Tarea 5

Álgebra Lineal

Transformaciones Lineales

1 Verifica que la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ cumple la definición de una transformación lineal.

2 Explique por qué las siguientes aseveraciones son falsas o verdaderas para cualquier $A \in \mathcal{L}(V;W)$, en caso de ser falsas, dar un contraejemplo.

a) Para cualquier $A \in \mathcal{L}(V;W)$ se cumple que $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

b) Si $\mathbf{v} \in V$ tal que $A\mathbf{v} = 0$ entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

c) Si $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ entonces $A\mathbf{w} = A\mathbf{v} + A\mathbf{u}$.

d) Si $\mathbf{v}$ es combinación lineal de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_n$ entonces $A\mathbf{v}$ es combinación lineal de $A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots A\mathbf{u}_n$.

e) Si combinación lineal de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son colineales entonces $A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w}$ también son colineales. (Los vectores son colineales si estan en una misma recta).

3 Dados los vectores $\mathbf{u}_1 = (2,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-4)$, $\mathbf{v}_1 = (1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,3)$ y $\mathbf{v}_2 = (-5,-6)$. Justifique si existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3$.

4 Determine la matriz del operador $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de modo que transforme los vectores $\mathbf{u} = (1,2)$ y $\mathbf{v} = (3,4)$, a $A\mathbf{u} = (1,1)$ y $A\mathbf{v} = (2,2)$.

5 Dada la expresión general de una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = ax + by + cz$. Determinar la transformación lineal que asocie los vectores $\mathbf{u} = (1,2,3)$ con 1, $\mathbf{v} = (-1,2,3)$ con 0 y $\mathbf{u} = (1,-2,3)$ con 0.

6 Suponga que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se expresan en las bases canónicas. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz de la transformación A.

7 Determinar la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,1) = (1,0,0)$, $T(0,1,1) = (0,1,0)$, $T(0,0,1) = (1,1,1)$.

8 Determinar la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(0,1,1) = (1,2,3)$, $T(1,0,1) = (1,-1,2)$ y $T(1,1,0) = (-1,-1,-1)$.

9 ¿Cuál de las transformaciones definidas a continuación son lineales? En caso de que no sean lineales, dar un contraejemplo a una de las propiedades de las transformaciones lineales

- Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x,y,z) = (3x, a, 5z)$ con $a \in \mathbb{R}$, un número fijo.
- Sea $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $A(x,y,z,w) = (x-w, y-w, x+z)$
- Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x,y,z) = (x-y, 2^y, z)$

10 Sean $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ las bases canónicas de V y W. Calcular la matriz asociada a la transformación lineal

a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1 + 4x_2, x_1)$.

b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 + x_3)$.

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

11 Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + z = 0\}$. Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(U) = W$. (*sugerencia: encontrar bases de cada subespacio*).

Operaciones con transformaciones lineales

Suponga que T, $S : V \to W$ se definen a continuación.

1 - Para $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^2$. Encontrar TS y la representación matricial de la transformación resultante

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

2- Para $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^2$. Encontrar TS y la representación matricial de la transformación resultante

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 3y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

3- Para $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^3$. Encontrar TS y la representación matricial de la transformación resultante

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

4- Para $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^2$. Encontrar TS y la representación matricial de la transformación resultante

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

5- Considere a los operadores lineales $R, S, P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Con R la transformación que rota 30^o a un vector, S la reflexión en torno a la recta $y = 2x$ y P la proyección ortogonal sobre la misma recta.

i) Explicar por que $PS = SP = P$.

ii) Verificar que $RSR = S$.

iii) Determinar todos los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ con $PR\mathbf{x} = 0$.

6- Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido como $A(x, y, z) = (ax + by + cz, 0)$. Mostrar que $A^3 = A \cdot A \cdot A = 0$. Esta es otra diferencia del espacio vectorial $\mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ y los números reales.

7- Sea $A, B, C, D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dados por

- $A(x, y) = (x + y, 0)$
- $B(x, y) = (-y, x)$

obtener las expresiones de los operadores $A+B$, AB, BA, A^2, B^2

8 En el espacio vectorial $\mathcal{P}$ de polinomios de grado $\leq n$, sean $D, A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, con $Dp(x) = p'(x)$ y $A(x) = xp(x)$. Determinar $DA - AD$.

9 Sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial de dimensión n, Para todo $k = 2, 3, \ldots, n$ encontrar un operador lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $A^k = 0$ pero $A^j \neq 0$.

10 Sea V el espacio de plinomios con grado menor o igual a 2. Considere las transformaciones lineales

- $T : \mathbb{R}^3 \to V$, $T(a, b, c) = a + 2bx + 2cx^2$.
- $S : V \to \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$, $S(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-c & b \end{pmatrix}$

Con respecto a $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ de V, la base canónica en $\mathbb{R}^3$ y la base canónica $\mathcal{B}_3 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

- Probar que T y S son mapeos lineales.
- Encontrar las matrices de las transformaciones lineales T y S con respecto a las bases.
- Encontrar la matriz de composición ST con respecto a las bases,
- Calcular explicitamente ST.

Transformaciones y cambios de base

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x - 2y,\ 3x + y)$ y sea $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 3)\}$ y $\Gamma = \{(-1, 2),\ (-1, 0)\}$.

- Calcular la matriz asociada a T, $[T]_{\mathcal{B}}^{\Gamma}$.
- Calcular los vectores $[u]_{\mathcal{B}}$ y $[Tu]_{\Gamma}$ con $u = (1, 1)$.
- Verificar que $[T]_{\mathcal{B}}^{\Gamma}[u]_{\mathcal{B}} = [Tu]_{\Gamma}$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 3)\}$ y $\Gamma = \{(0, -2),\ (-5, 1)\}$

- Calcular la matriz cambio de base $Q_{\mathcal{B}->\Gamma}$
- Calcular la matriz asociada a T, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
- Calcular la matriz asociada a T, $[T]_{\Gamma}^{\Gamma}$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sea $T\mathtt{v} = A\mathtt{v}$ y sean $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\Gamma = \{(1, 1),\ (1, -1)\}$

- Calcular $[T_A]_{\mathcal{B}}$
- Calcular la matriz $Q_{\mathcal{B}\to\Gamma}$
- Calcular $[T_A]_{-}$

4. Considere las 2 bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $\Gamma = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 1, 2), u_3 = (1, 2, 2)\}$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Encontrar la matriz cambio de base $Q_{B\to\Gamma}$
- $[T]_B$
- $[T]_\Gamma$

5. Considere el operador $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $G(x,y)=(2x-7y,\ 4x+3y)$ y $S=\{(1,3),\ (2,5)\}$

- Calcular la matriz cambio de base
- Usando $Q_{C->S}$ encontrar $[G]_S$
- Comprobar que $[G\mathtt{v}]_S=[G]_S[\mathtt{v}]_S$

Transformaciones invertibles

1 Sea T el operador en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1\\x_1-x_2\\2x_1+x_2+x_3\end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Obtener la representación matricial de T en la base canónica $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$.

b) Demostrar que T es invertible y encontrar una expresión para T^{-1}.

c) Verificar que

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}}=\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{-1} \tag{2}$$

2 Sea V y W espacios vectoriales de dimensión finita y $T:\to W$ un isomorfismo. Si $\mathcal{B}_V$ es una base para V probar que $\{T(\mathbf{v})\}_{\mathbf{v}\in\mathcal{B}_V}$ es una base para W.

3 Sea $B\in\mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ con B invertible. Definir $\varphi_B:\mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ como $\varphi_B(A)=B^{-1}AB$. Probar que φ_B es un isomorfismo.

4 Sea W el conjunto de todas las matrices 2×2 hermitianas. Sea $\phi:\mathbb{R}^4\to W$ dada por

$$\phi(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}t+x & y+iz\\ y-iz & t-x\end{pmatrix} \tag{3}$$

Probar que ϕ es un isomorfismo.

5 Mostrar que cada uno de los siguientes operadores es inverible y encontrar a la inversa.

- $T(x,y,z)=(x-3y-2z,y-4z,z)$
- $S(x,y,z)=(x+z,x-z,y)$

6 Mostrar que si $T:V\to V$ es un operador lineal tal que $T^2-T+I_V=\mathbf{0}_V$

7 Mostrar que si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es un operador lineal dado por

$$f(x,y,z)=(x+y+z,2x-y-z,x+2y-z)$$

es una biyección y por tanto es invertible.

8 Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x,y,z)=\begin{pmatrix}x+y\\x+2y\end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica.

b) Calcular la base del kernel de T. ¿Es inyectiva?

c) Mostrar que por b) entonces T es biyectiva y calcular $T^{-1}(x, y, z)$.

d) Resolver la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y - 4z \\ z \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica.

b) Calcular la base del kernel de T. ¿Es inyectiva?

c) Mostrar que por b) entonces T es biyectiva y calcular $T^{-1}(x, y, z)$.

d) Resolver la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) ¿Existe algún valor de $\mathbf{b}$ para el cual $T(x, y, z) = \mathbf{b}$ no tenga solución?

f) ¿Existe algún vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ no tenga solución?

10 Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$$T(p(t)) = p'(t) - 2p()t$$

a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica $\{p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = t^2\}$

b) Calcular la base del kernel de T. ¿Es inyectiva?

c) Mostrar que por b) entonces T es biyectiva y calcular la matriz asociada a T^{-1} en la misma base. Obtener una expresión para $T^{-1}(q(t))$

d) Resolver la ecuación diferencial

$$p'(t) - 2p(t) = 1 + t + t^2$$

Espacios de una transformación lineal

1 Para las siguientes transformaciones lineales encuentra la representación matricial, encuentra una base para el espacio nulo de T y una base para el rango. Encuentra el rango y la nulidad de T.

a) Para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + 3z \\ 2x - 3y + 3z \end{pmatrix} \tag{4}$$

b) Para $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ definida como

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_4\\x_2-x_3\\x_1+x_2-x_3-x_4\end{pmatrix} \tag{5}$$

2 Sea $T:\mathcal{P}^3(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal dada por: $T(1+x)=\mathbf{e}_1$, $T(2x^2+x+1)=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$, $T(x^3+x)=\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_1$, $T(x+x^2-x^3)=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$.

Determina $T(a+bx+cx^2+dx^3)$. $\ker T$, nulidad de T y el rango de T.

3 Sea $V=\{f:(-1,1)\to\mathbb{R}\mid f$ es derivable , $f\in\mathcal{P}^n\}$. Sea $T:V\to V$ dada por $T(f)(x)=xf'(x)$ para todo $x\in(-1,1)$. a) Demostrar que es una transformación lineal. b) Encontrar una representación lineal en la base canónica. c) Encontrar una base para $\ker T$ e $\mathrm{Im}T$. d) Calcular la nulidad y el rango de T.

4 En el espacio vectorial de funciones continuas, sea $W=\mathcal{G}(\sin,\cos)$. Determinar la nulidad de $\varphi:W\to\mathbb{R}$ dado por

a) $\varphi(f)=\int_0^\pi f(s)ds$

b) $\varphi(f)=f'(0)$

5 En el espacio vectorial de funciones continuas, sea $W=\mathcal{G}(e^x,e^{-x},x)$ sea $T:W\to W$ dado por

$$T(f)=f''(x)-x$$

Determinar el rango y nulidad de T

6- Considerando a la base canónica en $\mathbb{R}^3$ describir al espacio nulo para la transformación y a la imagen.

- $T(x,y,z)=(x-2y+z,2x-3y+z,x+y-2z)$

7- Considerando a la base canónica en $\mathbb{R}^4$ describir al espacio nulo para la transformación y a la imagen. $S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, definida por

$$S\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3+x_4\\2x_1+x_2-x_3+x_4\\x_1-x_2+x_3-x_4\end{pmatrix}$$

8 Sea V el espacio de polinomios con coeficientes reales cuyo grado es menor o igual a 3. Y sea $T:V\to\mathbb{R}^4$ definido como

$$T(p)=(p(0),p(1),p(-1),p(2)) \tag{6}$$

a) ¿Es T una transformación inyectiva? (puede considerar al espacio nulo de T).
b) Calcular la imagen de T.

9 Sea $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal tal que

$$f(1,0,0)=2x+x^3;\qquad f(0,1,0)=-2x+x^2;\qquad f(0,0,1)=x^2+x^3$$

Determinar

a) $S(x,y,z)$ para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

b) Dejando fija a la base canónica, $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^3$ y la base canónica en $\mathbb{R}_3[x]=1,t,t^2,t^3$ determinar la matriz asociada a la transformación lineal S.

c) $Im(S)$ y una base del subespacio.

d) $Ker(S)$ y una base del subespacio.

10 Determinar $Im(f)$, $Ker(f)$ y encontrar una base para $Ker(f)$. Calcular la nulidad y el rango de f.

a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z)$.

b) Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z, 4x + 2y7z)$. Adicionalmente, deducir una base para $Im(h)$.

c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 2y + z)$. Determinar $Ker(f)$. Explicar por que f es un isomorfismo.

d) Sea $D : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ definida por
$$Dp(x) = p'(x) - p(1) \tag{7}$$

e) Sea $I : \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}^4(\mathbb{R})$
$$Ip(x) = \int_0^x p(t)dt \tag{8}$$

11 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica.

b) Calcular la base del kernel de T. ¿Es inyectiva?

c) Calcular una base para la imagen de T ¿ Es suprayectiva?

d) Resolver la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) ¿Existe algún vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ no tenga solución?

12 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que en la base $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 0, 0)$ tiene como matriz a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la base del kernel de T. ¿Es inyectiva?.

b) Calcular una base para la imagen de T ¿ Es suprayectiva?

c) Mostrar que la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ no tiene soluciones

d) ¿Existe algún vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tal que la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ no tenga solución?

Valores y vectores propios

1 Determinar el polinomio característico de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2 Encontrar los valores propios y vectores propios de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 2 & -6 & 16 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Considere a $K = \mathbb{C}$. Encontrar los valores propios y vectores propios de $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

4 Encontrar los valores propios y vectores propios de

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

6. Determinar si $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

7. Explicar por que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

8. Explicar por que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

   a) Explicar por que $\lambda = 2$ es un valor propio y encontrar la base del correspondiente espacio propio.

   b) Si se sabe que $\lambda = 2, -3$ son valores propios de la matriz ¿Cuál es su polinomio característico?

   c) ¿Por que es fácil ver que A es diagonalizable?

   d) Verificar que $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio del valor propio $\lambda = -3$.

   e) Encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el polinomio característico de A.

b) Explicar por que A es diagonalizable.

c) Obtener la diagonalización de A y la base en la cual $[A]_{\mathcal{B}'}$ es igual a $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el polinomio característico de A.

b) Determinar los valores propios y vectores propios.

c) Determinar si la matriz es diagonalizable.

12. Determinar si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

13. Para las siguientes matrices, calcular su polinomio característico de A. Explicar si es diagonalizable, si lo es, encontrar su diagonalización y la base con respecto a la cual A es una matriz diagonal.

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

14. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios con grado ≤ 2, sea $T : V \to V$ la transformación dada por

$$Tp(x) = x^2 \frac{d^2p}{dx^2} + x\frac{dp}{dx}$$

Calcular los valores y vectores propios de T.

Formas cuadráticas

1 Comprobar que $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2 Hallar un cambio de base para que el término xy desaparezca en las siguientes curvas

a) $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$

b) $x^2 - 8xy - 5y^2 = 16$

c) $x^2 + xy + y^2 = 6$

d) $4x^2 + 10xy + 4y^2 = 9$