Examen 2. Álgebra lineal 2CV5

Responder 4 ejercicios.

1- Sean $S = \{(-1, 2, 1), (0, 1, 1), (-2, 2, 1)\}$ y $\mathcal{T} = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ dos conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Verificar que S es una base de $\mathbb{R}^3$ usando la definición de base de un espacio vectorial.

b) Encontrar la matriz cambio de base de $\mathcal{T}$ a S, puede calcular la matriz directamente o bien calculando $Q_{\mathcal{T}\to\mathcal{C}}$ y de $Q_{\mathcal{C}\to S}$.

c) Si $(\mathtt{v})_S = (1, 0, -2)_S$ calcular las coordenadas del vector con respecto a $\mathcal{T}$.

2- Sea W el conjunto de vectores que son ortogonales a $\mathtt{w} = (-1, 2, 1)$.

a) Explicar por que el conjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones.

b) Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

c) Calcular una base para W y su dimensión.

3- Construir una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir del siguiente conjunto de vectores $\mathcal{A} = \{\mathtt{v}_1 = (1, -1, 1), \mathtt{v}_2 = (-2, 3, 1), \mathtt{v}_3 = (-3, 5, 1), \mathtt{v}_4 = (1, 2, -4)\}$.

4- Para qué valores de k, los siguientes vectores $A = \{(1, 2, 3), (3, k, k+3), (2, 4, k)\}$.

i) son linealmente independientes,

ii) generan una recta.

iii) un plano.

5- Considere el subespacio W de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\mathcal{A} = \{\mathtt{v}_1 = (0, 1, -3, 2),\ \mathtt{v}_2 = (1, -1, 0, 1),\ \mathtt{v}_3 = (3, 0, 1, -1)$ y $\mathtt{v}_4 = (3, 0, 1, -1, 13)\}$.

i) ¿Es $\mathcal{A}$ una base de $\mathbb{R}^4$?

ii) Extraer una base de W y su dimensión.

iii) Obtener la ecuación o sistema de ecuaciones que describan al subespacio W.

6- Sea $V = M^{2,2}(R)$ y

$$W_1 = \left\{ A \in M^{2,2}(\mathbb{R}) : \ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}, \quad W_2 = \left\{ A \in M^{2,2}(\mathbb{R}) : \ A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & c \end{pmatrix} \right\}$$

Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V y encontrar las dimensiones de W_1, W_2 y $W1 \cap W2$.