Sistemas de ecuaciones, eliminación gaussiana II

Álgebra Lineal 2024 JGRV

Sistemas de ecuaciones. Eliminación gaussiana

Analizamos a fondo el método de eliminación gaussiana. Considere el sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2+ & \cdots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2+ & \cdots & +a_{nn}x_n & =b_n
\end{array}
$$

Suponga que $a_{11} \neq 0$ entonces podemos eliminar x_1 de las ecuaciones $i = 2, \ldots, n$, para la $i-$ésima ecuación, multiplicando la primer ecuación por

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \text{para } i = 2, \ldots, n$$

y sumarla a la ecuación i.

Obtenemos el siguiente sistema

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & \cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\
 & a_{22}^{(2)}x_2+ & \cdots & +a_{2n}^{(2)}x_n & =b_2^{(2)} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & +a_{n2}^{(2)}x_2+ & \cdots & +a_{nn}^{(2)}x_n & =b_n^{(2)}
\end{array}
$$

Con $a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i1}a_{1j}$ y $b_i^{(2)} = b_i - m_{i1}b_1$ los nuevos coeficientes del bloque de ecuaciones inferior de tamaño $(n-1) \times (n-1)$. En este paso hemos reducido la primer columna del sistema (salvo el pivote) a 0.

Ahora aplicamos el mismo proceso al sistema de ecuaciones $(n-1)x(n-1)$,

Si $a_{22}^{(2)} \neq 0$ entonces podemos eliminar x_2 de las ecuaciones $i = 3, \ldots, n$ multiplicando la segunda ecuación por

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}, \text{para } i = 3, \ldots, n$$

y restarla a la ecuación i.

Obtenemos el siguiente sistema

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & a_{13}x_3+ & \cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 & \\
 & a_{22}^{(2)}x_2+ & a_{23}^{(2)}x_3+ & \cdots & +a_{2n}^{(2)}x_n & =b_2^{(2)} & \\
 & 0+ & a_{33}^{(3)}x_3+ & \cdots & +a_{2n}^{(3)}x_n & =b_3^{(3)} & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 0+ & a_{n3}^{(3)}x_3+ & \cdots & +a_{nn}^{(3)}x_n & =b_n^{(3)} &
\end{array}
$$

Procedemos, si es posible, de la misma forma.

Después de $k-1$ pasos si $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ entonces podemos eliminar x_k de las ecuaciones $i = k+1, \ldots, n$ multiplicando la segunda ecuación por

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \text{para } i = k+1, \ldots, n$$

y sumarla a la ecuación i.

Procedemos así hasta obtener el sistema triangular

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2+ & a_{13}x_3+ & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}^{(2)}x_2+ & a_{23}^{(2)}x_3+ & \cdots & +a_{2n}^{(2)}x_n & = b_2^{(2)} \\
 & 0+ & a_{33}^{(3)}x_3+ & \cdots & +a_{2n}^{(3)}x_n & = b_3^{(3)} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & \cdots & +a_{n-1n}^{(n-1)}x_n & = b_{n-1}^{(n-1)} \\
 & & 0 & \cdots & +a_{nn}^{(n-1)}x_n & = b_n^{(n-1)}
\end{array}$$

Sustitución hacia atrás

Para $k = n$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

Para $k = n-1$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

Y

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2}^{(n-2)} - a_{n-2,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} - a_{n-2,n}^{(n-2)}x_n}{a_{n-2,n-2}^{(n-2)}}$$

Y en general

$$x_k = \frac{b_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}}$$

Algoritmo de eliminación gaussiana

El algoritmo en pseudocódigo:

```
for k= 1, ..., n-1:{

  If A(k,k)=0:
    proc: "intercambiar renglones"
    # A(k,k,) es el pivote
    for i=k+1,...,n:{
      m(i,k) = A(i,k)/A(k,k)            #Calculamos el multiplicador del renglÍón pivotal
      for j=k+1,...,n:{                 #Modifcamos a las columnas del renglón i
        A(i,j)  = A(i,j)-m(i,k)*A(k,j)
        b(i)    = b(i)-m(i,k)b(k)
      }
    }
}
```

Si es posible obtener un sistema triangular entonces, realizamos la sustitución hacia atrás:

Algoritmo de sustitución hacia atrás

```
If a(n,n)=0:
    no existe solución única
Else:
  for k=n-1,n-1,...,1
    suma = b(k)
    for j=k+1,...,n
      suma = suma - a(k,j)*x(j)
    x(k) = suma/a(k,k)
```

Ejemplo

Aplicar el algoritmo al sistema

$$\begin{array}{cccc} 4x & -9y & +2z & =2 \\ 2x & -4y & +4z & =3 \\ -x & +2y & +2z & =1\acute{} \end{array}$$

Reducción y uso de matrices

Como el procedimiento de eliminación gaussiana sólo involucra a los coeficientes, una forma de simplificar los cálculos es por medio de un arreglo que llamaremos **Matriz**. La matriz asociada al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} w & -x & -y & +2z & =1 \\ 2w & -2x & -y & +3z & =3 \\ -w & +x & -y & & =-3 \end{array}$$

Es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Existe otra matriz asociada, la **matriz extendida**

$$
[\mathbf{A}|\mathbf{b}] \quad = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)
$$

Sistemas consistentes e inconsistentes

Definición

Un sistema de ecuaciones es **consistente** si tiene al menos una solución. Si no es consistente entonces se dice ser **inconsistente**.

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen exactamente al mismo conjunto solución. Un sistema de ecuaciones puede ser consistente sin tener una única solución.

Ejemplo 1

Considere el sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{cccc} x & +2y & +3z & =1 \\ 3x & +5y & -2z & =2 \\ 4x & +7y & +z & =3 \end{array}
$$

Aplicamos eliminación gaussiana,

$$
\begin{aligned}
& R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2 \\
& \quad x+2y+3z \quad = \quad 1 \\
& \quad 0x-y-11z \quad = \quad -1 \\
& \quad 4x+7y+z \quad = \quad 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3 \\
& \quad x+2y+3z \quad = \quad 1 \\
& \quad 0x-y-11z \quad = \quad -1 \\
& \quad 0x-y+-11 \quad = \quad -1
\end{aligned}
$$

Ahora, podemos hacer otra operación elemental, sumando $2R_2 + R_1$ a la primera

$$
\begin{aligned}
& R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1 \\
& \quad x+0y-19z \quad = \quad -1 \\
& \quad 0x+y+11z \quad = \quad 1 \\
& \quad 0x-y+-11 \quad = \quad -1
\end{aligned}
$$

Ahora sumamos el segundo renglón al tercero, $R_2 + R_3 \rightarrow R_3$

$$
\begin{aligned}
& R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1 \\
& \quad x+0y-19z \quad = \quad -1 \\
& \quad 0x+y+11z \quad = \quad 1 \\
& \quad 0x+0y+0z \quad = \quad 0
\end{aligned}
$$

No es posible obtener el valor de z de la tercer ecuación. Pero se puede proceder a resolver la segunda ecuación, en función de z

$$
\begin{aligned}
x &= -1+19z \\
y &= \;\;\,1-11z
\end{aligned}
$$

El conjunto solución se puede expresar de la forma

$$
\mathcal{X} = \left\{ \vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3 : \; \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R} \right\}
$$

Por lo que, en caso de no poder obtener una matriz triangular superior en el proceso de eliminación gaussiana, el sistema no tiene una solución **única**. Y de hecho, en éste caso, el sistema tiene una infinidad de soluciones. El conjunto solución es una línea recta.

Este es un ejemplo en el que el sistema es *consistente* aunque no tiene una única solución.

Ejemplo 2

Considere el sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{cccc}
-x & +3y & -2z & =1 \\
-x & +4y & -3z & =0 \\
-x & +5y & -4z & =0
\end{array}
$$

Aplicar eliminación gaussiana, se puede ver que el sistema es *inconsistente*. En efecto, aplicando eliminación gaussiana

$$
\begin{array}{cccc}
-x & +3y & -2z & =1 \\
-x & +4y & -3z & =0 \\
-x & +5y & -4z & =0
\end{array}
$$

Definición

Una matriz de *orden* $m \times n$ es una función $\mathbf{A} : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$. Que se representa como un arreglo rectangular

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

En ocasiones, nos referimos al *orden* de la matriz como su *tamaño*. Si el *orden* de una matriz es $m \times n$ decimos también que la matriz tiene m filas y n columnas. También decimos que la entrada de la matriz en la fila i y coulmna j es el número a_{ij}.

- Al número de la fila i y columna j es el número a_{ij} se le llama elemento (i, j) de la matriz.
- Una matriz es *cuadrada* si $m = n$, es decir si el número de renglones es igual al número de columnas. En cualquier otro caso, decimos que la matriz es rectangular.
- Todo vector fila o vector columna se puede interpretar como una matriz $1 \times n$ o $n \times 1$.
- La *diagonal principal* de la matriz es el arreglo $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$. Toda matriz *cuadrada* tiene una diagonal principal.
- Una matriz *diagonal* es una matriz cuadrada tal que todos los elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero. Podemos referirnos a la matriz diagonal como $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

La condición de que una matriz sea *diagonal* se puede expresar de la siguiente forma

$$a_{i,j} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

- Una matriz es una matriz *triangular inferior* $\mathbf{L}$ de tamaño $m \times n$ si se cumple $L_{ij} = 0$ si $i < j$, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{i1} & l_{i2} & l_{i3} & \cdots & l_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{ni} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Es decir, todas las entradas arriba de la diagonal son nulos

- Una matriz es una matriz *triangular superior* $\mathbf{U}$ de tamaño $m \times n$ si se cumple $U_{ij} = 0$ si $i > j$, para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Es decir, todas las entradas por debajo de la diagonal son nulas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1i} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2i} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3i} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & u_{ii} & \cdots & u_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0' & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- La matriz *identidad* I_n es la matriz *diagonal* cuya diagonal principal es $\{1, \ldots, 1\}$ y sus otras entradas son 0.

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

- La matriz *cero* $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{mn}$ es la matriz con $a_{ij} = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$
- Dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *iguales* si y solo si:
  - $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen el mismo número de renglones y el mismo número de columnas
  - Todos los elementos correspondientes (i, j) son iguales, es decir $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

Toda matriz se puede interpretar como un arreglo de vectores renglón o bien, un arreglo de vectores columna

$$\mathbf{A} = [\, \mathbf{a}_{\cdot,1} | \mathbf{a}_{\cdot,2} | \ldots | \mathbf{a}_{\cdot,n} \,]$$

En este caso los vectores $\mathbf{a}_{\cdot,\mathbf{i}}$ son vectores columna de tamaño $m \times 1$.

Matrices

Ejercicios

Obtener la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales en los ejemplos de la clase.

Para el siguiente sistema

$$
\begin{array}{lllll}
-2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -6x_4 & =0 \\
3x_1 & 6x_2 & -2x_3 & +13x_4 & =6 \\
2x_1 & +4x_2 & & +14x_4 & =12 \\
4x_1 & +8x_2 & -7x_3 & & =-10
\end{array}
$$

La matriz extendida asociada al sistema es

$$
\begin{pmatrix}
-2 & -4 & 2 & -6 & | & 0 \\
3 & 6 & -2 & 1 & | & 6 \\
2 & 4 & 0 & 14 & | & 12 \\
4 & 8 & -7 & 0 & | & -10
\end{pmatrix}
$$

Matrices II

Operaciones con matrices

Al igual que en el caso de los números, se puede definir operaciones aritméticas para las matrices. En ese sentido, las matrices son una generalización de los números y de los vectores

Suma y resta de matrices

En esta sección suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices del mismo orden.

La **suma** de matrices A y B se define como $A+B$ es la matriz con entradas

$$
\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}
a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\
a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}
\end{bmatrix}
$$

La **multiplicación por escalar** $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$
\lambda\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\
\lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

Multiplicación de Matrices

Operaciones con matrices

La multiplicación de una matriz difiere de la suma y resta de matrices.

Para que la multiplicación de dos matrices A y B esté definida, *el número de columnas de A debe ser igual al número de renglones de B*. Supongamos que el orden de A es $n \times m$ y B tiene el orden $m \times p$. Entonces la multiplicación de $A \cdot B$ es la matriz con entradas:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{m}a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m}a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m}a_{1k}b_{kn}\\ \sum_{k=1}^{m}a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m}a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m}a_{2k}b_{kn}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum_{k=1}^{m}a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{m}a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m}a_{mk}b_{kn}\end{bmatrix}$$

Dicho de otra forma, las entradas de la multiplicación da una matriz con entradas $\left(A\cdot B\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$ $=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}$ con $i=1,\ 2,\ \ldots,n$ y $j=1,2,\ldots,p$. El producto de matrices tendrá $n-$ filas y $p-$ columnas.

Ejemplo 1

Si

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 3\\ 5 & -2 & 3 & -4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\\ -1 & -6\end{pmatrix}$$

Calcular $C\cdot A$, $D\cdot C$ y $C\cdot D$.

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot5 & 2\cdot2+1\cdot0+0\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+1\cdot(-2)+0\cdot3 & 2\cdot0+1\cdot3+0\cdot(-4)\\ 3\cdot1+4\cdot2+2\cdot5 & 3\cdot2+4\cdot0+2\cdot(-2) & 3\cdot(-1)+4\cdot(-2)+2\cdot3 & 3\cdot0+4\cdot3+2\cdot(-4)\end{pmatrix}$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 4 & -4 & 3\\ 21 & 2 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

$$D\cdot C=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot3 & 1\cdot1+0\cdot4 & 1\cdot0+0\cdot2\\ 2\cdot2+(-3)\cdot3 & 2\cdot1+(-3)\cdot4 & 2\cdot0+(-3)\cdot2\\ (-1)\cdot2+(-6)\cdot3 & (-1)\cdot1+(-6)\cdot4 & (-1)\cdot0+(-6)\cdot2\end{pmatrix}$$

,

$$D\cdot C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -5 & -10 & -6\\ -20 & -25 & -12\end{pmatrix}$$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1) & 2\cdot0+1\cdot(-3)+0\cdot(-6)\\ 3\cdot1+4\cdot2+2\cdot(-1) & 3\cdot0+4\cdot(-3)+2\cdot(-6)\end{pmatrix}$$

,

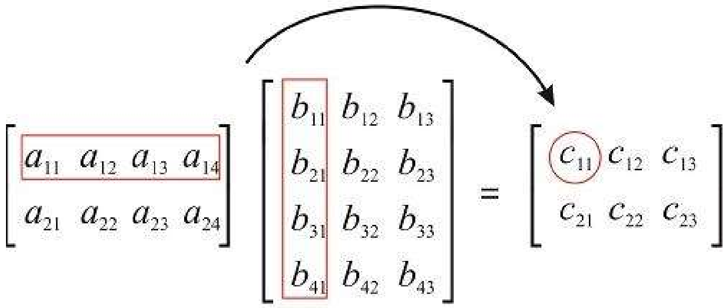
$$C\cdot D=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 9 & -24\end{pmatrix}$$

Observación

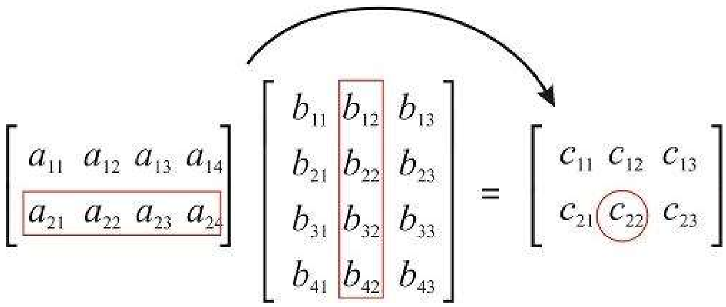
El producto de dos matrices **no** es conmutativo, es decir, el orden de los factores **sí** altera el producto. Los productos $C\cdot D$ y $D\cdot C$ ¡ni siquiera tienen el mismo tamaño!

Esquematicamente podemos definir al producto de la siguiente forma

La entrada c_{11} de la matriz $C=AB$ resultante es el producto punto del renglón 1 de $\mathbf{A}$ $\mathbf{a}_{1\cdot}$ y la columna 1 de $\mathbf{B}$, $\mathbf{b}_{\cdot1}$.



La entrada c_{22} de la matriz $C = AB$ resultante es el producto punto del renglón 2 de $\mathbf{A}$ $\mathbf{a}_{2\cdot}$ y la columna 2 de $\mathbf{B}$, $\mathbf{b}_{\cdot 2}$.



La multiplicación matricial se puede aplicar para los casos en que uno de los elementos es un vector (interpretando a dicho vector como una matriz de tamaño $1 \times n$ o $m \times 1$).

Ejemplo 2

a. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Determinar que productos son posibles $A \cdot B$ y/o $B \cdot A$.

b. Determinar el producto de las matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Respuesta

a)A es una matriz 1×4 y B es una matriz 4×1. Entonces, $A \cdot B$ esta definido pues las columnas de A = los renglones de B y el resultado será una matriz de tamaño 1×1 es decir un escalar.

En este caso $A \cdot B = 1 \cdot 7 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 5$ = (12) = 12. Por otro lado $B \cdot A$ también esta definido y el resultado será una matriz de tamaño 4×4.

$$\begin{bmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot (-1) & 7 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix},$$

Matrices

Propiedades de las operaciones on Matrices

1.- Para toda matriz A y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $1 \cdot \mathbf{A}$ = $\mathbf{A} \cdot 1$ = $\mathbf{A}$.
- $0 \cdot \mathbf{A}$ =$\mathbf{A} \cdot 0$ = $\mathbf{0}$.
- $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.

2.- Si A, B y C tienen el mismo orden.

- $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{B}$.
- $\alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}$.
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Multiplicacion de Matrices

3.- Si A, B y C tienen el orden adecuado.

a. $(A+B)C = AC + BC$.
b. $C(A+B) = CA + CB$.
c. $A(BC) = (AB)C$.

Para ver la *asociatividad*, sea $M = AB$ y $N = BC$ queremos verificar que $AN = MC$. Por definición de la multiplicación de matrices

$$\begin{aligned} m_{ij} = & \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \\ n_{ij} = & \quad \textstyle\sum_{r=1}^{p} b_{ir} b_{rj}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left(MC\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{p} m_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{kj} c_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} n_{kj} = (AN)_{ij}$$

De la fórmula se deduce que el producto de varias matrices dispuestas en un orden determinado no dependen de qué producto se hace primero.

Multiplicacion de Matrices

Por ejemplo, por asociatividad

$$((AB)C)D = (A(BC))D = A((BC)D)$$

Potencias de matrices

Sea M una matriz **cuadrada** de orden n, por definición

$$M^0 = Id(n) \ M^1 = M \ M^2 = MM \ M^3 = MMM.$$

En general

$$
\begin{gathered}
M^p M^q = M^{p+q} \\
(M^p)^q = M^{pq}
\end{gathered}
$$

Observación : Las propiedades de productos notables no se conserven.

$$
\begin{array}{ccccc}
(A+B)^2 & = & (A+B)(A+B) & = A^2 + AB + BA + B^2 \\
(A+B)(A-B) & = & A(A-B) + B(A-B) & = A^2 - AB + BA - B^2
\end{array}
$$

Matriz transpuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$, la matriz transpuesta de A, A^T es la matriz de orden $n \times m$ tal que $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}
$$

Propiedades de la matriz transpuesta

1. $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$.
2. $(AB)^T = B^T A^T$.
3. $\left(A^T\right)^T = A$

La primer propiedad es fácil de verificar.

Si a_{ij} y b_{ij} son las entradas de las matrices A y B respectivamente, entonces las entradas de A^T y B^T son a_{ji} y b_{ji} por lo que

$$
(A^T + B^T)_{ij} = (a_{ji} + b_{ji}) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m, \;\; i = 1, 2, \ldots, n
$$

Pero el último término corresponde con las entradas de $(A+B)^T$.

La segunda propiedad se cumple por la siguiente razón

$$
[(AB)^T]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^T a_{kj}^T = [B^T A^T]_{ij}
$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n y $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ decimos que $\mathbf{A}$ es una matriz **simétrica**. Si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ decimos que es **antisimétrica**.

Matriz conjugada

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ de números complejos, la matriz **conjugada** de A, $\bar{A}$ es la matriz de orden $m \times n$ tal que $(\bar{A})_{ij} = \bar{a_{ij}}$.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ de números complejos, la matriz **transpuesta conjugada** de A, A^* es la matriz de orden $n \times m$ tal que $(A)_{ij} = (\bar{A})_{ji}$. Es decir, la adjunta de A se obtiene al *conjugar* y *transponer* A.

$$A = \begin{pmatrix} -i & 2+3i \\ -4i & 5+2i \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} i & 4i \\ 2-3i & 5-2i \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada y A es igual a su adjunta, entonces se dice que $\mathbf{A}$ es una matriz **hermitiana** o **simétrica según Hermite**.

Matriz Inversa

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n, se dice que X es la matriz **inversa** de A si

$$A \cdot X = X \cdot A = \mathbf{Id}$$

Si dicha matriz existe decimos que A es **invertible**. La matriz inversa de A se escribe como A^{-1}.

Ejemplo

Calcular la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Calcular $3A - 4B$, AC, BC, AD, BD, CD
- Encontrar A^T y $A^T B$ y $A^T C$.

Usando la definición de inversa, calcular A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Encuentra x, y, z tal que A es simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ 4 & 5 & y \\ z & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Encuentra x, y, z tal que A es hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x+2i & yi \\ 3-2i & 0 & 1+iz \\ yi & 1-xi & -1 \end{pmatrix}$$

Forma escalonada y forma escalonada reducida

Estudiamos brevemente el caso en donde hay más incógnitas que ecuaciones, es decir, sistemas $m \times n$ con $m < n$.

Ejemplo 1

Resolver el sistema definido por la matriz extendida

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] \quad = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicando eliminación gaussiana obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es **consistente**. En este caso la matriz tiene forma triangular superior, pero los pivotes no están necesariamente :en_ *la diagonal* sino a la derecha de la diagonal. Decimos que la matriz tiene una forma **escalonada**.

Definición

Una matriz está en forma escalonada si

1. Primero vienen las filas distintas de cero (sino se intercambian) y para cada una de las filas (distinas de cero) los pivotes son las *primeras entradas distintas de cero* en esas filas.
2. Debajo de cada pivote hay una columna de ceros, obtenida de la eliminación.
3. Cada pivote está a la derecha del pivote de la fila anterior.

En ocasiones el método de eliminación gaussiana no produce una forma triangular y no es posible tomar como pivote la diagonal “inmediata”.

Ejemplo 2

Aplicar eliminación gaussiana al siguiente sistema

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & +3x_5 & = 5 \\ 2x_1 & +4x_2 & & +4x_4 & +4x_5 & = 6 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +5x_5 & = 9 \\ 2x_1 & +4x_2 & & +4x_4 & +7x_5 & = 9 \end{array}$$

(Ver notas)

Algoritmo modificado de eliminación gaussiana

Suponga que U es la matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones, después de la $i-$esima iteración.

- Moverse de izquierda a derecha en U, localizar la primer columna que contiene la entrada no nula en la $i-$esima fila o posterior, digamos en la entrada (i, j).

- La nueva posición pivotal será la entrada (i, j).
- Aplicar la eliminación a partir de dicho elemento.
- Si todas las filas posteriores al proceso de eliminación son nulas, el proceso de eliminación gaussiana concluye.

Todo sistema de ecuaciones de tamaño $m \times n$ con más incógnitas que ecuaciones ($m < n$) tendrá una matriz escalonada en forma rectangular. Al tener más variables que incógnitas, habrá $n - m$ parámetros libres.

Teorema

Todo sistema de ecuaciones de tamaño $m \times n$ con $m < n$ o bien es inconsistente o tiene una infinidad de soluciones

Ejemplo 3

Resolver el siguiente sistema

$$\begin{array}{cccc} 2x & +2y & +2z & = 5 \\ x & +2y & -z & = 4 \end{array}$$

$$U \quad = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (R_1 \leftrightarrow R_2) \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$-2R_1 + R2$

$$\rightarrow \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (R_2/2 \leftrightarrow R_2) \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

El resultado del algoritmo de eliminación gaussiana es una matriz con “ceros”, si el sistema tiene solución única, el resultado final es una matriz triangular superior. En otros casos es una matriz que tiene renglones en $0'$s.

##Matriz escalonada reducida

Definición

Una matriz esta en su **forma** (**normal**) **escalonada reducida** si las siguientes condiciones se cumplen

1. Los renglones nulos están debajo de los renglones no nulos.
2. La primer entrada o pivote, para cada renglón no nulo es 1,
3. La columna que contiene el primer elemento no nulo, para un renglón, tiene $0'$s en las otras filas.
4. El pivote de una fila debe estar más a la derecha que los pivotes de filas previas

Ejemplo 4

La primera matriz está en su forma escalonada reducida

$$U \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_2 \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz U_2 no está en su forma escalonada reducida, pues los pivotes del tercer renglón no se encuentra a la derecha del pivote del segundo renglón

Ejemplo 5

Resolver el sistema de ecuaciones usando eliminación gaussiana. Obtener su forma escalonada, resolver la ecuación. Obtener su forma escalonada reducida y resolver la ecuación resultante

$$\begin{array}{cccc} x & -y & +z & =7 \\ 2x & +y & +z & =5 \end{array}$$

Aplicando operaciones elementales obtenemos

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} \quad = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 7 \\ 2 & 2 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad (-2R_1 + R_2 \leftrightarrow R_2) \quad = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 3 & -1 & | & -9 \end{pmatrix}$$

Una forma escalonada es la matriz anterior

$$U \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 3 & -1 & | & -9 \end{pmatrix} \qquad \text{otra forma es} \qquad U' \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & -3 \end{pmatrix}$$

que se obtiene dividiendo el segundo renglón entre 3. Sin embargo, ninguna de las anteriores es la forma escalonada *reducida*. Para obtener la forma escalonada reducida, debemos tener entradas nulas *arriba* y *abajo* de los pivotes y las primeras columnas no nulas en las ecuaciones pivotales deben ser 1. Es decir, para obtener la forma escalonada reducida en la segunda matriz de éste ejemplo hay que eliminar la entrada del primer renglón arriba del segundo pivote (-1).

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} \quad = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & -3 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad (R_2 + R_1 \leftrightarrow R_1) \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & | & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & | & -3' \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Obtener la expresión matricial de la matriz escalonada reducida del sistemas de ecuaciones lineales en los ejemplos de la clase.

Para el siguiente sistema

$$\begin{array}{cccc} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & =0 \\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & =0 \end{array}$$

La matriz del sistema y la matriz extendida asociada $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ al sistema es $\mathbf{A} = ?$ y $[\mathbf{A}|b]$

$$\begin{array}{cccc} & 2x_2 & +3x_3 & =8 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & =5 \\ x_1 & -x_2 & -2x_3 & =-5 \end{array}$$

$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = ?$