Métodos Numéricos

Práctica 4. Modelos de regresión.
(Puede utilizarse Matlab en algunos ejercicios.)

1 – Ajustar una recta por cuadrados mínimos para la siguiente tabla de puntos (x_i, y_i):

x:	0	1	2	3
y:	1	2	3	6

2 – Comprobar que en regresión lineal con cuadrados mínimos, cuando los puntos son 2 se obtiene precisamente la recta que pasa por ambos puntos (¡para esto agregar una condición indispensable sobe ambos puntos!). Más generalmente, se puede probar que si los puntos están alineados (haya o no haya repeticiones), se obtendrá la recta que los contiene. ¿Por qué? (Explicar, sin hacer cuentas.)

3 – Para regresión lineal con cuadrados mínimos con el objetivo de hallar la recta de pendiente *a* y ordenada al origen *b*, mostrar una condición tal que si valiera el *a* o el *b* quedarán indefinidos.

4 – Para regresión lineal, comprobar que si se intercambia (x_i, y_i) con (x_j, y_j), para dos índices i y j determinados ($1 \leq i < j \leq n$), entonces los coeficientes *a* y *b* resultantes de la regresión no cambian. Interpretar este hecho en forma práctica.

5 – Para regresión lineal, comprobar que si se aplica una escala de *h* a todos los x_i, i.e. se cambia el valor x_i por $h.x_i$ para $0 \leq i \leq n$, el resultado de la regresión será el cambio del coeficiente *a* por a / h. Interpretar este hecho en forma práctica.

6 – *Interpretar* (y/o graficar en forma aproximada) las siguientes seis situaciones para regresión lineal: $a < 0$, $a > 0$, $a = 0$, $a < 1$, $a > 1$, $a = 1$

7 – Para regresión lineal, tomar un i fijo, $1 \leq i \leq n$, y una constante c.
a) Si cambiamos x_i por $x_i + c$, ¿cómo cambiarán *a* y *b*?
b) Si cambiamos y_i por $y_i + c$, ¿cómo cambiarán *a* y *b*?

8 - Sean *a* y *b* los parámetros obtenidos para aproximación por una recta de la forma $y = ax + b$ al conjunto de mediciones $\{(x_i, y_i) / i = 1, \ldots, n\}$. Determinar en cada caso si la afirmación es V o F, probando lo que dice o dando un contraejemplo:
a) El punto (x_m, y_m) (cuyas coordenadas son respectivamente el promedio de los x_i y el promedio de los y_i) pertenece a la recta indicada.
b) Si todos los puntos y_i son iguales a una misma constante, entonces $a = 0$.
c) Si $a = 0$, entonces la mejor aproximación (en el sentido de cuadrados mínimos) por una función constante $f(x) = C$ al conjunto de datos $\{y_i\}$ i=1, …, n es su promedio.

d) La suma total de los errores cometidos en la estimación será 0.
e) La suma total de los errores al cuadrado cometidos en la estimación será 0.

9 – Sean u, v $\in$ R^n vectores fijos. ¿Qué número real t hace que $||u - t.v||^2$ sea mínimo? Resolver analíticamente e interpretar gráficamente.

10 – ¿Cuál es el punto del plano dado por $x + y - z = 0$ más cercano al punto (2, 1, 0)?

11 – Dados (x_i, y_i, z_i) con con $1 \leq i \leq n$, encontrar el plano de la forma $z = ax + by + c$ de cuadrados mínimos. Es decir hallar los mejores reales *a*, *b*, *c*, de modo que definan el mejor plano posible para los puntos dados en el sentido de cuadrados mínimos.

12 – Aplicar lo anterior y obtener el plano de cuadrados mínimos para los siguientes puntos (x_i,y_i,z_i):

x:	0	0	2	0
y:	0	3	0	4
z:	0	4	6	6

13 – Comprobar que cuando los puntos son 3 el plano de cuadrados mínimos es precisamente el plano que pasa por esos 3 puntos (¡pero para esto agregar una condición indispensable sobre ellos!). Más generalmente, probar que si los n puntos están en un mismo plano (haya o no haya repeticiones), se obtendrá el único plano que los contiene. ¿Por qué? (Explicar sin hacer cuentas.)

14 – Probar que en regresión lineal para ajustar una curva de la forma $y = a\,x + b$, para *n* puntos dados (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$, los *a* y *b* óptimos, además de la manera vista en clase, pueden calcularse mediante

$$a = \frac{\Sigma_i (x_i - \underline{x})(y_i - \underline{y})}{\Sigma_i (x_i - \underline{x})^2}$$

$$b = \underline{y} - a\,\underline{x}$$

donde $\underline{x}$ = promedio de los x_i, $\underline{y}$ = promedio de los y_i, para i = 1, …, n.

15 – Se tiene *n* puntos (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$ en el plano y se desea hallar el mejor polinomio de grado 0 que los aproxime en el sentido de cuadrados mínimos. ¿Cómo hacer?

16 (*opcional*) – Sean u y v vectores ortogonales en R^n. Demostrar, para la norma 2, que $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ (*Teorema de Pitágoras para R^n*)

Nota al margen: existen varias versiones del teorema de Pitágoras: para triángulos rectángulos en n dimensiones, para otras determinadas figuras en n dimensiones, para otros espacios tales como espacios de funciones, etc. Existen asimismo varias demostraciones de ellos.