Sistemas de ecuaciones I

Jose Rodriguez Villarreal

Objetivo

Entender que es un sistema de ecuaciones lineales y como obtener resolución, para sistemas de 2×2 y 3×3.

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales 3×3 es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = & \; b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = & \; b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = & \; b_3 \end{aligned}$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2$ y $j = 1, 2$.

Una ecuación del tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ se dice que es una ecuación lineal. En las incógnitas x_1, x_2, se consideran que $a_{11}, a_{12}, a_{13}, b_1$ son constantes conocidas.

Una solución de una ecuación lineal es una lista de números $ (s_1,s_2,s_3) $ tales que la ecuación se satisface cuando se hace la sustitución $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$. El conjunto de todas las soluciones de la ecuación es su **conjunto solución**.

Sistemas de ecuaciones II

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2, x_3 se conoce como **sistema de ecuaciones lineales**. Una **solución** es un conjunto de números s_1, s_2, s_3 tal que al sustituir $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$ y $x_3 = s_3$ se obtiene la igualdad de manera *simultánea*.

Ejemplo Considere el sistema de ecuaciones 2×2.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones II

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2, x_3 se conoce como **sistema de ecuaciones lineales**. Una **solución** es un conjunto de números s_1, s_2, s_3 tal que al sustituir $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$ y $x_3 = s_3$ se obtiene la igualdad de manera *simultánea*.

Ejemplo Considere el sistema de ecuaciones 2×2.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= \quad -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= \quad -4 \end{aligned}$$

tiene la solución $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, puesto que estos valores cumplen las dos ecuaciones. Sin embargo, $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 1$ no es una solución, ya que estos valores sólo satisfacen la primera de las dos ecuaciones del sistema.

Sistemas de ecuaciones III

Un sistema de ecuaciones puede no tener una solución. Ver https://www.geogebra.org/m/e7hzJEGf.

Ejercicio

- ¿Que tipo de ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ no tenga solución?
- ¿Que ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ tenga más de una solución?

Sistemas de ecuaciones III

Un sistema de ecuaciones puede no tener una solución. Ver https://www.geogebra.org/m/e7hzJEGf.

Ejercicio

- ¿Que tipo de ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ no tenga solución?
- ¿Que ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ tenga más de una solución?

El sistema no tiene una solución sí:

Sistemas de ecuaciones III

Un sistema de ecuaciones puede no tener una solución. Ver https://www.geogebra.org/m/e7hzJEGf.

Ejercicio

- ¿Que tipo de ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ no tenga solución?
- ¿Que ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ tenga más de una solución?

El sistema no tiene una solución sí:

- **las rectas son paralelas**

Sistemas de ecuaciones III

Un sistema de ecuaciones puede no tener una solución. Ver https://www.geogebra.org/m/e7hzJEGf.

Ejercicio

- ¿Que tipo de ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ no tenga solución?
- ¿Que ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ tenga más de una solución?

El sistema no tiene una solución sí:

- **las rectas son paralelas**

El sistema tiene más de una solución si:

Sistemas de ecuaciones III

Un sistema de ecuaciones puede no tener una solución. Ver https://www.geogebra.org/m/e7hzJEGf.

Ejercicio

- ¿Que tipo de ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ no tenga solución?
- ¿Que ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ tenga más de una solución?

El sistema no tiene una solución sí:

- **las rectas son paralelas**

El sistema tiene más de una solución si:

- **las ecuaciones representan al mismo conjunto o a la misma recta**.

Sistemas de ecuaciones III

Un sistema de ecuaciones puede no tener una solución. Ver https://www.geogebra.org/m/e7hzJEGf.

Ejercicio

- ¿Que tipo de ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ no tenga solución?
- ¿Que ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ tenga más de una solución?

El sistema no tiene una solución sí:

- **las rectas son paralelas**

El sistema tiene más de una solución si:

- **las ecuaciones representan al mismo conjunto o a la misma recta**.

El sistema tiene una solución sí

Sistemas de ecuaciones III

Un sistema de ecuaciones puede no tener una solución. Ver https://www.geogebra.org/m/e7hzJEGf.

Ejercicio

- ¿Que tipo de ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ no tenga solución?
- ¿Que ecuación lineal hace que el sistema formado por dicha ecuación y $x + 3y = 7$ tenga más de una solución?

El sistema no tiene una solución sí:

- **las rectas son paralelas**

El sistema tiene más de una solución si:

- **las ecuaciones representan al mismo conjunto o a la misma recta**.

El sistema tiene una solución sí - **las ecuaciones representan rectas distintas y no paralelas**

Ejemplo

Por inspección del sistema de ecuaciones lineales determinar si existe una solución única, no existe solución o tiene una infinidad de soluciones

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Métodos de solución de sistemas 2×2

De matemáticas elementales se conocen los siguientes métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales

- Método gráfico
- Sustitución
- Igualación
- Eliminación

Ejemplo

Resolver usando el método de eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 &= 1 \\ -2x_1 + \tfrac{4}{3}x_2 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 17 \\ 4x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones de 3×3

Las definiciones que hemos realizado en los sistemas de ecuaciones de 2×2 aplican directamente. Ahora, buscamos una terna de números que cumplan con la ecuación de manera *simultánea*.

- El método gráfico puede servir pero no siempre es la mejor alternativa.
- Los métodos conocidos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 suelen ser más laboriosos
- Usando la fórma de punto-pendiente
- Método gráfico
- Solucionando el sistema de ecuaciones lineales directamente

Ejemplo

Resolver el sistema

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 9 \\
-x_1 & +3x_2 & & = -4 \\
2x_1 & -5x_2 & +5x_3 & = 17
\end{array}
$$