Apunte Factorizacion LU

Jose Rodriguez Villarreal

Factorización LU

La factorización LU permitirá dividir la solución de cualquier sistema de ecuaciones $Ax = b$ en dos etapas, siempre que A sea invertible.

Si resolvemos el sistema de ecuaciones por medio de eliminación gaussiana, pero sin *intercambio de renglones*. Como sabemos, el método de eliminación gaussiana reduce la matriz A a una matriz triangular en $n-1$ pasos.

En el primer paso ciertos múltiplos del primer renglón son sumados (algebraicamente hablando) a las otras filas para obtener 0s en las entradas $(2,1)$, $(3,1)$, $\ldots$, $(n,1)$. Para que sea esto posible, se debe tener $a_{11} \neq 0$. En el primer paso, el multiplicador apropiado es

$$m_{i1} = a_{i1}/a_{11} \quad i = 2,3,\ldots,n \tag{1}$$

Por tanto, al final de este paso, obtenemos una nueva matriz $A^{(1)}$, con

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - m_{i1}a_{1j} \qquad j = 2,3,\ldots,n \quad i = 2,\ldots,n \\ b_i^{(1)} &= b_i - m_{i1}b_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad i = 2,\ldots,n \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo que obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & | & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n-1,2}^{(1)} & a_{n-1,3}^{(1)} & \cdots & a_{n-1,n}^{(1)} & | & b_{n-1}^{(1)} \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

En una implementación computacional, no es necesario guardar a los 0's de la matriz explicitamente. En vez de guardar los 0's se pueden guardar los mulitplicadores del renglón 1. Entonces, después del primer paso, la memoria que inicialmente contenía $\mathbf{A}|b$ tendrá

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ m_{21} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & | & b_2^{(1)} \\ m_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & | & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_{n-1,1} & a_{n-1,2}^{(1)} & a_{n-1,3}^{(1)} & \cdots & a_{n-1,n}^{(1)} & | & b_{n-1}^{(1)} \\ m_{nn} & a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & | & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

En el segundo paso, aplicamos eliminación gaussiana nuevamente operando sobre las filas $2,3,\ldots,n$. En el 2do paso de la eliminación gaussiana se ignora la primera fila y la primera columna. Múltiplos del renglón 2 son sumados a las filas $3, 4, \dots n$ para obtener un 0 en las entradas $(3, 2)$, $(4, 2), \dots, (n, 2)$ por lo que el paso 2 es idéntico al paso 1 pero operado sobre la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2}^{(1)} & a_{n-1,3}^{(1)} & \cdots & a_{n-1,n}^{(1)} & b_{n-1}^{(1)} \\ a_{n,2}^{(1)} & a_{n,3}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right] \tag{4}$$

Si $a_{22}^{(1)} \neq 0$ entonces es posible realizar la reducción usando al segundo renglón, por tanto los factores multiplicadores son

$$m_{i2} = a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \quad i = 3, \dots, n \tag{5}$$

Al aplicar eliminación de las entradas en la columna 2, obtenemos una nueva matriz $[A^{(2)}|b^{(2)}]$, con

$$\begin{array}{llll} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)} & j = 3, \dots, n & i = 3, \dots, n \\ b_i^{(2)} & = b_i^{(1)} - m_{i1}b_{(1)}^{(1)} & & i = 2, \dots, n \end{array} \tag{6}$$

Como A es invertible, $A^{(2)}$ es invertible. Esto implica que $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Después de este paso, obtenemos la siguiente matriz

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1,3}^{(2)} & \cdots & a_{n-1,n}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

Sin embargo, en la memoria inicial que registra a A guardamos los multiplicadores m_{2j}, es decir, en memoria tendremos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ m_{21} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ m_{31} & m_{32} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & a_{n-1,3}^{(2)} & \cdots & a_{n-1,n}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \\ m_{nn} & m_{n,2} & a_{n,3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right] \tag{7}$$

El tercer paso es idéntico al paso 2, sólo que operando con la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,3}^{(2)} & \cdots & a_{n-1,n}^{(2)} & b_{n-1}^{(2)} \\ a_{n,3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right] \tag{8}$$

Para poder proseguir con la eliminación gaussiana, en el tercer paso (y sin intercambio de renglones) se necesita que $a_{33}^{(2)} \neq 0$. ... Después de $n-1$ si $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ entonces obtenemos una matriz triangular superior $\left[\mathbf{U}|y\right]$. Cada paso k es posible si $A^{(k)}$ es invertible.

Por otro lado las operaciones realizadas al vector “independiente” están dadas por la siguientes fórmulas

$$
\begin{array}{lll}
b_i^{(1)} & = b_i - m_{i1} b_1 & i = 2, \ldots, n \\
b_i^{(2)} & = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)} & i = 3, \ldots, n \\
\vdots & & \\
b_i^{(j)} & = b_i^{(j-1)} - m_{i,j} b_j^{(j-1)} & i = j+1, \ldots, n \\
\vdots & & \\
b_i^{(n-1)} & = b_i^{(n-2)} - m_{i,n-1} b_{n-1}^{(n-2)} & i = n
\end{array}
\tag{9}
$$

Si escribimos

$$
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-2)} \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}
$$

y la ecuación (9) se puede expresar de la siguiente fórmula recursiva.

$$
y_i \quad = b_i - \textstyle\sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j} y_j \qquad i = n \tag{10}
$$

O bien

$$
\sum_{j=1}^{i-1} m_{i,j} y_j + y_i = b_i
$$

Matricialmente, las relaciones recursivas se pueden expresar de forma matricial como

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ m_{n1} & m_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \tag{11}
$$

Entonces el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}x = b$ Se ha reducido al sistema

$$
\mathbf{U}x = y
$$

y

$$
\mathbf{L}y = b
$$

Teorema Descomposición LU Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$ cuyas matrices $A^{(k)}$ son invertibles, entonces A se puede factorizar como

$$
\mathbf{A} = \mathbf{LU} \tag{12}
$$

En donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior

Demostración Para las matrices de orden 1 $a_{11} = 1 \cdot u_{11}$ se cumple. Supongamos que se cumple para las matrices de orden $n-1$. Para $n=k$, partimos la matriz en bloques

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{c}^T & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n-1} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Para que la factorización se cumpla

$$L_{n-1}\mathbf{u} = \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{m}^T\mathbf{U}_{k-1} = \mathbf{c}^T$$

Se pueden resolver, para $\mathbf{u}$ y para $\mathbf{m}$. Finalmente, la última relación $\mathbf{m}^T\mathbf{u} + u_{kk} = a_{kk}$ esta completamente determinado por $\mathbf{m}$, $\mathbf{u}$ y a_{kk}.

El método de Dolittle

Se puede obtener de manera recursiva los términos de la factorización LU.

Se asume que la matriz L tiene diagonal unitaria, es decir $L_{ii} = 1$. Es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ m_{n1} & m_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n.1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & an-1,3 & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

El método de Dolittle consiste en "resolver" las incógintas u_{11}, $u_{12}, \ldots, u_{n1}, \ldots, u_{nn}$, l_{21}, $l_{31}, \ldots, l_{n1}, l_{n,n-1}$ en un orden particular, aprovechando la estructura de las matrices U y L. Notar que

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j > i \\ m_{ij} & \text{si } j \leq i \end{cases} \tag{14}$$

Si se realiza la multiplicación, y $j \geq i$ obtenemos una fórmula recursiva

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{i} l_{ip}u_{pj} = \sum_{p=1}^{i-1} m_{ip}u_{pj} + u_{ij}, \quad \text{para } j = i, i+1, \ldots, n \tag{15}$$

Notar que la segunda sumatoria incluye términos de las *filas anteriores* de U, para poder calcular u_{ij}.

Entonces para $j \geq i$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} m_{ip}u_{pj} \tag{16}$$

Para $j < i$ la matriz U cancela los términos mas allá de $p = j$