Tarea 4

Álgebra Lineal

Espacios con producto interno

1. Si $V = \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $n \times n$, mostrar que $\langle A, B\rangle = tr(AB^T)$ es un producto interno.
2. Calcular la norma y el ángulo formado por las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ respecto al producto interno del ejercicio anterior.
3. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$. Calcular las normas y la distancia entre los vectores $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t$ y $p_3(t) = t^2$ con el producto $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(s)q(s)ds$.
4. Sea $V = \mathbb{R}^2$, definamos el siguiente producto $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_2 = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$.

a) Demostrar es un producto interno. b) Encontrar una matriz A tal que $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle_2 = x^T Ay$.

5. Determinar si las siguientes funciones son productos internos o bien especificar que propiedad del producto interno no se cumple

a) $V = C([0, 1]; \mathbb{R})$ y $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(s)g(s)e^{-t}ds$

b) $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(s)q(s)ds + \int_0^1 p'(s)q'(s)ds$

c) $V = \mathbb{R}^3[x]$ y $\langle p, q\rangle = \int_0^1 \frac{dp}{ds}(s)\frac{dq}{ds}(s)ds$

d) $V = \mathbb{R}^2$ y $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \det([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$

e) $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $\langle p, q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$

6. Establezca si una de las siguientes funciones es un producto interno en $\mathbb{R}^3$, si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

- $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + 2a_2b_3 - 2a_3b_2$

Ortogonalidad

7. Obtener una base ortonormal (considerando al producto punto) para el siguiente subespacio

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - y + z = 0\}$$

8. Obtener una base ortonormal para el subespacio generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9. Considerando al producto punto en $\mathbb{R}^4$ use el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ con

$\mathbf{u}_1 \;=\; (0,2,1,0)$ $\mathbf{u}_2 \;=\; (1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_3 \;=\; (1,2,0,-1)$ $\mathbf{u}_5 \;=\; (1,0,0,1)$

10. Sea $V=\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno $< f,g >= \int_0^1 f(s)g(s)ds$, verificar si algunas de las bases es una base ortonormal con respecto al producto interno definido.

a) $\{1,t,t^2\}$,
b) $\left\{1, 2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2}, 6\sqrt{5}(t^2-t+\frac{1}{6})\right\}$,
c) $\{1, t-\frac{1}{2}, t^2-t+\frac{1}{6}\}$

11. Sea P la proyección ortogonal sobre la recta $y=3x$ o equivalentemente, sobre $\omega=(1,3)$, si $\mathbf{u}=(2,5)$ y $\mathbf{v}=(x,10)$ ¿cuál es el valor de x para que $P_\omega\mathbf{u}=P_\omega\mathbf{v}$.

12. Sea $V=\mathbb{R}^4$ y $\langle\,,\,\rangle$ su producto interno, sean $v1=(1,0,1,0)$, $v_2=(1,1,2,1)$ y $v_3=(0,1,1,2)$ probar que

a) El conjunto $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes. Posteriormente, complete a A para que sea una base de $\mathbb{R}^4$.

b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}'$ a partir de $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$.

c) Calcular la matriz cambio de base entre la base ortonormal de b) y la base canónica, así como la matriz cambio de base entre la base canónica a la base ortonormal de b).

13. Encuentra una base ortonormal para cada uno de los siguientes subespacios $W\subset\mathbb{R}^4$ con el producto interno igual al producto punto.

a. $W=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$

b. $W=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1=x_2, \quad x_3=x_4\right\}$

14. Considere a W como el subespacio generado por las columnas de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar una base para W.

b) A partir de esta base, encontrar una base ortonormal de W.

Proyecciones ortogonales

Si W es un subespacio, y $\mathcal{B}_0=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_m\}$ es una base **ortogonal** de W, si $\mathbf{v}_0\notin W$, definimos la proyección ortogonal sobre W como

$$P_W\mathbf{v}_0=\sum_{i=1}^{m}\frac{\langle\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_i\rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2}\mathbf{v}_i$$

a) Si $V=\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{u}=(2,6)$ y $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=4x\}$ (aquí una base es cualquier vector dirección de la recta)

b) Si $V=\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{u}=(2,1,3)$ y $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 : x+3y-z=0\}$ (calcular primero una base de W, aplicar el proceso de Gram-Schmidt y finalmente la proyección sobre esa base)

c) Sea $V=C([0,1];\mathbb{R})$ con el producto interno usual $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$, sea $W=\mathcal{S}(t,\sqrt{t})$.

- Encuentre una base ortonormal de W (es decir aplique el proceso de Gram-Schmidt a $t,\sqrt{t}$),
- Calcule la proyección de $y(t)=e^{-t}$ sobre W.

d) Sea $V=\mathbb{R}[x]$ con $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$, si $v=4+3x-2x^2$, calcular la proyección sobre $W=\{p(t)\in V : p(t)=\alpha_0+\alpha_1 t\}$ (considere a la base usual de W, $\mathcal{B}=\{1,t\}$ y aplique Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal)

Cambios de base

1.- a) Encuentra la matriz P de transición de la base $\mathcal{B}$ canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}'$.

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Obtener las nuevas coordenadas del vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.- a) Encuentra la matriz P cambio de base base de $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}'$ dada por

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Obtener las nuevas coordenadas del vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.- Encontrar la matriz cambio de base en cada uno de los casos

a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,1,1), (0,1,2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(2,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\}$.

b) $\mathcal{B} = \{(3,2,1), (0,-2,5), (1,1,2)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (-1,2,4), (2,-1,1)\}$.

4.- Determinar la matriz cambio de base de la siguiente base $\mathcal{B}$

$$\{(1,0,0,1), (0,0,0,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0)\}$$

a la base canónica en $\mathbb{R}^4$

5.- Considere a los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1,2) \qquad \mathbf{v}_2 = (1,3)$$

a) Verificar si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$.

b) Representar a $\mathbf{v} = (1,1)$ como combinación lineal de la nueva base, $\mathcal{B}'$, .

c) Encontrar la matriz cambio de base P. ¿cómo se relacionan $(1,1)$ y las nuevas coordenadas del vector en la base $\mathcal{B}'$.

6.- Determinar la matriz cambio de base de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ a la base $\{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (2,1,-2)\}$

7.- Determinar la matriz cambio de base de $\{\mathbf{e}_i\}_{\{i\leq 3\}}$ a la base $\{(1,2,-1),\ (2,0,5),\ (0,-1,2)\}$

8.- Si

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la matriz inversa de la matriz de transición de una base $\mathcal{B}$ a otra, $\mathcal{B}'$ encontrar las nuevas coordenadas que corresponden al vector con coordenadas en $\mathcal{B}$, $(1,-1,1)$, $(2,1,1)$, $(-2,1,3)$.

Rango de una matriz

1 Determinar a las columnas básicas de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A.

2 Determinar al rango de A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Calcular el rango de las siguientes matrices

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

$$2) B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$