Matrices

Jose Rodriguez Villarreal

2/28/2022

Matrices y vectores

Una matriz de *orden* $m \times n$ es una función $\mathbf{A} : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Que se escribe como un arreglo rectangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Matrices y vectores

Una matriz de *orden* $m \times n$ es una función $\mathbf{A} : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Que se escribe como un arreglo rectangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Decimos que la matriz $\mathbf{A}$ es de tamaño $m \times n$. Al número de la fila i y columna j es el número a_{ij} se le llama elemento (i, j) de la matriz.

Matrices y vectores

Una matriz de *orden* $m \times n$ es una función $\mathbf{A} : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Que se escribe como un arreglo rectangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Decimos que la matriz **A** es de tamaño $m \times n$. Al número de la fila i y columna j es el número a_{ij} se le llama elemento (i, j) de la matriz.
- Una matriz es *cuadrada* si $m = n$, es decir si el número de renglones es igual al número de columnas.

Matrices y vectores

Una matriz de *orden* $m \times n$ es una función $\mathbf{A} : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Que se escribe como un arreglo rectangular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Decimos que la matriz $\mathbf{A}$ es de tamaño $m \times n$. Al número de la fila i y columna j es el número a_{ij} se le llama elemento (i, j) de la matriz.
- Una matriz es *cuadrada* si $m = n$, es decir si el número de renglones es igual al número de columnas.
- Si una matriz no es cuadrada, entonces se dice que es *rectangular*.

Matrices

- Una matriz *diagonal* es una matriz cuadrada cuyos elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero. Podemos referirnos a la matriz diagonal como $\mathbf{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Matrices

- Una matriz *diagonal* es una matriz cuadrada cuyos elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero. Podemos referirnos a la matriz diagonal como $\mathbf{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.
- La matriz *identidad* es la matriz *diagonal* cuya diagonal principal es $\{1, \ldots, 1\}$ y sus otras entradas son 0.

Matrices

- Una matriz *diagonal* es una matriz cuadrada cuyos elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero. Podemos referirnos a la matriz diagonal como $\mathbf{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.
- La matriz *identidad* es la matriz *diagonal* cuya diagonal principal es $\{1, \ldots, 1\}$ y sus otras entradas son 0.

$$\mathbf{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Matrices II

Operaciones con matrices

- La matriz *cero* $\left[0\right]_{mn}$ es la matriz con $a_{ij} = 0$.

Matrices II

Operaciones con matrices

- La matriz *cero* $\left[0\right]_{mn}$ es la matriz con $a_{ij} = 0$.

La **suma** de matrices del mismo orden A y B

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

La **multiplicación por escalar** $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplicación de Matrices

Operaciones con matrices

Para que la multiplicación de dos matrices A y B esté definida, *el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B*.
Supongamos que el orden de A es $n \times m$ y B tiene el orden $m \times p$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{2k} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} a_{mk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_{mk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m} a_{mk} b_{kn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dicho de otra forma, las entradas de $\left(A \cdot B\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ con $i = 1,\, 2,\, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, p$. El producto de matrices tendrá $n-$ filas y $p-$ columnas.

Matrices

Propiedades de las operaciones on Matrices

1.- Para toda matriz A y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 1 = \mathbf{A}$.
- $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 0 = \mathbf{0}$.
- $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.

2.- Si A, B y C tienen el mismo orden.

- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{B}$.
- $\alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}$.
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Multiplicacion de Matrices

3.- Si A, B y C tienen el orden adecuado.

a) $(A+B)C = AC + BC$.

b) $C(A+B) = CA + CB$.

c) $A(BC) = (AB)C$.

Para ver la *asociatividad*, sea $M = AB$ y $N = BC$ queremos verificar que $AN = MC$. Por definición de la multiplicación de matrices

$$\begin{aligned} m_{ij} = & \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \\ n_{ij} = & \quad \textstyle\sum_{r=1}^{p} b_{ir} b_{rj}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left(MC\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{p} m_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{kj} c_{lj} \\ = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_{kj} = (AN)_{ij} \end{aligned}$$

De la fórmula se deduce que el producto de varias matrices dispuestas en un orden determinado no dependen de qué producto se hace primero.

Multiplicacion de Matrices

Por ejemplo, por asociatividad

$$((AB)C)D = (A(BC))D = A((BC)D)$$

Potencias de matrices Sea M una matriz **cuadrada** de orden n, por definición

$$M^0 = Id(n) \; M^1 = M \; M^2 = MM \; M^3 = MMM.$$

En general

$$M^p M^q = M^{p+q}$$
$$(M^p)^q = M^{pq}$$

Observación : Las propiedades de productos notables no se conserven.

$$\begin{array}{ccc} (A+B)^2 & = & (A+B)(A+B) & = A^2 + AB + BA + B^2 \\ (A+B)(A-B) & = & A(A-B) + B(A-B) & = A^2 - AB + BA - B^2 \end{array}$$

Matriz transpuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$, la matriz transpuesta de A, A^T es la matriz de orden $n \times m$ tal que $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz transpuesta

1) $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$.

2) $(AB)^T = B^T A^T$.

La segunda propiedad

$$[(AB)^T]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^T a_{kj}^T = [B^T A^T]_{ij}$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n y $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ decimos que $\mathbf{A}$ es una matriz **simétrica**. Si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ decimos que es **antisimétrica**.

Matriz conjugada y adjunta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ de números complejos, la matriz **conjugada** de A, $\bar{A}$ es la matriz de orden $m \times n$ tal que $(\bar{A})_{ij} = \bar{A}_{ij}$.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ de números complejos, la matriz **adjunta** de A, A^* es la matriz de orden $n \times m$ tal que $(A)_{ij} = (\bar{A})_{jj}$. Es decir, la adjunta de A se obtiene al *conjugar* y *transponer* A.

$$A = \begin{pmatrix} -i & 2+3i \\ -4i & 5+2i \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} i & 4i \\ 2-3i & 5-2i \end{pmatrix}$$

Si **A** es una matriz cuadrada y A es igual a su adjunta, entonces se dice que **A** es una matriz **hermitiana** o **simétrica según Hermite**.

Matriz Inversa

Si **A** es una matriz cuadrada de orden n, se dice que X es la matriz **inversa** de A si

$$A \cdot X = X \cdot A = \mathbf{Id}$$

Si dicha matriz existe decimos que A es **invertible**.