Vectores

Jose Rodriguez Villarreal

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Desde un punto de vista intuitivo, un **vector** es un objeto con magnitud, dirección y sentido bien definidos. En ese sentido, los vectores en la figura representan a un mismo vector. En física y en varias aplicaciones, esta definición es suficiente para trabajar con los vectores, sin embargo, en álgebra lineal el concepto de vector requiere definir a los *espacios* de vectores, más que a los vectores.

En esta parte del curso veremos a los vectores de manera intuitiva, usaremos las ideas vistas en física y consideramos a los vectores como un objeto que tiene magnitud, dirección y sentido. Además definiremos a los *espacios vectoriales* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$ (para n un natural). Inicialmente definidos simplemente como conjuntos.

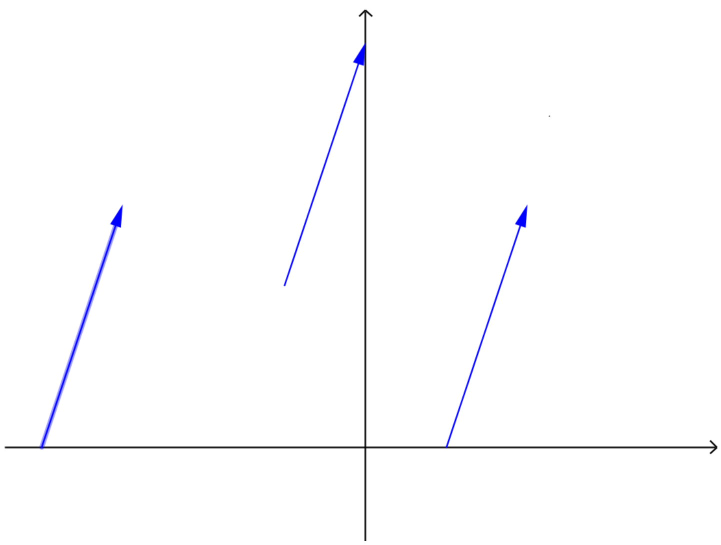


Figura 1.1

Desde el punto de vista algébraico, un vector es un elemento de un **espacio vectorial**. Esta definición se verá más adelante a detalle, pero podemos dar una definición simplificada en este momento: un vector en el espacio puede ser pensado como una terna ordenada de números reales.

Los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1. Definición

Sea n un número entero positivo. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de todas las $n-$tuplas de números reales. En estas secciones nos centraremos en las definiciones para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Nota

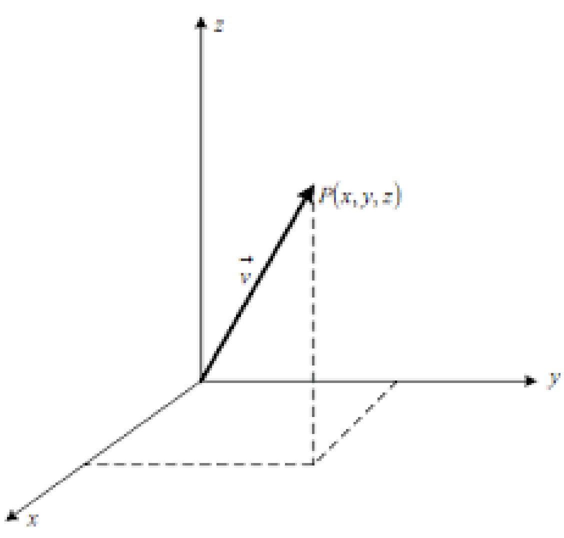
Para vectores se puede usar de manera indistinta otras notaciones:

$$(a_1 , a_2 , a_3) \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad [a_1 , a_2 , a_3] \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

2. Definición de igualdad

Dos vectores son iguales si todas sus componentes correspondientes son iguales

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$$



Vectores en $\mathbb{R}^3$

Operaciones algebraicas en $\mathbb{R}^3$

3. Definición de la suma de vectores

La *adición* de dos vectores se define como el vector resultante de sumar *componente por componente* a los vectores. Es decir

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{a+b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Una forma concisa de escribir a las entradas del vector es por medio de los índices

$$\text{Para } k \in \{1, 2, 3\} \quad (a+b)_k = a_k + b_k$$

4. Definición de la multiplicación de un escalar y un vector

La multiplicación de un *número* $c \in \mathbb{R}$ o $c \in \mathbb{C}$ por un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ se denota como

$$c \cdot \vec{v} = c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de vectores

Propiedad conmutativa

$$\text{Para todo } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$$

Propiedad asociativa

$$\text{Para todo } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$$

Definición del elemento neutro. Definimos al $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ como el vector $\vec{0} = (0, 0, 0)$

Existencia del elemento neutro en la suma

$$\text{Para todo } \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}_1 + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

Existencia del elemento inverso en la suma

$$\text{Para todo } \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^3 \text{ existe } -\vec{v}_1 \text{ tal que} \qquad \vec{v}_1 + -\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_1) = \vec{0}$$

Propiedades de la multiplicación

Leyes distributivas

Las leyes distributivas combinan a la suma de vectores y a la multiplicación por escalar. En pocas palabras, la multiplicación de un vector por una suma de escalares “se reparte” en cada escalar

$$\text{Para todo } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ y } \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad (\alpha + \beta) \cdot \vec{v}_1 = \alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_1$$

E igualmente, la multiplicación de un escalar por la suma de vectores “se reparte” en cada vector.

$$\text{Para todo } \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ y } \ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \overrightarrow{u},$$

Existencia del elemento neutro en la multiplicación escalar.

En $\mathbb{R}$ el elemento neutro en la multiplicación es el número 1. Analogamente, en $\mathbb{C}$ el elemento neutro es el número complejo $1 + i0$. La siguiente propiedad simplemente se refiere a que el mismo elemento es neutro en la multiplicación por un vector

$$\text{Para todo } \vec{v}_1 \in \mathbb{R}^3 \qquad 1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

Asociatividad de la multiplicación

La última propiedad de la multiplicación significa que la multiplicación es asociativa, en caso de tener dos escalares, no importa el orden en que se realice la multiplicación. Por ejemplo, multiplicar μ por $\vec{v}$ y luego multiplicarlo por λ es igual a multiplicar primero los escalares μ y λ y posteriormente multiplicar al vector.

$$\text{Para todo } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ y } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v}$$

Norma

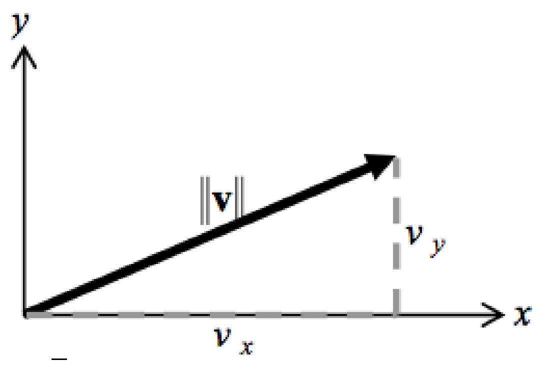
Sea $v \in \mathbb{R}^2$ un vector, definimos a la norma del vector v como

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

En general, si $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector en el espacio de n dimensiones, definimos de manera análoga a su norma como

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Veremos a detalle el concepto de norma en otra sección del curso. Por el momento nos contentaremos con indicar que la norma definida es *la norma euclidiana* y representa la *longitud* del vector, del origen al punto que representa el vector.



Norma del vector v

5. Combinaciones lineales

Combinaciones lineales de vectores

Una **combinación lineal** de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ es el vector resultante de “combinar” los vectores por medio de la siguiente operación:

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{v}_i,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son números reales (llamados coeficientes de la combinación lineal). En otras palabras, una combinación lineal es una suma de múltiplos de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$.

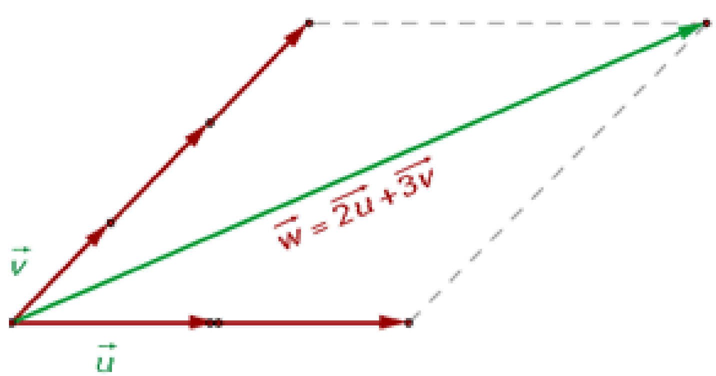


Figura 1.2

Ejemplo

Para los vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

obtener las combinaciones lineales:

- $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 =$
- $4\vec{v}_1 = 4\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 =$
- $\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 =$
- $\frac{1}{2}\vec{v}_1 - 1\vec{v}_2 =$

Geometricamente, *cualquier* vector del plano puede ser representado como combinación lineal de vectores que no son colineales.

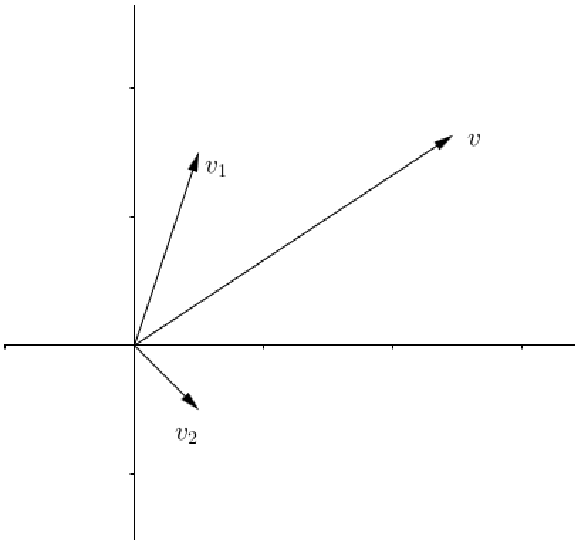


Figura 1.3

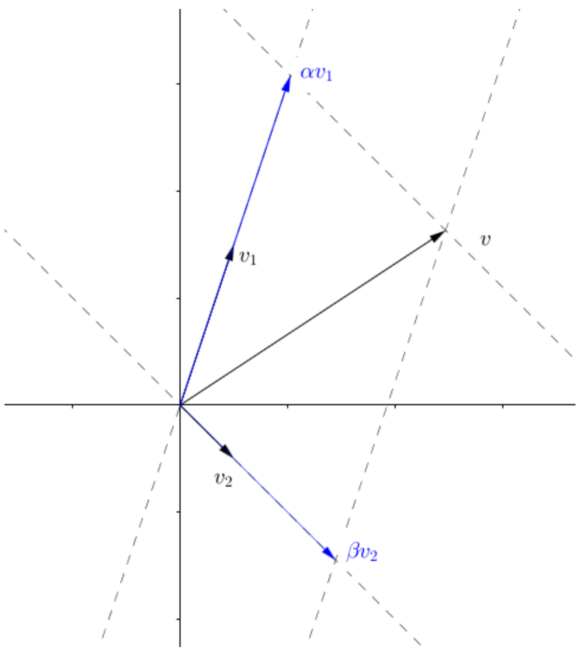


Figura 1.4

Por ejemplo, para representar el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, podemos trazar rectas paralelas a los vectores, pasando por el origen y por el extremo del vector $\vec{v}$

como en la figura.

De forma mas general, decimos que un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es una **combinación lineal** de los k vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ cuando existen coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tales que

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k.$$

Para decidir si un vector es combinación lineal de otros, debemos determinar si existen números $c_1, c_2, \ldots, c_k$. En coordenadas:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ \vdots \\ v_{m3} \end{pmatrix}, \cdots, \vec{v}_k = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ v_{3k} \\ \vdots \\ v_{mk} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

vemos que encontrar los coeficientes de la combinación lineal, en caso de que estos existan, equivale a resolver una ecuación

$$c_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \\ \vdots \\ v_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ \vdots \\ v_{m2} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ \vdots \\ v_{m3} \end{pmatrix} + \cdots + c_k \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ v_{3k} \\ \vdots \\ v_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

que, a su vez, es equivalente a

$$\begin{pmatrix} v_{11}c_1 + v_{12}c_2 + v_{13}c_3 + \cdots + v_{1k}c_k \\ v_{21}c_1 + v_{22}c_2 + v_{23}c_3 + \cdots + v_{2k}c_k \\ v_{31}c_1 + v_{32}c_2 + v_{33}c_3 + \cdots + v_{3k}c_k \\ \vdots \\ v_{m1}c_1 + v_{m2}c_2 + v_{m3}c_3 + \cdots + v_{mk}cx_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ todo vector es una combinación lineal de los vectores $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$. En efecto, si $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ entonces

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

A los vectores $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$ y $\hat{k} = (0, 0, 1)$ se les llama la **base canónica**.

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{v}_1 = (1,2,1)$, $\vec{v}_2 = (2,1,2)$, $\vec{v}_3 = (3,3,2)$ y $\vec{v}_4 = (1,5,-1)$ en $\mathbb{R}^3$ determinar los vectores $\vec{u} = \vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$, $v = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4$, $\vec{w} = \vec{v}_3 - \frac{1}{3}\vec{v}_2 - \frac{4}{3}\vec{v}_1$.

Aplicando las operaciones entre vectores $u = (0,0,0)$, $v = (-1,-5,2)$, $w = (1,0,0)$.

Ejemplo

Dados $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ¿es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ una combinación lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$?

Debemos averiguar si existen constantes α, β, γ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}$$

Sustituyendo a los vectores por sus coordenadas obtenemos el siguiente *sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{ccc} \alpha + 3\beta + 2\gamma & = & 1 \\ 2\alpha + 2\beta & = & 1 \\ 3\alpha & = & 1 \end{array}$$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos que $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$ y $\gamma = \frac{1}{2}$. Entonces el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$