Métodos Numéricos

Práctica 1. Métodos iterativos para hallar raíces de funciones no lineales.
(Puede utilizarse Matlab en algunos ejercicios.)

1 – Hallar una raíz para cada una de las siguientes funciones, usando el método de Newton, cuando éste pueda usarse.

$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = x^3+1$
$f(x) = x^3- x + 1$
$f(x) = e^{-x} – \text{sen } x$

2 – Usar el método de Newton para aproximar $\sqrt{10}$ con 5 decimales.

3 - Indicar cómo se puede usar el método de Newton para calcular la función $f(x) = \ln x$ para $x > 0$, usando otras operaciones: +. -, *, / y exponencial. Discutir una posible implementación práctica de esto.

4 – Para cada una de las siguientes funciones, indicar alrededor de qué raíces el método de Newton converge cuadráticamente.

$f(x) = x^n$ (con n>=1)
$f(x) = \ln x$
$f(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = \cos x$
$f(x) = 1/x$
$f(x) = \sin x / x$

5 – Elegir 2 o 3 de los puntos del ejercicio anterior y resolver usando también bisección, con 3 decimales. Comparar con Newton en cada caso.

6 – Dar ejemplos (gráfica o analíticamente) de funciones f para la cual el método de Newton:
a) no encuentre una raíz para determinado valor inicial, pero sí con otro valor inicial
b) encuentre una raíz para cualquier valor inicial
c) caiga en un ciclo para determinado valor inicial (oscile)
d) converja más “lentamente” a una raíz (no cuadráticamente)

7 – Para el método de bisección:
a) Mostrar ejemplos en los cuales la iteración permanece siempre del lado derecho de la raíz. (Análogamente podría pedirse para el lado izquierdo.)
b) ¿Es cierto que *si se converge*, siempre será hacia la raíz *más cercana* del punto inicial?

8 – Para el método de Newton
a) Mostrar ejemplos en los cuales la iteración permanece siempre del lado derecho de la raíz. (Análogamente podría permanecer siempre del lado izquierdo.)
b) ¿Es cierto que *si converge*, será hacia la raíz *más cercana* del punto inicial?

9 - ¿Hay alguna forma de hacer recuperarse el método de Newton para f si la derivada f’ se anula en algún punto?

10 – Sea a un número real. La siguiente secuencia, ¿converge? Y, en ese caso, ¿a qué valor?
$x_0 = a$
$x_{n+1} = x_n / 2 + 1/x_n$

11 –
a) ¿Qué ocurriría si se usa el método de Newton para resolver una ecuación *lineal* con una incógnita? Analizar todos los casos.
b) Misma pregunta, qué ocurriría, con el método de bisección.
c) ¿Y con el método secante?
d) ¿Y con el método de Broyden?

12 – El método de bisección tiene entre otros requerimientos que al comienzo se cuente con dos números reales *a* y *b* tales que *f(a)* y *f(b)* tengan distinto signo. Si bien eso puede ser costoso, mostrar un algoritmo aproximado que converja hallando tales *a* y *b* en caso en que existan. (Nota: si no hubiera tales valores, no se pide nada del algoritmo, que incluso podría colgarse.)

13 – a) Discutir un posible método de bisección para hallar raíces de funciones reales continuas pero de más de una variable (nota: el primero conocido de ellos fue el de Davidon-Fletcher-Powell).
b) Dar un método concreto y sencillo para aplicarse especialmente a la función
$f(x,y) = x^2 + y^2 – 2$.
c) Idem para $f(x,y) = x + y + \text{sen } x + \text{sen } y$

14 (opcional)
a) Para hallar alguna raíz de una función que admita además un algoritmo exacto, por ej. una función cuadrática, los métodos iterativos, ¿necesariamente convergen en forma exacta en finitos pasos?
b) ¿Se puede usar el método de bisección para funciones complejas? Discutir y/o dar un ejemplo cuando corresponda.
c) Misma pregunta para el método de Newton.

Práctica 2. Sistemas de ecuaciones lineales
(Puede utilizarse Matlab en algunos ejercicios.)

1 –
a) Hallar la inversa de la siguiente matriz de más de una forma posible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Resolver el siguiente sistema lineal siguiente de más de una manera (una usando lo anterior):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Resolver el sistema lineal siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 – Invertir las siguientes matrices de 2x2, usando algún método manual cualquiera, planteando ecuaciones o del modo que se desee (pero en cada caso asegurarse de que el producto de matrices A . A-1 = I es decir da la matriz identidad de 2x2):

1 2
0 3

1 0
0 1

1 0
0 -1

3 0
0 4

0 1
1 0

3 –
a) Exhibir un sistema lineal de 2 x 2, es decir, un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, que tenga una sola solución.
b) Exhibir un sistema lineal de 2 x 2 que tenga varias soluciones.
c) Exhibir un sistema lineal de 2 x 2 que no tenga ninguna solución.

4 –
a) Escribir un sistema lineal de 2 x 3 (es decir de 2 ecuaciones con 3 incógnitas) que tenga alguna solución.
b) Escribir un sistema lineal de 2 x 3 que no tenga solución.
c) Escribir un sistema lineal de 3 x 2 que tenga alguna solución.
d) Escribir un sistema lineal de 3 x 2 que no tenga solución.

5 –
a) Probar que si las matrices A y B son simétricas, entonces A+B es simétrica.
b) Probar que para toda matriz A, $A + A^t$ es simétrica.
c) Probar que para toda matriz A, $A - A^t$ es antisimétrica.
d) Probar que para toda matriz A, AA^t es simétrica.
e) Probar que si $A = A^{-1}$, entonces $(A^t)^2 = I$. Dar un ejemplo de matriz A de 2x2 que cumpla $A = A^{-1}$.

6 – Hallar los siguientes valores en función de $n \in N$ y de $a \in R$:
a) $\| a.I \|_2$
b) $\| A \|_2$ donde A es una matriz de nxn con valores todos a

7 – Usar el método de factorización LU para para resolver el sistema del ejercicio 1 c). Y de paso calcular A^{-1} para la matriz de ese sistema.

8 – ¿Cuáles de estas matrices son LU-factorizables? (No se pide hallar una LU-factorización, sino sólo contestar la pregunta en cada caso.)

I de 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9 –

a) Supongamos que A tiene unos en la diagonal, es triangular inferior y es LU-factorizable. ¿Cómo resultarán son L y U en función de los elementos de A?

b) Supongamos que A tiene unos en la diagonal, es triangular superior y es LU-factorizable. ¿Cómo resultarán L y U en función de los elementos de A?

c) Supongamos que A es diagonal y ningún valor de la diagonal es 0. ¿Es LU-factorizable? En ese caso, ¿cómo resultarán L y U en función de los elementos de A?

10 – Calcular las dos primeras iteraciones del método de Jacobi correspondientes al sistema siguiente, comenzando con el vector $x^{(0)} = (0,0,0)^t$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

11 – Si A no es cuadrada, ¿en dónde fallan o no están definidos los sistemas iterativos a la Richardson para resolver sistemas lineales con A?

12 – Para las siguientes matrices, indicar si son de diagonal dominante. En caso en que no lo sean, indicar cómo permutar sus filas como para que resulten de diagonal dominante.

0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 1
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0
1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0

1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0

0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 1
1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
1 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0
0 , 0 , 1 , 0 , 1 , 0

0 , 0 , 1 , 1 , 0 , 0
1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1
1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0
1 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0

0 , 0 , 0 , 0 , 0 , -1 , 0
1 , 0 , 0 , 0 , -1 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , -1 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , -1 , 0 , -1 , 0 , 0 , 0
1 , -2 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0

0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1
0 , -1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 2 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , -2 , -1 , 0
0 , 0 , 0 , -1 , -1 , 0 , 0
-1 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 2 , -2 , 0

0 , 1 , 0 , 1 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1
0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 0 , 0
0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 0
1 , 0 , 2 , 0 , 0 , 0 , 0
0 , 1 , 0 , 0 , 0 , 0 , 1

13 – Si para la matriz A = (a_{ij}) de nxn vale que

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = ½$$

¿converge la sucesión de matrices A^k para k $\rightarrow \infty$?

14 –

a) Probar que si A es inversible entonces || I || $\leq$ $\rho(A)$.
Como consecuencia, si || I || > 1 entonces (de algún modo) A es una matriz mal condicionada.
b) Probar que si A y B son inversibles entonces cond (AB) $\leq$ cond (A) cond (B).
c) Probar que si A es inversible entonces $\rho(A)\, \rho(A^{-1}) \leq$ cond (A).