser invertible ($det(G(L)) \neq 0$).
- En otras palabras, un proceso VAR(p) es estacionario si los eigenvalues de la companion matrix G son menores que 1.

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \dots & G_{p-1} & G_p \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}$$

- La función `roots()` del paquete `vars` hace este cálculo por nosotros.

Escogiendo los rezagos

- Si el número de rezagos p es muy pequeño, el modelo podría estar pobremente especificado.
- Si p es muy grande, entonces perderíamos demasiados grados de libertad (y sobreajustaríamos).
- El número de rezagos debería ser suficiente para que los residuos e_t sean ruidos blancos.
- Al igual que los modelos univariados, podríamos utilizar versiones multidimensionales de los criterios de información que hemos visto hasta ahora. Ej.:
  - AIC
  - BIC

Escogiendo los rezagos

- Una simple regla de oro:
  - $p = 4$ si usamos datos trimestrales
  - $p = 12$ si usamos datos mensuales
  - Tratar de escoger n y p tales que

$$np < T/3$$

- Por ejemplo, si $T = 100, p = 4$, entonces $n \leq 7$.

Proyectando utilizando un VAR

Digamos que F_{t-1} es una matriz que contiene toda la información disponible hasta el período t:

$$F_{t-1} = [Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-T}],$$

entonces

$$E(Y_t \mid F_{t-1}) = G_0 + G_1 Y_{t-1} + G_2 Y_{t-2} + \cdots + G_p Y_{t-p}$$

Proyectando utilizando un VAR

Si iteramos un período más adelante:

$$E(Y_{t+1} \mid F_{t-1}) = G_0 + G_1 E(Y_t \mid F_{t-1}) + G_2 Y_{t-1} + \cdots + G_p Y_{t-p+1}$$

Si seguimos iterando h períodos adelante:

$$\begin{aligned} E(Y_{t+h} \mid F_{t-1}) = G_0 &+ G_1 E(Y_{t+h-1} \mid F_{t-1}) \\ &+ G_2 E(Y_{t+h-2} \mid F_{t-1}) + \cdots + G_p Y_{t-p+h} \end{aligned}$$

Errores de pronóstico

El error de pronóstico se podría descomponer en la suma de e_t, la innovación inesperada de Y_t, y el error de estimación:

$$Y_t - E(Y_t \mid F_{t-1}) = e_t + v(F_{t-1})$$

Si el estimador de los coeficientes es consistente y tenemos muchos datos (ley de grandes números), el error de estimación suele ser pequeño, y

$$Y_t - E(Y_t \mid F_{t-1}) \approx e_t$$

Causalidad de Granger

- El test de Causalidad de Granger (GC) busca comprobar si los rezagos de una variable dependiente explica las demás variables, y vice versa.
- Esto lo hacemos verificando si los coeficientes de los rezagos cruzados son estadísticamente distintos de 0:
  - Ej: en el caso de un VAR(1) de dos variables, tenemos como nulas:
    - $H_0 : g_{12} = 0$ (y_2 no Granger causa a y_1)
    - $H_0 : g_{21} = 0$ (y_1 no Granger causa a y_2)
- Verificamos cada hipótesis nula usando un test F. Rechazamos la nula cuando el valor p es menor a 0.05.
- Causalidad de Granger $\neq$ causalidad
  - La Causalidad de Granger trata la causalidad implícita en la data, no necesariamente del verdadero proceso generador.

VAR en R

El paquete `vars` en R es un paquete bastante completo que permite hacer estimaciones de modelos de vectores autorregresivos.

La función principal es `VAR()`.

En este ejemplo, utilizaremos datos de Lutkepohl (2007) sobre los componentes del PIB de Alemania para realizar un VAR(2) en tres variables + una constante.

http://www.jmulti.de/download/datasets/e1.dat

Ej.: Lutkepohl (2007)

```
VAR Estimation Results:
=========================
Endogenous variables: invest, income, cons
Deterministic variables: const
Sample size: 73
Log Likelihood: 606.307
Roots of the characteristic polynomial:
0.5705 0.5513 0.5513 0.4917 0.4917 0.3712
Call:
VAR(y = d, p = 2, type = "const")


Estimation results for equation invest:
=======================================
invest = invest.l1 + income.l1 + cons.l1 + invest.l2 + income.l2 + cons.l2 + const

          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
invest.l1 -0.31963    0.12546  -2.548   0.0132 *
income.l1  0.14599    0.54567   0.268   0.7899
cons.l1    0.96122    0.66431   1.447   0.1526
invest.l2 -0.16055    0.12491  -1.285   0.2032
income.l2  0.11460    0.53457   0.214   0.8309
cons.l2    0.93439    0.66510   1.405   0.1647
const     -0.01672    0.01723  -0.971   0.3352
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1


Residual standard error: 0.04615 on 66 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1286,     Adjusted R-squared: 0.04934
F-statistic: 1.623 on 6 and 66 DF,  p-value: 0.1547
```

Ej.: Lutkepohl (2007)

```
Estimation results for equation income:
=======================================
income = invest.l1 + income.l1 + cons.l1 + invest.l2 + income.l2 + cons.l2 + const

           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
invest.l1  0.043931   0.031859   1.379 0.172578
income.l1 -0.152732   0.138570  -1.102 0.274378
cons.l1    0.288502   0.168700   1.710 0.091936 .
invest.l2  0.050031   0.031720   1.577 0.119512
income.l2  0.019166   0.135752   0.141 0.888156
cons.l2   -0.010205   0.168899  -0.060 0.952004
const      0.015767   0.004375   3.604 0.000602 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1


Residual standard error: 0.01172 on 66 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.1142,     Adjusted R-squared: 0.03367
F-statistic: 1.418 on 6 and 66 DF,  p-value: 0.221
```

Ej.: Lutkepohl (2007)

```
Estimation results for equation cons:
=====================================
cons = invest.l1 + income.l1 + cons.l1 + invest.l2 + income.l2 + cons.l2 + const

           Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
invest.l1 -0.002423   0.025676  -0.094 0.925114
income.l1  0.224813   0.111678   2.013 0.048191 *
cons.l1   -0.263968   0.135960  -1.942 0.056467 .
invest.l2  0.033880   0.025564   1.325 0.189631
income.l2  0.354912   0.109407   3.244 0.001851 **
cons.l2   -0.022230   0.136120  -0.163 0.870772
const      0.012926   0.003526   3.666 0.000493 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1


Residual standard error: 0.009445 on 66 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.2513,     Adjusted R-squared: 0.1832
F-statistic: 3.692 on 6 and 66 DF,  p-value: 0.003184
```

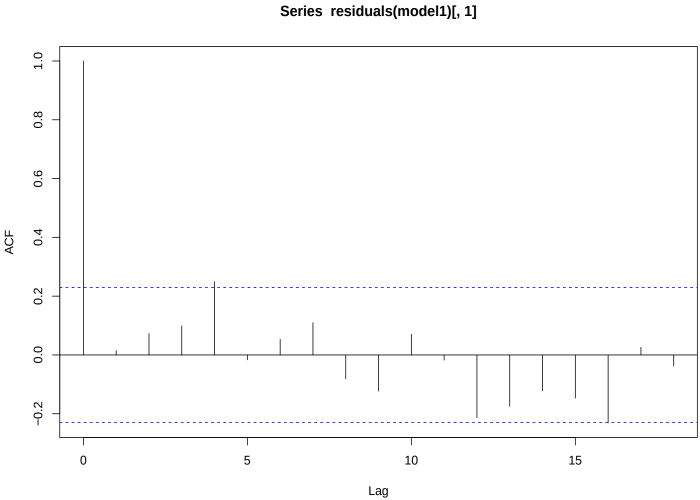
Ej.: Lutkepohl (2007)

```
Covariance matrix of residuals:
          invest    income      cons
invest 2.130e-03 7.162e-05 1.232e-04
income 7.162e-05 1.373e-04 6.146e-05
cons   1.232e-04 6.146e-05 8.920e-05

Correlation matrix of residuals:
       invest income   cons
invest 1.0000 0.1324 0.2828
income 0.1324 1.0000 0.5553
cons   0.2828 0.5553 1.0000
```

Ej.: Lutkepohl (2007)

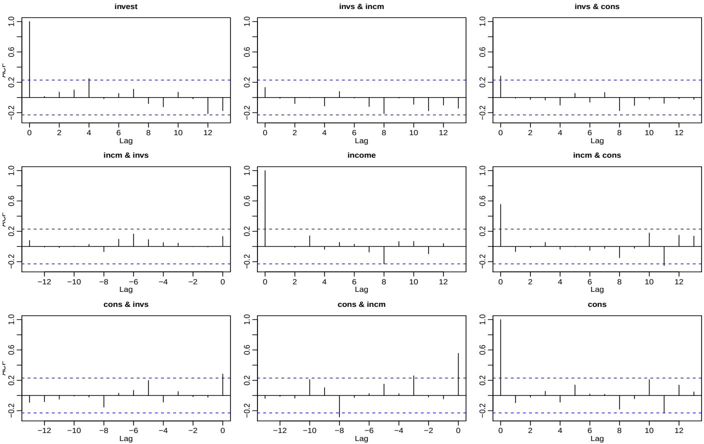
```
# Como siempre, verificamos si los residuos parecen ser ruido blanco
acf(residuals(model1)[,1]) # invest
```



Ej.: Lutkepohl (2007)

```r
# De hecho, podemos evaluar la matriz de correlacion cruzada

# Idealmente deberíamos tener ceros en todos los rezagos
# de los elementos fuera de la diagonal, incluyendo en el lag 0
acf(residuals(model1))
```



Proyectando en R

Al igual que con nuestro modelos univariados, la función `forecast()` del paquete `forecast` nos permite realizar proyecciones a h períodos.

```
library(forecast)

# Proyeccion del modelo para los próx. 5 períodos
forecast(model1,h=5)
```

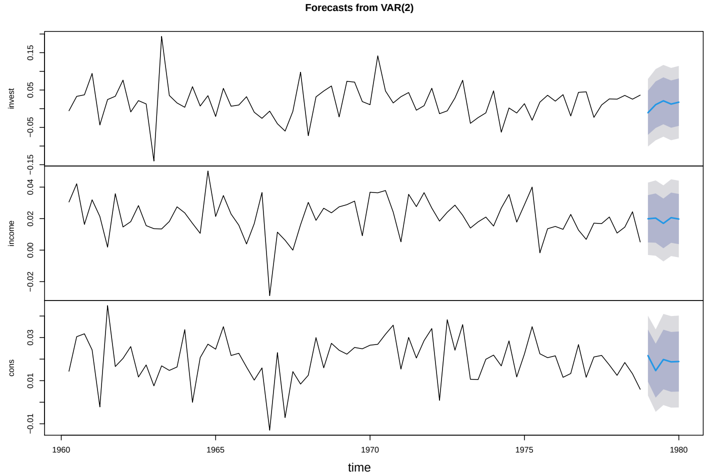
Proyectando en R

```
invest
        Point Forecast       Lo 80      Hi 80       Lo 95      Hi 95
1979 Q1    -0.01081094 -0.06995186 0.04832997 -0.10125917 0.07963728
1979 Q2     0.01078091 -0.05157397 0.07313578 -0.08458264 0.10614446
1979 Q3     0.02111570 -0.04172277 0.08395417 -0.07498745 0.11721885
1979 Q4     0.01235830 -0.05098095 0.07569755 -0.08451072 0.10922732
1980 Q1     0.01741069 -0.04603361 0.08085500 -0.07961900 0.11444038

income
        Point Forecast       Lo 80      Hi 80        Lo 95      Hi 95
1979 Q1     0.01991084 0.004892184 0.03492949 -0.003058212 0.04287989
1979 Q2     0.02034868 0.004714647 0.03598271 -0.003561509 0.04425886
1979 Q3     0.01698059 0.001199023 0.03276215 -0.007155232 0.04111641
1979 Q4     0.02060094 0.004671862 0.03653002 -0.003760484 0.04496237
1980 Q1     0.01974408 0.003812743 0.03567542 -0.004620799 0.04410896

cons
        Point Forecast       Lo 80      Hi 80        Lo 95      Hi 95
1979 Q1     0.02162873 0.009524780 0.03373268  0.003117336 0.04014012
1979 Q2     0.01465388 0.002152469 0.02715528 -0.004465376 0.03377313
1979 Q3     0.01982574 0.006001125 0.03365036 -0.001317187 0.04096868
1979 Q4     0.01872030 0.004838759 0.03260184 -0.002509685 0.03995028
1980 Q1     0.01888702 0.004949979 0.03282406 -0.002427844 0.04020188
```

Proyectando en R



¿Por qué un VAR estructural?

- Vimos que el error de la forma reducida, e_t, no es ortogonal
  - Los errores podrían estar relacionados
    - Ej: $e_{1,t}$ podría estar correlacionado con $e_{2,t}$.
- Si los errores están relacionados, no podemos aislar el efecto de un choque a una de las endógenas en las demás variables.
- Ej. 1: política monetaria y la inflación
- Ej. 2: gasto fiscal

Idenficando un SVAR

Tenemos que poder identificar los choques que son puramente exógenos (ej. choques de política) para poder darle seguimiento a los efectos dinámicos.

- Descubriendo el modelo estructural es lo que llamamos identificación.
- Según Sims (1986):

"*identification is the interpretation of historically observed variation in data in a way that allows the variation to be used to predict the consequences of an action not yet undertaken*".

VAR Estructural

Un SVAR(1) tiene la siguiente estructura:

$$AY_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t,$$

donde los choques u_t son independientes.

Ej.: Digamos que tenemos dos variables, la brecha del producto (y) y la tasa de interés r: $Y_t = [y_t, x_t]'$.

$$y_t + a_{12} r_t = \beta_{10} + \beta_{11} y_{t-1} + \beta_{12} r_{t-1} + u_{yt}$$

$$a_{21} y_t + r_t = \beta_{20} + \beta_{21} y_{t-1} + \beta_{22} r_{t-1} + u_{rt}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ r_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{rt} \end{bmatrix}$$

VAR Estructural

Si pre multiplicampos este VAR por A^{-1} tenemos el VAR reducido:

$$A^{-1}AY_t = A^{-1}\beta_0 + A^{-1}\beta_1 Y_{t-1} + A^{-1}u_t$$

$$Y_t = G_0 + G_1 Y_{t-1} + e_t$$

- La matriz A también relaciona los errores del VAR reducido con los choques estructurales u:

$$e_t = A^{-1}u_t$$

Obteniendo A

- El VAR estructural no se puede estimar directamente
- Comenzamos por el VAR reducido

$$Y_t = G_0 + G_1 X_{t-1} + e_t$$

y llegamos al estructural:

$$AY_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + u_t$$

- Hacemos esto restringiendo la matriz A
- Esto es conocido como **identificación**.

Obteniendo A

Cuando estimamos el VAR(1) reducido de dos variables, estimamos 6 coeficientes (g), y la matriz de covarianza de los residuos.

- Estos son 9 parámetros:
  - 6 coeficientes
  - 2 varianzas
  - 1 covarianza

El VAR estructural tiene 10 parámetros desconocidos: 8 coeficientes y 2 varianzas.

- Por lo tanto, debemos imponer una restricción a los parámetros estructurales.

Obteniendo A

- Usualmente, esta restricción se la imponemos a la matriz A.
- Esto es equivalente a imponer restricciones a las relaciones contemporáneas entre las variables endógenas del modelo estructural.
  - Nos apoyamos fuertemente en la teoría
  - Ej.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ r_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{rt} \end{bmatrix}$$

- A esto nos referimos por especificación.

Obteniendo A

Si imponemos que $a_{12} = 0$, estamos diciendo que y sólo es afectado por rezagos de los choques en r, pero que un choque en y afecta a r de manera contemporánea:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \beta_{10} + \beta_{11} y_{t-1} + \beta_{12} r_{t-1} + u_{yt} \\
r_t + a_{21} y_t &= \beta_{20} + \beta_{21} y_{t-1} + \beta_{22} r_{t-1} + u_{rt}
\end{aligned}
$$

Obteniendo A

Es importante resaltar que si imponemos restricciones a A, también lo hacemos a A^{-1}, por lo que también impondremos la restricción al error:

$$e_t = A^{-1}u_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{rt} \end{bmatrix}$$

Restricciones al SVAR

- Con las restricciones, el número de parámetros desconocidos en el modelo estructural es igual al número de parámetros conocidos del VAR estimado.
- Para obtener los parámetros del SVAR utilizamos las estimaciones de los parámetros del VAR reducido, $(g_{10}, g_{11}, ..., \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$:

Partiendo de

$$A^{-1}AY_t = A^{-1}\beta_0 + A^{-1}\beta_1 Y_{t-1} + A^{-1}u_t$$

tenemos que

$$\begin{bmatrix} y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ r_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{rt} \end{bmatrix}$$

Restricciones al SVAR

Desarrollando, tenemos una expresión del VAR reducido en términos de los parámetros del SVAR:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ -a_{21}\beta_{10} + \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ -a_{21}\beta_{11} + \beta_{12} & -a_{21}\beta_{12} + \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ r_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{yt} \\ -a_{21}u_{yt} + u_{rt} \end{bmatrix}$$

El cual nos permite resolver por los parámetros del SVAR ya que tenemos 9 ecuaciones y 9 incógnitas.

Restricciones al SVAR

En síntesis, para identificar un modelo SVAR:

- Obtén el modelo estructural
- Impón la restricción adecuada a A, las cuales deberían estar basadas en la teoría.
  - Esto nos permite recuperar los choques estructurales y los parámetros estructurales.
- Por lo tanto, la identificación del SVAR se trata de imponer restricciones a la matriz A.

Número de restricciones

- El número mínimo de restricciones que requeridas para un SVAR es igual a la diferencia entre el número de parámetros desconocidos (estructural) vs los conocidos (reducido).
  - Llamemos n al número de variables en el VAR
- Parámetros desconocidos (estructural):
  - como los elementos de la diagonal de A son unos, A tiene $n^2 - n$ elementos desconocidos.
  - Hay n varianzas de u
  - En total, hay $n^2 - n + n$ parámetros desconocidos.

La razón por la que ignoramos los parámetros de los coeficientes por estimar es porque es equivalente a la cantidad de coeficientes del estructural.

Número de restricciones

- Parámetros conocidos (reducido):
  - La estimación nos permite obtener $(n^2 + n)/2$ elementos distintos contenidos en la matriz de varianza-covarianza (que es simétrica): $E(e_t e_t') = \Omega$.

Por lo tanto, imponemos $n^2 - (n^2 + n)/2$ restricciones, que es equivalente a $(n^2 - n)/2$.

- Un VAR con 3 variables necesita $(3^2 - 3)/2 = 3$ restricciones
- Un VAR con 4 variables necesita $(4^2 - 4)/2 = 6$.

Impulso-respuesta

- Las funciones de impulso-respuesta le dan seguimiento a los efectos de los choques estructurales en las variables endógenas.
- Cada respuesta incluye el efecto de un choque específico en una de las variables del sistema en el período t, y luego en $t+1, t+2, \ldots$.

Impulso-respuesta

Partamos del vector estructural autorregresivo

$$AY_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$$

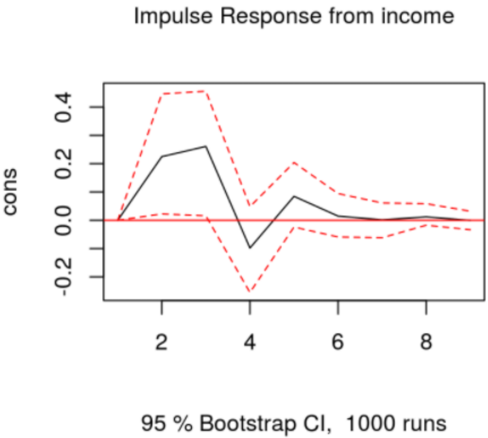
y reescribamos en su representación Wold/MA(∞):

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} C_i u_{t-i},$$

donde la matriz C_i es la respuesta de las endógenas a los cambios en los choques, ej:

$$\frac{\partial y_{t+h}}{\partial u_{yt}} = C_{11,h}$$

Ej. Impulso-respuesta



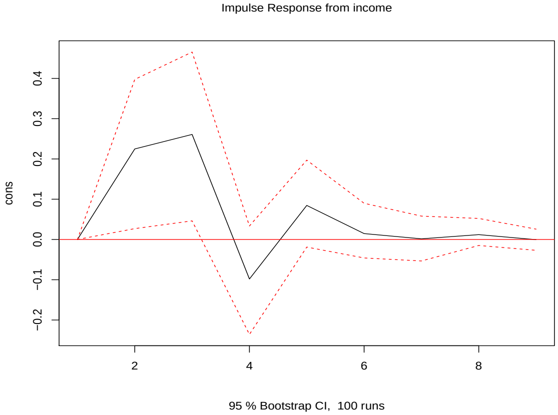
Impulso-respuesta en R

Para calcular las funciones de impulso-respuesta en R podemos usar la función `irf()` del paquete `vars`. Los inputs de la función son:

- x: el modelo de tipo VAR
- impulse: variable(s) que experimenta(n) el choque exógeno
- response: variable(s) que queremos evaluar luego del choque

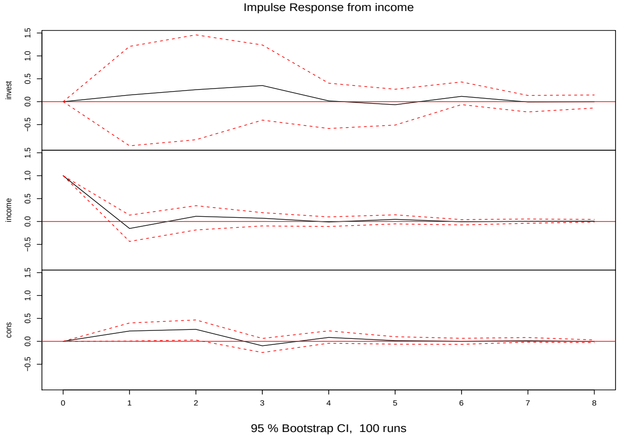
Impulso-respuesta en R

```
d_irf <- irf(model1, impulse = "income", response = "cons",
             n.ahead = 8, ortho = F)
plot(d_irf)
```



Impulso-respuesta en R

```r
# También podemos evaluar el impulso de una variable en las demás variables,
# si consideramos el argumento response=NULL.
plot(irf(model1, impulse = "income", response=NULL, n.ahead = 8, ortho = F))
```



Factor-Augmented VAR (FAVAR)

- El argumento principal del Factor-Augmented VAR (FAVAR) yace en que la mayoría de las variables económicas pueden ser explicadas por un número *pequeño* de variables latentes.
- Esto tiene sentido, ya que las variables financieras suelen moverse en tandem, los indicadores de producción también, etc.
- Usualmente, las operaciones detrás de un FAVAR requieren disminuir la dimensionalidad de una matriz de observaciones mediante técnicas como la Descomposición en Valores Singulares o la Descomposición en Componentes Principales.
- Estas técnicas estadísticas tocan la frontera entre la econometría clásica y los modelos de aprendizaje automático (machine learning).

FAVAR

El modelo Factor-Augmented VAR (FAVAR) viene dado por

$$\begin{bmatrix} F_t \\ Y_t \end{bmatrix} = B(L) \begin{bmatrix} F_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \epsilon_t,$$

donde

- $B(L)$ es un polinomio en el operador de rezago, de orden finito d
- ϵ_t es el vector de errores con
  - $E(\epsilon_t) = 0$
  - $E(\epsilon_t \epsilon_t') = \Sigma$

Básicamente, el modelo FAVAR es un VAR que "apila" los factores, F con las demás variables endógenas, Y, considerando los factores como endógenas.

FAVAR

- El FAVAR no puede ser estimado directamente, debido a que F_t no es observable.
- Necesitamos encontrar F_t para poder estimar el FAVAR.
- Usualmente utilizamos la descomposición en componentes principales para estimar F_t.
- En resumen, la estimación del FAVAR consiste en dos pasos:
  - Primero estimamos F_t mediante PC.
  - Luego consideramos F_t como una variable endógena y calculamos un VAR con F_t y Y_t.

Componentes principales

Ej. FAVAR (Bernanke et al., 2005)

- Bernanke et al. (2005) argumentaban que los modelos SVAR tradicionales no le permitían al hacedor de política evaluar el impacto de la política monetaria en otras variables no incluídas en el VAR.
  - En particular cuando se observan las funciones de impulso respuesta.
- Los autores desarrollaron un modelo FAVAR para evaluar el impacto de la política monetaria en distintas variables económicas resumidas por los factores.

Ej. FAVAR (Bernanke et al., 2005)

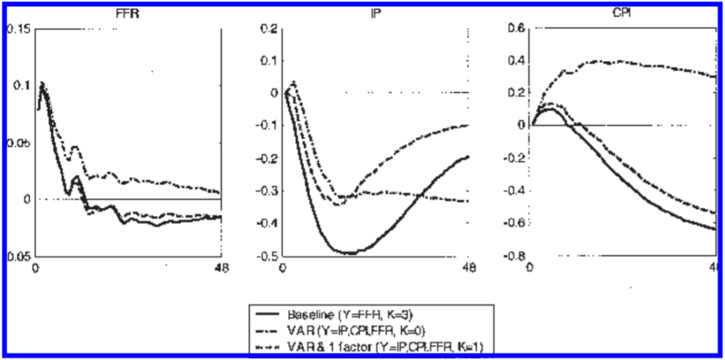


FIGURE I
Estimated Impulse Responses to an Identified Policy Shock for Alternative FAVAR Specifications, Based on the Two-Step Principal Component's Approach

Ej. FAVAR (Caffaro y Pérez, 2018)

- Caffaro y Pérez (2018) argumentan que algunas variables pueden ser útiles para proyectar dentro del FAVAR y otras "causan ruido" en las proyecciones.
- CP establecieron una metodología para computar un FAVAR "óptimo", excluyendo estas variables que causan ruido a la proyección.
- CP lograron reducir el error de proyección out-of-sample respecto a un VAR (excluyendo la información de los factores) y el FAVAR base (incluyendo todas las variables).
- Debilidades:
  - Requiere muchos datos
  - Computacionalmente intenso

Ej. FAVAR (Caffaro y Pérez, 2018)

Nombre de Variable	Unidad	Fuente	Sector
IMAE	Índice	BCRD	Real
Inflación	Índice	BCRD	Precios
Ventas DGII	RD$	DGII	Real
Ventas Agro	RD$	DGII	Real
Ventas Construccion	RD$	DGII	Real
Ventas Explotación de Minas y Canteras	RD$	DGII	Real
Ventas Manufactura	RD$	DGII	Real
Ventas Servicios	RD$	DGII	Real
Ventas comercio otros	RD$	DGII	Real
Ventas comercio combustible	RD$	DGII	Real
Ventas comercio vehículo	RD$	DGII	Real
Ventas comunicaciones	RD$	DGII	Real
Ventas Elec Gas Agua	RD$	DGII	Real
Ventas HB&R	RD$	DGII	Real
Ventas Interm Financiera	RD$	DGII	Real
Ventas Otros Servicios	RD$	DGII	Real
Ventas Transporte y Almacenamiento	RD$	DGII	Real
Spread de Tipo de Cambio Venta	RD$/US$	BCRD	Monetario
Base Monetaria Restringida	RD$	BCRD	Monetario
Operaciones Compra Total de USD	US$	BCRD	Monetario
Encaje Bancario Excedente ME	US$	BCRD	Monetario
Encaje Bancario Excedente MN	RD$	BCRD	Monetario
Medio Circulante (M1)	RD$	BCRD	Monetario
Valores en Circulación	RD$	BCRD	Monetario
Ingresos sin Donaciones	Millones	MH	Fiscal
Gasto Primario	Millones	MH	Fiscal
Gasto Capital	Millones	SIB	Fiscal
Tasa Interbancaria	Porcentaje	BCRD	Financiero

Ej. FAVAR (Caffaro y Pérez, 2018)

	RMSE	
	IMAE	Inflación
VAR	2.1087	0.4440
FAVAR Base	2.0163	0.4830
FAVAR Óptimo	1.8373	0.4121

Cuadro 1: Error promedio de proyección para los modelos VAR, FAVAR Base, y FAVAR Óptimo

Ej. FAVAR (Caffaro y Pérez, 2018)

	IMAE		Inflación	
	Jarque-Bera	Kolmogorov-Smirnov	Jarque-Bera	Kolmogorov-Smirnov
VAR	0.2379	0.7632	0.3861	0.9169
FAVAR Base	0.8142	0.8816	0.5615	0.9951
FAVAR Óptimo	0.9223	0.8817	0.5832	0.9257

Cuadro 2: Test de Jarque-Bera y Kolmogorov-Smirnov, p-value

Ej. FAVAR (Caffaro y Pérez, 2018)

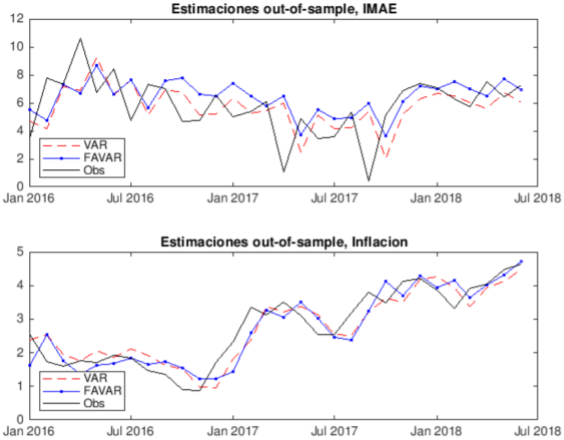


Figura 1: Estimaciones out-of-sample para el IMAE y la inflación

Fuentes

- Bernanke et al. (2005), Measuring the Effects of Monetary Policy: A Factor-Augmented Vector Autoregressive (FAVAR) Approach
- Caffaro y Pérez (2018), Modelo FAVAR Óptimo para Proyecciones de Corto Plazo: Aplicación a la República Dominicana
- IMF Macroeconomic Forecasting (MFx)