Modelos de Volatilidad

Gustavo A. Caffaro

Instituto Tecnológico de Santo Domingo

Nov 2021 - Ene 2022

Introducción

Contenido:

- Retornos
- Volatilidad
- Modelo ARCH
- Modelo GARCH

Introducción

Recordemos el modelo de regresión básico

$$y = X\beta + \epsilon.$$

Bajo los supuestos de mínimos cuadrados:

$$E(y \mid X) = X\beta + E(\epsilon \mid X) = X\beta$$

$$Var(Y \mid X) = Var(\epsilon \mid X) = E(\epsilon^2) = \sigma^2$$

Este es el supuesto de homoscedasticidad.

Introducción

Sabemos que en la práctica, este supuesto se viola con regularidad, por lo que la mayoría de las series poseen heteroscedasticidad.

- Esto quiere decir que $Var(\epsilon_i \mid X) = \sigma_i^2$
- Por ejemplo, la serie de turistas.

Recordemos que la heteroscedasticidad quiebra los intervalos de confianza de los estimadores y por tanto los test statistics.

- Usualmente, este problema es resuelto utilizando errores estándar robustos a la heteroscedasticidad.
- Sin embargo, muchas veces estamos interesados en modelar los errores de las series.
    - Ej.: la volatilidad de los retornos de activos financieros (stocks).

Introducción

Engle (1982) encontró que algunas series de tiempo macroeconómicas tenían errores menos estables que los asumidos.

- Ej: en los modelos de inflación, la magnitud de los errores de pronóstico venía en grupos: durante algunos
    - Algunos períodos tenían pequeños errores de pronóstico, otros muy grandes

Engle propuso un modelo autoregresivo con heteroscedasticidad condicional (autoregressive conditional heteroscedasticity, ARCH) como una alternativa a los modelos de serie de tiempo tradicionales.

- El objetivo del modelo de Engle era capturar la correlación serial en la volatilidad.

Retornos

Digamos que P_t es el precio de un activo financiero en el tiempo t. Entonces el retorno simple durante un período se define como:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1,$$

y el retorno durante k períodos se define como

$$R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1,$$

por lo que a través de k períodos,

$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}}$$

Retornos

Por otro lado, si componemos contínuamente

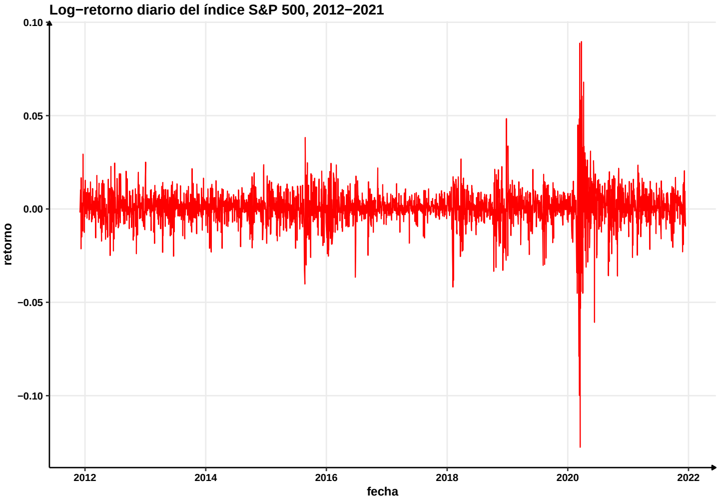
$$P_t = P_{t-1}e^r$$

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = e^r$$

Por lo tanto, si tenemos retornos que se componen contínuamente, tenemos que

$$r_t = ln(1 + R_t) = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Retornos diarios del S&P 500



Volatilidad

La volatilidad es la desviación estándar condicional de los retornos de un activo financiero.

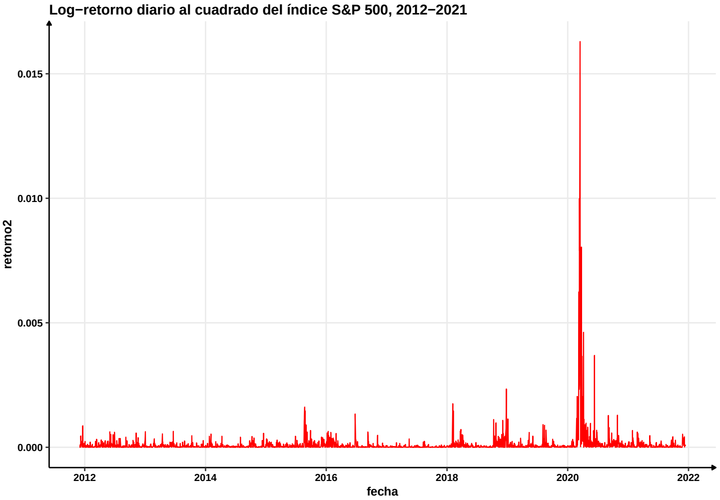
- A veces se utiliza el concepto de "riesgo" como sinónimo de volatilidad

En esencia, el retorno esperado y el riesgo esperado son los primeros dos momentos condicionales de los retornos de un activo financiero.

Los modelos ARMA usualmente hacen un buen trabajo en capturar el movimiento del retorno esperado, pero muy mal trabajo caracterizando el riesgo.

- La volatilidad cambia en el tiempo, y los modelos ARMA dependen de varianzas condicionales independientes del tiempo.

Retornos diarios al cuadrado del S&P 500



Modelos de heteroscedasticidad condicional

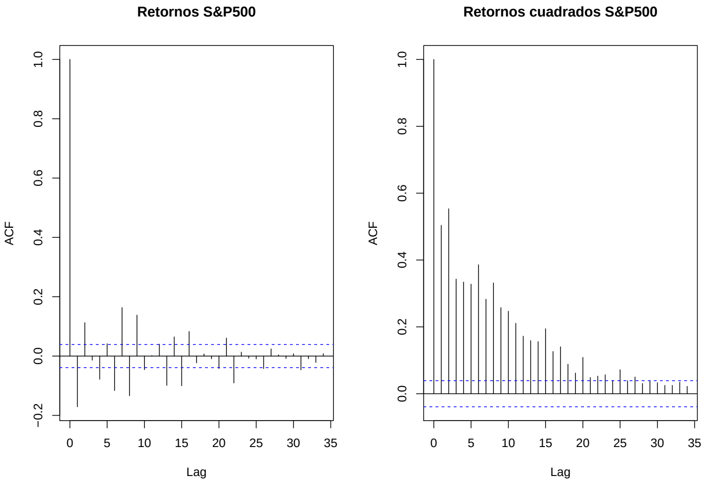
Los modelos de heteroscedasticidad condicional son una clase de modelos que describe una serie de tiempo con las siguientes dos propiedades:

1. La serie de tiempo no está correlacionada serialmente (o es débilmente correlacionada)
   - Esto se comprueba observando la FAC de la serie y buscando autocorrelación serial
2. La serie es serialmente dependiente
   - Esto lo determinamos examinando la FAC de la serie **al cuadrado**.

En otras palabras, son series que son serialmente no correlacionadas, pero dependientes.

- (Recuerden que la autocorrelación mide la dependencia lineal)

FAC de los retornos diarios del S&P500



Modelos de volatilidad

Empíricamente, los retornos de los activos financieros tienden a tener autocorrelaciones muy débiles, por lo que es usual que utilicemos modelos estacionarios ARMA(p,q):

$$r_t = \mu_t + a_t,$$

donde a_t es el "choque aleatorio" al activo, y μ_t el retorno promedio del activo:

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-1} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i}$$

Modelos de volatilidad

Entonces, la varianza condicional de los retornos es

$$\sigma_t^2 = Var(r_t \mid I_{t-1}) = Var(a_t \mid I_{t-1}).$$

Los modelos de heteroscedasticidad condicional buscan describir la evolución de σ_t^2 en el tiempo.

En principio, hay dos tipos de técnicas par modelar la volatilidad:

1. Utilizar una función exacta para describir la evolución de σ_t^2
    - Estos son los modelos de tipo GARCH
2. Utilizara una ecuación estocástica para describir la evolución de σ_t^2
    - Modelos de volatilidad estocástica

En este curso nos enfocaremos en los modelos de tipo GARCH.

Modelos ARCH

Los modelos autoregresivos con heteroscedasticidad condicional (ARCH, autoregressive conditionally heteroscedastic) son modelos de la varianza de una serie de tiempo.

- Estos modelos son utilizados para describir una varianza cambiante y posiblemente volátil.
- Usualmente, los modelos ARCH son utilizados para modelar varianzas elevadas durante espacios de tiempo cortos.
    - Por ejemplo, los residuales de un modelo ARIMA.

Modelos ARCH

En el modelo ARCH, un choque a_t al retorno de un activo financiero no está serialmente correlacionado, pero es dependiente.

La dependencia de a_t se describe por una función cuadrática de sus rezagos.

- El cuadrado de los choques pasados contribuyen a la volatilidad hoy.
- Choques de mucho tamaño en el pasado implican una varianza condicional elevada.

Distintos modelos ARCH

- ARCH - Engel (1982)
- GARCH - Bollerslev (1986)
- GARCH-M
- IGARCH
- GARCH Exponencial (EGARCH)

En esta clase cubriremos el ARCH y GARCH.

Modelo ARCH (Engle)

El modelo ARCH(m) básico (Engle 1982) se define como

$$
\begin{aligned}
a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde ϵ_t es una secuencia de variables iid con media cero y varianza uno, y $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \ \forall i > 0$.

- Los coeficientes α_i deben cumplir con la condición de que la varianza condicional de a_t sea finita.
- Usualmente, asumimos que $\epsilon_t \sim N(0, 1)$.

Propiedades del modelo ARCH

Podemos alcanzar una mejor comprensión de los modelos ARCH examinando las propiedades del ARCH(1):

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \qquad \sigma_t = \alpha_o + \alpha_1 a_{t-1}^2,$$

donde $a_0 > 0$ and $\alpha_1 \geq 0$.

1. La media incondicional de a_t es cero:

$$E(a_t) = E\left(E(a_t \mid I_{t-1})\right) = E(\sigma_t E(\epsilon_t)) = 0$$

Propiedades del modelo ARCH

2. La varianza incondicional de a_t es:

$$\begin{aligned} Var(a_t) =& E(a_t) = E((a_t^2 \mid I_{t-1})) \\ =& E(\alpha_o + \alpha_1 a_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 E(a_{t-1}^2)) \end{aligned}$$

como a_t es estacionario y $E(a_t) = 0$,

$$Var(a_t) = Var(a_{t-1}) = E(a_t^2) = E(a_{t-1}^2),$$

por lo que $Var(a_t) = \alpha_o + \alpha_1 Var(a_t)$ y

$$Var(a_t) = \alpha_0 / (1 - \alpha_1).$$

Como $Var(a_t) > 0$, $0 \leq \alpha_1 < 1$.

Propiedades del modelo ARCH

3. Las colas son más anchas que la distribución normal (leptocúrtica).

$$E(a_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)},$$

la curtosis incondicional de a_t es

$$\frac{E(a_t^4)}{(Var(a_t))^2} = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$$

4. Si $0 \leq \alpha_1 < 1$ y $3\alpha_1^2 < 1$, el cuadrado del proceso, a_t^2, sigue un proceso AR(1) con FAC dada por $\rho(h) = \alpha_1^h \geq 0$, para $h > 0$.
5. Si $3\alpha_1 > 1$ pero $\alpha_1 < 1$, entonces a_t^2 es estríctamente estacionaria con varianza infinita.

Construyendo el modelo

El modelo ARCH básico consiste en dos ecuaciones de tipo ARMA:

- La primera ecuación representa la dinámica de los retornos.
  - Estima un modelo ARMA de la serie de retornos
  - Utiliza los residuos del modelo ARMA para testear por efectos ARCH.
- La segunda ecuación representa la dinámica de la volatilidad, aproximada por los cuadrados de los retornos. Si existen efectos ARCH, entonces debemos especificar un modelo de volatilidad.

Testeando por efectos ARCH

- Defime $a_t = r_t - \mu_t$ como los residuos de la regresión en los retornos.
  - Estima un modelo ARMA de los retornos.
- La serie a_t^2 es utilizada para testear por heteroscedasticidad condicional (también conocida como el efecto ARCH)
- Existen tres tests básicos para verificar el efecto ARCH:
  - Examinar la FAC
    - Estamos buscando autocorrelación en el cuadrado de los residuos, por lo que la FAC tendra decaimiento exponencial, si está presente.
  - Test de Q-statistic aplicado a a_t^2
  - Test Multiplicador de Lagrange

Test Multiplicador de Lagrange

Este test es una aplicación del F test estándar a la siguiente regresión:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m a_{t-m}^2 + e_t, \quad t = m+1, \ldots, T$$

En esencia, este es un F-test donde la hipótesis nula es

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0.$$

El test statistic es

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - 2m - 1)} \sim \chi_m^2$$

Test de Jarque-Bera

El test de Jarque-Bera (JB) es un test de bondad de ajuste basado en qué tan distinta es la distribución de la serie comparada con la distribución normal.

- El test utiliza medidas de asimetría y curtósis.

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{1}{4}K^2\right),$$

donde

$$S = \frac{\hat{\mu}^3}{\hat{\sigma}^3}, \quad K = \frac{\hat{\mu}^4}{\hat{\sigma}^4} - 3$$

- JB tiene una distribución χ^2 con 2 grados de libertad. - La hipótesis nula es que la serie sigue una distribución normal.

Test de Shapiro-Wilk

Este test examina la nula de que la muestra, $x_1, \ldots, x_n$, viene de una distribución normal.

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

donde $x_{(i)}$ es el i-ésimo estadístico de orden (el i-ésimo número más pequeño en la muestra), $\bar{x}$ es la media de la muestra, y las $a_1, \ldots, a_n$ varibles aleatorias extraídas de una distribución normal con medias partiendo del valor esperado de los estadísticos de orden.

- Un W pequeño rechaza la nula.
- El test de Shapiro-Wilk se parece a un Q-Q plot.

Determinando el orden ARCH

Si el efecto ARCH es significativo, la FACP de a_t^2 puede ser utilizado pr determinar el orden ARCH.

- Recuerden que la FACP de un modelo autoregresivo muere abruptmente en el rezago AR más lejano.
- Si la muestra es pequeña, la FACP no es fiable.
- Importante destacar que, dada una muestra, a_t^2 es un estimador insesgado de σ_t^2.

Verificando el modelo

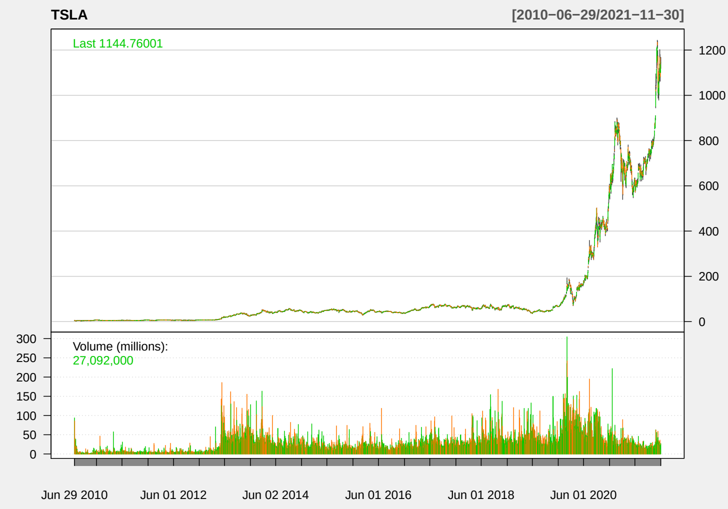
- Si el modelo ARCH está correctamente especificado, entonces los **residuos estandarizados**, $\tilde{a}_t$ forman una secuencia iid de variables aleatorias.

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$$

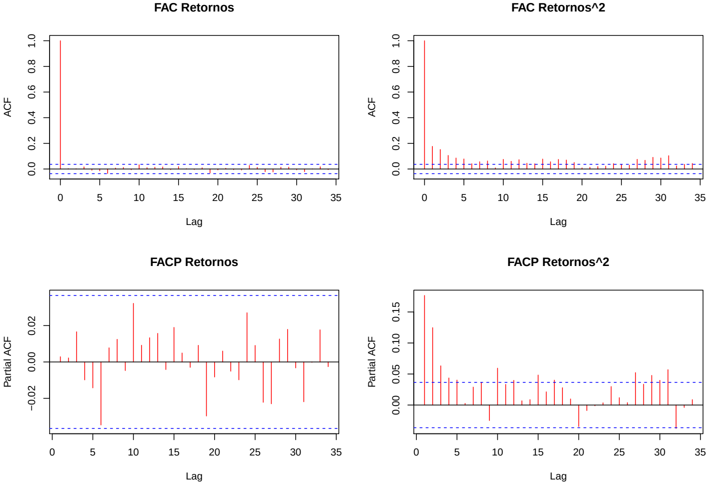
- Por lo tanto, podríamos utilizar un test de Box-Ljung en $\tilde{a}_t$ para verificar la ecuación de la media, mientras que un test de Box-Ljung en $\tilde{a}_t^2$ puede ser utilizado para verificar la ecuación de la volatilidad.
- Un Q-Q plot puede ser usado para verificar la normalidad (y los tests de SW y JB)

Ejemplo: Tesla

```
## [1] "TSLA"
```



Ejemplo: Tesla



Ejemplo: Tesla

De la FAC y PACF determinamos que los retornos de Tesla no están serialmente correlacionados.

Sin embargo, vemos que sí hay dependencia serial, ya que la FAC y PACF del cuadrado de los retornos muestra que los coeficientes son estadísticamente distintos de cero.

Adicionalmente, la FACP del cuadrado de los retornos sugiere que deberíamos considerar un modelo ARCH(4).

Ejemplo: Tesla

```r
TSLA_arch <- garchFit(~garch(4,0), X$ret, include.mean=F,trace = F)
summary(TSLA_arch)
```

```
Title:
 GARCH Modelling

Call:
 garchFit(formula = ~garch(4, 0), data = X$ret, include.mean = F,
    trace = F)

Mean and Variance Equation:
 data ~ garch(4, 0)
<environment: 0x000002103355f890>
 [data = X$ret]

Conditional Distribution:
 norm

Coefficient(s):
     omega      alpha1      alpha2      alpha3      alpha4
0.00073729  0.11883285  0.17634718  0.09118491  0.04150604

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
omega  7.373e-04   3.489e-05   21.135  < 2e-16 ***
alpha1 1.188e-01   2.267e-02    5.242 1.58e-07 ***
alpha2 1.763e-01   2.985e-02    5.908 3.47e-09 ***
alpha3 9.118e-02   2.431e-02    3.751 0.000176 ***
alpha4 4.151e-02   1.520e-02    2.730 0.006328 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Ejemplo: Tesla

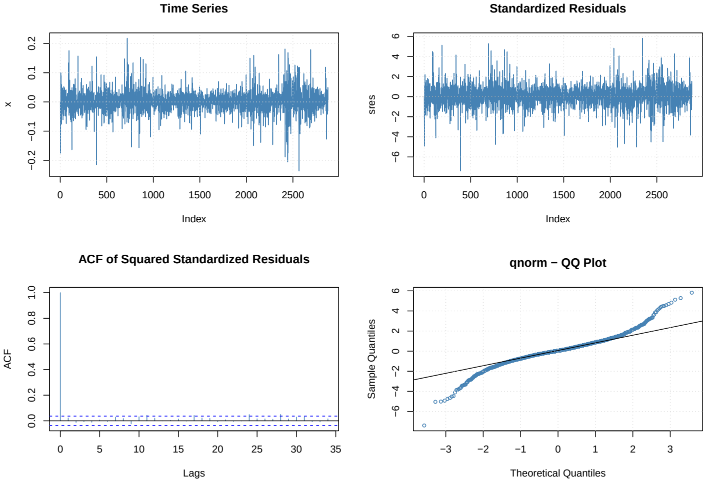
```
Standardised Residuals Tests:
                                    Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  2886.554  0
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9442068 0
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  5.654284  0.8434245
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  6.857863  0.9614745
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  12.41048  0.9012233
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  10.44986  0.4019499
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  17.48763  0.2905587
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  25.54607  0.1813325
 LM Arch Test       R    TR^2   16.24183  0.1804091

Information Criterion Statistics:
      AIC       BIC       SIC      HQIC 
-3.950374 -3.940035 -3.950380 -3.946648 
```

Ejemplo: Tesla

- Los tests de JB y SW rechazan la hipótesis nula de que los residuales provienen de una distribución normal.
- Los tests de los residuales estándar son todos mayores que 5 %, por lo que no podemos rechazar la hipótesis nula de que no hay correlación serial ni en los residuales ni en los residuales cuadrados.
- En resumen, estos tests nos dicen que $\tilde{a}_t$ y $\tilde{a}_t^2$ son iid, aunque su distribución no es normal. Comprobemos con un QQ plot.

Ejemplo: Tesla



Debilidades del modelo ARCH

1. Como el modelo ARCH está basado en el cuadrado de los rezagos de los choques, trata los choques positivos y negativos de la misma manera.
   - De hecho, los precios de los activos financieros usualmente no reaccionan de la misma manera a choques positivos y negativos.
2. El modelo ARCH es restrictivo, como vimos, por ejemplo, con el ARCH(1), el cual requiere que $\alpha_1 \in [0, 1/3]$
3. El modelo ARCH no es comportamental. El modelo explica la evolución de la varianza, pero no explica qué causa este comportamiento.
4. El modelo ARCH tiende a sobrepredecir la volatilidad, como resultado de la estructura de rezagos.

Modelo GARCH

El modelo ARCH generalizado, o GARCH(m,s), se describe por

$$
\begin{aligned}
a_t &= \sigma_t \epsilon_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

donde $\epsilon_t \sim iid(0,1)$, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$, y $\sum_{i=1}^{max(m,s)}(\alpha_i + \beta_i) < 1$.

- Los alphas y betas son referidos como los parámetros ARCH y GARCH, respectivamente.
- La última restricción asegura que la varinz incondicionl de a_t es finita, y que la varianza condicional de σ_t^2 evolucion en el tiempo.

Propiedades del modelo GARCH(1,1)

Enfoquémonos en el modelo GARCH(1,1), el cual tiene la siguiente especificación:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

donde $\alpha_1 \geq 0, \beta \leq 1$, y $(\alpha_1 + \beta_1) < 1$.

1. Si σ_{t-1}^2 es grande, entonces σ_t^2 será también grande, por lo que esta especificación puede capturar el **agrupamiento de la volatilidad**.
2. Si $1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1^2) > 0$, entonces la curtosis de a_t será mayor que 3.

   $\Rightarrow a_t$ tiene colas anchas.
3. El modelo GARCH permite la evolución de la volatilidad en el tiempo.

Función garchFit

Paquete `fGarch`

Podemos incluir el componente ARMA directamente:

```
garchFit(~arma(2,2)+garch(1,1),data=ret, cond.dist =
"norm")
```

Distribuciones condicionales:

- `norm`: distribución normal
- `snorm`: distribución normal sesgada
- `std`: distribución t de Student
- `sstd`: distribución t de Student sesgada
- `ged`: distribución de Error Generalizado
- `sged`: distribución de Error Generalizado sesgda

Ejemplo: Tesla (GARCH)

Supuestos

- Un ARMA(2,2) describe el proceso de los retornos
- La volatilidad de los errores sigue un GARCH(1,1)
- e_t sigue una distribución sesgada de t-Student.

```
TSLA_garch <- garchFit(~arma(2,2) + garch(1,1), X$ret, include.mean=T,trace = F,cond.dist = "sstd")
summary(TSLA_garch)
```

Ejemplo: Tesla (GARCH)

```
Title:
 GARCH Modelling

Call:
 garchFit(formula = ~arma(2, 2) + garch(1, 1), data = X$ret, cond.dist = "sstd",
    include.mean = T, trace = F)

Mean and Variance Equation:
 data ~ arma(2, 2) + garch(1, 1)
<environment: 0x000001ba89f50118>
 [data = X$ret]

Conditional Distribution:
 sstd

Coefficient(s):
         mu          ar1          ar2          ma1          ma2
 1.5264e-03   8.6051e-01  -7.9128e-01  -8.6011e-01   7.8228e-01
      omega       alpha1        beta1         skew        shape
 1.8807e-05   4.6918e-02   9.4173e-01   1.0015e+00   3.6069e+00

Std. Errors:
 based on Hessian

Error Analysis:
         Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu      1.526e-03   5.688e-04    2.684 0.007283 **
ar1     8.605e-01   7.576e-02   11.359  < 2e-16 ***
ar2    -7.913e-01   1.287e-01   -6.150 7.77e-10 ***
ma1    -8.601e-01   8.064e-02  -10.666  < 2e-16 ***
ma2     7.823e-01   1.262e-01    6.199 5.67e-10 ***
omega   1.881e-05   8.353e-06    2.252 0.024353 *
alpha1  4.692e-02   1.209e-02    3.881 0.000104 ***
beta1   9.417e-01   1.579e-02   59.643  < 2e-16 ***
skew    1.001e+00   2.476e-02   40.455  < 2e-16 ***
shape   3.607e+00   2.561e-01   14.082  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Ejemplo: Tesla (GARCH)

```
Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  4027.175  0
 Shapiro-Wilk Test  R    W      0.9383843 0
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  5.112643  0.8835273
 Ljung-Box Test     R    Q(15)  6.158728  0.9769563
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  9.150535  0.9810972
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  12.16774  0.273987
 Ljung-Box Test     R^2  Q(15)  15.56119  0.4117991
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  18.69093  0.5419895
 LM Arch Test       R    TR^2   12.28615  0.4229811

Information Criterion Statistics:
      AIC       BIC       SIC      HQIC
-4.147485 -4.126747 -4.147509 -4.140010
```

Ejemplo: Tesla (GARCH)