Tarea 3

Álgebra lineal

Espacios vectoriales

1. Sea $V = \mathbb{R}^+$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, es decir, el campo de escalares son los números reales. Se define sobre V las siguientes operaciones:

- Definimos la suma $x \oplus y = xy$ para todo $x,\ y \in V$.
- Y la multiplicación por escalar como $\alpha \odot x = x^\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}, x \in V$.

Averiguar si con estas operaciones, $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial. En su defecto indicar que axioma no se cumple con un ejemplo.

2. Explicar por que el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con la suma usual de vectores y el producto escalar definido como sigue

- $x \oplus y = x + y \quad$ (suma usual en $\mathbb{R}^n$), $\alpha \cdot (x, y) := (\alpha y, \alpha x)$
- $x \oplus y = x + y \quad$ (suma usual en $\mathbb{R}^n$), $\alpha \cdot (x, y) := (x^\alpha, y)$ Es un espacio vectorial o no lo es.

3. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y definimos las siguientes operaciones en V: suma: $(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (suma usual en $\mathbb{R}^2$) y producto escalar: $\alpha \odot (a_1, a_2) = (\alpha a_1, a_2)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es V con estás operaciones un espacio vectorial real?
4. Verificar que $\mathbb{R}[X] = \{p : p(x) = a_4x^4 + a_3x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios de grado ≤ 3. Con las operaciones

- $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $c \cdot p(x) = ca_3x^3 + ca_2x^2 + ca_1x + ca_0$ forma un espacio vectorial.

5. En $V = \mathbb{R}^n$ define 2 operaciones, $\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$, $c \cdot \alpha = -c\alpha$. ¿Qué axiomas de los espacios vectoriales cumplen las operaciones $(\oplus, \cdot)$?
6. Definimos a $C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ como el conjunto de funciones con segundas derivadas definimos a W como

$$W = \{y \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}) : \ y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0\}$$

a) Demostrar que W es un subespacio vectorial.

b) Verificar si $f(x) = e^{-x}$ está en W.

Subespacios vectoriales

7. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son realmente subespacios, verificar las 3 propiedades o bien, dar un contraejemplo:

a) El plano de los vectores $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ con $x_1 = 0$.
b) Los vectores $\mathbf{v}$ con $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0$.
c) El plano en $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x + 2y + z = 6$.

8. Sea V el espacio vectorial de funciones continuas, $V = C([0, 1]; \mathbb{R})$ ¿Qué conjuntos son un subespacio de V.

a) $U_1 = \{f \in V : \ f(0) = f(1)\}$

b) $U_2 = \big\{f \in V : \ f(3) = 1 + f(-5)\big\}$

c) $U_3 = \big\{f \in V : \ f(-1) = 0\big\}$$

d) $I = \{f \in V : f \text{ es par}\}$.

9. Sea W el espacio de vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5$ el cual cumple. Explica por que es un subespacio

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & -x_4 & & = 0 \\ x_1 & & +\frac{2}{3}x_3 & & -x_5 & = 0 \\ 9x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -3x_4 & -3x_5 & = 0 \end{array} \tag{1}$$

10. Sea $V = \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las matrices con entradas reales. Determinar y explicar si W es un subespacio vectorial o en su defecto explicar que propiedad no se cumple.

a) Sea B una matriz fija, $B \in \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$, considera a $W = \{A \in V : AB = BA\}$

b) $W = \{A \in V : A^2 = A\}$.

11. Explica por que si W_1 y W_2 son dos subespacios de V tal que V es **suma directa** de W_1 y W_2, entonces todo vector $\alpha \in V$ se puede expresar de manera única como $\alpha = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$.

12. Probar que el conjunto

$$S = \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3(\mathbb{R}) : a = 2b \text{ y } c = -d\right\}$$

es un subespacio.

13. Probar que el conjunto de matrices

$$\mathcal{U} = \left\{\ A \in \mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}) : |A| = 0\right\}$$

no es un subespacio vectorial

14. Describir al subespacio $W \subset \mathbb{R}^3$ generado por el conjunto de vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 4)$

15. Sea $\mathcal{S}^n$ el conjunto de matrices simétricas de tamaño $n \times n$ y $\mathcal{A}^n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices antisimétricas.

a) Probar que el conjunto de matrices simétricas y el conjunto de matrices antisimétricas $n \times n$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales.

b) Probar que toda matriz se puede expresar como suma de dos matrices $S \in \mathcal{S}^n(\mathbb{R})$, $A \in {}^n(\mathbb{R})$. (Sugerencia: Probar que $S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ es una matriz simétrica, $\Lambda = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$).

16. Sea $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Y sea $g(x)$, una función fija, mostrar que el conjunto E de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(g(x)) = f(x)$ es un subespacio vectorial de E.

17. Definimos a la traza de una matriz como $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$, es decir la suma de la diagonal principal. Verificar que el conjunto

$$W = \left\{A \in \mathcal{M}^n(\mathbb{R}) \ : \ tr(A) = 0\right\}$$

es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$.

18. Sea $\mathbb{R}[x]$ la colección de todos los polinomios con coeficientes reales, sea $W \subset \mathbb{R}[x]$ tal que

a) $W = \{f \in \mathbb{R}[x] : grado(f) = 3\}$

b) $W = \{f \in \mathbb{R}[x] : 2f(0) = f(1)\}$

c) $W = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(t) \geq 0\, t \in [0, 1]\}$

d) $W = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(t) = f(1 - t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$

19. En $V = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ determinar cual de los siguientes conjuntos son un subespacio vectorial. (Se puede usar los ejemplos vistos en clase).

a) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = y, z = t\}$.

b) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z + t = 0\}$.

c) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = 1\}$.

d) c) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;:\; xt = yz\}$.

20. En $V = C^2([0,1];\mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones continuas. Considere al siguiente conjunto

$$\{f \in C([0,1];\mathbb{R}) \;:\; f'' + f' = 0\}$$

21. Analiza y explica si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$:

a) $U = \{(x, y, z) : 2x + y = z\}$

b) $U = \{(x, y, z) : x \geq 0\}$

c) $U = \{(x, y, z) : x = 0\}$

22. Consideremos a $\mathbb{R}^n$ con las operaciones usuales y definamos

a) $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$

b) $W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

Son U y W subespacios

23. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ y sean

a) $M = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) : \; f(x) = 0 \text{ para } x \in (-\infty, 0)\}$

b) $N = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) : \; f(x) = 0 \text{ para } x \in (0, \infty)\}$

Verificar si M y N son subespacios vectoriales. Calcular $M \cap N$

24. Sea V el espacio vectorial de funciones continuas, $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Decimos que una función $y(t)$ es *par* si $y(-t) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Decimos que una función $z(t)$ es *impar* si $z(-t) = -z(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sea $M = \{y \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}) : y \text{ es par }\}$ y $N = \{z \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}) : z \text{ es impar }\}$.

a) Probar que M y N son subespacios

b) Probar que $V = M \oplus N$ (*considere* $y(t) = \frac{1}{2}(y(t) + y(-t))$ y $z(t) = \frac{1}{2}(z(t) - z(-t))$)

c) Encontrar la descomposición de $f(t) = e^t$ como suma de una función par e impar. Encontrar la descomposición de $f(x) = x+1$ como suma de una función par e impar.

25. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es función }\}$

a) $U = \{f \in V : f(x^2) = (f(x))^2 \text{ para todo } x\}$

b) $U = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$

c) $U = \{f \in V : f(3) = 1\}$

26. Si $\vec{a}_1, \vec{a_2} \in \mathbb{R}^n$, mostrar que el conjunto de vectores $\vec{b}$ tales que $\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ es un subespacio vectorial.

27. Mostrar que los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}^3$ forman un subespacio vectorial

- El conjunto de vectores $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y = 3z\}$
- El conjunto de vectores $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = y,\; 2y = z\}$

28. Demostrar que una línea recta que *no* pasa por el origen, no puede ser un subespacio vectorial.

Combinaciones lineales, independencia lineal y generadores de subespacios

29. Expresar al vector $\vec{x}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (y $\vec{w}$ si es el caso) o explicar por qué no es posible.

- $\vec{x} = (1,0)$, $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (0,1)$.
- $\vec{x} = (1,1)$, $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (-1,0)$.
- $\vec{x} = (4,3)$, $\vec{u} = (2,1)$, $\vec{v} = (-1,0)$.
- $\vec{x} = (1,1,1)$, $\vec{u} = (0,1,-1)$, $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{w} = (1,0,2)$.
- $\vec{x} = (0,0,1)$, $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (-1,1,0)$, $\vec{w} = (1,0,-1)$.

30. ¿Para que valores de k el vector $\mathbf{u} = (1,k,5) \in \mathbb{R}^3$ será una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v} = (1,-3,2)$ y $\omega = (2,-1,1)$.

3 ¿Es $(1,2)$ ó $(0,1)$ una combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$. Calcular $\mathcal{S}(\{(1,1),(1,2)\})$, el espacio generado por los dos vectores.

4 Encontrar a y b números reales tales que

- $u = (1,a,b,8)$ sea una combinación lineal de $\mathbf{v}_1 = (1,0,-3,4), \mathbf{w}_1 = (-2,1,3,-5)$

4 a) Demostrar que u, v es linealmente independiente si y sólo si $u+v, u-v$ es linealmente independiente.

b) Demostrar que u, v, w es linealmente independiente si y solo si $u+v, u+w, v+w$ sea linealmente independiente.

5 ¿Cual es el subespacio generado en $\mathbb{R}^3$ del conjunto $\mathcal{S}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$?

- $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$.
- $\mathbf{v}_1 = (2,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$.

31. ¿Qué valores de k hace que el siguiente conjunto de vectores sea linealmente independiente?

$$\Big\{(1,2,3), (-1,k,1), (1,1,0)\Big\}$$

7 Para qué valores de k, los siguientes vectores generan i) una recta, ii) un plano o iii) todo $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(0,1,-1),(1,2,1),(k,-1,4)\} \qquad A = \{(1,2,3),(3,k,k+3),(2,4,k)\}$$

32. Sea $p(x) = -4x^3 + 2ax^2 + x + b$ sea combinación lineal de los polinomios $q(x) = x^3 - x^2 + 2$, $r(x) = 2x^2 + x - 3$ y $s(x) = 2x^3 + x + 1$

33. Mostrar que las matrices A_1 A_2 A_3 son linealmente independientes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

34. Probar que los polinomios siguientes son linealmente independientes

$$p(x) = \; x^3 - 5x^2 + 1 \qquad q(x) = \; 2x^4 + 5x - 6 \qquad r(x) = \; x^2 - 5x + 2 \tag{3}$$

35. En el espacio de polinomios $\mathcal{P}^3$ de los polinomios con grado ≤ 3 verificar si los polinomios son *linealmente dependientes* o *linealmente independientes*.

$$p(x) = \quad x^3 - 3x^2 + 5x + 1 \qquad q(x) = \quad x^3 - x^2 + 6x + 2 \qquad r(x) = \quad x^3 - 7x^2 + 4x \tag{4}$$

36. Hallar una solución no trivial para el sistema homógeneo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

A partir de ahí, obtener una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1 = \big(1, 2, 3\big)$, $\mathbf{v}_2 = \big(2, 1, -2\big)$, $\mathbf{v}_3 = \big(3, 1, 1\big)$, $\mathbf{v}_4 = \big(4, -1, -2\big)$ nula y en la cual no todos los coeficientes no son todos iguales a cero.

37. Mostrar que el vector $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ pertenece al espacio generado por

$$\left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

38. Como se menciona en clase, para verificar que $\{\mathbf{v}_1, \, \mathbf{v}_2, \, \mathbf{v}_3\}$ es un generador de $\mathbb{R}^3$, sea $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ un vector arbitrario, se tiene que verificar que $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de $\{\mathbf{v}_1, \, \mathbf{v}_2, \, \mathbf{v}_3\}$.

    a) Determinar si $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, generan a $\mathbb{R}^3$.

39. Determinar si los conjuntos de vectores son linealmente independientes. Si no lo son, escribir a uno de los vectores como combinación lineal de los otros

    a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$

    b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

    c) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

    d) $\left\{ \big(2, 2, 2, 2\big), \big(2, 2, 0, 2\big), \big(2, 0, 2, 2\big) \right\}$

40. Determinar si el siguiente conjunto de matrices es linealmente independiente

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

41. Si $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbf{P}$ es una matriz no singular $m \times m$, demostrar que $\mathbf{P}\mathcal{S} = \{\mathbf{P}u_1, \mathbf{P}u_2, \ldots, \mathbf{P}u_n\}$ es un conjunto linealmente independiente. Dar un ejemplo que falle si la matriz es singular.

42. Usar el ejemplo anterior o bien de otra forma demostrar que si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ son linealmente independientes entonces los vectores $\{u_1, u_1 + u_2, \sum_{i=1}^{3} u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i\}$ son linealmente independientes.

43. Determinar si los polinomios $p_1(t) = t + t^3$, $p_2(t) = -1 + t^2$, $p_3(t)$ generan $\mathbb{R}_3[x]$.

44. Mostrar si los siguientes conjuntos de vectores generan el espacio vectorial correspondiente

a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2$$

b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = \mathbb{R}^3$$

45. Sean $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (3, 1, 1)$ y $\mathbf{w} = (4, -7, 3)$. Determinar el espacio generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Luego, explicar si $\mathbf{w}$ pertenece a dicho subespacio

Bases de subespacios vectoriales

1. ¿Cual de los siguientes conjuntos de vectores forman una base de $\mathbb{R}^2$?

- $\{(0, 1), (1, 0)\}$
- $\{(1, 1), (2, 2)\}$
- $\{(1, 0), (2, 3)\}$

2. Del siguiente conjunto

$$\mathcal{A} = \big\{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (3, 1, 3), (1, 1, 1)\big\}$$

a) Elige una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Expresa los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$

3. Determinar si el siguiente conjunto de matrices es una base para $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. Demostrar que cada uno de los conjuntos de vectores es una base

- $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 1)$ y $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 2)$
- $\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 5, 1)$ y $\mathbf{u}_3 = (0, 4, -3)$
- $\mathbf{u}_1 = (2, -4, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 3, -1)$ y $\mathbf{u}_3 = (6, 0, -1)$
- $\mathbf{u}_1 = (1, -3, -2)$, $\mathbf{u}_2 = (-3, 1, 3)$ y $\mathbf{u}_3 = (-2, -10, -2)$

5. Sean

$$A = \mathcal{G}((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)) \text{ y } B = \mathcal{G}((1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 0, 0))$$

Encontrar una base de cada subespacio y la dimensión de A, B y $A \cap B$.

6. Describir a

$$\mathcal{G}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

7. Determinar si alguno de los conjuntos de polinomios es una base para $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$, el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2.

a) $\{1 - x - 2x^2, 2 + x - 2x^2, 1 - 2x + 4x^2\}$.

b) $\{1 + 2x + x^2, 3 + x^2, x + x^2\}$.

c) $\{1+4x-2x^2, -2+3x-x^2, -3-12x+6x^2\}$

8. Mostrar que los polinomios $1, x, x^2-3x+1$ forman una base de $\mathcal{P}^2$. Exprese al polinomio $2x^2-5x+6$ como combinación lineal de los elementos de esa base.

9. Sean v y w vectores l.i. de V. Si $\alpha \neq 0$ probar que el conjunto de los elementos $\{v, v+\alpha \cdot u\}$ es una base del subespacio generado por los vectores $v, v+u, v+2u, \ldots, v+nu \ldots$.

10. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ son linealmente independientes, probar que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m-\mathbf{v}_1$ también son linealmente independientes.

11. Determinar si el conjunto $\mathcal{B}$ es una base para el espacio vectorial V

a)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \right\}, V = \mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}) \tag{5}$$

b)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \right\}, V = \mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}) \tag{6}$$

c)

$$\mathcal{B} = \left\{ x, 1+x, x-x^2 \right\}, V = \mathbb{R}^2[x] \tag{7}$$

d)

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, 2-x, 3-x^2, x+2x^2 \right\}, V = \mathbb{R}^2[x] \tag{8}$$

12 Sea $V = \mathbb{R}^4$ considere los subespacios vectoriales

$$U = \mathcal{S}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \quad \begin{matrix} 3x+y-z-3t=0 \\ y-t=0 \end{matrix} \right\} \tag{9}$$

Determinar una base para $U \cap V$ y $U+V$.

13 Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el espacio de polinomios con grado ≤ 2. Mostrar $\mathcal{B}' = \{v_1(t) = 1, v_2(t) = t-1, v_3(t) = t(t-1)\}$ forma una base de V.