UNSAM ECyT

Métodos Numéricos

Guía de ejercicios 3. Aproximación e interpolación

Ejercicios introductorios

I1) Calcular el polinomio interpolador de Lagrange para los siguientes datos, y evaluar el polinomio obtenido en x = 2, en x = 4 y en x = -1:

x:	0	1	2	3
y:	1	1	1	2

I2) Los siguientes valores corresponden a la altura *h* de un cohete experimental a lo largo del tiempo. Calcular la trayectoria de este cohete, suponiendo que es polinomial en el tiempo *t*. Dicho de otro modo, calcular el polinomio interpolador de Lagrange para los siguientes datos. Evaluar luego el polinomio obtenido en t = 0, en t = 3 y en t = 6 para estimar la altura en esos instantes:

t:	1	2	4	5
h:	-2	1	13	22

I3)

a) Elegir alguno de los dos ejercicios anteriores y para esos mismos datos utilizar el método de Newton para hallar un polinomio interpolador de grado mínimo.
Comprobar que el polinomio resultante es el mismo ya calculado.

b) Elegir alguno de los dos ejercicios anteriores y utilizar el método de diferencias divididas para hallar el polinomio interpolador de grado mínimo.
Comprobar que el polinomio resultante es el mismo ya calculado.

I4) ¿Cuál es el polinomio interpolador de Lagrange para los datos siguientes? (Consejo: ¡No hace falta hacer cuentas!)

x:	0	2	8	15
y	3	3	3	3

I5) Verificar cómo tanto el método de Lagrange como el de Newton generalizan la propiedad euclidiana de que *por dos puntos distintos pasa siempre una (única) recta*.

Ejercicios básicos

B1)
a) Explicar por qué dados 3 puntos no alineados de R^2, existe una única parábola que pasa por ellos.
b) Si los 3 puntos estuviesen alineados, ¿necesariamente existirá tal parábola?

B2) Para encontrar un polinomio que pase por n puntos distintos dados de R^2, ¿cuál es el mínimo grado con que puede resultar el polinomio interpolador de Lagrange, y cuál el máximo? ¿Qué condición *geométrica* de los datos implicará que este polinomio resulte de grado ≤ 1?

B3) Se tiene calculado P el polinomio interpolador de grado mínimo de un conjunto grande de datos, y se descubre que los valores de los y_i fueron medidos con error, tal que todos debían ser la mitad del verdadero valor. ¿Cómo se puede corregir P de acuerdo a los valores correctos, con mínimo esfuerzo? Es decir sin necesidad de volver a calcular desde cero el polinomio correspondiente.

B4) Lo mismo que en (B3) pero ahora se sabe que las ordenadas observadas estaban excedidas en una cantidad fija C, es decir se midieron todos los y_i por el mismo exceso, conocido. ¿Cómo se puede corregir este error con mínimo esfuerzo?

B5) ¿Se necesitará un esfuerzo similar al de (B3) o (B4) si en cambio los valores x_i estuviesen excedidos una cantidad fija C, es decir si se midió con un corrimiento constante el valor de cada abscisa?

B6) Identificar ventajas y desventajas del método de interpolación de Newton con respecto al método de interpolación de Lagrange.

B7) Identificar ventajas y desventajas del método de diferencias divididas con respecto al método de interpolación de Newton.

Ejercicios avanzados

A1) Se toman n + 1 pares de números reales (x_i, y_i) para i = 0, 1, é , n, tales que hay un polinomio conocido P de grado n y vale $y_i = P(x_i)$ para i = 0, 1, é , n, con los x_i distintos dos a dos. En este caso, ¿cuál será el polinomio interpolador resultante?

A2)

a) Aplicando interpolación lineal, escribir un algoritmo directo, que reciba como input las coordenadas (x, y) de k puntos del plano R^2, para n variable, y determine si esos k puntos están o no alineados.

b) Modificar (a) para determinar si k puntos dados del plano R^2 están en una misma parábola.

c) Modificar (a) para generalizar al caso de un grado arbitrario que también se toma como input.

*A3) A partir de la formula del error de interpolación para el polinomio de Lagrange al ser usado para interpolar datos (x_i , $y_i = f(x_i)$), i = 0, 1, é , n, provenientes de una función real f con derivada (n+1)-ésima continua, deducir la siguiente consecuencia:
Dentro del intervalo de donde provienen las abscisas, el error máximo estará proporcionalmente acotado por el máximo valor que toma la derivada (n+1)-ésima de f dentro de dicho intervalo.

*A4) Comparar el *número de operaciones* en el peor caso para el método de Newton con respecto al de Lagrange. (Restringirse al cálculo de los c_m solamente.)

Ejercicios adicionales/opcionales

E1) Para $L_i(x)$ el i-ésimo polinomio fundamental de Lagrange, hallar una expresión general de la derivada $L_i'(x)$.

E2) Calcular el polinomio interpolador de Hermite para interpolar $f(x) = e^x$ en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$. Determinar si coincide con el de Lagrange. Acotar el error para todo x, utilizando una fórmula adecuada para $e_n(x)$.

E3) Mostrar que si se toma como observaciones un conjunto de más de n+1 puntos (x_i, y_i) provenientes de la evaluación de un polinomio de grado n, y se aplica el método de diferencias divididas, entonces, considerando que las columnas se numeran desde 0 en adelante, la n-ésima columna de valores contendrá todos 0. Interpretar la analogía existente con la derivación sucesiva de polinomios.

Ejercicios tomados en parciales

P1) En este ejercicio se pide utilizar mínimas operaciones en los pasos o etapas en que tenga sentido y sea posible.

a) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (0,1) y (2,2).

b) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (0,1), (1,1) y (2,2).

c) Indicar algún punto P adicional, distinto de los tres anteriores, de modo que el polinomio de grado mínimo que pasa por los tres anteriores y a la vez por P tenga grado 2.

P2) En este ejercicio se pide utilizar mínimas operaciones en todos los ítems en que tenga sentido y sea posible.

a) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (1,2) y (4,8).

b) Calcular el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (1,2), (0,0) y (4,8).

c) Elegir dos puntos adicionales, distintos de los anteriores, de modo que el polinomio de grado mínimo que pasa por los cinco puntos (los tres anteriores y estos dos) tenga grado 2.

P3)

a) ¿Existen 5 puntos (x_i, y_i) distintos en el plano que cumplan simultáneamente las siguientes dos condiciones?

i) x^3 ï $y = 1$

ii) el método de Lagrange aplicado a esos 5 puntos da un polinomio de grado 4

b) Elegir un conjunto de puntos del plano tales que el polinomio interpolador que arroja el método de Newton para ese conjunto sea $P(x) = x^2 + 6$.

P4)

a) Calcular usando mínimas operaciones el polinomio de grado mínimo que pasa por los puntos (0,3), (1,3) y (2,3).

b) ¿Qué ocurre al intentar aplicar el método de Lagrange si queremos interpolar dos puntos con la misma abscisa (valor de x)? Mostrar el caso general o bien un ejemplo.

c) ¿Existen 6 puntos (x_i, y_i) distintos en el plano que cumplan simultáneamente las siguientes dos condiciones?

i) x^4 ï $y = 1$

ii) el método de Lagrange aplicado a esos 6 puntos da un polinomio de grado 5