

Tarea 5

Álgebra Lineal

Transformaciones Lineales

1 Verifica que la transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ cumple la definición de una transformación lineal.

2 Explique por qué las siguientes aseveraciones son falsas o verdaderas para cualquier $A \in \mathcal{L}(V; W)$, en caso de ser falsas, dar un contraejemplo.

- a) Para cualquier $A \in \mathcal{L}(V; W)$ se cumple que $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- b) Si $\mathbf{v} \in V$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- c) Si $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ entonces $A\mathbf{w} = A\mathbf{v} + A\mathbf{u}$.
- d) Si \mathbf{v} es combinación lineal de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ entonces $A\mathbf{v}$ es combinación lineal de $A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_n$.
- e) Si combinación lineal de $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son colineales entonces $A\mathbf{u}, A\mathbf{v}, A\mathbf{w}$ también son colineales. (Los vectores son colineales si están en una misma recta).

3 Dados los vectores $\mathbf{u}_1 = (2, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, -4)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3)$ y $\mathbf{v}_3 = (-5, -6)$. Justifique si existe una transformación lineal $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3$.

4 Determine la matriz del operador $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que transforme los vectores $\mathbf{u} = (1, 2)$ y $\mathbf{v} = (3, 4)$, a $A\mathbf{u} = (1, 1)$ y $A\mathbf{v} = (2, 2)$.

5 Dada la expresión general de una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ax + by + cz$. Determinar la transformación lineal que asocie los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ con 1, $\mathbf{v} = (-1, 2, 3)$ con 0 y $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ con 0.

6 Suponga que \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 se expresan en las bases canónicas. $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz de la transformación A .

7 Determinar la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 1) = (0, 1, 0)$, $T(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.

8 Determinar la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(0, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $T(1, 0, 1) = (1, -1, 2)$ y $T(1, 1, 0) = (-1, -1, -1)$.

9 ¿Cuál de las transformaciones definidas a continuación son lineales? En caso de que no sean lineales, dar un contraejemplo a una de las propiedades de las transformaciones lineales

- Sea $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (3x, a, 5z)$ con $a \in \mathbb{R}$, un número fijo.
- Sea $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z, w) = (x - w, y - w, x + z)$
- Sea $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (x - y, 2^y, z)$

10 Sean \mathcal{B}_V y \mathcal{B}_W las bases canónicas de V y W . Calcular la matriz asociada a la transformación lineal

- a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1 + 4x_2, x_1)$.
- b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 + x_3)$.
- c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

11 Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$. Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(U) = W$. (*sugerencia: encontrar bases de cada subespacio*).

Transformaciones y cambios de base

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x - 2y, 3x + y)$ y sea $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 3)\}$ y $\Gamma = \{(-1, 2), (-1, 0)\}$.
 - Calcular la matriz asociada a T , $[T]_{\mathcal{B}}^{\Gamma}$.
 - Calcular los vectores $[u]_{\mathcal{B}}$ y $[Tu]_{\Gamma}$ con $u = (1, 1)$.
 - Verificar que $[T]_{\mathcal{B}}^{\Gamma}[u]_{\mathcal{B}} = [Tu]_{\Gamma}$.
- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 3)\}$ y $\Gamma = \{(0, -2), (-5, 1)\}$
 - Calcular la matriz cambio de base $Q_{\mathcal{B} \rightarrow \Gamma}$.
 - Calcular la matriz asociada a T , $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
 - Calcular la matriz asociada a T , $[T]_{\Gamma}^{\Gamma}$.
- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sea $T\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ y sean $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\Gamma = \{(1, 1), (1, -1)\}$
 - Calcular $[T_A]_{\mathcal{B}}$.
 - Calcular la matriz $Q_{\mathcal{B} \rightarrow \Gamma}$.
 - Calcular $[T_A]_{-}$.
- Considere las 2 bases de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $\Gamma = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 1, 2), u_3 = (1, 2, 2)\}$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
 - Encontrar la matriz cambio de base $Q_{\mathcal{B} \rightarrow \Gamma}$.
 - $[T]_{\mathcal{B}}$.
 - $[T]_{\Gamma}$.
- Considere el operador $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x, y) = (2x - 7y, 4x + 3y)$ y $S = \{(1, 3), (2, 5)\}$
 - Calcular la matriz cambio de base.
 - Usando $Q_{C \rightarrow S}$ encontrar $[G]_S$.
 - Comprobar que $[G\mathbf{v}]_S = [G]_S[\mathbf{v}]_S$.

8 Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica.
- b) Calcular la base del kernel de T .
- c) Resolver la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9 Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 2y - 4z \\ z \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica, $[T]_C$
- b) Calcular la base del kernel de T .
- c) Resolver la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

10 Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$$T(p(t)) = p'(t) - 2p(t)$$

- a) Calcular la matriz $[T]_C$ que representa T en la base canónica $\{p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = t^2\}$
- b) Calcular la base del kernel de T .

11 Sea V el espacio de plinomios con grado menor o igual a 2. Considere las transformaciones lineales

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$, $T(a, b, c) = a + 2bx + 2cx^2$.
- $S : V \rightarrow \mathcal{M}^2(\mathbb{R})$, $S(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a & a + b \\ a - c & b \end{pmatrix}$

Con respecto a $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ de V , la base canónica en \mathbb{R}^3 y la base canónica $\mathcal{B}_3 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

- Probar que T y S son mapeos lineales.
- Encontrar las matrices de las transformaciones lineales T y S con respecto a las bases.

Espacios de una transformación lineal

1 Para las siguientes transformaciones lineales encuentra la representación matricial, encuentra una base para el espacio nulo de T y una base para el rango. Encuentra el rango y la nulidad de T .

- a) Para $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ y + 3z \\ 2x - 3y + 3z \end{pmatrix} \quad (1)$$

b) Para $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

2 Sea $T : \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal dada por: $T(1+x) = \mathbf{e}_1$, $T(2x^2+x+1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $T(x^3+x) = \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_1$, $T(x+x^2-x^3) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Determina $T(a+bx+cx^2+dx^3)$. $\ker T$, nulidad de T y el rango de T .

3 Sea $V = \{f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable}, f \in \mathcal{P}^n\}$. Sea $T : V \rightarrow V$ dada por $T(f)(x) = xf'(x)$ para todo $x \in (-1, 1)$. a) Demostrar que es una transformación lineal. b) Encontrar una representación lineal en la base canónica. c) Encontrar una base para $\ker T$ e $\text{Im} T$. d) Calcular la nulidad y el rango de T .

4 En el espacio vectorial de funciones continuas, sea $W = \mathcal{G}(\sin, \cos)$. Determinar la nulidad de $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

a) $\varphi(f) = \int_0^\pi f(s) ds$

b) $\varphi(f) = f'(0)$

5 En el espacio vectorial de funciones continuas, sea $W = \mathcal{G}(e^x, e^{-x}, x)$ sea $T : W \rightarrow W$ dado por

$$T(f) = f''(x) - x$$

Determinar el rango y nulidad de T

6- Considerando a la base canónica en \mathbb{R}^3 describir al espacio nulo para la transformación y a la imagen.

- $T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - 3y + z, x + y - 2z)$

7- Considerando a la base canónica en \mathbb{R}^4 describir al espacio nulo para la transformación y a la imagen. $S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

8 Sea V el espacio de polinomios con coeficientes reales cuyo grado es menor o igual a 3. Y sea $T : V \rightarrow \mathbb{R}^4$ definido como

$$T(p) = (p(0), p(1), p(-1), p(2)) \quad (3)$$

a) ¿Es T una transformación inyectiva? (puede considerar al espacio nulo de T).

b) Calcular la imagen de T .

9 Sea $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la transformación lineal tal que

$$f(1, 0, 0) = 2x + x^3; \quad f(0, 1, 0) = -2x + x^2; \quad f(0, 0, 1) = x^2 + x^3$$

Determinar

a) $S(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

b) Dejando fija a la base canónica, \mathcal{B} en \mathbb{R}^3 y la base canónica en $\mathbb{R}_3[x] = 1, t, t^2, t^3$ determinar la matriz asociada a la transformación lineal S .

- c) $Im(S)$ y una base del subespacio.
- d) $Ker(S)$ y una base del subespacio.

10 Determinar $Im(f)$, $Ker(f)$ y encontrar una base para $Ker(f)$. Calcular la nulidad y el rango de f .

- a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z)$.
- b) Sea $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x - z, 4x + 2y + 7z)$. Adicionalmente, deducir una base para $Im(h)$.
- c) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 2y + z)$. Determinar $Ker(f)$.
- d) Sea $D : \mathcal{P}^3 \rightarrow \mathcal{P}^3$ definida por

$$Dp(x) = p'(x) - p(1) \quad (4)$$

- e) Sea $I : \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}^4(\mathbb{R})$

$$Ip(x) = \int_0^x p(t) dt \quad (5)$$

11 Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la matriz que representa T en la base canónica.
- b) Calcular la base del kernel de T .
- c) Calcular una base para la imagen de T .
- d) Resolver la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- e) ¿Existe algún vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ no tenga solución?

12 Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que en la base $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 0, 0)$ tiene como matriz a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular la base del kernel de T .
- b) Calcular una base para la imagen de T
- c) Mostrar que la ecuación $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ no tiene soluciones

Valores y vectores propios

1 Determinar el polinomio característico de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2 Encontrar los valores propios y vectores propios de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 2 & -6 & 16 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Considere a $K = \mathbb{C}$. Encontrar los valores propios y vectores propios de $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

4 Encontrar los valores propios y vectores propios de

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

6. Determinar si $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

7. Explicar por que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

8. Explicar por que la matriz $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Explicar por que $\lambda = 2$ es un valor propio y encontrar la base del correspondiente espacio propio.

b) Si se sabe que $\lambda = 2, -3$ son valores propios de la matriz ¿Cuál es su polinomio característico?

c) ¿Por que es fácil ver que A es diagonalizable?

d) Verificar que $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio del valor propio $\lambda = -3$.

e) Encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el polinomio característico de A .

b) Explicar por que A es diagonalizable.

c) Obtener la diagonalización de A y la base en la cual $[A]_{B'}$ es igual a $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el polinomio característico de A .

b) Determinar los valores propios y vectores propios.

c) Determinar si la matriz es diagonalizable.

12. Determinar si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

13. Para las siguientes matrices, calcular su polinomio característico de A . Explicar si es diagonalizable, si lo es, encontrar su diagonalización y la base con respecto a la cual A es una matriz diagonal.

$$\begin{array}{ll} 1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -5 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} & 3) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ 2) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 4) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

14. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios con grado ≤ 2 , sea $T : V \rightarrow V$ la transformación dada por

$$Tp(x) = x^2 \frac{d^2 p}{dx^2} + x \frac{dp}{dx}$$

- Calcular los valores y vectores propios de T .
- Indicar si la transformación es diagonalizable.