# Determinantes

Jose Rodriguez Villarreal

# Determinante

El concepto de determinante surgió con relación al problema de solución de sistemas de ecuaciones lineales. A cada sistema de ecuaciones se le puede asociar un número asociado, llamado *el determinante* del sistema.

## Caso en dos dimensiones

Cuando tenemos el sistema de ecuaciones en dos dimensiones, supongamos que las ecuaciones no son rectas horizontales

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= e \\ cx_1 + dx_2 &= f \end{aligned}$$

Se tiene que el sistema no tiene solución única ssi las rectas son paralelas o bien, las ecuaciones representan a la misma recta. En cualquier caso, obtenemos que las rectas son paralelas si : $-\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$ o bien, debido a que las rectas no son horizontales, $ad - bc = 0$.

# Determinante en 2 dimensiones

Si consideramos la matriz asociada del sistema y reescribimos en términos de sus subíndices,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

La condición sobre las pendientes paralelas se escribe como $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.A dicho término $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se le llama el determinante del sistema.

$$|\mathbf{A}| = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{1}$$

## Ejemplo

Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -18$$

# Permutaciones

Para definir de manera general a los determinantes en varias dimensiones, se usan a las permutaciones. Una permutación es una función
$\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es decir, una permutación es una función que asigna o reordena a $n$ números enteros.

## Ejemplo

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Decimos que $\pi$ tiene una inversión si $\pi$ cambia el orden es decir, si $i < j$ pero $\pi(j) < \pi(i)$.

**Definición** Una permutación $\pi$ es *par* o *impar* de acuerdo a si su número de inversiones es par ó impar.

Para la permutación $\pi$, y para cada entero, analizamos el número de inversiones (o de cambios de orden).

Por tanto la permutación

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

es par pues tiene $4$ inversiones

# Determinantes

La definición general del determinante está dada en términos de las permutaciones de los índices de filas y columnas de una matriz.

## Definición

El **determinante** de la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})\ n \times n$, es el número real

$$|A| = det(\mathbf{A}) \quad = \quad \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{sign}(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

En donde la s uma es sobre todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

## Definición

Suponga que $\alpha$ es una permutación $\alpha(k) = i_k$ con $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ denotamos al signo de la permutación.

### Ejemplo

Calcular el determinante, de acuerdo a la definición

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Consideramos a las permutaciones, en este caso $3! = 6$

$$\sigma_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad sgn(\sigma_1) = 1$$

$$\sigma_2 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad sgn(\sigma_2) = -1$$

$$\sigma_3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad sgn(\sigma_3) = (-1)^2$$

$$\sigma_4 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad sgn(\sigma_4) = (-1)^3$$

$$\sigma_5 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad sgn(\sigma_5) = (-1)^4$$

$$\sigma_6 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad sgn(\sigma_6) = (-1)^6$$

Por tanto el determinante será la siguiente suma

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

## Ejemplo

Calcular el determinante, de acuerdo a la definición

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

# Cálculo de un determinante

Si $A$ es una matriz de orden n, sea $A[i,j]$ la matriz de orden $n-1$ que se obtiene eliminando la $i-$ésima fila y la $j$-ésima columna de $A$. A dichas matrices se les llama *menor* de orden $n-1$

## Teorema de Laplace

Considere un elemento de la matriz de orden $n$, $a_{ij}$, con $i \in \{1,2,\ldots n\}$, $j \in \{1,2,\ldots n\}$, llamamos **cofactor** al determinante $(-1)^{i+j}\det(A[i,j])$ que se obtiene del menor de eliminar la fila $i$ y la columna $j$.

El cofactor se puede obtener factorizando el término $a_{ij}$ del desarrollo

$$\sum_{\pi \in S_n, \pi(i)=j} (-1)^{\text{sign}(\pi)} a_{1\pi(1)} \cdots a_{i-1,\pi(i-1)} a_{i+1,\pi(i+1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

### Teorema de Laplace

Sea $\mathbf{A}$ de orden $n$. Para $i \in \{1,2\ldots,n\}$ se tiene que

$$|A| = det(\mathbf{A}) \quad = \quad (-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}A_{in} \qquad ($$

Y para $j \in \{1,2,\ldots,n\}$

$$|A| = det(\mathbf{A}) \quad = \quad (-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+i}a_{2j}A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj}$$

# Ejemplo

Evaluar el determinante de cada una de las matrices

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

# Propiedades de los determinantes

El determinante tiene las siguientes propiedades

1. El producto de $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ aparece en el determinante de orden $n$ con el signo igual a $signo(\sigma)$, con $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

2. Si una fila o una columna esta compuesta por 0's entonces su determinante es igual a cero.

## Matrices en bloques

Una muestra cuadrada se dice que es una matriz en bloques *semidescompuesta* si sus elementos pueden ser divididos en cuatro matrices de manera que a lo largo de la diagonal figuren matrices cuadradas y una de las otras dos matrices esté compuesta integramente por ceros.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{r+1,r+1} & \dots & \alpha_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

3. El determinante de una matriz en bloques *semidescompuesta* es igual al producto de sus determiantes de sus bloques diagonales.

$$\begin{vmatrix} B & D \\ O & C \end{vmatrix} = |B||C| - O|D| = \det(B)\det(C)$$

Para $n = 2$ se sabe que se cumple. Suponga que es cierta para cualquier matriz de tamaño $n-1$, entonces, ahora suponga que $A = \begin{bmatrix} B & D \\ \mathbf{0}_{sr} & C \end{bmatrix}$ entonces aplicando el desarrollo por cofactores obtenemos

$$|A| = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{n+1}\det(A_{1,n})$$

Pero todas las matrices $A_{1,j}$ son de tamaño $n-1$ y en bloques semidescompuesta, por lo que la hipótesis de inducción implica que se pueden descomponer como producto de determinantes. Paara las matrices $A_{11} \ldots A_{1r}$ se pueden dividir de manera que el cuadrado sea un cuadrado de orden $r$, para estas matrices $\det(A_{1j}) = \det(B_{1j})\det(C)$, para el resto de submatrices $A_{1,r+1}, \ldots A_{1,n}$ se pueden separar de forma que tenemos un renglón con $0's$ por tanto

$$\det(A) = a_{11}\det(B_{11})\det(C) - a_{12}\det(B_{12})\det(C) + \ldots + (-1)^{r+1}\det(B_{1,r})\det($$

4. Si se cambian dos filas o dos columnas de un determinante, el determinante sólo cambia de signo.

5. El valor de un determinante no cambia si la matriz se traspone.

$$\det(A) = \det(A^T)$$

6. Si dos columnas del determinante son iguales, entonces $|A| = 0$.

7. Si dos filas del determinante son iguales, entonces $|A| = 0$

# Propiedades de los determinantes (II)

6. Si se tiene que una columna de $A$ tienen un mismo factor común constante entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & ca_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & ca_{2,i} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & ca_{3,i} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & ca_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & ca_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

es igual a

$$c\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3,i} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{4}$$

# Propiedades de los determinantes (III)

8. Si todo elemento de la $k-$esima columna de un determinante viene dado como la suma de dos vectores columna $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$ entonces

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{1,i} + c_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & b_{2,i} + c_{2,i} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & b_{3,i} + c_{3,i} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & b_{n-1,i} + c_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & b_{n,i} + c_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{1,i} \\ a_{21} & a_{22} & b_{2,i} \\ a_{31} & a_{32} & b_{3,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & b_{n-1,i} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & b_{n,i} \end{vmatrix}$$

9. El valor de un determinante no varía si a todos los elementos de una de sus columnas se suman los elementos de otra columna multiplicada por un escalar.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1,i} + ca_{1,j} & \cdots & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,i} + ca_{2,j} & \cdots & a_{2,j} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,i} + ca_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,j} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & a_{n,i} + ca_{n,j} & \cdots & a_{n,j} & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n,1} \end{vmatrix}$$

La explicación de ésta propiedad se deriva de la aplicación de la propiedad 7

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1,i} + ca_{1,j} & \cdots & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,i} + ca_{2,j} & \cdots & a_{2,j} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,i} + ca_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,j} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & a_{n,i} + ca_{n,j} & \cdots & a_{n,j} & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n,1} \end{vmatrix}$$

Ahora aplicando la propiedad 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1,i} + ca_{1,j} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,i} + ca_{2,j} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,i} + ca_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & a_{n,i} + ca_{n,j} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n,1} \end{matrix} \right.$$

Aplicando ahora la propiedad 5 en el último determinante, por tener la columna $i$ y $j$ iguales, dicho sumando es 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1,i} + ca_{1,j} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,i} + ca_{2,j} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,i} + ca_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & a_{n,i} + ca_{n,j} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n,1} \end{matrix} \right.$$

# Propiedades de los determinantes (IV)

10. Si a la propiedad 8 la combinamos con la propiedad 3, obtenemos *El valor de un determinante no varía si a todos los elementos de una de sus filas se suman los elementos de otra fila multiplicada por un escalar*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \cdots & a_{ii}+ca_{ji} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{matrix} \right.$$

Aplicando las propiedades 6 y 5 de los determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \cdots & a_{ii}+ca_{ji} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{matrix} \right.$$

Se obtiene que el último sumando es 0, y por tanto

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \cdots & a_{ii}+ca_{ji} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix}$$

# Propiedades de los determinantes (V)

11.- Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de orden $n$ entonces

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \tag{13}$$

En particular, la propiedad 11 implica que para matrices cuadradas

$$|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n| = |\mathbf{A}_1| \cdot |\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_n| \tag{14}$$

En particular $|A^k| = |\mathbf{A}|^k$

## Ejercicio

Determinar el valor de los determinantes de las siguientes matrices

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

# Propiedades de los determinantes (VI)

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden $n$. Denotemos por $|A|_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A[i,j])$. Con $|A|_{i,j}$ el cofactor asociado al elemento $a_{ij}$. Entonces el desarrollo por cofactores, del Teorema de Laplace, se puede escribir como

$$\begin{aligned} |A| = det(\mathbf{A}) &= (-1)^{1+i}a_{i1}|A[i,1]| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A[i,2]| + \ldots + (-1)^{i+n}a_{i} \\ &= a_{i1}|A|_{i,1} + a_{i2}|A|_{i,2} + \cdots + a_{in}|A|_{i,n} \end{aligned}$$

Definimos a la matriz *adjunta* (clásica) como la transpuesta de la matriz formada por los cofactores (con su signo asociado), Es decir

$$A^{\star} = \begin{bmatrix} |A|_{1,1} & |A|_{2,1} & \cdots & |A|_{n,1} \\ |A|_{1,2} & |A|_{2,2} & \cdots & |A|_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |A|_{1,n} & |A|_{2,n} & \cdots & |A|_{n,n} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Se puede ver que el Teorema de Laplace implica la siguiente identidad importante

$$A \cdot A^{\star} = |A| \cdot \mathbf{I} = \det(A) \cdot \mathbf{I} \tag{17}$$

Esta identidad tiene como resultado el siguiente teorema

**Teorema** Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden $n$, si el determinante de $A$ no es nulo, es decir $|\mathbf{A}| = \det(A) \neq 0$ entonces $A$ es *invertible* y además la identidad (17) implica

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{\star} \tag{18}$$

Además si $A$ es invertible entonces $|A| \neq 0$ y en particular

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \tag{19}$$

**Teorema: Solubilidad de los sistemas de ecuaciones** Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden $n$, si el determinante de $A$ no es nulo, es decir

$|\mathbf{A}| = \det(A) \neq 0$ entonces el sistema

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \tag{20}$$

tiene una única solución. En particular el sistema homogéneo

$$\mathbf{A}x = \mathbf{0} \tag{21}$$

tiene como única solución a la solución trivial $x = (0, 0, .., 0)$.

# Regla de Cramer

Recordemos el siguiente resultado que es consecuencia del Teorema de Laplace.

$$
\begin{aligned}
det(\mathbf{A}) &= (-1)^{1+i} a_{i1} \det(A[i,1]) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A[i,2]) + \ldots + (-1)^{i+n} \\
&= a_{i1}|A|_{i,1} + a_{i2}|A|_{i,2} + \cdots + a_{in}|A|_{i,n} \\
det(\mathbf{A}) &= a_{1j}|A|_{1,j} + a_{2j}|A|_{2,j} + \cdots + a_{nj}|A|_{n,j}
\end{aligned}
$$

Aquí, $|A|_{1,j} = (-1)^{i+j} \det(A[i,j])$. Pero por otra parte, si $i \neq k$ entonces

$$= a_{i1}|A|_{k,1} + a_{i2}|A|_{k,2} + \cdots + a_{in}|A|_{k,n} \tag{23}$$

sería igual al desarrollo de un determinante con la siguiente estructura, en las filas $i$ y $k$ tendríamos elementos repetidos

$$
\begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,2} \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix} \tag{24}
$$

Por tanto

$$a_{i1}|A|_{k,1} + a_{i2}|A|_{k,2} + \cdots + a_{in}|A|_{k,n} \quad = 0 \tag{25}$$

Igualmente,

$$a_{1j}|A|_{1,k} + a_{2j}|A|_{2,k} + \cdots + a_{nj}|A|_{n,k} \quad = 0 \tag{26}$$

Pues representa al determinante con dos columnas repetidas en $k$ y en $j$.

# Regla de Cramer II

Estos resultados nos sirven para obtener otro método para resolver un sistema de ecuaciones de orden $n$, es decir, de $n$ incógnitas y $n$ ecuaciones.

## Regla de Cramer

Suponga que $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ es la matriz asociada al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1x_1} & +a_{n-1,2}x_2 & \cdots & +a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & \cdots & +a_{n,j}x_n & = & b_n \end{array} \tag{27}$$

Si $\det(A) \neq 0$ entonces el sistema tiene una solución única. Y además

$$x_i = \tfrac{D_i(b)}{\det(A)} \tag{28}$$

Con

$$D_i(b) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n,i} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{29}$$

## Ejemplo

Encontrar $x, y$ y $z$ mediante la regla de Cramer

$$\begin{array}{ccccc} x & +4y & -z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 0 \\ 2x & & +3z & = & 0 \end{array} \tag{30}$$

Verificamos la primera condición de la Regla de Cramer.

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por cofactores en la tercera fila:

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{3+1} 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot (4 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + 3 \cdot (1 \cdot 1 - 4 \cdot 1) = 10 - 9 = 1.$$

Calculamos las soluciones usando (28)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3}{1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot (1)}{1} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot (-2)}{1} = -2$$

# Métodos de evaluación de determinantes

## Simplificación por operaciones elementales

La fórmula del Teorema de Laplace (desarrollo por cofactores) nos sirve para calcular de manera recursiva un determinante. En caso de que haya una fila $i$ con todos los elementos de dicha fila, salvo uno, igual a cero, el determinante es igual a

$$D = a_{ij}|A|_{ij}$$

Para poder aplicar esta fórmula, puede ser necesario operaciones elementales de manera similar a las aplicadas en eliminación gaussiana. A diferencia de eliminación gaussiana las operaciones pueden ser aplicadas por fila o por renglón

## Ejemplo

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales, eliminamos los elementos de la tercer columna salvo el último renglón $-4R_1 + R_4 -> R_4$ y $3R_1 + R_2 -> R_2$.

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+5}(-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

Ahora aplicamos eliminación gaussiana para simplificar la primer columna $2R_2 + R_1 -> R_1, -3R_2 + R_3 -> R_3$ y $-2R_2 + R_4 -> R_4$

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$D = 2\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 13 & -17 & -13 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$D = 2\begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 13 & -17 & -13 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 13 & -17 & -13 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$D = 2 \cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 9 & -13 \\ 10 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 9 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-129) = -1032$$

# Ejemplo

Calcular el determinante aplicando sus propiedades

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{3+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$|A| = 2 \cdot 16 - 40 + 48 = 40$$

# Determinante de matrices triangulares

Aplicando la definición, calcular el determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por cofactores en la primera fila,

$$D_n = \quad a_{11} \cdot D_{n-1} \quad \text{con} \quad D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,3} & \cdots & 0 \\ a_{n,2} & a_{n-1,3} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por cofactores en la primera fila de $D_{n-1}$, obtenemos la siguiente forma recursiva, notar que $D_{n-2}, D_{n-3}, \ldots, D_2$ son triangulares

$$D_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot D_{n-2} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot D_{n-3} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot D_{n-4} = \ldots$$

$$D_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \tag{31}$$

## Ejemplo

Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} \tag{32}$$

## Ejemplo

Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0 \tag{33}$$

# Relaciones recursivas

Esté método consiste en desarrollar o transformar por medio de operaciones elementales o bien por medio del desarrollo por cofactores, expresándolo mediante determinantes de la misma forma pero de orden inferior. La igualdad de dicha relación se llama *relación de recurrencia*.

1. Hallar una relación de recurrencia entre el determinante original y los de orden menor.
2. Se calculan directamente tantos determinantes de orden inferior como haya en el 2do miembro de la relación de recurrencia.
3. Los determinantes de orden superior y su fórmula general se calculan usando la relación de recurrencia.

## Ejemplo particular

Supongamos que la relación de recurrencia tiene la forma

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$$

Supongamos que $q \neq 0$ y $\alpha$ y $\beta$ son las raíces de $x^2 - px - q = 0$ entonces $p = \alpha + \beta$ y $q = -\alpha\beta$. Entonces

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} D_n - \alpha D_{n-1} = &\quad \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \\ D_n - \beta D_{n-1} = &\quad \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) \end{aligned}$$

Aplicando la relación de recurrencia obtenemos

$$\begin{aligned} D_n - \alpha D_{n-1} = &\quad \beta^{n-2}(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \\ D_n - \beta D_{n-1} = &\quad \alpha^{n-2}(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) \end{aligned}$$

$$|D_n = \quad \tfrac{\alpha^{n-1}(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) - \beta^{n-1}(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})}{\alpha - \beta}$$

Simplificando

$$D_n = \quad \alpha^n C_1 + \beta^n C_2$$

con $C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}$ y $C_2 = \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}$

# Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 \end{vmatrix} \tag{34}$$

Si $D_n$ es el determinante con la estructura anterior y con $n$ elementos y $D_{n-1} $ es el determinante con la misma estructura pero con $n-1$ elementos, notemos que $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$. Resolvemos la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ con raíces $x = 3, 2$ Por tanto $D_n = 3^{n-1}(D_2 - 2D_1) - 2^{n-1}(D_2 - 3D_1)$, calculando los determinantes $D_2 = 19$ y $D_1 = 5$, por tanto $D_n = 3^{n-1} \cdot 9 - 2^{n-1} \cdot 4 = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

# Método de variación de elementos del determinante

Si a todos los elementos se les agrega un mismo número $x$, el determinante aumenta en el producto del número $x$ por la suma de sus cofactores algebraicos de todos los elementos del determinante.

Es decir

$$D^{+x} = \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}+x & a_{1,3}+x & \cdots & a_{1,n}+x \\ a_{2,1}+x & a_{2,2}+x & a_{2,3}+x & \cdots & a_{2,n}+x \\ a_{3,1}+x & a_{3,2}+x & a_{33}+x & \cdots & a_{3,n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}+x & a_{n-1,2}+x & a_{n-1,3}+x & \cdots & a_{n-1,n}+x \\ a_{n,1}+x & a_{n-1,2}+x & a_{n,3}+x & \cdots & a_{n,n}+x \end{vmatrix}$$

y

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{33} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Entonces

$$label:eq:D^{+x} = \quad D + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j} \tag{35}$$

# Ejemplo

Calcular el determinate

$$D^{+x} = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Este determinante se puede ver como $D^{+x}$ con $D$ igual a

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 - x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix}$$

Entonces, de acuerdo a la fórmula

$$D^{+x} = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdot (a_n - x) + x \sum_{i=1}^{n} (a_1 - x)(a_2 - x) \cdots (a_{i-1} - x)(a_{i+1} - x$$

Factorizando

$$D^{+x} = (a_1 - x)(a_2 - x) \cdot (a_n - x)(1 + \frac{x}{a_1 - x} + \frac{x}{a_2 - x} + \cdots + \frac{x}{a_n - x})$$