Transformaciones lineales

Álgebra Lineal. ESCOM

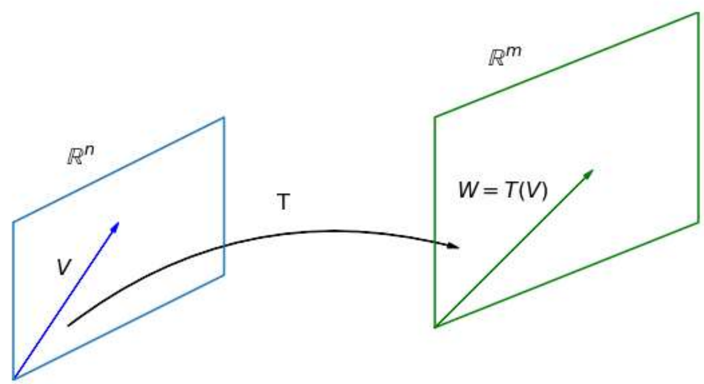
1 Transformaciones lineales

1.1 Introducción a las transformaciones lineales

1.1.1 Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $T : V \to W$ una función que asigna a cada vector $v \in V$ un elemento en W. T es una transformación lineal si para cada $\mathtt{u}, \mathtt{v} \in V$

- $T(\mathtt{u} + \mathtt{v}) = T(\mathtt{u}) + T(\mathtt{v})$.
- Para todo λ, escalar $T(\lambda \mathtt{u}) = \lambda T(\mathtt{u})$.



1.1.2 Transformaciones especiales

Existen una variedad de transformaciones lineales, por ejemplo, la transformación $\mathbf{0}$ que *recibe* un vector $\mathtt{v} \in V$ y lo manda al cero en $\mathbf{0} \in W$ se le conoce como la transformación **cero**.

La transformación que recibe un vector y lo relaciona consigo mismo es la transformación identidad, en este caso $V = W$.

La transformación $Mv = -v$ también es una transformación lineal de $M : V \to V$.

1.1.3 Definición

Una transformación lineal $T : V \to V$, es decir el dominio de T y el codominio de T es V decimos que es un *operador lineal*.

1.1.4 Propiedades de una transformación lineal

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entonces

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. Para todo $\mathtt{v} \in V, T(-\mathtt{v}) = -T(\mathtt{v})$.
3. $T(\mathtt{v} - \mathtt{w}) = T(\mathtt{v}) - T(\mathtt{w})$.

1.1.5 Ejemplo

Estudiar si las siguientes aplicaciones de $V = \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ son o no son lineales

1. $T(x, y, z) = (x + z, 2x - 3y - z, 3x - 3y, x - 3y - 2z)$
2. $S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ 2x - 3y - z \\ x - 3y \\ x - 3y - 2z + 1 \end{pmatrix}$

Solución de a), notar que

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es decir lo podemos ver como $T\mathtt{v} = A \cdot \mathtt{v}$ con A la matriz anterior.

Por las propiedades de la multiplicación de matrices entonces tenemos $T(\mathtt{v} + \mathtt{u}) = A(\mathtt{v} + \mathtt{u}) = A\mathtt{v} + A\mathtt{u} = T(\mathtt{v}) + T(\mathtt{u})$. Similarmente si c es un escalar, entonces $T(c \cdot \mathtt{v}) = A(c \cdot \mathtt{v}) = c(A\mathtt{v}) = cT(v)$.

Otra forma de verificar que la función es lineal, es aplicarlo a un vector "suma" $(x+u, y+v, z+w)$ es decir

$$\begin{aligned}
T(x+u, y+v, z+w) &= ((x+u)+(z+w), 2(x+u)-3(y+v)-(z+w), 3(x+u)-3(y+v), (x+u)-3(y+v)-2(z+w)) \\
&= (x+z+\mathtt{u}+\mathtt{w}, 2x-3y-z+2\mathtt{u}-3\mathtt{v}-\mathtt{w}, 3x-3y+3\mathtt{u}-3\mathtt{v}, x-3y-2z+\mathtt{u}-3\mathtt{v}-2\mathtt{w}) \\
&= (x+z, 2x-3y-z, 3x-3y, x-3y-2z)+(\mathtt{u}+\mathtt{w}, 2\mathtt{u}-3\mathtt{v}-\mathtt{w}, 3\mathtt{u}-3\mathtt{v}, \mathtt{u}-3\mathtt{v}-2\mathtt{w}) \\
&= T(x,y,z)+T(\mathtt{u},\mathtt{v},\mathtt{w})
\end{aligned}$$

Solución de b)

$$\begin{aligned}
S\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x+u+z+w \\ 2(x+u)-3(y+v)-(z+w) \\ (x+u)-3(y+v) \\ (x+u)-3(y+v)-2(z+w)+1 \end{pmatrix} \\
S\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x+z+\mathtt{u}+\mathtt{w} \\ 2x-3y-z+2\mathtt{u}-3\mathtt{v}-\mathtt{w} \\ 3x-3y+3\mathtt{u}-3\mathtt{v} \\ x-3y-2z+\mathtt{u}-3\mathtt{v}-2\mathtt{w}+1 \end{pmatrix} \\
S\begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x+z \\ 2x-3y-z \\ 3x-3y \\ x-3y-2z+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathtt{u}+\mathtt{w} \\ 2\mathtt{u}-3\mathtt{v}-\mathtt{w} \\ 3\mathtt{u}-3\mathtt{v} \\ \mathtt{u}-3\mathtt{v}-2\mathtt{w} \end{pmatrix} \\
&= S\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathtt{u}+\mathtt{w} \\ 2\mathtt{u}-3\mathtt{v}-\mathtt{w} \\ 3\mathtt{u}-3\mathtt{v} \\ \mathtt{u}-3\mathtt{v}-2\mathtt{w} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El último término no es igual a $S\begin{pmatrix} \mathtt{u} \\ \mathtt{v} \\ \mathtt{w} \end{pmatrix}$, por tanto la función no es lineal

1.1.6 Ejemplo

Sea $V=\mathbb{R}^n$, sea A una matriz fija $n \times n$, definamos a $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como

$$T_A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces T_A es una transformación lineal.

1.1.7 Núcleo (Espacio Nulo) e Imagen

1.1.8 Definición

Se $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores en V que T mandan a $\mathbf{0}$ se conoce como **núcleo de** T (**kernel o espacio nulo**). Se denota por $N(T)$ o $Ker(T)$.

El conjunto de todos los **vectores en W** que son envíados por T desde V, es decir si $w \in W$ es tal que $\mathtt{w} = T\mathtt{v}$ para algún $\mathtt{v} \in V$. Este subespacio se conoce como $Im(T)$ o $R(T)$.

1.2 Teorema

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entonces:

1. El núcleo de T es un subespacio de V.
2. La imagen de T es un subespacio de W.

A la dimensión de la imagen de T se conoce como **rango de** T. A la dimensión del núcloe se le denomina **nulidad de** T

1.2.1 Definición

La **nulidad** de la transformación lineal es igual a

$$\text{nulidad}(T) = \dim(N(T))$$

El **rango** de una transformación lineal es igual a

$$\text{rango}(T) = \dim(Im(T))$$

1.2.1.1 Teorema

Si $T:V\rightarrow W$ es una transformación lineal desde un espacio vectorial V hacia un espacio vectorial W, con $\dim(V)=n$ entonces

$$n=\dim(V)=rango(T)+nulidad(T)$$

En particular si A es una matriz $m\times n$ entonces la dimensión del espacio de soluciones de $A\mathbf{x}=0$ es

$$n-rango(A)$$

Demostración: sea $U=N(T)$, por ser un subespacio de V entonces existe una base de vectores $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}$. Por el teorema de extensión de un conjunto de vectores linealmente independiente, sabemos que existen $\mathbf{u}_{k+1},\mathbf{u}_{k+2},\ldots,\mathbf{u}_n$ tal que se extiende a una base de V, es decir $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_{k+1},\ldots\mathbf{u}_n\}$ es una *base* de V.

Ahora, considere a los vectores $T(\mathbf{u}_{k+1}),T(\mathbf{u}_{k+2}),\ldots,T(\mathbf{u}_n)$, dicho conjunto es linealmente independiente. En efecto, suponga que

$$c_1T(\mathbf{u}_{k+1})+c_2T(\mathbf{u}_{k+2})+\ldots+c_{n-k}T(\mathbf{u}_n)=\mathbf{0}$$

Entonces, como T es lineal

$$T(c_1\mathbf{u}_{k+1}+c_2\mathbf{u}_{k+2}+\ldots+c_{n-k}\mathbf{u}_n)=\mathbf{0}$$

entonces

$$\mathbf{v}^\star=c_1\mathbf{u}_{k+1}+c_2\mathbf{u}_{k+2}+\ldots+c_{n-k}\mathbf{u}_n\in N(T)$$

Como $\mathbf{v}^\star\in N(T)$ y $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k$ es una base de $N(T)$ entonces es igual a una combinación lineal de la base, es decir

$$\mathbf{v}^\star=\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{u}_i$$

Por tanto,

$$c_1\mathbf{u}_{k+1}+c_2\mathbf{u}_{k+2}+\ldots+c_{n-k}\mathbf{u}_n-\sum_{i=1}^{k}\beta_i\mathbf{u}_i=\mathbf{0}$$

como forman una base de V entonces deben ser linealmente independiente, es decir

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_{n-k} = \beta_1 = \ldots \beta_k = 0$$

Esto implica que

$$T(\mathbf{u}_{k+1}), T(\mathbf{u}_{k+2}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$$

es un conjunto de vectores linealmente independiente en W.

Y también genera a $Im(T)$, si $w \in Im(T)$ entonces existe un vector $v \in V$ tal que $w = Tv$, como $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots \mathbf{u}_n\}$ es una base, entonces v es combinación lineal de los vectores, entonces

$$w = T(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=k+1}^{n} c_i T(\mathbf{u}_i)$$

Además, $T\mathbf{u}_{k+1}, T\mathbf{u}_{k+2}, \ldots, T\mathbf{u}_n$ generan a la imagen de T.

y por tanto $T\mathbf{u}_{k+1}, T\mathbf{u}_{k+2}, \ldots, T\mathbf{u}_n$ es una base de la imagen de T.

$$rango(T) = n - k = n - \dim(N(T))$$

1.3 Ejemplos

1- Considere a $T(x, y, z, w) = (x + y, y - z, x + w)$, calcular una base para su espacio nulo y su imagen. Calcular la nulidad de T y el rango de T.

2- Considere a $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + w)$, calcular una base para su espacio nulo y su imagen. Calcular la nulidad de T y el rango de T.

3-Sea $f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$. Calcular la nulidad y el rango de la transformación lineal.

El **núcleo** de una matriz es igual al núcleo de la transformación T_A.

4- Calcular el núcleo de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$-

1.4 Otros ejemplos de transformación lineal

1. Sea $V = \mathbb{R}_n[x]$ el espacio de polinomios de grado $\leq n$. Sea $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Definimos a las transformaciones:

$$D : V \to V, \quad \text{para todo t} \quad Dp(t) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}.$$
$$I : V \to V, \quad \text{para todo t} \quad Ip(t) = a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2. Sea $V = \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices 2×2. Definimos a $T_B : \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ como

$$T_M A = M \cdot A,$$

3. Sea $V = \mathcal{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices $n \times m$, sean $P \in \mathcal{M}^{n,n}$ y $Q \in \mathcal{M}^{m,m}$ definimos a $T_{Q,P}$ como

$$T_{Q,P}(A) = PAQ$$

4. Encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que si $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (3, 4)$ entonces

$$T\mathbf{v}_1 = (3, 2, 1)$$
$$T\mathbf{v}_2 = (6, 5, 4)$$

Basta con calcular $T(1, 0)$ y $T(0, 1)$. Pues la fórmula en general estaría dada por

$$T(x, y) = T(x(1, 0) + y(0, 1)) = x \cdot T(1, 0) + yT(0, 1)$$

Por otro lado $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es base de $\mathbb{R}^2$. Entonces $(1, 0) = -2(1, 2) + 1(3, 4)$ y $(0, 1) = \frac{3}{2}(1, 2) + (-\frac{1}{2})(3, 4)$ entonces

$$T(1, 0) = -2T(1, 2) + 1T(3, 4) = -2(3, 2, 1) + 1(6, 5, 4) = (0, 1, 2)$$
$$T(0, 1) = \frac{3}{2}T(1, 2) + (-\frac{1}{2})T(3, 4) = \frac{3}{2}(3, 2, 1) + (-\frac{1}{2})(6, 5, 4) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2)$$

1.5 Matriz asociada a una transformación lineal

Una transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una transformación de la forma

$$T\mathbf{v} = A \cdot \mathbf{v} \tag{1}$$

Sea $\mathcal{B} = \{\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n\}$ una base de V y $\mathcal{D} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^m$, entonces

$$\begin{aligned} \mathtt{v} = & \quad \alpha_1 \mathtt{e}_1 + \alpha_2 \mathtt{e}_2 + \ldots + \alpha_n \mathtt{e}_n, \\ T(\mathtt{v}) = & \quad \alpha_1 T(\mathtt{e}_1) + \alpha_2 T(\mathtt{e}_2) + \ldots + \alpha_n T(\mathtt{e}_n) \end{aligned}$$

Ahora, como $\mathcal{D}$ es una base de $\mathbb{R}^m$ entonces genera a todo el espacio, en particular, todos los vectores $T(\mathtt{e}_i)$ son combinación lineal de $\mathcal{D}$, es decir, existen a_{ij} tal que

$$T(\mathtt{e}_i) = a_{1i}\mathtt{w}_1 + a_{2i}\mathtt{w}_2 + \ldots + a_{mi}\mathtt{w}_m$$

sustituyendo en $T(\mathtt{v})$ entonces

$$\begin{aligned} T(\mathtt{v}) &= \alpha_1 T(\mathtt{e}_1) + \alpha_2 T(\mathtt{e}_2) + \ldots + \alpha_n T(\mathtt{e}_n) \\ T(\mathtt{v}) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mathtt{w}_j = \sum_{j=1}^{m} \big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\alpha_i \big) \mathtt{w}_j \end{aligned}$$

Dicho de otra forma **las coordenadas de $T(\mathtt{v})$ con respecto a la base $\mathcal{D}$ son iguales a**

$$\begin{aligned} [T\mathtt{v}]_{\mathcal{D}} &= (\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\alpha_k)_{\mathcal{D}} \\ [T\mathtt{v}]_{\mathcal{D}} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n, a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n, \ldots, a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n)_{\mathcal{D}} \end{aligned} \tag{2}$$

La última igualdad se puede expresar como una multiplicación matricial con

$$T(\mathtt{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{\mathcal{D}}, \quad T(\mathtt{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}_{\mathcal{D}}, \quad \ldots, \quad T(\mathtt{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}_{\mathcal{D}}$$

y

$$T(\mathtt{v}) = [T](\mathtt{v})_{\mathcal{B}} \tag{3}$$

y

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A esta matriz $A = [T]$ se le llama la matriz asociada a la transformación en la base $\mathcal{B}$ (en V) y $\mathcal{D}$ en W. Y **dejando fijas las bases**

$$\Big(T(\mathtt{v})\Big)_{\mathcal{D}} = \Big[T\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}\Big(\mathtt{v}\Big)_{\mathcal{B}}$$

Definición Dada una transformación lineal entre dos espacios vectoriales $T : V \to W$ y una base, $\mathcal{B}$, para V y $\mathcal{D}$ para W *fijas*, podemos asociar una matriz que transforma las coordenadas (c.r.a. $\mathcal{B}$) de $\mathtt{v} \in V$ a las coordenadas (c.r.a $\mathcal{D}$) de $T\mathtt{v}$. Se le llama la matriz **asociada** a la transformación lineal T (con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$).

$$\Big[T\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \left[\, T(\mathsf{e}_1) | T(\mathsf{e}_2) | \dots | T(\mathsf{e}_n) \right] \tag{4}$$

1.5.1 Ejemplos

1.5.1.1 Ejemplo 1.

Suponga que $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (x + 2y + z, -y, x + 7z)$. Sean $\mathcal{C} = \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \Big\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\Big\}$

- Obtener la matriz asociada a A, $\Big[A\Big]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ con respecto a las bases $\mathcal{C}$ $\mathcal{C}$
- Obtener la matriz asociada a A, con respecto a las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.
- Obtener la matriz asociada a A, con respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}'$.

1.5.1.2 Ejemplo 2

Considere a $T(x, y) = (y, -2x + 3y)$ en $\mathbb{R}^2$, con la base $\mathcal{C} = \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

1.5.2 Transformaciones lineales y Cambios de base

Sea T una transformación lineal, $T : V \to V$ y suponga que en V en el "dominio" tenemos a la base $\mathcal{B}$ y en el "contradominio" se usa la base $\mathcal{B}'$ entonces sabemos que existe una matriz cambio de base de $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, $Q_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ tal que

$$(\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} = Q_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}}$$

Similarmente, tenemos que

$$(T\mathtt{v})_{\mathcal{B}} = Q_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}(T\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} \quad \text{y} \quad (T\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} = Q_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}(T\mathtt{v})_{\mathcal{B}}$$

por otro lado $(T\mathtt{v})_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}}$ entonces

$$\begin{aligned} (T\mathtt{v})_{\mathcal{B}} &= Q_{\mathcal{B}'->\mathcal{B}}(T\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} \\ (T\mathtt{v})_{\mathcal{B}} &= Q_{\mathcal{B}'->\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Desarrollando el lado izquierdo

$$\begin{aligned} (T\mathtt{v})_{\mathcal{B}} &= Q_{\mathcal{B}'->\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} \\ [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}} &= Q_{\mathcal{B}'->\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} \\ [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}Q_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} &= Q_{\mathcal{B}'->\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\mathtt{v})_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

Como esto aplica para todo vector $(\mathtt{v})_{\mathcal{B}'}$ entonces

$$[T]_{\mathcal{B}}Q_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = Q_{\mathcal{B}'->\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}'}$$

entonces, despejando a $[T]_{\mathcal{B}'}$

$$[T]_{\mathcal{B}'} = Q_{\mathcal{B}'->\mathcal{B}}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}Q_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$$

1.5.3 Teorema

Si $T : V \to V$, sea $[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ la matriz asociada a T con respecto a la base $\mathcal{B}$ y $[T]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ entonces existe Q invertible tal que

$$[T]_{\mathcal{B}'} = Q^{-1}[T]_{\mathcal{B}}Q \tag{5}$$

y además $Q = Q_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.

Definición Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}^{n,n}$ se dice que son **similares** si existe una matriz invertible P tal que

$$B = P^{-1}AP \tag{6}$$

Entonces, si dos matrices representan a la misma transformación lineal entonces son similares.

1.5.3.1 Dilatación.

Si $V = \mathbb{R}^3$ $\vec{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, la transformación $T(\vec{\mathtt{x}}) = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$ es una transformación lineal. Para ver que es una transformación lineal

$$T(\vec{\mathtt{x}} + \vec{\mathtt{w}}) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + w_1) \\ 2(x_2 + w_2) \\ 3(x_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3w_1 \\ 2w_2 \\ 3w_3 \end{pmatrix} = T(\vec{\mathtt{x}}) + T(\vec{\mathtt{w}})$$

La primer propiedad se cumple. Si $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda\vec{\mathtt{x}}) = \begin{pmatrix} 3(\lambda x_1) \\ 2(\lambda x_2) \\ 3(\lambda x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 3x_1 \\ \lambda 2x_2 \\ \lambda 3x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix} = \lambda T(\vec{\mathtt{x}})$$

Por lo que la transformación es lineal.

Como se ha comentado, cualquier transformación lineal tiene una matriz asociada. En este caso,

$$[T] = [\,T(\mathsf{e}_1) \mid T(\mathsf{e}_2) \mid T(\mathsf{e}_3)]$$

En este caso $T(\mathsf{e}_1) = \begin{pmatrix} 3(1) \\ 2(0) \\ 3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $T(\mathsf{e}_2) = \begin{pmatrix} 3(0) \\ 2(1) \\ 3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. $T(\mathsf{e}_3) = \begin{pmatrix} 3(0) \\ 2(0) \\ 3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En la base canónica, podemos verificar que la matriz asociada a la transformación lineal es la anterior, multiplicando la matriz por un vector $\vec{\mathtt{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$[T] \cdot \vec{\mathtt{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix} = T(\vec{\mathtt{x}})$$

1.5.3.2 Ejemplo 2

Si una de las entradas incluye a una función real no lineal, entonces la transformación no será lineal por ejemplo $S(\vec{\mathtt{x}}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$ Si comparamos $S(\vec{\mathtt{x}} + \vec{\mathtt{w}})$ con $S(\vec{\mathtt{x}}) + S(\vec{\mathtt{w}})$

$$S(\vec{\mathtt{x}} + \vec{\mathtt{w}}) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + w_1)^2 \\ 2(x_2 + w_2) \\ 3(x_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1^2 + 2x_1w_1 + w_1^2) \\ 2(x_2 + w_2) \\ 3(x_3 + w_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 6x_1w_1 + 3w_1^2 \\ 2x_2 + 2w_2 \\ 3x_3 + 3w_3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$S(\vec{\mathtt{x}}) + S(\vec{\mathtt{w}}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3w_1^2 \\ 2w_2 \\ 3w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 3w_1^2 \\ 2x_2 + 2w_2 \\ 3x_3 + 3w_3 \end{pmatrix} \neq S(\vec{\mathtt{x}} + \vec{\mathtt{w}})$$

pues $S(\vec{\mathtt{x}} + \vec{\mathtt{w}})$ tiene un término extra $6x_1w_1$.

1.5.3.3 Reflexión respecto al eje x.

Sea $V = \mathbb{R}^2$ $R_1(x, y) = (x, -y)$. R es una transformación lineal. Si $\mathtt{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathtt{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$R_1(\mathtt{v}_1 + \mathtt{v}_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = R_1(\mathtt{v}_1) + R_1(\mathtt{v}_2)$$

Similarmente $R(\lambda\vec{\mathbf{v}}) = \lambda R(\vec{\mathbf{v}})$

2 Diagonalización

En esta sección trabajaremos con transformaciones lineales $T : V \to V$. Buscamos si podemos determinar una **base** $\mathcal{B}'$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}'}$ sea una matriz diagonal. Digamos

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

Esto implica que con respecto a esa base $\mathcal{B}'$, $(T\mathtt{v}_1)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0\vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$, $(T\mathtt{v}_2)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ $\dots T(\mathtt{v}_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

Como estamos en las coordenadas con respecto a $\mathcal{B}'$ esto significa que

$$T\mathtt{v}_1 = \lambda_1\mathtt{v}_1 \quad T\mathtt{v}_2 = \lambda_2\mathtt{v}_2 \quad \dots \quad T\mathtt{v}_n = \lambda_n\mathtt{v}_n$$

Definición Dada una transformación lineal $T : V \to V$ decimos que λ es un **valor propio** de T si

$$T\mathtt{v} = \lambda\mathtt{v} \tag{8}$$

Al vector $\mathtt{v}$ que cumple con la igualdad anterior decimos que es un **vector propio** de T.

Suponga que $A = [T]_{\mathcal{C}}$ en la base canónica, entonces buscamos a una base $\mathcal{B}'$ tal que $[T]_{\mathcal{B}'}$ sea una matriz diagonal.

2.1 Espectro de T

Al conjunto de valores propios distintos de una transformación lineal, $\sigma(T)$, lo llamamos **el espectro de** A.

Tenemos la siguiente equivalencia.

- El escalar λ es un valor propio de T si y sólo si $[A - \lambda I|\vec{\mathbf{0}}]$ tiene soluciones no triviales.
- El escalar λ es un valor propio de T si y sólo si $\big(A - \lambda I\big)\mathtt{x} = \mathbf{0}$ tiene más de una solución $\leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

- λ es un valor propio de T si y sólo si $Ker(T-\lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$

Definición Si T es una transformación y A su matriz en la base canónica, suponga que λ es un valor propio de A, entonces a $Ker\big(T-\lambda I\big)$ se le llama **un espacio propio de A**

Definición Si T es una transformación y A su matriz en la base canónica, suponga que λ es un valor propio de A, entonces a $\dim(Ker\big(T-\lambda I\big))$ se le llama la *multiplicidad geométrica* de T.

Un término crucial para el cálculo de valores propios es el **polinomio característico**, $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$. Y como mencionamos anteriormente, λ es un valor propio de T (o de A) si y sólo si $p(t)=\det(A-tI)=0$ se anula cuando $t=\lambda$.

2.1.1 Ejemplo

Sea $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $T_A\mathrm{v}=A\mathrm{v}$. Calcular los vectores propios de A. Buscamos los valores de λ tal que $\det(A-\lambda I)=0$. Entonces calculamos el **polinomio característico** de A.

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix}=(7-\lambda)(-2-\lambda)-(-4)(5)=(\lambda+7)(\lambda+2)+20=\lambda^2-5\lambda+6$$

Para buscar los valores propios de A o equivalentemente de T_A buscamos las raíces de $p_A(\lambda)$, factorizando al polinomio, tenemos que $p_A(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)$

Si factorizamos el polinomio característico $p(\lambda)$ entonces podemos obtener los **valores propios** de A. En este caso $\lambda=3$ y $\lambda=2$.

Para encontrar los **vectores propios** de A, calculamos una base para cada de los espacios propios

$$\text{Para } \lambda=3 N_3=Ker(A-3I)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;:\; A\vec{v}-3I\vec{v}=\vec{\mathbf{0}}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;:\; \begin{matrix} 7x-4y=3x \\ 5x-2y=3y \end{matrix}\right\}$$

$$Ker(A-3I)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;:\; \begin{matrix} 4x-4y=3x \\ 2x-2y=3y \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\; x-y=0\Leftrightarrow x=y$$

Luego, una base para $N_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$. Por tanto, una base de N_3 es $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ahora calculemos los valores propios de $\lambda = 2$, por medio de una base para $N_2 = Ker(A - 2I)$.

$$N_2 = Ker(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ A\vec{v} - 2I\vec{v} = \vec{\mathbf{0}} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{matrix} 7x - 4y = 2x \\ 5x - 2y = 2y \end{matrix} \right\}$$

$$Ker(A - 3I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{matrix} 5x - 4y = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & | & 0 \\ 5 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ 5x - 4y = 0 \Leftrightarrow x = \tfrac{4}{5} y$$

Luego, una base para $N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} \right\}$. Por tanto, una base de N_2 es $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2.1.2 Teorema

Vectores propios asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes

Por lo que en este caso de hecho tenemos una **Base** de vectores propios.

2.1.2.1 Diagonalización.

Consideremos esta base de vectores propios $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Calculamos la matriz cambio de base $Q_{\mathcal{B}' \backslash \text{righarrow} \mathcal{B}}$ en este caso

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 4/5 \\ 0 & 1 & | & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y en este caso en particular (por tomar a la nueva base como la canónica) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ahora calculamos $Q_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1/5 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

Por tanto $Q_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$. Si calculamos la matriz asociada a la transformación A, según el teorema de cambio de base

$$\begin{aligned} \left[T\right] &= Q^{-1} \cdot A \cdot Q \\ \left[T\right] &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4/5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \left[T\right] &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

2.2 Ejemplo 2

Determinar los valores propios y vectores propios de

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico de $A, p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -3 \\ 20 & 3-\lambda & 10 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 18 = (\lambda-3)^2(\lambda+2)$. Entonces **los valores propios de** A son $\lambda = 3$ y $\lambda = -2$. Para encontrar la factorización, tenemos que evaluar un valor de λ que elimine a $p(\lambda)$. Los divisores de $p(0)$ son posibles candidatos a ser raíces enteras de $p(\lambda)$. Si $\lambda = 3$ entonces $p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 - 3(3) + 18 = 27 - 36 - 9 + 18 = 0$ Entonces $\lambda = 3$ es raíz. Esto significa que $\lambda - 3$ **divide** a $p(\lambda)$, si hacemos la división obtenemos que $\frac{p(\lambda)}{\lambda-3} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2)$. Factorizando dichho resultado. Entonces $p(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+2)$ y los valores propios de la matriz (y de la transformación asociada a la matriz) son $\lambda = 3, \lambda = -2$.

Calculamos una base de sus subespacios propios $N_{-2} = Ker(A+2I)$ y $N_3 = Ker(A-3I)$. Para el primer subespacio propio

$$Ker(A+2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -3+2 & 1 & -3 \\ 20 & 3+2 & 10 \\ 2 & -2 & 4+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3| & 0 \\ 20 & 5 & 10| & 0 \\ 2 & -2 & 6| & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+z=0 \Leftrightarrow x=-z \\ y-2z=0 \Leftrightarrow y=2z \end{matrix}$$

Una base de dicho espacio propio, N_{-2} es $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Simiarmente una base para N_3 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Si juntamos en este caso los vectores propios no formamos una base, entonces A **no es diagonalizable**. Este es un ejemplo de una matriz que no es diagonalizable, pues no podemos encontrar una base de vectores. Existe otro criterio para determinar si una matriz será o no será diagonalizable, para entender dicho criterio requerimos el concepto de multiplicidad.

2.2.1 Multiplicidad algebraica

Sea T una transformación lineal y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores propios y $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$ vectores propios asociados cada valor propio. Si $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_n)^{k_n}$, al grado del $(\lambda-\lambda_i)$ le llamamos la multiplicidad **algebraica** del valor propio.

2.2.2 Multiplicidad geométrica

Sea T una transformación lineal y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores propios y $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$ vectores propios asociados cada valor propio. A la dimensión del espacio propio N_{λ_i} lo llamamos la multiplicidad geométrica.

Teorema Sea T una transformación lineal y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores propios y $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$ vectores propios asociados cada valor propio. Si para todo valor propio λ_i la multiplicidad geométrica = multiplicidad algebraica entonces T es **diagonalizable**.

En el último ejemplo, el polinomio característico de A esta dado por $p(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+2)$ entonces la multiplicidad algebraica de $\lambda = 3$ es 2 pero $dim(Ker(A-3I)) = 1$ por que sólo encontramos un vector en la base de $Ker(A-3I)$ entonces no es diagonalizable.

2.2.3 Ejemplo 3

Determinar si la siguiente matriz es diagonalizable, encontrar una base de vectores que diagonaliza a la matriz A si es el caso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -11-\lambda & -8 \\ -8 & 8 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -4 \\ 8 & -11-\lambda & -8 \\ -8 & 8 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$p(\lambda) = (1-\lambda)[(-11-\lambda)(5-\lambda) - (-8)8] - (-4)(8(5-\lambda) - (-8)(-8)) - 4(8(8) - (-8)(-11-\lambda))$ desarrollando los términos

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$$

por tanto los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -3$, en este caso decimos que $\lambda = -3$ tiene multiplicidad 2 y $\lambda = 1$ tiene multiplicidad 1. Calculamos los espacios propios

$$N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1-1 & -4 & -4 \\ 8 & -11-1 & -8 \\ -8 & 8 & 5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -4 & 0 \\ 8 & -12 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} 2x + z = 0 \Leftrightarrow x = -z \\ y + z = 0 \Leftrightarrow y = 2z \end{array}$$

Entonces un vector propio de $\lambda = 1$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Similarmente una base del espacio propio asociado a $\lambda = -3$ es igual a $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Por tanto

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 8 & -11 & -8 \\ -8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una forma de verificar, sin realizar todo el cálculo de Q es por medio del Teorema sobre las multiplicidades algebraicas y geométricas de T. El polinomio característico estaba dado por $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$ entonces, la multiplicidad algebraica de $\lambda = 1$ es 1, y la multiplicidad algebraica de $\lambda = -3$ es 2, por que es aparece como raíz 2 veces. Por otro lado $dim(Ker(A - I) = 1$ pues su base solo tiene 1 vector y $dim(Ker(A + 3I)) = 2$ debido a que una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. En este caso las dimensiones de los espacios propios, coinciden con las *potencias* de cada valor propio en el polinomio. El teorema implica que si se cumple esta condición la transformación es diagonalizable.

2.3 Diagonalización Ortogonal

Si A es una matriz simétrica y la matriz es diagonalizable, es posible obtener la factorización

$$D = Q^t A Q$$

Con Q una matriz **ortogonal**, dicha descomposición facilita el cálculo de la diagonalización, sin embargo para obtener dicha descomposición, se requiere obtener una base de valores propios **ortonormales**. Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt a la base de vectores propios de A. La matriz cambio de base Q en este caso será una matriz ortogonal, es decir $Q^{-1} = Q^t$