Espacios Vectoriales

Jose Rodriguez Villarreal

1 Espacios Vectoriales

1.1 Definición

Un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ también llamado un espacio vectorial real o espacio vectorial complejo, consta de lo siguiente:

1. Un conjunto V, cuyos elementos se llaman vectores.
2. Una operación binaria en V, llamada suma de vectores, denotada por $+$, y que cumple lo siguiente:

- I.1 Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, se cumple que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (conmutatividad).
- I.2 Para todos $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ y $\mathbf{z} \in V$, se cumple que $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (asociatividad).
- I.3 Existe un elemento en V llamado cero y denotado por $\vec{\mathbf{0}}$ tal que $\vec{\mathbf{0}} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, pata todo $\mathbf{x} \in V$ (existencia del neutro aditivo).
- I.4 Para todo $\mathbf{x} \in V$ existe un elemento $-\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0$ (existencia de elementos inversos).

3. Una operación binaria en V, llamada producto de vectores, denotada por $\cdot$, y que cumple lo siguiente:

- II.1 Para todo $\mathbf{x} \in V$, se tiene que $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, con $1 \in K$.
- II.2 Para todo $\mathbf{x} \in V$ y para todo λ y $\mu \in k$, se tiene que $\lambda(\mu \cdot \mathbf{x}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{x}$.
- II.3 El producto por escalar es distributivo, es decir,

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}, \\ \lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}, \end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

1.2 Definición

Si el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es el campo de los números reales se dice que V es un espacio vectorial **real**. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que es un espacio vectorial **complejo**.

1.3 Proposición

En todo espacio vectorial

$$0 \cdot \vec{x} = \vec{0} \qquad \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \text{ para todo } x \in V,\ \lambda \in \mathbb{K} \qquad (1)$$

$$\lambda \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{si y sólo si } \lambda = 0 \text{ ó } \vec{\mathbf{x}} = \vec{0} \qquad (2)$$

Demostración

1. Si $\mu = 0$ en $II.3$ entonces, sumando $-(\lambda \cdot \mathbf{x})$

$$\begin{aligned}
\big(\lambda + 0\big) \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \\
\lambda \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \\
\mathbf{0} &= \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} \\
\mathbf{0} &= 0 \cdot \mathbf{x}
\end{aligned}$$

2. si $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ en $II.3$

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{0}) &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{0} \\
\lambda \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{0} \\
\mathbf{0} &= \lambda \cdot \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Esto prueba (eq. 1).

Ahora suponga $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, si $\lambda \neq 0$ entonces $1 = \lambda \frac{1}{\lambda}$ y por tanto en $II.2$

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \cdot \big(\lambda \cdot \mathbf{x}\big) = \mathbf{0} \qquad (3)$$

1.4 Proposición

Para todo $\mathbf{x} \in V$,

$$(-\lambda) \cdot \mathbf{x} = -\lambda \cdot \mathbf{x} \qquad (4)$$

Por la propiedad II.3

$$\lambda \cdot \mathbf{x} + (-\lambda) \cdot \mathbf{x} = (\lambda \cdot \mathbf{x} + (-\lambda)) \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Sumando el inverso aditivo, entonces $-\lambda \cdot \mathbf{x} = \big(-\lambda\big) \cdot \mathbf{x}$. De manera similar $-\lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (-\mathbf{x})$

1.5 Leyes de cancelación

Sea V un espacio vectorial, $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ escalares.

1. Si $\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{y}$ y $\alpha \neq 0$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. Si $\alpha \cdot \mathbf{x} = \beta \cdot \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ entonces $\alpha = \beta$.

Demostración:

Como $\alpha \cdot (-\mathbf{y}) = -\alpha \cdot \mathbf{y}$

$$\alpha \cdot (\mathbf{x} + (-\mathbf{y})) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot (-\mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (5)$$

por la proposición sec. 1.3 como $ $ entonces $x + (-y) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Para ii) la proposición sec. 1.4

$$(\alpha - \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\beta \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + (-\alpha \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, por la proposición sec. 1.3 $\alpha - \beta = 0$, es decir $\alpha = \beta$.

1.6 Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, definimos a la operación $resta$

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y})$$

1.7 Ejemplos

1.7.1 Espacio Tridimensional ($\mathbf{R}^3$)

1.7.2 Definición

Para cada entero positivo n, definimos el espacio Euclidiano n-dimensional como:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Un elemento particular de $\mathbb{R}^n$, digamos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tambi'en pueden denotarse como vector columna

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se le llama **vector** (o vector columna)}. Las cantidades x_i se le llaman componentes (o elementos de x), a n se le llama el orden de x.

La operación de suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^3$ se formulan como:

- Dados (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, se define:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

- Dados $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}$, se define:

$$c\ (x_1, x_2, x_3) = (cx_1, cx_2, cx_3)$$

Entonces $\mathbb{R}^3$ con la suma y producto definidos anteriormente es un **espacio vectorial real**. Para esto verifiquemos que $\mathbb{R}^3$ con la operación $+$ cumple las siguientes propiedades

1. Para todos $x, y \in \mathbb{R}^3$, se cumple que $x + y = y + x$ (conmutatividad).

Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$, entonces

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = y + x$$

2. Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, se cumple que $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatividad). Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, y $z = (z_1, z_2, z_3)$, entonces

$$\begin{aligned}
(x + y) + z &= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3) \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3)) \\
&= (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)) \\
&= x + (y + z)
\end{aligned}$$

3. Existe un elemento en $\mathbb{R}^3$ llamado cero el vector $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$, pata todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (existencia del neutro aditivo). Sea $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ entonces si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tenemos

$$\mathbf{0} + \mathbf{x} = (0, 0, 0) + (x_1, x_2, x_3) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$$

- *4. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ existe un elemento $-\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (existencia de elementos inversos). Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, definimos el inverso de $\mathbf{x}$ por $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$, entonces tenemos*

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) &= (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3) \\
&= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3)) \\
&= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\mathbb{R}^3$ con la multiplicación escalar $\cdot$ cumple

- Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, con $1 \in \mathbb{R}$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$1 \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot (x_1, x_2, x_3) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, 1 \cdot x_3) = (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}$$

- Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y para todo λ y $\mu \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu\mathbf{x}) &= \lambda(\mu(x_1, x_2, x_3)) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = (\lambda(\mu x_1), \lambda(\mu x_2), \lambda(\mu x_3)) \\
&= ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)x_2, (\lambda\mu)x_3) = (\lambda\mu)\mathbf{x}
\end{aligned}$$

El producto por escalar es distributivo, es decir,

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x},$$
$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, tenemos

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot \cdot\mathbf{x} &= (\lambda + \mu) \cdot (x_1, x_2, x_3) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2, (\lambda + \mu)x_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \lambda x_3 + \mu x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\mu x_1, \mu x_2, \mu x_3) = \\ &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda \cdot ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \lambda \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \lambda(x_3 + y_3)) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3) = \\ &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}.\end{aligned}$$

para todos $\lambda, \mu \in K$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

1.8 Ejemplos (continuación)

1.8.1 Ejemplo 2

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ y sea $V = \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$, es decir $f \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ si $x : I \to \mathbb{R}$.

Definimos a la suma en este conjunto $x, y \in V$, $x + y : I \to \mathbb{R}$ $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ para todo $t \in I$ La multiplicación por un escalar $\lambda \cdot x : I \to \mathbb{R}$ se define como $(\lambda \cdot \mathbf{x}) = \lambda x(t)$. A dicho espacio vectorial real se le suele llamar el **espacio de funciones** .

1.8.2 Ejemplo 3

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio con grado $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

para algún entero positivo, con las operaciones

$$\begin{aligned} p + q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & (p + q)(t) = p(t) + q(t) \\ \lambda \cdot p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & (\lambda \cdot p)(t) = \lambda p(t) \end{aligned}$$

Al espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales se le suele denotar con $\mathbb{R}[x]$. De manera similar, a los polinomios con coeficientes complejos se le suele referir con $\mathbb{C}[x]$

1.8.3 Ejemplo 4

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y m un entero positivo fijo, sea V el conjunto de polinomios con grado menor o igual a m, con m un entero positivo *fijo*. Es decir $p \in V$ si $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, función

$$p(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

A dicho espacio se le suele referir como $\mathcal{P}^m(\mathbb{R})$.

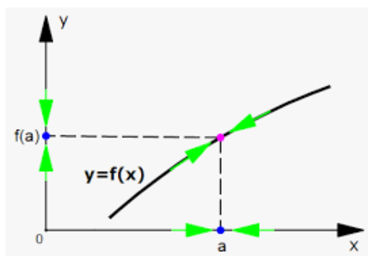
1.8.3.1 Ejemplo 4 b)

En particular, el conjunto de polinomios de grado menor o igual 3, $V = \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Con la suma de polinomios y la multiplicación por un número real.

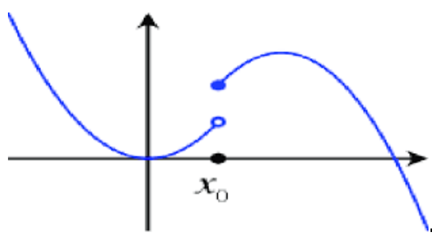
1.8.4 Ejemplo 5

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y sea $V = C([a, b]; \mathbb{R})$, es decir $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ si $f : I \to \mathbb{R}$ y f es una función continua.

Definimos a la suma en este conjunto $x, y \in V$, $x + y : I \to \mathbb{R}$ $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ para todo $t \in I$ La multiplicación por un escalar $\lambda \cdot x : I \to \mathbb{R}$ se define como $(\lambda \cdot \mathbf{x}) = \lambda x(t)$. A dicho espacio vectorial real se le suele llamar el **espacio de funciones continuas**.



Una función que no es continua sería una función con la siguiente gráfica



1.9 Ejemplo 6. El espacio de matrices $\mathcal{M}^{m,n}(\mathbb{K})$

Sea K un campo y $\mathcal{M}^{m,n}(\mathbb{K})$ el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con entradas $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Cada matriz representa un *vector* en este espacio.

Si $A, B \in \mathcal{M}^{m,n}(K)$ definimos a la suma de matrices

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \cdots & a_{1i} + b_{1i} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2i} + b_{2i} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{ii} + b_{ii} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{ni} + b_{ni} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

y la multiplicación por escalar $c \in \mathbb{K}$

$$c \cdot A = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{21} & \cdots & ca_{1i} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2i} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{ii} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{ni} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix}$$

1.9.1 Ejemplo 7. El espacio vectorial producto

Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales, sobre un mismo campo $\mathbb{K}$.

$$V := V_1 \times V_2 = \{(u, v) \,|\, u \in V_1,\ v \in V_2\}$$

Es decir, V es el producto cartesiano de V_1 y V_2. Sea $+_1$ y $+_2$ las sumas de V_1 y V_2 respectivamente y $\bullet_1$, $\bullet_2$ el producto escalar de cada espacio. Entonces definimos a la suma $\oplus$ en $V_1 \times V_2$ como

$$(u_1, v_1) \oplus (u_2, v_2) = (u_1 +_1 u_2, v_1 +_2 v_2\,')$$

y la multiplicación escalar en V como

$$\lambda \bullet (u, v) = (\lambda \bullet_1 u, \lambda \bullet_2 v)$$

2 Subespacios Vectoriales

Sea W un subconjunto no vacío de V, se dice que W es un de V, si satisface las siguientes propiedades:

1. Para todos x y $y \in W$, se tiene que $x + y \in W$, es decir, W es cerrado bajo la suma.
2. Para todo $x \in W$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, es decir W es cerrado bajo producto por escalar.

2.1 Ejemplo 1

Todo espacio vectorial V es un subespacio de sí mismo. V es el subespacio más grande de V.

2.2 Ejemplo 2

Sea

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$$

es decir, $x \in W$, entonces $x = (x_1, x_2, 0)$. Entonces W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Para esto verifiquemos que si $x, y \in W$, entonces $x + y \in W$. Como $x, y \in W$, $x = (x_1, x_2, 0)$ y $y = (y_1, y_2, 0)$, luego

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in W$$

.

Ahora veamos que si $x \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in W$, lo cual se sigue de que si $x = (x_1, x_2, 0)$, entonces

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2, 0) = (\lambda x_1, \lambda x_2, 0) \in W$$

2.3 Ejemplo 3

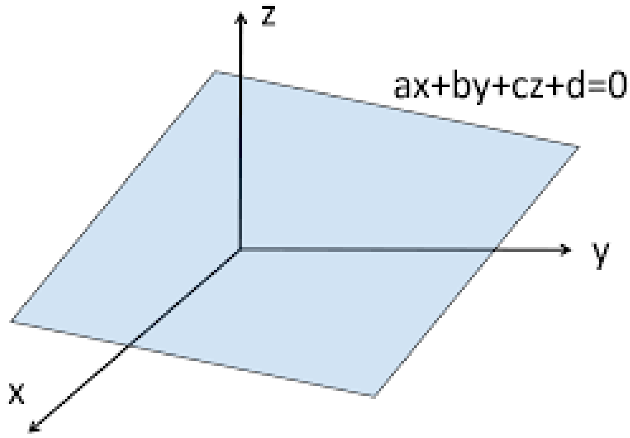
Sea $\omega \in V$, con $\omega \neq \mathbf{0}$. Considere al conjunto $W_\omega = \{\mathbf{v} = \alpha \cdot \omega : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Es un subespacio vectorial propio de V, es decir $W_\omega \subset V$.

2.4 Ejemplo 4

Sea $V = \mathbb{R}^n$, y sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ números reales. El conjunto H de todos los vectores $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = 0 \qquad (1)$$

es un espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si todos los escalares α_i son nulos, entonces, $H = V$. Si no todos los escalares son nulos entonces H se dice ser un *hiperplano* de $\mathbb{R}^n$, que pasa por el origen.



Ejemplo 4

$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0\}$

Es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$ y $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in H$

entonces

1) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$;

2) $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0$

Sumando

$a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \ldots + a_n(x_n + y_n) = 0$

entonces $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in H$

$c \cdot \vec{x} = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$ entonces de 1)

$c(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n) = c \cdot (0) = 0$

$a_1(cx_1) + a_2(cx_2) + \ldots + a_n(cx_n) = 0$

entonces $c \cdot \vec{x} \in H$

Como $x, y \in H$ implica que $x + y \in H$ y $c \cdot x \in H$ entonces H es un subespacio vectorial

2.5 Ejemplo 5

Si W_1 y W_2 son dos subespacios de V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial de V.

Por ser subespacios vectoriales, $\mathbf{0} \in W_1$ y $\mathbf{0} \in W_2$ entonces $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$ entonces, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$.

Si $\alpha \in \mathbf{R}$ y $\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$ entonces $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W_1$ y $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W_2$ por que son subespacios. Entonces $\alpha \cdot \mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$.

2.6 Ejemplo 6

Si V es un espacio vectorial, y L es una colección de índices es decir $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ o $L = \{1, 2, 3\}$ o $L = \mathbb{N}$, etc. tales que $W_i \subset V$ es un subespacio para $i \in L$. Entonces

$$W = \bigcap_{i \in L} W_i$$

es un subespacio vectorial.

2.7 Ejemplo 7

Si $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n | a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0\}$ por sec. 2.4 es un subespacio. Por el ejemplo anterior

$$H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

es un subespacio, es decir

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1x_1} & +a_{n-1,2}x_2 & \cdots & +a_{n-1,n}x_n & = & 0 \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & \cdots & +a_{n,j}x_n & = & 0 \end{array} \tag{2}$$

Es decir

2.8 Proposición

Sea $V = \mathbb{R}^n$. Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}^{m,n}$ el conjunto solución del sistema

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

es un **subespacio vectorial**.

2.9 Combinaciones lineales

Sea V un espacio vectorial y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ decimos que $\mathbf{w} \in V$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si hay escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$$

Observación Si W es un subespacio y si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in W$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in W$.

2.10 Ejemplo 6

Sea X un conjunto del espacio vectorial V. El *subespacio vectorial de* V *generado por* X es el conjunto de todas sus combinaciones lineales

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_m \cdot \mathbf{v}_m$$

para vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. A dicho subespacio se escribe como $\mathcal{S}(X)$.

2.11 Combinación lineal e independencia lineal

Definición

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, decimos que el conjunto de vectores es **linealmente dependiente** si existe un conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que - No todos los escalaes α_i son simultaneamente cero - Y además

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n = 0 \tag{3}$$