# Examen 1 Álgebra lineal

Nombre:______________________________________________________

Resolver explicando tu respuesta 4 de 6 problemas, los problemas 1 y 3 son obligatorios.

1- a) Define que es la inversa de una matriz cuadrada. b) Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Usando el resultado en b). Resolver el siguiente sistema como función de $\alpha, \beta$.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & 3z & = & \alpha \\ 2x & - & 2y & & & = & 2\beta \\ x & - & 2y & - & z & = & \alpha - \beta \end{array}$$

y calcular la norma de la solución $\tilde{\mathbf{x}}(\alpha, \beta)$.

2.-Se dan los vértices de un paralelogramo $ABCD$ conn $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 0, 2)$ y $C = (2, 3, 0)$.

i) Calcular las coordenadas de $D = (x_0, y_0, z_0)$ considerando que $\overrightarrow{AD}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$. Calcular los ángulos internos del vértice $A$

ii) Calcular el plano que contiene al paralelogramo.

iii) Encontrar el conjunto intersección del plano en iii) y el plano $x + y + z = 2$.

3.- Calcular para que valores del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ x + y + \lambda z &= 1 \end{aligned}$$

* Se tiene una solución única

- Se tiene una infinidad de soluciones
- El sistema es inconsistente

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$, con $a \neq 0$ calcular, usando inducción matemática la matriz $A^n$. (Recordar la siguiente factorización \$aˆn-1 =(a-1)(a$^{\{n-1\}+a}${n-2}+…+a+ 1) \$).

5. Sabiendo que $A$ es simétrica e invertible

- Demostrar que $A^{-1}$ también es simétrica.
- Explicar por que $\det(A^{-1}) \neq 0$.
- Demostrar usando las propiedades del determinante que $A^n$ también es invertible y $\left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$
- Si $B$ es una matriz invertible, explicar por que $M = B \cdot B^T$ es invertible y $\det(M) > 0$.

6. a) Obtener las matrices elementales que transforman a $A$ en una matriz triangular

b) Usar a) para obtener la factorización $PA = LU$ de la matriz asociada al sistema

$$\begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & 2y & - & 4z & = & 4 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -8 \end{array}$$

c) Resolver el sistema **usando** la factorización $PA = LU$