

## Aula 3

### 3 Dia 3: Funções exponenciais e logaritmos.

**Exercício 3.1.** Identifique cada uma das funções abaixo no gráfico 1.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad g(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x, \quad h(x) = 2^x, \quad p(x) = 2\left(\frac{4}{3}\right)^x, \quad q(x) = \left(\frac{9}{10}\right)^x$$

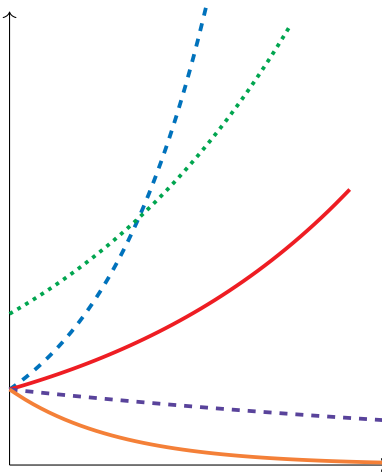


Figure 1: Gráficos para o Exercício 3.1

**Exercício 3.2.** Sem utilizar calculadora, associe cada uma das funções

(I)  $f(x) = 2^x$

(II)  $g(x) = \frac{1}{3^x}$

(III)  $h(x) = 4^x$

(IV)  $p(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$

à cada uma das linhas na tabela abaixo.

$x$	0.1	0.5	2	3.4
(a)	1.14			
(b)		0.91		0.53
(c)		1.41	4	
(d)				0.023

**Exercício 3.3. The Walking Dead.** Uma praga zumbi se espalhou na USP São Carlos. Uma enfermeira do pronto-atendimento da Universidade avistou o primeiro caso da praga, o paciente zero.

- (a) Para monitorar o crescimento da população zumbi na USP São Carlos, a enfermeira coletou os seguintes dados:

Dias após o paciente zero	0	6	9	12
Número de zumbis	1	9	27	81

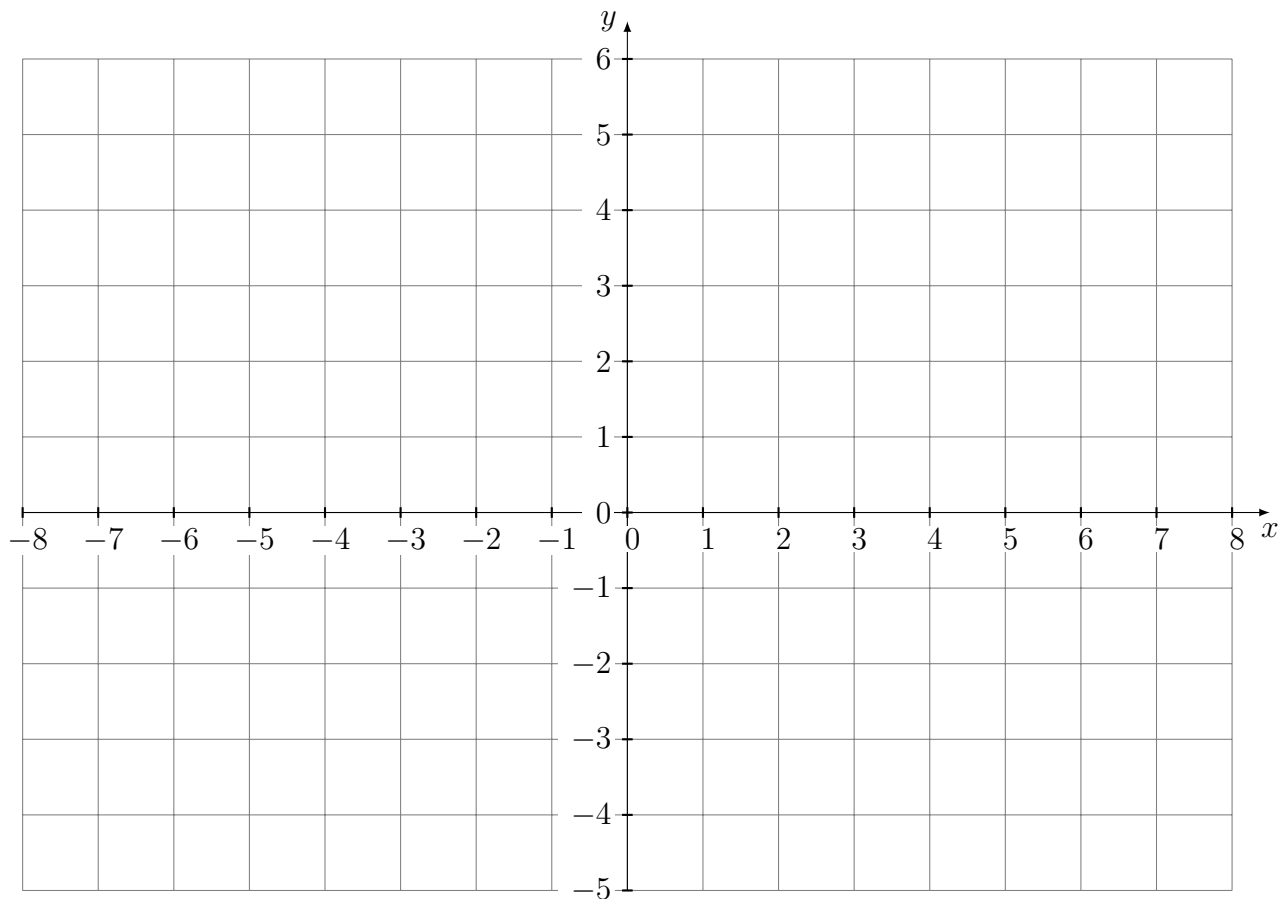
Uma função linear ou exponencial seria o melhor modelo? Por quê?

- (b) Escreva uma função  $Z(t)$  do tipo apropriado para modelar o crescimento da população zumbi, com  $t$  medido em dias após o paciente zero.
- (c) A população de São Carlos é de aproximadamente 280 000 pessoas. Usando seu modelo, quanto tempo levará até que todos, exceto uma pessoa, estejam infectados? Faça um chute “de cabeça”, e depois calcule com auxílio de calculadora.

**Exercício 3.4.** Com o auxílio de uma calculadora, calcule vários valores das seguintes funções<sup>†</sup>,

$$f(x) = \log_3(x), \quad g(x) = 3^x, \quad h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad p(x) = \log_{1/2}(x),$$

e utilize esses valores para esboçar os gráficos dessas funções. Esboce também  $y = x$ ; o que você observa?



<sup>†</sup>Lembre que  $\log_b(x)$  só está definido para  $x > 0$ , mas  $b^x$  está definido para  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 3.5.** Considere a seguinte tabela de valores aproximados das funções dadas

$x$	0.1	0.5	2	3.4
$2^x$	1.1487	1.4142	4	10.5561
$0.3^x$	0.8865	0.5477	0.09	0.0166
$(3/2)^x$	1.0844	1.2247	2.25	3.9692

Utilizando somente a tabela acima e sem calculadora, você pode completar 1 valor por coluna na tabela abaixo. Complete-os.

$t$	0.5477	10.5561	1.4142	0.8865	1.2247	0.5477	1.0844
$\log_2 t$							
$\log_{0.3} t$							
$\log_{3/2} t$							

**Exercício 3.6. Livros caros.** Com o tempo,  $t$ , em anos desde o início de 1990, os preços dos livros didáticos aumentaram a uma taxa de 6.7% ao ano, enquanto a inflação foi de 3.3% ao ano (hipoteticamente, claro). Suponha que ambas as taxas sejam taxas de crescimento contínuo.

- Encontre uma fórmula para  $B(t)$ , o preço de um livro didático no ano  $t$ , se ele custava R\$ $B_0$  em 1990.
- Encontre uma fórmula para  $P(t)$ , o preço de um item no ano  $t$ , se ele custava R\$ $P_0$  em 1990 e seu preço subiu de acordo com a inflação.
- Em que ano o livro dobra de valor quando comparado ao ano inicial
- Um livro didático custava R\$50 em 1990. Quando o preço previsto será o dobro do preço que teria resultado apenas da inflação?
- Qual a taxa *mensal* de crescimento dos preços dos livros?

**Exercício 3.7. Resolvendo equações.** Resolva a equação e mostre cada etapa do seu trabalho.

- $3^{2x-7} = 27$
- $2^x = e^{x+1}$
- $3^{2x} - 3^x - 6 = 0$
- $\log_2(5-x) + \log_2(5+x) = 4$

*Observação:* Para o item (b), recorde que  $e \approx 2.71828$  é um valor numérico, chamado de número de Euler, assim como  $\pi \approx 3.1415$  também é um valor numérico especial, conhecido como Pi. Em geral, denotamos  $\log_e(x) = \ln(x)$ . Veremos no futuro porque esse número  $e \approx 2.71828$  é tão especial.

**Exercício 3.8. Esboçando exponenciais e logaritmos.** Esboce o gráfico da função e indique seu domínio e imagem.

- $f(x) = 2^{1-x}$
- $f(x) = 3 + 2^x$

(c)  $f(x) = \log_3(x - 1)$

(d)  $f(x) = 2 - \log_2(x)$

**Exercício 3.9.** Encontre a inversa da função  $f(x) = 2^{3^x}$  e indique seu domínio e imagem.

**Principais perguntas pra ter em mente e fixar idéias sozinho/em casa:**

- Que tipos de fenômenos as funções exponenciais modelam?
- Em que situações é natural ter que considerar funções logarítmicas?
- Quais são as propriedades básicas das funções logarítmicas?