Espacios Vectoriales

Jose Rodriguez Villarreal

1 Espacios Vectoriales

1.1 Definición

Un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ también llamado un espacio vectorial real o espacio vectorial complejo, consta de lo siguiente:

1. Un conjunto V, cuyos elementos se llaman vectores.

2. Una operación binaria en V, llamada suma de vectores, denotada por $+$, y que cumple lo siguiente:

- I.1 Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, se cumple que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (conmutatividad).
- I.2 Para todos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z} \in V$, se cumple que $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (asociatividad).
- I.3 Existe un elemento en V llamado cero y denotado por $\vec{\mathbf{0}}$ tal que $\vec{\mathbf{0}} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, pata todo $\mathbf{x} \in V$ (existencia del neutro aditivo).
- I.4 Para todo $\mathbf{x} \in V$ existe un elemento $-\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$ (existencia de elementos inversos).

3. Una operación binaria en V, llamada producto de un escalar por un vector, denotada por $\cdot$, y que cumple lo siguiente:

- II.1 Para todo $\mathbf{x} \in V$, se tiene que $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, con $1 \in K$.
- II.2 Para todo $\mathbf{x} \in V$ y para todo λ y $\mu \in k$, se tiene que $\lambda(\mu \cdot \mathbf{x}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{x}$.
- II.3 El producto por escalar es distributivo, es decir,

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}, \\ \lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}, \end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

1.2 Definición

Si el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es el campo de los números reales se dice que V es un espacio vectorial **real**. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que es un espacio vectorial **complejo**.

2 Consecuencias de la definición de espacio vectorial

2.1 Proposición

2.1.1 Unicidad del 0

Si V es un espacio vectorial.

1. Si θ tal que $\theta + x = x$ para todo $x \in V$. Entonces $\theta = \mathbf{0}$. Es decir, sólo existe un vector $\mathbf{0}$.
2. Si $x + y = \mathbf{0}$, entonces $y = -x$. Es decir, el inverso aditivo es **único**.
3. $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y si $z \in V$ y $z + z = z$ entonces $z = \mathbf{0}$.

En todo espacio vectorial

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \qquad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \text{ para todo } x \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}\ (1) \tag{1}$$

$$\lambda \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{si y sólo si } \lambda = 0 \text{ ó } \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \quad (2)$$

Demostración

1. Si $\mu = 0$ en $II.3$ entonces, sumando $-(\lambda \cdot \mathbf{x})$

$$\begin{aligned} (\lambda + 0) \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \\ \lambda \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{0} &= \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{0} &= 0 \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

2. si $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ en $II.3$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{0}) &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{0} \\ \lambda \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &= \lambda \cdot \mathbf{0} \end{aligned}$$

Esto prueba ([@eq:p1]).

Ahora suponga $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, si $\lambda \neq 0$ entonces $1 = \lambda \frac{1}{\lambda}$ y por tanto en $II.2$

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\lambda \cdot \mathbf{x}\right) = \mathbf{0}$$

{#eq:p3}

2.2 Proposición

Para todo vector $x \in V$, $-(-x) = x$.

2.3 Proposición

Para todo $\mathbf{x} \in V$,

$$(-\lambda) \cdot \mathbf{x} = -\lambda \cdot \mathbf{x}$$

{#eq:p4}

Por la propiedad II.3

$$\lambda \cdot \mathbf{x} + (-\lambda) \cdot \mathbf{x} = (\lambda + (-\lambda)) \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Sumando el inverso aditivo, entonces $-\lambda \cdot \mathbf{x} = (-\lambda) \cdot \mathbf{x}$. De manera similar $-\lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (-\mathbf{x})$

2.4 Corolario

Para todo $x \in V$, $(-1)x = -x$.

2.5 Leyes de cancelación

Sea V un espacio vectorial, $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ escalares.

1. Si $\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{y}$ y $\alpha \neq 0$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

2. Si $\alpha \cdot \mathbf{x} = \beta \cdot \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ entonces $\alpha = \beta$.

Demostración:

Como $\alpha \cdot (-\mathbf{y}) = -\alpha \cdot \mathbf{y}$

$$\alpha \cdot (\mathbf{x} + (-\mathbf{y})) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot (-\mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

{#eq:p5}

por la proposición [@sec:prop0] como $\alpha \neq 0$ entonces $x + (-y) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Para ii) la proposición [@sec:prop1]

$$(\alpha - \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\beta) \cdot \mathbf{x} = \beta \cdot \mathbf{x} + (-\beta \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por la proposición [@sec:prop0] $\alpha - \beta = 0$, es decir $\alpha = \beta$.

2.6 Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, definimos a la operación $resta$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

2.7 Ejemplos

2.7.1 Espacio n-dimensional ($\mathbf{R}^n$)

2.7.2 Definición

Para cada entero positivo n, definimos el espacio Euclidiano n-dimensional como:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Un elemento particular de $\mathbb{R}^n$, digamos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tambi'en pueden denotarse como vector columna

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se le llama **vector** (o vector columna)}. Las cantidades x_i se le llaman componentes (o elementos de x), a n se le llama el orden de x.

La operación de suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^3$ se formulan como:

- Dados $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, se define:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

- Dados $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}$, se define:

$$c\ (x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$$

Entonces $\mathbb{R}^3$ con la suma y producto definidos anteriormente es un **espacio vectorial real**. Para esto verifiquemos que $\mathbb{R}^3$ con la operación $+$ cumple las siguientes propiedades

1. Para todos $x, y \in \mathbb{R}^3$, se cumple que $x + y = y + x$ (conmutatividad).

Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$, entonces

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = y + x$$

2. Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, se cumple que $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatividad). Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, y $z = (z_1, z_2, z_3)$, entonces

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3)\\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3)\\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3))\\ &= (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3))\\ &= x + (y + z)\end{aligned}$$

3. Existe un elemento en $\mathbb{R}^3$ llamado cero el vector $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, pata todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (existencia del neutro aditivo). Sea $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ entonces si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tenemos

$$\mathbf{0} + \mathbf{x} = (0, 0, 0) + (x_1, x_2, x_3) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$$

- *4. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ existe un elemento $-\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (existencia de elementos inversos). Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, definimos el inverso de $\mathbf{x}$ por $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$, entonces tenemos*

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3)\\ &= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3))\\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\mathbb{R}^3$ con la multiplicación escalar $\cdot$ cumple

- Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, con $1 \in \mathbb{R}$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$1 \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot (x_1, x_2, x_3) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$$

- Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y para todo λ y $\mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda(\mu\mathbf{x}) &= \lambda(\mu(x_1, x_2, x_3)) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \lambda(\mu x_3)) \\ &= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, (\lambda\mu)x_3) = (\lambda\mu)\mathbf{x}\end{aligned}$$

El producto por escalar es distributivo, es decir,

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}, \\ \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot \cdot\mathbf{x} &= (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2, x_3) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, (\lambda + \mu)x_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \lambda x_3 + \mu x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = \\ &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda \cdot ((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) = \lambda \cdot (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\
&= (\lambda(x_1+y_1), \lambda(x_2+y_2), \lambda(x_3+y_3)) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) = \\
&= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}.
\end{aligned}
$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

2.8 Ejemplos (continuación)

2.8.1 Ejemplo 2

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ y sea $V = \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$, es decir $f \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ si $x : I \to \mathbb{R}$.

Definimos a la suma en este conjunto $x, y \in V, x + y : I \to \mathbb{R}$ $(x+y)(t) = x(t) + y(t)$ para todo $t \in I$ La multiplicación por un escalar $\lambda \cdot x : I \to \mathbb{R}$ se define como $(\lambda \cdot \mathbf{x}) = \lambda x(t)$.A dicho espacio vectorial real se le suele llamar el **espacio de funciones** .

2.8.2 Ejemplo 3

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio con grado $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

para algún entero positivo, con las operaciones

$$
\begin{aligned}
p + q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & (p+q)(t) = p(t) + q(t) \\
\lambda \cdot p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & (\lambda \cdot p)(t) = \lambda p(t)
\end{aligned}
$$

Al espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales se le suele denotar con $\mathbb{R}[x]$. De manera similar, a los polinomios con coeficientes complejos se le suele referir con $\mathbb{C}[x]$

2.8.3 Ejemplo 4

Sea $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y m un entero positivo fijo, sea V el conjunto de polinomios con grado menor o igual a m, con m un entero positivo *fijo*. Es decir $p \in V$ si $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, función

$$p(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

A dicho espacio se le suele referir como $\mathcal{P}^m(\mathbb{R})$.

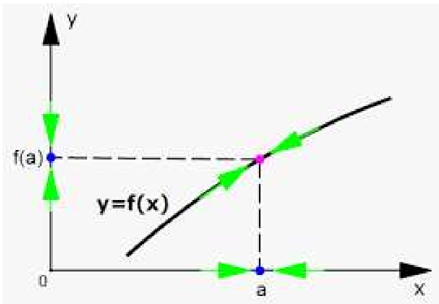
2.8.3.1 Ejemplo 4 b)

En particular, el conjunto de polinomios de grado menor o igual 3, $V=\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Con la suma de polinomios y la multiplicación por un número real.

2.8.4 Ejemplo 5

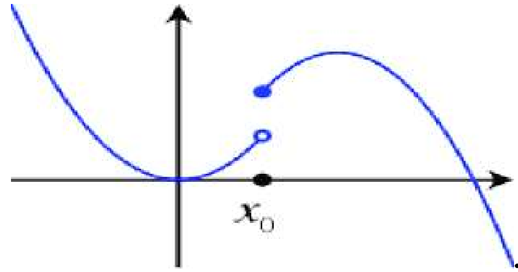
Sea $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y sea $V=C([a,b];\mathbb{R})$, es decir $f\in C([a,b];\mathbb{R})$ si $f:I\to\mathbb{R}$ y f es una función continua.

Definimos a la suma en este conjunto $x,y\in V, x+y:I\to\mathbb{R}$ $(x+y)(t)=x(t)+y(t)$ para todo $t\in I$ La multiplicación por un escalar $\lambda\cdot x:I\to\mathbb{R}$ se define como $(\lambda\cdot\mathbf{x})=\lambda x(t)$.A dicho espacio vectorial real se le suele llamar el **espacio de funciones continuas**.



.

Una función que no es continua sería una función con la siguiente gráfica



2.9 Ejemplo 6. El espacio de matrices $\mathcal{M}^{m,n}(\mathbb{K})$

Sea K un campo y $\mathcal{M}^{m,n}(\mathbb{K})$ el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con entradas $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Cada matriz representa un *vector* en este espacio.

Si $A, B \in \mathcal{M}^{m,n}(K)$ definimos a la suma de matrices

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{1i} + b_{1i} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2i} + b_{2i} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{ii} + b_{ii} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{ni} + b_{ni} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

y la multiplicación por escalar $c \in \mathbb{K}$

$$c \cdot A = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{21} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2i} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{ii} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}$$

2.9.1 Ejemplo 7. El espacio vectorial producto

Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales, sobre un mismo campo $\mathbb{K}$.

$$V := V_1 \times V_2 = \{(u, v) \,|\, u \in V_1,\, v \in V_2\}$$

Es decir, V es el producto cartesiano de V_1 y V_2. Sea $+_1$ y $+_2$ las sumas de V_1 y V_2 respectivamente y $\bullet_1, \bullet_2$ el producto escalar de cada espacio. Entonces definimos a la suma $\oplus$ en $V_1 \times V_2$ como

$$(u_1, v_1) \oplus (u_2, v_2) = (u_1 +_1 u_2, v_1 +_2 v_2\,\acute{}\,)$$

y la multiplicación escalar en V como

$$\lambda \bullet (u, v) = (\lambda \bullet_1 u, \lambda \bullet_2 v)$$

2.9.2 Ejercicio.

Considere el conjunto de matrices 2×2 y defina las siguientes operaciones usuales

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

y $c \cdot M = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix}$

Verificar si los axiomas se cumplen con estas operaciones.

2.9.3 Ejercicio

Verificar que el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado ≤ 2 es un espacio vectorial con las mismas operaciones $+, \cdot$ del ejemplo 4.

Es decir, si p, q son dos polinomios de grado ≤ 2 digamos

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \tag{2}$$

Definimos el polinomio *suma* $p + q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$(p + q)(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Si $c \in \mathbb{R}$. Definimos el polinomio $c \cdot p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$(c \cdot p)(x) = ca_2x^2 + ca_1x + a_0$$

3 Subespacios Vectoriales

Considere el siguiente ejemplo

3.1 Ejemplo inicial

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Considere a $V = \mathbf{F}(I; \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ es una función}\}$. Entonces $C(I; \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ es una función } \textbf{continua} \text{ en todo } x \in I\}$ y $\mathbb{R}[x] = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\}$.

En todos estos casos, son espacios vectoriales reales, con las *mismas* operaciones.

$$\mathbb{R}[x] \subset C(I; \mathbb{R}) \subset \mathbf{F}(I; \mathbb{R})$$

En este caso decimos que son un **subespacio vectorial** de V.

3.2 Definición

Sea $(V, \oplus, \cdot)$ un espacio vectorial. Y sea W un subconjunto de V, $W \subset V$, decimos que W es un *subespacio vectorial* si W es un espacio vectorial con las mismas operaciones $\oplus, \cdot$ restringidas a W.

Para que W sea un subespacio vectorial basta con verificar que W es cerrado bajo la suma vectorial $\oplus$ y la multiplicación escalar $\cdot$.

3.2.1 Proposición

Sea W un subconjunto no vacío de V, se dice que W es un de V, si y sólo si satisface las siguientes propiedades:

1. Para todos x y $y \in W$, se tiene que $x + y \in W$, es decir, W es cerrado bajo la suma.

2. Para todo $x \in W$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in W$, es decir W es cerrado bajo producto por escalar.

3.3 Ejemplo 1

Todo espacio vectorial V es un subespacio de sí mismo. V es el subespacio más grande de V.

3.4 Ejemplo 2

Sea $W = \{\mathbf{0}\}$, entonces W es un subespacio vectorial de V. Por ejemplo, para verificar 1) de la proposición anterior, si $u, w \in W$ entonces $u = \mathbf{0}$ y $w = \mathbf{0}$ por lo que $u + w = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ por lo que $u + w \in W$. Si $u \in W$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $c \cdot u = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Entonces $c \cdot \mathbf{u} \in W$.

3.5 Ejemplo 3

Sea

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$$

es decir, $x \in W$, entonces $x = (x_1, x_2, 0)$. Entonces W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Para esto verifiquemos que si $x, y \in W$, entonces $x + y \in W$.

Como $x, y \in W$, $x = (x_1, x_2, 0)$ y $y = (y_1, y_2, 0)$, luego

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$$

Ahora veamos que si $x \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot x \in W$, lo cual se sigue pues si $x = (x_1, x_2, 0)$, entonces $\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, 0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in W$

3.6 Ejemplo 4

Sea $\mathrm{v}_0 \in V$, con $\mathrm{v}_0 \neq \mathbf{0}$. Considere al conjunto $W_0 = \{\mathbf{v} = t \cdot \mathrm{v}_0 : t \in \mathbb{R}\}$. Es un subespacio vectorial propio de V, es decir $W_0 \subset V$.

3.7 Proposición

1. *Si W_1 y W_2 son dos subespacios de V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial de V.*

2. L es una colección de índices es decir $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $W_i \subset V$ es un subespacio para $i \in L$. Entonces

$$W = \bigcap_{i \in L} W_i = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

   es un subespacio vectorial.

3.7.1 Demostración

Por ser subespacios vectoriales, $\mathbf{0} \in W_1$ y $\mathbf{0} \in W_2$ entonces $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$ entonces, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$.

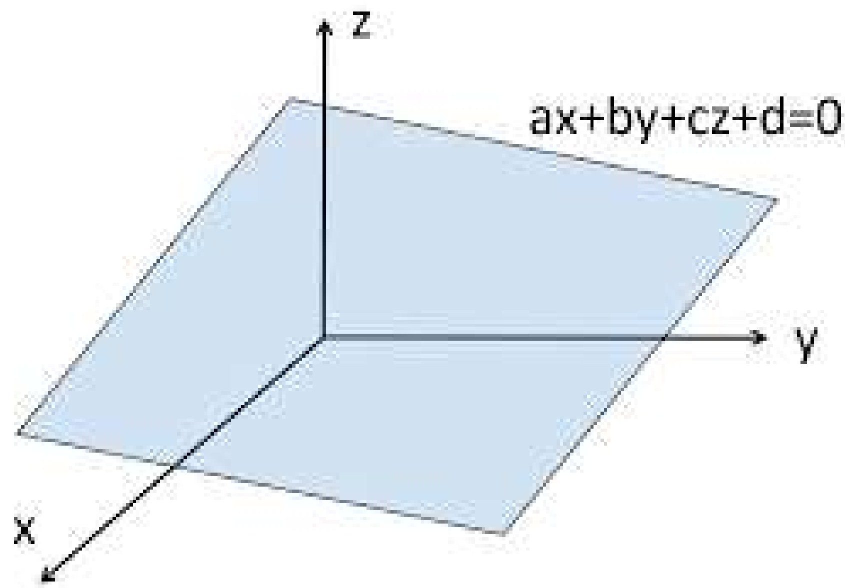
Si $\alpha \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$ entonces $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W_1$ y $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W_2$ por que son subespacios. Entonces $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$.

3.8 Ejemplo 4

Sea $V = \mathbb{R}^3$, y sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ números reales. El conjunto H de todos los vectores $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 = 0 \tag{3}$$

es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si todos los escalares α_i son nulos, entonces, $H = V$. Si no todos los escalares son nulos entonces H se dice ser un *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$, que pasa por el origen.


z
ax+by+cz+d=0
y
x

Ejemplo 4

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

Es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in H$

entonces

1) $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$;

2) $a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n = 0$

Sumando

$$a_1(x_1+y_1) + a_2(x_2+y_2) + \ldots + a_n(x_n+y_n) = 0$$

entonces $\vec{x}+\vec{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \in H$

$c \cdot \vec{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$ entonces de 1)

$$c(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = c \cdot (0) = 0$$

$$a_1(cx_1) + a_2(cx_2) + \ldots + a_n(cx_n) = 0$$

entonces $c \cdot \vec{x} \in H$

Como $x, y \in H$ implica que $x+y \in H$ y $c \cdot x \in H$ entonces H es un subespacio vectorial

3.9 Ejemplo 5

Si $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0\}$ por [@sec:ej4] es un subespacio. Por la Proposición anterior

$$H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

es un subespacio, es decir

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1x_1} & +a_{n-1,2}x_2 & \cdots & +a_{n-1,n}x_n & = & 0 \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & \cdots & +a_{n,j}x_n & = & 0 \end{array} \tag{4}$$

Es decir

3.10 Proposición

Sea $V = \mathbb{R}^n$. Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}^{m,n}$ el conjunto solución del sistema

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

es un **subespacio vectorial** de $\mathbb{R}^n$.

3.11 Ejemplo 6

Sea $V = \mathcal{M}^{n,n}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de tamano n. Dar una demostración o un contraejemplo.

- ¿El conjunto de matrices diagonales es un subespacio vectorial?
- ¿El subconjunto de matrices triangulares inferiores es un subespacio vectorial?
- ¿El conjunto de matrices simétricas es un subespacio vectorial?

- ¿El conjunto de matrices invertibles es un subespacio vectorial?

3.12 Suma directa de subespacios

3.12.1 Definición

Si W_1 y W_2 son dos subespacios vectoriales no vacíos de un espacio vectorial $(V,+,\cdot)$ definimos a **la suma** de subespacios W_1+W_2 como

$$W_1+W_2=\left\{v=w_1+w_2\ :\ w_1\in W_1, w_2\in W_2\right\}$$

3.12.2 Definición

Un espacio vectorial es una **suma directa** de W_1 y W_2 si

- Tanto W_1 como W_2 son subespacios.
- Su única intersección es el vector $\mathbf{0}\in V$ $W_1\bigcap W_2=\{\mathbf{0}\}$.
- $V=W_1+W_2$. Es decir, para todo elemento en $x\in V$

3.13 Ejemplo

Sea $\mathtt{v}_1=(1,0)$ y $\mathtt{v}_2=(0,1)$ considere a los subespacios $W_1=\{\mathbf{v}=\alpha\cdot\mathtt{v}_1:\alpha\in\mathbb{R}\}$ y $W_2=\{\mathbf{v}=\alpha\cdot\mathtt{v}_2:\alpha\in\mathbb{R}\}$

¿Se cumple que $W_1\bigcup W_2$ sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

3.14 Combinaciones lineales

Recordamos una definición ya vista para el caso $V = \mathbb{R}^3$.

Sea V un espacio vectorial y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ decimos que $\mathbf{w} \in V$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$$

Observación

Si W es un subespacio y si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in W$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in W$.

¿Por qué?

3.15 Ejemplo 6

Sea X un conjunto del espacio vectorial V. El *subespacio vectorial de V generado por X* es el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores en X.

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v}_m$$

para vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in X$. A dicho subespacio se escribe como $\mathcal{S}(X)$.

3.15.1 Ejemplo

Sean $\mathtt{v}_1 = (1, 2, 0, 3, 0), \mathtt{v}_2 = (0, 0, 1, 4, 0), \mathtt{v}_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$. Sea $W = \mathcal{S}(\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \mathtt{v}_3)$, el espacio generado por los 3 vectores en $\mathbb{R}^5$.

¿Están $\mathtt{x} = (-3, -6, 1, 5, 2) \in W, \mathtt{x} = (2, 4, 6, 7, 8) \in W$?

3.15.2 Observación

Sea $V = (\mathbb{R}^m, +, \cdot)$, considere un conjunto de vectores $U = \{\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_k\} \subset \mathbb{R}^m$ y $W = \mathcal{S}(\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_k)$ el espacio generado por un conjunto de vectores. Formemos la matriz A cuyas columnas sean los vectores de U, es decir $A = [\mathtt{v}_1|\mathtt{v}_2|\ldots|\mathtt{v}_k]$ Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Notar que

$$A\mathbf{x} = \begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1k}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2k}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1x_1} & + & a_{m-1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m-1,k}x_n \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,k}x_n \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m-1,1} \\ a_{m,1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m-1,2} \\ a_{m,2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{m-1,k} \\ a_{m,k} \end{pmatrix} x_k$$

3.15.3 Proposición

Sea A la matriz de los vectores $\{\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_k\}$, como columnas. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados son equivalentes

$$a)\text{El sistema } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ tiene solución}$$
$$b)\mathbf{b} \text{ es combinación lineal de los vectores columna de } A$$

3.15.4 Ejemplo

Demostrar que $\mathcal{S}\{(1,1),(1,-1)\} = \mathbb{R}^2$

Sea $\mathbf{b} = (x, y)$ un vector arbitrario en $\mathbb{R}^2$ para revisar si (x, y) es combinación lineal de $(1,1),(1,-1)$ por la proposición anterior basta con considerar el sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array}\right]$$

3.16 Combinación lineal e independencia lineal

Definición

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, decimos que el conjunto de vectores es **linealmente dependiente** si existe un conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que - No todos los escalaes α_i son simultaneamente cero - Y además

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n = 0 \tag{5}$$

3.17 Subespacios generados por conjuntos de vectores

3.17.1 Definición

Sea A un subconjunto de V, no necesariamente un subespacio, un espacio vectorial, definimos al **subespacio generado por** A como el conjunto de vectores que se expresan como combinaciones lineales de vectores que pertenecen a A. Para referirnos al subespacio generado por A, escribimos $\mathcal{G}(A)$

$$g(A) = \{\mathbf{v} \in V \mid v = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{v}_k \,:\, \mathbf{v}_i \in A,\ \alpha_i \in \mathbb{K}\}$$

Claramente $g(A)$ es un subespacio de V. ¿Por qué?

3.17.2 Propiedades de los subespacios generados

Sea V un espacio vectorial y $U \subset V$ subconjunto no vacío de V, el subespacio generado por U, entonces

1. $g(U)$ es un subespacio de V.
2. $U \subset g(U)$
3. Si $W \subset V$ es un subespacio vectorial de V, tal que $U \subset W$ entonces $g(U) \subseteq W$, es decir, $g(U)$ es el subespacio *mínimo* que contiene a U.

Respuesta

1. Ya se vió por que es un subespacio.
2. Si $v \in U$ entonces $1 \cdot v$ es ua combinación lineal entonces $v \in g(U)$, es decir $U \subset g(U)$.
3. Si $U \subseteq W$ las combinaciones lineales de vectores de U pertenecen a W es decir $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i \in W$ pues W es un subespacio. Pero entonces $g(U) \subseteq W$

3.17.3 Corolario

Si $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ entonces

$$g(A) = \{\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n,\ \alpha_i \in \mathbb{K}\}$$

3.17.3.1 Ejemplo 1

Considere $V = \mathbb{R}^2[x]$ el espacio de polinomipos de grado ≤ 2 y $v_1(x) = x^2 + 1, v_2(x) = x^2 - 1$ y $v_3(x) = x^2 + x + 1$. Sea $W = g(v_1, v_2, v_3)$

¿Cuál de los siguientes polinomios pertenecen a W?

1. $p(x) = 2x^2$

2. $p(x) = 5x^2 + 6x + 5$

3. $p(x) = x^3$

4. $p(x) = 1$

Respuesta

1. $2x^2 \in W$ si existe una combinación lineal de v_1, v_2, v_3 tal que

$$2x^2 = a \cdot v_1(x) + b \cdot v_2(x) + c \cdot v_3(x)$$

$$\begin{aligned} a(x^2+1) + b(x^2-1) + c(x^2+x+1) &= 2x^2 \\ (a+b+c)x^2 + cx + a - b + c &= 2x^2 \end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, comparando los coeficientes de los polinomios del lado izquierdo y lado derecho.

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 2 \\ & & & & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema: $c = 0,\ a = 1,\ b = 1$

$$2x^2 = 1(x^2+1) + 1(x^2-1) + 0v_3(x),$$

es decir $2x^2 \in g(v_1, v_2, v_3)$.

2. De la misma forma, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 5 \\ & & & & c & = & 6 \\ a & - & b & + & c & = & 5 \end{array}$$

Resolviendo el sistema: $c = 6,\ a = -1,\ b = 0$ por lo que $5x^2 + 6x + 5$ es combinación lineal de los vectores

$$5x^2 + 6x + 5 = -1(x^2+1) + 0(x^2-1) + 6(x^2+x+1)\$,$$

es decir $5x^2 + 6x + 5 \in g(v_1, v_2, v_3)$.

3. $x^3 \notin g(v_1, v_2, v_3)$. Pues ninguna combinación lineal de polinomios de 2do grado tendrá grado menor o igual a 2.

4. De igual forma obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 1 \end{array}$$

Resolviendo el sistema: $c = 0,\ a = 1/2,\ b = -1/2$ es decir $1 = \frac{1}{2}(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2-1) + 0 \cdot (x^2+x+1)$, es decir $1 \in g(v_1, v_2, v_3)$.

3.17.3.2 Ejemplo 2

Determinar si $(3,6,9) \in g((1,4,6),(2,5,8))$.

Se desea saber si

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 4 & 5 & | & 6 \\ 6 & 8 & | & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -3 & | & -6 \\ 0 & -4 & | & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -3 & | & -6 \\ 0 & 0 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Como el sistema no es compatible entonces $(3,6,9) \notin g((1,4,6),(2,5,8))$.

Un caso importante de los subespacios generados es cuando el subespacio $g(U) = V$, es decir el subespacio resulta ser **todo** el espacio vectorial V.

3.18 Dependencia lineal de vectores

Los siguientes conceptos nos permiten describir cuando un vector "no depende" de otros. O dicho de otra forma, cuando un conjunto de generador de vectores será "mínimo".

Sea V un espacio vectorial y $U = \{v_1, v2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores, suponga que $\mathbf{w} \neq 0,\ \mathbf{w} \in g(v_1, v2, \ldots, v_n)$ entonces

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{v}_k$$

como $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ entonces existe al menos un escalar $\alpha_i \neq 0$ por lo que la combinación lineal se puede escribir como

$$\mathbf{0} = (-1) \cdot \mathbf{w} + \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{v}_k$$

Es decir, la última condición expresa de otra manera la existencia de un vector (en la combinación lineal) que está en términos de los otros.

3.19 Dependencia lineal de vectores

Definición: Sea V un espacio vectorial, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in V$ se dice que son **linealmente dependientes** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos igual a cero tal que

$$c_1 \cdot \mathbf{x}_1 + c_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

3.20 Observación

Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes entonces al menos un escalar c_i es no nulo, entonces $\mathbf{x}_i$ es combinación lineal de los otros vectores pues

$$\mathbf{x}_i = \sum_{i \neq j} -\frac{c_j}{c_i} \cdot \mathbf{x}_j = \sum_{i \neq j} \beta_j \cdot \mathbf{x}_j$$

3.20.0.1 Ejemplo 1.

Sea $V = \mathbb{R}^3$ verificar si el conjunto $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Considerando las combinaciones lineales, obtenemos el siguiente sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Obteniendo el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 3\beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

es decir $\gamma = -3\beta, \alpha = -2\beta$, entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \beta$$

En particular si $\beta = -1$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

4 Independencia lineal

Sea S un conjunto no vacío de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Se dice que el conjunto de vectores S es **linealmente independiente** si ninguna combinación lineal de vectores de S genera a $\{\mathbf{0}\}$ salvo la combinación lineal *trivial*. Es decir, la única forma de expresar al $\mathbf{0}$ con vectores de S es cuando $\alpha_i = 0$. También significa que ninguno de los vectores de S se puede escribir como combinación lineal no nula, de los otros vectores.

Definición. Decimos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es **linealmente independiente** si

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

implica que $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_k = 0$.

Dicho de otra forma, ninguno de los vectores es combinación lineal de los otros.

4.0.1 Proposición

Si $U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ son linealmente independientes
2. ningún $\mathbf{v}_i$ es una combinación lineal de los otros vectores $\{\mathbf{v}_j\}_{j\neq i}$.
3. ningún $\mathbf{v}_j$ es una combinación lineal de los otros vectores $\{\mathbf{v}_i\}_{i\leq j}$.

4.0.1.1 Ejemplo

¿Son linealmente independientes los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Para probar que los vectores son linealmente independientes partimos de suponer que tenemos una combinación lineal que es igual a $\mathbf{0}$.

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto resulta en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Como la matriz escalonada es triangular entonces $\alpha_3 = 0, 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 0$. Luego los vectores son linealmente independientes.

4.0.1.2 Proposición

Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ también lo es.

4.0.2 Teorema

Sea V un espacio vectorial y S un conjunto de vectores linealmente independientes y sea $\mathbf{v}_0 \in V$ un vector que no pertenece a S. Entonces $S \cup \{\mathbf{v}_0\}$ es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si $\mathbf{v}_0 \in g(S)$. Y $S \cup \{\mathbf{v}_0\}$ es un conjunto linealmente independiente si y sólo si $\mathbf{v}_0 \notin g(S)$.

4.0.3 Proposición

Suponga que $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Si $v = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots \alpha_m \mathbf{v}_m = \beta_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots \beta_m \mathbf{v}_m$ entonces $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,$ $\alpha_m = \beta_m$.

4.0.4 Definición. Conjunto generador

Decimos que U es un conjunto generador de V o bien que U *genera* a V si

$$g(U) = V$$

4.0.4.1 Ejemplo 3

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sea $W = \{(0,1),(1,0)\}$, para todo vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ tenemos que

$$(x_1, x_2) = x_1 \cdot (1,0) + x_2 \cdot (0,1)$$

es decir todo elemento de $\mathbb{R}^2$ es una combinación lineal de vectores de W, entonces $\{(1,0),(0,1)\}$ **genera** a W. De manera más general

4.0.4.2 Ejemplo 4

Sea $V = \mathbb{R}^n$ y sea $W = \{e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \text{ para } i = 1,2,\ldots,n\}$, para todo vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tenemos que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots x_n \cdot e_n$$

4.0.4.3 Ejemplo 5

En $\mathbb{R}^3$ calcular $g(W)$ con $W = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

$$g(W) = \{\alpha \cdot (1,0,0) + \beta \cdot (0,0,1) :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x,0,z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

4.0.4.4 Ejemplo 6

¿Que subespacio generan los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ La pregunta es equivalente a verificar si el sistema tiene solución para cualquier vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x \\ 1 & 2 & 3 & | & y \\ 1 & 3 & 2 & | & z \end{bmatrix}$$

Haciendo la reducción gaussiana obtenemos que el sistema es equivalente a

$$[\mathbf{A}|\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & 2 & | & y - x \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3}y - \frac{z}{3} - \frac{x}{3} \end{bmatrix}$$

Como la matriz escalonada es triangular y sin *ceros* en la diagonal, entonces el sistema tiene solución *para cualquier* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ generan a $\mathbb{R}^3$.

4.0.4.5 Ejemplo 7

Si $V = \mathbb{R}^2[x]$ son los polinomios con grado ≤ 2. Sean $p(x) = 1 + 2x + x^2$ y $q(x) = 2 + x^2$. ¿Es $\{p(x), q(x)\}$ un generador de $\mathbb{R}^2[x]$?

No. Pues V es un espacio de polinomios de grado 2.

4.0.4.6 Ejemplo 6

¿El conjunto de matrices U genera a $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R})$?

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si aplicamos la definición de combinación lineal obtenemos…

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta combinación lineal se puede expresar como un sistema de ecuaciones si aplicamos las operaciones entrada por entrada

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 + \alpha_3 \\ y &= \alpha_1 + \alpha_4 \\ z &= \alpha_2 + \alpha_4 \\ w &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{aligned}$$

Por lo que las combinaciónes lineales resultan en la siguiente matriz extendida del sistema anterior

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & w \\ 0 & 0 & -1 & 0 & z-w \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y-x-z+w \end{array}\right]$$

Como el sistema de ecuaciones tiene solución única para cada (x, y, z, w) entonces las combinaciones lineales de las matrices existen y nos dan igual a la matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

5 Bases de espacios vectoriales

5.1 Generadores de un espacio vectorial

Definición Sea V un espacio vectorial y $U \subset V$, un conjunto de vectores. Decimos que un conjunto de vectores $U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ genera a V si todo vector $\mathbf{v} \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en U.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{v}_k$$

5.1.1 Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ el conjunto de vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ genera a $\mathbb{R}^3$. De igual manera el conjunto de vectores

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & = & (1,0,\ldots,0) \\ \mathbf{e}_2 & = & (0,1,\ldots,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_{n-1} & = & (0,0,\ldots,1,0) \\ \mathbf{e}_n & = & (0,0,\ldots,0,1) \end{array} \tag{6}$$

generan a $\mathbb{R}^n$. Los vectores $\{\mathbf{e}_i \ : \ i = 1, 2 \ldots, n\}$ son llamados la *base canónica*.

5.1.2 Ejemplo

En $\mathbb{R}_n[x]$ el conjunto de monomios $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2, \ldots p_n(x) = x^n$ genera al $\mathbb{R}_n[x]$.

Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ genera al espacio V entonces $\mathbf{x}_{n+1}$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Entonces $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

De manera similar, si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ es linealmente independiente en V entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}$ no puede generar a todo V.

5.2 Proposición

Si un conjunto de vectores $U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ generan a W y un vector, digamos, $\mathbf{v}_j$ es combinación lineal de los otros, entonces, $U/\{\mathbf{v}_j\}$ (eliminar $\mathbf{v}_j$ de U) sigue generando a W.

5.3 Lema de intercambio de vectores

Sea $L = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ dos conjuntos finitos de vectores de V, un espacio vectorial. Suponga que L es un conjunto *linealmente independiente* y S un conjunto *generador* de V. Entonces $n \leq m$ y podemos encontrar $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{m-n}$ **en S** tal que $L \cup \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_{m-n}\}$ es un conjunto generador.

6 Bases de espacios vectoriales

El siguiente concepto es fundamental:

Sea V un espacio vectorial y $U \subset V$, un conjunto de vectores. Decimos que un conjunto de vectores $U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una **base** de V si se cumple

1. todo vector $\mathbf{v} \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en U.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{v}_k$$

2. el conjunto de vectores $U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente

6.0.1 Ejemplo

Determinar si $\{(-1, 2, 3), (2, -3, -6), (1, -3, -2)\}$ forman una base para $\mathbb{R}^3$. Hay que ver si

1. El conjunto de vectores es linealmente independiente.
2. El conjunto genera a todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

Formamos la matriz asociada a la combinación lineal. Aplicando eliminación gaussiana a los vectores

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

De aqui se concluye que si tenemos una combinación lineal de los vectores, $c_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces los coeficientes cumplen con la siguiente ecuación

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & & & c_3 & = & 0 \\ & & c_2 & - & c_3 & = & 0 \\ - & c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}$$

El siguiente sistema tiene una única solución ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$), por lo que el conjunto de vectores es linealmente independiente.

2. Los vectores generan a $\mathbb{R}^3$, es decir, para cualquier vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ hay que probar que existe una combinación lineal de los vectores $\{(-1, 2, 3),\ (2, -3, -6),\ (1, -3, -2)\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & x \\ 2 & -3 & -3 & y \\ 3 & -6 & -2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & y + 2x \\ 0 & 0 & 1 & z + 3x \end{array}\right]$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & & & c_3 & = & z + 3x \\ & & c_2 & - & c_3 & = & y + 2x \\ - & c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & = & x \end{array}$$

Es decir, $c_3 = z + 3x$, $c_2 = y + 2x + z + 3x = 5x + y + z$ y $c_1 = 12x + 2y + 3z$. Por lo que el sistema siempre tiene solución y cualquier vector es combinación lineal de los 3 vectores, es decir,

$\{(-1,2,3),\ (2,-3,-6),\ (1,-3,-2)\}$ es un conjunto generador. Y por tanto $\{(-1,2,3),\ (2,-3,-6),\ (1,-3,-2)\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.

6.1 Espacio vectorial finito-dimensional

Definición Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ es una conjunto generador del espacio V entonces decimos que el espacio vectorial es de dimensión finita o finito dimensional si $\mathcal{B}$ es un conjunto finito .

6.2 Teorema

Sea V un espacio vectorial, suponga que es de dimensión finita. Entonces

1. V contiene una base con un número finito de elementos

2. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son dos bases de V entonces tienen el mismo número de elementos.

Demostración

1. Como V es de dimensión finita, considere al conjunto $\mathcal{B}$, generador de V con el menor número de vectores. $\mathcal{B}$ es un conjunto generador. Suponga que no es linealmente independiente, entonces existe al menos un vector en $\mathcal{B}$ tal que $v \in g(\mathcal{B}/\{v\})$ pero entonces $g(\mathcal{B}/\{v\})$ genera a V, lo cual no es posible pues $\mathcal{B}$ tenía el menor número de vectores que generan a V.

2. Si $\mathcal{B}$ es una base con n elementos. Sea $\mathcal{B}'$ otra base de V, suponga que tiene m elementos. Por el lema de intercambio de renglónes (5.3) como $\mathcal{B}'$ es un conjunto linealmente independiente de vectores y $\mathcal{B}$ es un conjunto generador de V entonces $\mathcal{B}'$ tiene a lo más n elementos, es decir $m \leq n$. Intercambiando los roles tenemos que $n \leq m$.

6.3 Dimensión de un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. La **dimensión** de V es el número elementos que tiene cualquier base de V

6.3.1 Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimension n. Entonces

1. Todo conjunto de vectores linealmente independiente de V tiene *a lo más* n elementos.

2. Cualquier conjunto generador de vectores de V tiene al menos n elementos.

3. Si S es un subconjunto de V con n elementos, entonces las siguientes condiciones son *equivalentes*:

1. S es linealmente independiente.

2. S es un conjunto generador de V

3. S es una base de V.

1. Fijemos a $\mathcal{B}$ una base de V, sea $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Como $\mathcal{B}$ es base, entonces genera a todo V y por tanto $l \leq n$.

2. Similarmente, como $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, si $r = \#A$ entonces $n \leq r$.

6.4 Teorema

Si V es un espacio vectoral, tal que $dim(V) = n$ entonces

1. Si $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente entonces $m \leq n$.

2. Si $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ es un conjunto generador entonces $m \geq n$.

3. Si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son linealmente independientes entonces forman una base.

4. Si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son generadores de V entonces forman una base.

El siguiente resultado es útil para verificar si un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.

6.5 Teorema

Sean $\{\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, \ldots,\, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente si y solo si la matriz de vectores columna

$$A = [\,\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 | \ldots | \mathbf{v}_n\,]$$

es tal que $\det(A) \neq 0$

Por el teorema de la [@sec:teom4] esto implica que si n vectores forman una matriz con determinante no nulo entonces forman una base de $\mathbb{R}^n$.

6.5.1 Ejemplo

Encontrar una bases que contenga a $(1,2,3)$ y a $(2,3,4)$. Para calcular una base, primer hay que encontrar una forma de caracterizar al espacio generado por $(1,2,3), (2,3,4)$. Procedemos de manera análoga a lo realizado cuando se verifica que el conjunto de vectores genera a todo $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 2 & 3 & | & y \\ 3 & 4 & | & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -1 & | & y-2x \\ 0 & -2 & | & z-3x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & x \\ 0 & -1 & | & y-2x \\ 0 & 0 & | & x-2y+z \end{bmatrix}$$

Entonces, la combinación lineal existe si y solamente cuando $x - 2y + z = 0$. Basta encontrar un vector que no cumple con la ecuación $x - 2y + z = 0$ para tener a un vector $\omega\mathbb{R}^3$ tal que $\omega \notin \mathcal{G}((1,2,3),(2,3,4))$. Por ejemplo, $\omega = (1,0,1)$ no cumple con la ecuación anterior y por tanto no está en el espacio generado por los dos vectores. De entrada, entonces $U = \{(1,2,3),(2,3,4),(1,0,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & 4 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Este último sistema implica que $c_3 = 0, c_2 = 0, c_1 = 0$. De manera similar, verificamos que generan a todo el espacio vectorial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & x \\ 2 & 3 & 0 & | & y \\ 3 & 4 & 1 & | & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & x \\ 0 & -1 & -2 & | & y-2x \\ 0 & -2 & -2 & | & z-3x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & x \\ 0 & 1 & 2 & | & y-2x \\ 0 & 0 & 2 & | & z+x-2y \end{bmatrix}$$

Como la matriz escalonada es una matriz triangular entonces el sistema tiene solución única y por tanto, todo vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ se puede obtener como una combinación lineal de $U = \{(1,2,3),(2,3,4),(1,0,1)\}$.

Es decir, $U = \{(1,2,3),(2,3,4),(1,0,1)\}$ es *una base* de $\mathbb{R}^3$.

Este proceso, se le suele llamar *extender un conjunto de vectores linealmente independientes* a una base del espacio.

6.6 Consideraciones adicionales

Suponga que deseamos averiguar si $U = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^n$. Considere a la matriz A' con los vectores como *filas*. Calculamos su matriz escalonada *reducida*, A'_{red}, entonces U es generador si y solo sí A'_{red} tiene vectores columna *que generan* a $\mathbb{R}^n$. Esto ocurre si A'_{red} tiene pivotes en cada columna

Suponga que queremos averiguar si $U = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es *base*, por los teoremas vistos se requiere que $k = n$ y que sean linealmente independientes, sea A la matriz con los vectores como *columnas*, si la matriz escalonada reducida de A, $A_{red} = I_n$ entonces U forma una base

6.6.1 Ejemplo

Considere a S como $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- Mostrar que S es generador de $\mathbb{R}^3$.
- Encontrar una base en S
- Encontrar las coordenadas de $(1, 1, 1)$ con respecto a la base

7 Dimensión de subespacios vectoriales

Dado que la definición de subespacio, si M es un subespacio entonces las operaciones de suma y multiplicación escalar hacen que $(M, +\cdot)$ sea un espacio vectorial y por tanto las definiciones anteriores también aplican a M. Es decir, tenemos la siguiente definición, que es una adaptación a la definición de dimensión de un espacio vectorial.

Definición

Sea V un espacio vectorial y $M \subset V$, un subespacio vectorial de V.
Decimos que un conjunto de vectores $U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}, U \subset M$ es una **base** de M si se cumple

1. todo vector $\mathbf{v} \in M$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en U.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \mathbf{v}_k$$

2. el conjunto de vectores $U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset M$ es linealmente independiente.

Observación: Los vectores que forman base del subespacio M deben ser elementos de M.

Y similarmente tenemos la definición de **dimensión de un subespacio**

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y M un subespacio. La **dimensión** de M es el número elementos que tiene cualquier base de M

En el caso de que $M = \{\mathbf{0}\}$ entonces $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

7.1 Proposición

Si V es un espacio vectorial *finito-dimensional* y $M \subseteq V$ es un subespacio de V entonces

1. M es un subespacio finito-dimensional, es decir tiene un conjunto generador finito.

2. $\dim(M) \leq \dim(V)$.

3. Si $\dim(M) = \dim(V)$ entonces $M = V$.

4. Es claro que si V es generado por $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ entonces el mismo conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ genera a M. Es decir, M tiene un conjunto finito de vectores que generan a M y por tanto es *finito dimensional*.

Sea $\mathcal{B}_M = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ una base de M en particular son un conjunto linealmente independiente y por tanto $k \leq \dim(V)$ por el lema de intercambio. Es decir

$$\dim(M) \leq \dim(V)$$

Para ver 3) observe que si $\dim(M) = \dim(V) = n$ entonces $\mathcal{B}_M = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ son un conjunto de n vectores linealmente independientes entonces por el teorema [@sec:teom5], $\det(A) = \det([w_1|w_2|\ldots|w_n]) \neq 0$ por tanto la matriz es invertible, esto implica que para todo vector $\mathbf{v} \in V$ $A\vec{c} = \mathbf{v}$ tiene solución, es decir $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ son linealmente independientes y generan a V entonces $M = g(w_1, w_2, \ldots, w_n) = V$.

7.2 Teorema de expansión

Si V es un espacio vectorial finito dimensional, $\dim(V) = n$ y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ es una lista de vectores linealmente independientes en V y $m \leq n$ entonces V tiene una base $\mathcal{B}_V$ tal que $\mathcal{B}_V = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+2}, \ldots, \mathbf{x}_n\}$.

Dicho de otra forma, todo conjunto de vectores linealmente independientes es una base o esta contenido en una base.

Demostración: Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ vectores l.i. del espacio vectorial V. Suponga que $\dim(V) = n$ y $m = n$, entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ es un conjunto generador y una base de V.

Si $m < n$ entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ no puede generar a V, sea $\mathbf{y}_{m+1} \notin \mathcal{G}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\})$ y por el lema $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_{m+1}\}$ es linealmente independiente. Si $m + 1 < n$ entonces repetimos el nuevo argumento con los $n + 1$ vectores. Tras añadir $m - n$ vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_{m+1} \ldots, \mathbf{y}_{m+n-m}\}$

8 Ejemplos

8.0.1 Ejemplo

Sea $S = g\{(1,0,1),(1,2,-1),(1,-2,3)\}$. Hallar una base para S y su dimensión.

Primero verifiquemos si S es linealmente independiente, como la dimensión es 3, podemos calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (6-2) + \quad 0 \quad + (-2-2) = 0$$

Entonces los vectores no son linealmente independientes y por tanto no pueden formar una base.

Aplicando el método de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto el tercer vector se puede ver como combinación lineal de los dos primeros. Es decir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Removiendo a $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ se puede ver que los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes y que por tanto la dimensión de S es igual a 2.

8.0.2 Ejemplo

Sea $W = \mathcal{G}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ encontrar una base de $\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R})$ a partir de los vectores de W.

Se puede ver que el espacio generado de W es

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Entonces $\alpha = x, \beta = z, \alpha + \beta = y, w = 0$.

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ A = \begin{pmatrix} x & x+z \\ z & 0 \end{pmatrix}, \ x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

{#eq:b1}

Si $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $E_4 \notin W$. Claramente si agregamos a E_4 el conjunto es linealmente independiente pues

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Implica que $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

Ahora sea $Y = \mathcal{G}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Entonces

$$Y = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ A = \begin{pmatrix} x & x+z \\ z & w \end{pmatrix}, \ x, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

{#eq:b2}

Tomemos $E_{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, E_{-2} \notin Y$

Verifiquemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica

$$\begin{array}{ccccccc} a & & & +d & = & 0 \\ a & +b & & & = & 0 \\ & b & & +d & = & 0 \\ & & +c & +d & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$. Como son 4 vectores linealmente independientes y $\dim(\mathcal{M}^{2,2}(\mathbb{R})) = 4$ entonces forman una base.

8.1 Ejemplo 1

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $\mathrm{v}_1 = (1, 1, 2)$ y $\mathrm{v}_2 = (3, 2, -1)$ encuentre un vector v_3 tal que $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 1)$ y $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 0, 2)$ encontrar vectores $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{u}_4$ tal que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$

Si bien la proposición anterior es útil, en ocasiones puede ser más sencillo usar la siguiente idea.

Sea $U = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ el conjunto de vectores linealmente independientes y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base conocida de V. Consideremos la matriz extendida (el espacio generado por la unión de ambos conjuntos)

$$A = [\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \ldots | \mathbf{x}_m | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n]$$

Y reduzcamos con Gauss-Jordan, entonces, como U es un conjunto linealmente independiente, entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ serán básicas y otro conjunto de la base $\mathcal{B}$, digamos $\mathbf{b}_{k_1}, \mathbf{b}_{k_2}, \ldots, \mathbf{b}_{k_{n-m}}$

8.2 Ejemplo 2

Extender el conjunto de vectores linealmente independientes

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

a una base de $\mathbb{R}^4$.

8.3 Ejemplo 3

Sea W el conjunto de vectores en $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tal que $x = z$ y $y = t$.

1. Probar que W es un subespacio.
2. Encontrar una base de W y su dimensión.

3. Completar la base de W para hallar una base de $\mathbb{R}^4$

8.4 Ejemplo 4

Determinar la dimensión, así como una base del espacio generado por

$$\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$$

8.5 Ejemplo 5

Encontrar una base del subespacio $g(\{\mathtt{v}_1,\mathtt{v}_2,\mathtt{v}_3\})$ con $\mathtt{v}_1=(1,-1,2)$, $\mathtt{v}_2=(-2,0,1)$ y $\mathtt{v}_3=(3,-1,1)$.

Sea W_1 y W_2 subespacios da $\mathbb{R}^3$ definidos como

$$W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x+y-z=0\}$$
$$W_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ -x+y=0,\}$$

Obtener la dimensión de $W_1\cap W_2$.Verificar si los siguientes vectores son parte del subespacio vectorial.

$*(1,1,1)$

$*(1,1,-1)$

$*(-1,1,0)$

8.5.1 Ejemplo 6

Encontrar la dimensión del siguiente subespacio de $M^{2,2}(\mathbb{R})$.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^{2,2}(\mathbb{R}) \middle| \, a = d, b = -c \right\}$$

9 Rango de un subespacio generado

Sea A una matriz, que se compone por vectores columna, definimos al *rango* de una matriz como el número de vectores columna que son linealmente independientes

Suponga que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son vectores de un e.v. V, sea $A = [\mathtt{v}_1|\mathtt{v}_2|\ldots|\mathtt{v}_m]$. Entonces $\dim\{\mathcal{G}(\{\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_m\})\} = \mathrm{Rango}(A)$.

Definición

El **rango de un conjunto de vectores** $K = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ es el **mayor** número de vectores que son **linealmente independientes**

10 Coordenadas de un vector respecto a una base

Una propiedad esencial de usar una base en un espacio vectorial es que nos permite expresar cada vector de **manera única** como combinación lineal de sus vectores básicos.

10.1 Definiciones

Un conjunto $\{\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n\}$ de vectores de un espacio vectorial V es una base *ordenada* es una secuencia fija de los vectores $\mathtt{v}_1, \mathtt{v}_2, \ldots, \mathtt{v}_n$ en la base.

Definición

Sea V un espacio vectorial con $\mathcal{B}$ una base **ordenada**.Y un vector $v \in V$, decimos que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ son las **coordenadas de u con respecto de $\mathcal{B}$** si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son *escalares* tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \tag{7}$$

Para referirnos a estas coordenadas usaremos la notación $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$.

Esto significa que, *fijando una base* $\mathcal{B}$, en V podemos corresponder a cada vector $v \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

10.1.1 Ejemplo 1

Consideremos a las bases de $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{\mathsf{e}_1 = (1,0), \quad \mathsf{e}_2 = (0,1)\} \qquad \mathcal{B}' = \{u_1 = (2,2), \quad u_2 = (1,-2)\}$$

Calcular las coordenadas del vector $v = (4,-2)$ con respecto a ambas bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Para la base $\mathcal{B}$ tenemos que

$$(4,-2) = 4\mathsf{e}_1 - 2\mathsf{e}_2 = 4 \cdot (1,0) + (-2) \cdot (0,1)$$

Con respecto a la base $\mathcal{B}'$ tenemos que

$$(4,-2) = 1(2,2) + 2(1,-2)$$

Por tanto, las coordenadas con respecto a cada base son iguales a

$$v = (4,-2)_{\mathcal{B}} \qquad v = (1,2)_{\mathcal{B}'}$$

10.1.2 Ejemplo 2

Mostrar que los vectores

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,1,0,0), \quad \alpha_2 = (0,0,1,1), \\ \alpha_3 &= (1,0,0,4), \quad \alpha_4 = (0,0,0,2) \end{aligned}$$

Encontrar las coordenadas de cada uno de los vectores en la base canónica $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3, \mathsf{e}_4$.

10.2 Cambios de Base

Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ dos bases de un espacio vectorial V de dimensión n. Cualquier vector $x \in V$ lo podemos escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ y como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}'$ Es decir,

$$x \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \qquad x \to (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}'}$$

¿Qué relación hay entre ambas coordenadas?

Como ambas son bases, entonces con respecto a $\mathcal{B}$ tenemos

$$x = x_{11}v_1 + x_{12}v_2 + \ldots + x_{1n}v_n$$

y con respecto a $\mathcal{B}'$ tenemos

$$x = x'_1 w_1 + x'_2 w_2 + \ldots + x'_n w_n$$

Para averiguarlo, supongamos que $\mathcal{B}'$ es la *nueva* base, y como dicha base genera a V entonces para cada elemento de la base $\mathcal{B}$, lo expresamos como combinación lineal de la nueva base.

$$\begin{aligned}
v_1 &= v'_{11} w_1 + v'_{12} w_2 + \ldots v'_{1n} w_n \\
v_2 &= v'_{21} w_1 + v'_{22} w_2 + \ldots v'_{2n} w_n \\
&\vdots \\
v_n &= v'_{n1} w_1 + v'_{n2} w_2 + \ldots v'_{nn} w_n
\end{aligned}$$

Entonces sustituyendo en la primer combinación lineal tenemos que

$$\begin{aligned}
x \quad &= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n \\
&= x_1 (v'_{11} w_1 + v'_{12} w_2 + \ldots v'_{1n} w_n) \\
&\quad + x_2 (v'_{21} w_1 + v'_{22} w_2 + \ldots v'_{2n} w_n) \\
&\quad \ldots \\
&\quad + x_n (v'_{n1} w_1 + v'_{n2} w_2 + \ldots v'_{nn} w_n)
\end{aligned}$$

Factorizando por $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
x \quad = \quad & (x_1 v'_{11} + x_2 v'_{21} + \ldots + x_n v'_{n1}) w_1 + (x_1 v'_{12} + x_2 v'_{22} + \ldots + x_n v'_{n2}) w_2 + \ldots \\
& (x_1 v'_{1,n-1} + x_2 v'_{2,n-1} + \ldots + x_n v'_{n,n-1}) w_{n-1} + (x_1 v'_{1n} + x_2 v'_{2n} + \ldots + x_n v'_{nn}) w_n
\end{aligned}$$

Comparandolo con $x = x'_1 w_1 + x'_2 w_2 + \ldots + x'_n w_n$ como $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ son linealmente independientes entonces

$$\begin{array}{rcl} x'_1 & = & x_1 v'_{11} + x_2 v'_{21} + \ldots + x_n v'_{n1} \\ x'_2 & = & x_1 v'_{12} + x_2 v'_{22} + \ldots + x_n v'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x'_n & = & x_1 v'_{1n} + x_2 v'_{2n} + \ldots + x_n v'_{nn} \end{array}$$

Por tanto llegamos que las coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se relaciona por medio de

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} v'_{11} & v'_{21} & \cdots & v'_{n1} \\ v'_{12} & v'_{22} & \cdots & v'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v'_{1n} & v'_{2n} & \cdots & v'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \tag{8}$$

Definición A la matriz de la ecuación (8) se le denota por $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ y se le denomina como la **matriz cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$**

La matriz cambio de base coincide con la matriz de coordenadas por columnas de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ con respecto a $\mathcal{B}'$.

Además, la matriz es invertible pues en la nueva base $\mathcal{B}'$ las columnas de $\mathcal{Q}$ representan a los vectores linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$, por lo que $\det(\mathcal{Q}) \neq 0$.

10.2.1 Ejemplo

El cálculo de la matriz cambio de base es sencillo cuando los vectores de la nueva base están dados como combinación lineal de los vectores de la otra base. Suponga que $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ y la base anterior esta dada por $\mathcal{B} = \{3v'_1 - v'_2 + v'_3,\ -5v'_1 + 4v'_2 + v'_3,\ 2v'_1 + 2v'_2 - 4v'_3\}$, en este caso si queremos calcular la matriz $Q_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, es decir la matriz cambio de base de $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ esta dada por [

=

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

]

Sea $x = 2v_1 - v_2 + v_3$ calcular las coordenadas con respecto a $\mathcal{B}'$.

10.2.2 Ejemplo

Sean $\mathcal{A} = \{u_1 = (2,-1,0),\ u_2 = (-1,-1,1),\ u_3 = (2,2,-1)\}$ y
$\mathcal{B} = \{u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (-2,1,0),\ u_3 = (1,-2,1)\}$. Hallar la matriz cambio de base.

10.2.3 Ejemplo.

Considere las siguientes bases de $\mathbb{R}^3, B = \{(0,-2,3),(0,1,1),(1,1,0)\}$ y
$C = \{(0,-1,1),(0,3,0),(1,-1,1)\}$.

- Determinar la matriz cambio de base de $C \to B$.
- Determinar la matriz cambio de base de $B \to C$
- Si $[u]_C = (2,1,3)$ encontrar $[u]_{\mathcal{B}}$
- Si $[v]_B = (-1,4,1)$ encontrar $[v]_{\mathcal{C}}$