Definição de funções: Relações, tabelas e gráficos

1. Considere as seguintes regras de associações:

(a) Associa a cada número natural, seu conjunto de divisores (um número natural a divide um número natural b se existe outro número natural c tal que $b = ac$).

(b) Associa a cada casa, o conjunto de pessoas que moram nela.

(c) Associa a cada pessoa que possui pelo menos uma casa, o conjunto de casas em que ela mora.

Alguma das associações acima define uma função? Justifique.

Solução 1. Lembremos que uma função $f\colon X \to Y$ associa a cada elemento de X um **único** elemento de Y.

(a) Não é função. Por exemplo, os divisores de 8 são $\{1, 2, 4, 8\}$, logo essa relação associa ao número 8 quatro elementos.

(b) Não é função. Por exemplo, se três amigos dividem uma casa, então a relação associa a esta casa três elementos. Além disso, se uma casa estiver ociosa (não mora ninguém), então a associação não está bem definida (não associa a nenhum elemento).

(c) Se considerarmos que uma pessoa mora em apenas uma casa, então é uma função. Mas se considerarmos que uma pessoa pode morar em mais de uma casa ao mesmo tempo, então não é uma função.

2. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = x + 16$

(b) $f(x) = 3x - 2$

(c) $f(x) = x^2 + 12x + 6$

(d) $f(x) = (x - 3)^2$

Solução 2. Os gráficos estão na próxima página.

(a) Vamos encontrar a interseção do gráfico com os eixos. Temos que $f(0) = 16$, logo o ponto $(0, 16)$ pertence ao gráfico de f. Se $f(x) = x + 16 = 0$, então $x = -16$, logo o ponto $(-16, 0)$ pertence ao gráfico de f. Como f é uma função afim, seu gráfico é uma reta.

(b) Pelo mesmo raciocínio do item (a), encontramos os pontos $(0, -2)$ e $(\frac{2}{3}, 0)$.

(c) A função f é quadrática, logo seu gráfico é uma parábola. Como o coeficiente que acompanha x^2 é positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima. Temos que $f(0) = 6$, logo o ponto $(0, 6)$ pertence ao gráfico de f. Aplicando a fórmula de Bhaskara, encontramos as raízes $x_+ = -6 + \sqrt{30}$ e $x_- = -6 - \sqrt{30}$, ambas negativas.

(d) Esta é uma função quadrática com raiz dupla em $x = 3$ e $f(0) = 9$.

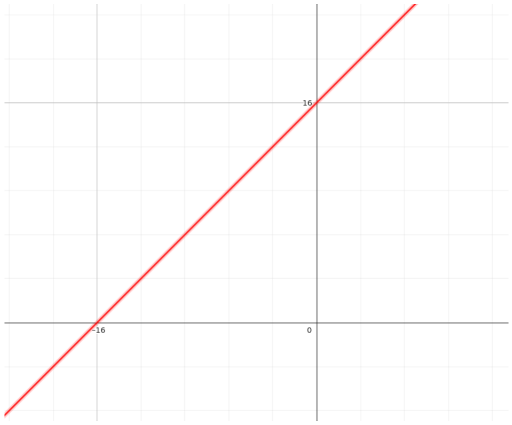
Funções afins, polinômiais e raízes

3. Determine a inclinação e a interceptação no eixo y da linha cuja equação é dada.

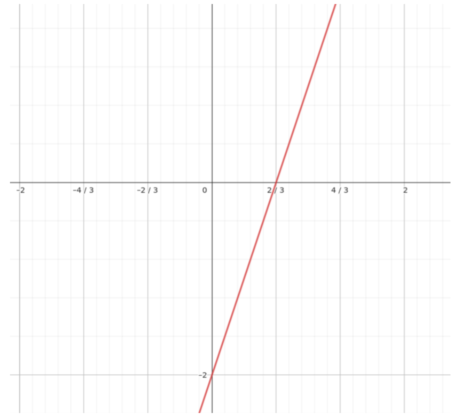
(a) $2y + 5x - 8 = 0$

(b) $7y + 12x - 2 = 0$

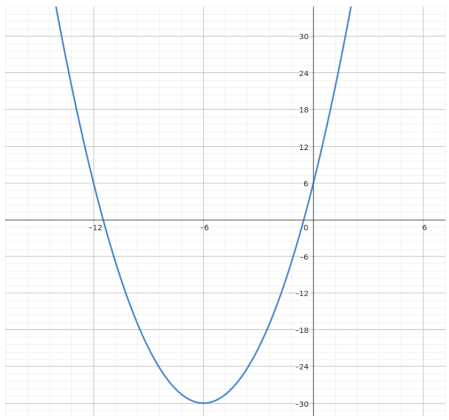
(c) $-4y + 2x + 8 = 0$



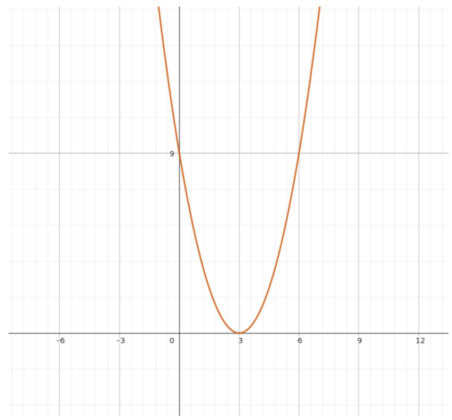
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1: Solução do Exercício 2.

(d) $12x = 6y + 4$

Solução 3. Lembremos que, se uma reta é dada por $y = ax + b$, então a é a inclinação da reta e $(0, b)$ é o ponto de interseção com o eixo y (se $x = 0$, então $y = 0x + b = b$).

(a) $2y + 5x - 8 = 0 \iff 2y = -5x + 8 \iff y = -\frac{5}{2}x + 4$, então a inclinação é $-\frac{5}{2}$ e a interseção com o eixo y se dá em $(0, 4)$.

(b) $7y + 12x - 2 = 0 \iff y = -\frac{12}{7}x + \frac{2}{7}$, então a inclinação é $-\frac{12}{7}$ e a interseção com o eixo y se dá em $(0, \frac{2}{7})$.

(c) $-4y + 2x + 8 = 0 \iff y = \frac{1}{2}x + 2$, então a inclinação é $\frac{1}{2}$ e a interseção com o eixo y se dá em $(0, 2)$.

(d) $12x = 6y + 4 \iff y = 2x - \frac{2}{3}$, então a inclinação é 2 e a interseção com o eixo y se dá em $(0, -\frac{2}{3})$.

4. Cada gráfico na Figura 2 corresponde com uma das equações abaixo. Identifique-os.

(I) $y = x - 5$

(II) $-3x + 4 = y$

(III) $5 = y$

(IV) $y = -4x - 5$

(V) $y = x + 6$

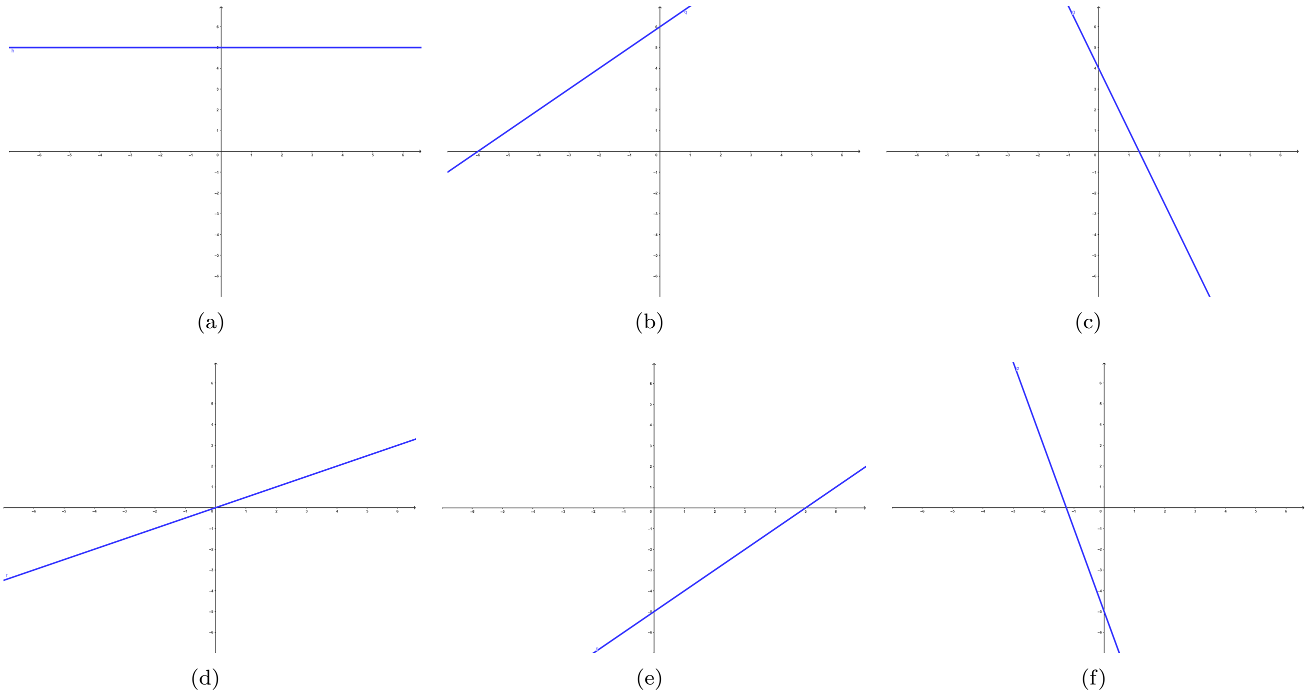


Figura 2: Os gráficos para o Exercício 4.

(VI) $y = \frac{x}{2}$

Solução 4. Para cada caso, o gráfico é:

(I) uma reta que passa em $(0, -5)$ e $(5, 0)$ (e);

(II) uma reta que passa em $(0, 4)$ e $(\frac{4}{3}, 0)$ (c);

(III) uma reta tal que, para todo x, o valor de y é 5 (a);

(IV) uma reta que passa em $(0, -5)$ e $(\frac{-5}{4}, 0)$ (f);

(V) uma reta que passa em $(0, 6)$ e $(-6, 0)$ (b);

(VI) uma reta que passa em $(0, 0)$ (d).

5. Seja $f(x) = \alpha x + \beta$ uma função afim.

(a) Encontre os valores de α e β tais que $f(0) = 2$ e $f(3) = -2$.

(b) Agora encontre os valores de α e β para os quais $f(0) = -2$ e $f(3) = 2$.

(c) Existem valores de α e β para os quais $f(0) = 2$ e $f(3) = 2$?

(d) Existem valores de α e β para os quais $f(0) = 2$, $f(1) = 3$ e $f(2) = 5$?

(e) Mais geralmente, mostre que uma função afim é determinada ao saber seu valor em dois pontos distintos. Isto é, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, existem únicos α, β tais que $f(a) = b$ e $f(c) = d$.

Solução 5. (a) Por um lado, $f(0) = \alpha 0 + \beta = \beta$, por outro, $f(0) = 2$; portanto $\beta = 2$. Agora vejamos que $f(3) = \alpha 3 + \beta = 3\alpha + 2$, sendo que $f(3) = -2$. Então $3\alpha + 2 = -2$, logo $\alpha = -\frac{4}{3}$.

(b) Analogamente, $f(0) = \beta = -2$. Ademais, $f(3) = 3\alpha - 2 = 2$, então $\alpha = \frac{4}{3}$.

(c) Fazendo o mesmo processo dos itens anteriores, chegamos que $\beta = 2$ e $\alpha = 0$. Logo f é uma função constante.

(d) Primeiro, vamos encontrar uma função afim $f(x) = \alpha x + \beta$ tal que $f(0) = 2$ e $f(1) = 3$. Fazendo o mesmo processo dos itens anteriores, chegamos que $\beta = 2$ e $\alpha = 1$, logo $f(x) = x + 2$. Mas veja que, neste caso, $f(2) = 4 \neq 5$, portanto não existem tais α e β.

(e) Temos que $f(a) = \alpha a + \beta = b$ e $f(c) = \alpha c + \beta = d$. Assim, chegamos no sistema linear

$$\begin{cases} a\alpha + \beta = b \\ c\alpha + \beta = d \end{cases}$$

cujas incógnitas são α e β. A matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando seu determinante, temos $\det A = a - c$. Como a e c são distintos, segue que $\det A = a - c \neq 0$, portanto o sistema possui uma solução única. A saber, a solução é $\alpha = \frac{b-d}{a-c}$ e $\beta = b - \frac{b-d}{a-c} \cdot a$

6. O objetivo desse exercício é verificar a fórmula de Bháskara, e identificar consequências da dessa fórmula. Considere o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Seja $\Delta = b^2 - 4ac$. Verifique que'

$$p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

(b) Conclua do item anterior que se $\Delta \geq 0$, as raízes de $p(x)$ são dadas por

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(c) Verifique que

$$x_+ + x_- = -\frac{b}{a}, \quad x_+ x_- = \frac{c}{a}.$$

(d) Verifique que

$$p(x) = a(x - x_+)(x - x_-).$$

(e) Suponha que $\Delta < 0$. Mostre que:

- se $a > 0$, então $p(x) > 0$ para todo x.
- se $a < 0$, então $p(x) < 0$ para todo x.

Solução 6. Estamos supondo $a \neq 0$.

(a) Fazendo uma verificação direta:

$$\begin{aligned} p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] &= a\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= ax^2 + bx + c = p(x) \end{aligned}$$

(b) Temos que

$$p(x) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Aplicando a raiz quadrada nos dois membros, obtemos

$$p(x) = 0 \iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

de onde obtemos as duas raízes

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(c) Verificando diretamente:

$$x_+ + x_- = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_+x_- = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{1}{4a^2}(-b + \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta}) = \frac{1}{4a^2}(b^2 - \Delta) = \frac{1}{4a^2}(b^2 - b^2 + 4ac) = \frac{c}{a}.$$

(d) Verificando diretamente:

$$a(x - x_+)(x - x_-) = a(x^2 - xx_- - xx_+ + x_+x_-) = a(x^2 - x(x_+ + x_-) + x_+x_-) = a(x^2 - x\frac{-b}{a} + \frac{c}{a}) = ax^2 + bx + c.$$

(e) Como $\Delta < 0$, temos que $-\Delta > 0$, então

$$-\frac{\Delta}{4a^2} > 0.$$

Somar um termo maior ou igual a zero não mudará o sinal de $-\frac{\Delta}{4a^2}$, logo

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0.$$

Assim, se $a > 0$, então

$$p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0,$$

enquanto se $a < 0$, então

$$p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] < 0.$$

7. Use o exercício anterior para fatorar os seguintes polinômios.

(a) $x^2 - 3x + 2$.

(b) $4x^2 - 9$.

(c) $3x^2 + x - 2$.

(d) $2x^2 - 5x$.

Solução 7. Precisamos encontrar as raízes de cada polinômio. Podemos aplicar a fórmula de Bháskara, usar "soma e produto" (item (c) do exercício 6) ou qualquer outro método. Depois, aplicamos o item (d) do exercício 6.

(a) Por soma e produto:

$$x_+ + x_- = -\frac{b}{a} = 3, \quad x_+x_- = \frac{c}{a} = 2 \implies x_+ = 2, \quad x_- = 1,$$

logo

$$p(x) = (x - 2)(x - 1).$$

(b) Isolando x, obtemos $x = \pm\frac{3}{2}$, logo $p(x) = 4(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})$.

(c) Por soma e produto:

$$x_+ + x_- = -\frac{1}{3}, \quad x_+x_- = -\frac{2}{3} \implies x_+ = \frac{2}{3}, \quad x_- = -1,$$

logo

$$p(x) = 3(x - \frac{2}{3})(x+1).$$

(d) Por soma e produto:

$$x_+ + x_- = \frac{5}{2}, \quad x_+x_- = 0 \implies x_+ = \frac{5}{2}, \quad x_- = 0,$$

logo

$$p(x) = 2x(x - \frac{5}{2}).$$

8. Considere a seguinte tabela

x	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$
0.2	13.2016	10.6416	202.
-0.2	6.8016	10.6416	198.
20	160330	166410	2000200
-20	159690	166410	1999800
2000	16000000032010	16000064000010	20000020000
-2000	15999999968010	16000064000010	19999980000

Sem usar a calculadora, identifique os polinômios p, q e r dentre as opções abaixo.

$$x^4 + 16x^2 + 10, \quad 5000x^2 + 10x, \quad x^4 + 16x + 10.$$

Solução 8. O polinômio $5000x^2 + 10x$, por ter um coeficiente lider muito maior que o dos demais polinômios, assumirá os maiores valores para x pequeno. Logo $5000x^2 + 10x = r(x)$. O polinômio $x^4 + 16x^2 + 10$ tem um termo quadrático, enquanto $x^4 + 16x + 10$ não tem termo quadrático; portanto $x^4 + 16x^2 + 10$ será maior do que $x^4 + 16x + 10$ para x grande. Logo $x^4 + 16x^2 + 10 = q(x)$ e $x^4 + 16x + 10 = p(x)$.

9. (a) Verifique as igualdades

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a), \quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2).$$

(b) Use o item anterior para encontrar as raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 1$.

(c) Encontre as raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 8$.

(d) Encontre as raízes do polinômio $f(x) = x^3 + 27$.

(e) Dado $a \in \mathbb{R}$, você consegue descrever todas as raízes de $f(x) = x^3 - a^3$?

(f) Verifique a igualdade

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Solução 9. (a) Aplicando a propriedade distributiva, obtemos

$$\begin{aligned}(x-a)(x+a) &= x^2 + xa - xa - a^2 \\ &= x^2 - a^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(x-a)(x^2 + xa + a^2) &= x^3 + x^2a + xa^2 - x^2a - xa^2 - a^3 \\ &= x^3 - a^3.\end{aligned}$$

(b) Primeiro, vamos fatorar o polinômio $f(x)$:

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Veja que 1 é raiz de f, pois $f(1) = (1-1)(1+1+1) = 0$. Veja também que se $\bar{x}$ é raiz do polinômio (x^2+x+1), então $\bar{x}$ é também raiz de f, pois $f(\bar{x}) = (\bar{x}-1)(\bar{x}^2+\bar{x}+1) = (\bar{x}-1)\cdot 0 = 0$. Pela fórmula de Bháskara, as raízes de (x^2+x+1) são

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

logo as raízes de f são $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) Repetindo o processo, temos

$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-1)(x^2+2x+4).$$

Encontrando as raízes de x^2+2x+4:

$$x_{\pm} = -1 \pm i\sqrt{3},$$

logo as raízes de f são $x_1 = 1$, $x_2 = -1 + i\sqrt{3}$ e $x_3 = -1 - i\sqrt{3}$.

(d) Repetindo o processo, temos

$$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-1)(x^2+3x+9).$$

Encontrando as raízes de x^2+3x+9:

$$x_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

logo as raízes de f são $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $x_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(e) Se $a = 0$, então f tem raiz apenas em $x = 0$. Caso contrário, aplicamos o mesmo raciocínio dos itens anteriores:

$$x^3 - a^3 = (x-1)(x^2+ax+a^2).$$

Vamos encontrar as raízes de (x^2+ax+a^2) com a fórmula de Bháskara:

$$x_{\pm} = \frac{-a \pm i\sqrt{3a^2}}{2} = -\frac{a}{2} \pm i\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, as raízes de f são $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{a}{2} + i\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $x_3 = -\frac{a}{2} - i\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(f)

$$\begin{aligned}
&(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\
&= x^n + x^{n-1}a + x^{n-2}a^2 + \cdots + x^3a^{n-3} + x^2a^{n-2} + xa^{n-1} \\
&\qquad - x^{n-1}a - x^{n-2}a^2 - x^{n-3}a^3 - \cdots - x^2a^{n-2} - xa^{n-1} - a^n \\
&= x^n - a^n
\end{aligned}$$

10. Cada gráfico na Figura 3 corresponde com uma das equações abaixo. Identifique-os.

(I) $\frac{x}{2} = y$

(II) $y - x^2 = -4$

(III) $x^2 + 2 = y + 3x$

(IV) $y + 16x = x^3$

(V) $y = -2x^3 - 4$

(VI) $y = x^2$

Solução 10. Para cada caso, vamos isolar y no primeiro membro e identificar o gráfico da função $y(x)$.

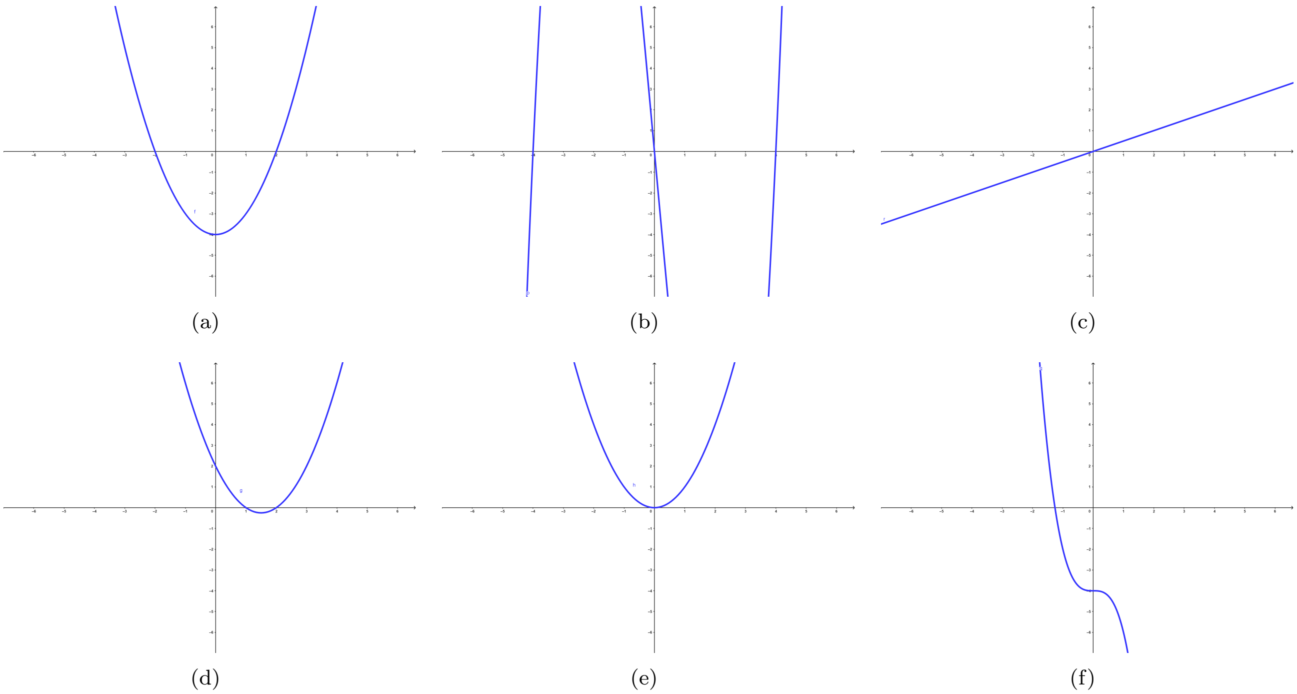


Figura 3: Os gráficos para o Exercício 10.

(I) O gráfico de $y(x) = \frac{x}{2}$ é uma reta que passa pela origem (c).

(II) O gráfico de $y(x) = x^2 - 4$ é uma parábola que passa por $(0, -4)$ (a).

(III) O gráfico de $y(x) = x^2 - 3x + 2$ é uma parábola que passa por $(0, 2)$ (d).

(IV) O gráfico de $y(x) = x^3 - 16x$ passa pela origem. Reescrevendo $x^3 - 16x = x(x^2 - 16)$, vemos que 4 e -4 são raízes do polinômio $x^3 - 16x$, ou seja, o gráfico de $y(x)$ passa por $(-4, 0)$ e $(4, 0)$ (b).

(V) O gráfico de $y(x) = -2x^3 - 4$ passa por $(0, -4)$ e não é uma parábola (f).

(VI) O gráfico de $y(x) = x^2$ é uma parábola que passa pela origem (e).

11. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática.

(a) Encontre os valores de a, b e c para os quais $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ e $f(-1) = 0$.

(b) Existem valores de a, b e c tais que $f(1) = -1$, $f(2) = 3$, $f(0) = 7$ e $f(-1) = 0$?

(c) Mostre que uma função quadrática é determinada ao saber seu valor em três pontos distintos. Isto é, dados $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, existem únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$.

Solução 11. (a) Substituindo os valores, temos

$$f(1) = a + b + c = 3$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 2$$

$$f(-1) = a - b + c = 0$$

de onde obtemos um sistema linear cuja solução única é $a = -\frac{5}{6}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{3}$.

(b) Suponha que existam tais valores. Considerando apenas $f(1)$, $f(2)$ e $f(-1)$, temos o sistema

$$f(1) = a + b + c = -1$$
$$f(2) = 4a + 2b + c = 3$$
$$f(-1) = a - b + c = 0$$

cuja solução é $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -2$. Logo $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ e $f(0) = -2 \neq 7$, o que é uma contradição. Portanto tais valores não existem.

(c) Temos que

$$f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$$
$$f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$$
$$f(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c = y_3,$$

de onde obtemos um sistema linear cuja matriz é

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A é uma **matriz de Vandermonde** e os pontos x_1, x_2 e x_3 são distintos, logo $\det A \neq 0$ (veja este artigo da Wikipedia)e o sistema possui uma solução única.

12. Dois carros partem de um ponto inicial, perpendicularmente, em linha reta, o primeiro a 40 km/h, e o segundo a 60 km/h. Sabendo que a distância entre eles é o comprimento do segmento de reta que os conectam, decida se o problema de encontrar a distância entre os carros é modelado por uma função afim, ou uma função quadrática. Resolva este problema.

Solução 12. Vamos modelar este problema. Chamemos o primeiro carro de A e o segundo de B. O deslocamento de A em função do tempo é descrito pela função

$$d_A(t) = 40 \cdot t$$

enquanto o deslocamento de B é

$$d_B(t) = 60 \cdot t.$$

Lembre que os carros se deslocam perpendicularmente (ou seja, em um ângulo de 90°), logo a distância entre os carros A e B pode ser encontrada por Pitágoras (faça o desenho). Assim, a distância entre A e B $d_{A,B}(t)$ satisfaz

$$(d_{A,B}(t))^2 = (40t)^2 + (60t)^2,$$

de onde obtemos que

$$d_{A,B}(t) = 20\sqrt{13} \cdot t,$$

que é uma função afim.

13. Considere os seguintes polinômios:

$$p(x) = x^7 + 16x^3 + 3, \quad q(x) = -18x^2 + 5x + 12, \quad r(x) = 8000x^5 + 7000x^6 + 16000x^5 + 16$$

Para cada polinômio acima, preencha a seguinte tabela de valores (utilize a calculadora) Qual dos polinômios acima cresce mais rápido? Qual cresce mais rápido quando valores ficam muito negativos?

Solução 13. No intervalo indicado, o crescimento de r é o maior. Porém, como p tem uma potência de grau mais alto, a partir de um x suficientemente grande o crescimento de p supera o de r (tente valores a partir de 10^5). A função $p(x)$ fica cada vez menor quando x fica muito negativo, enquanto a função $r(x)$ fica maior. Novamente, para x suficientemente grande, a "taxa de decrescimento" de p supera a taxa de crescimento de r (ou seja, p fica maior em módulo).

14. Considere um retângulo $R(t)$ de lados A, B, C, D, onde os lados A e C são paralelos (resp. B e D). O lado A tem comprimento $c_A(t) = 2t$ e o lado B tem comprimento $c_B(t) = 12t$. Como função de t, a área do retângulo é modelado por uma função afim ou uma função quadrática? Calcule a área.

Solução 14. A área desse retângulo é o produto $c_A(t) \cdot c_B(t)$, assim a área é dada pela função $a(t) = 24t^2$, uma função quadrática. Para qualquer t, o valor da área pode ser obtido pela função $a(t)$.

x	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$
0	3	12	16
1	20	-1	31016
-1	14	-11	-16984
-10	-10015997	-1838	4600000016
100	$1,00000016 \cdot 10^{14}$	-179488	$7,24 \cdot 10^{15}$
-100	$-1,00000016 \cdot 10^{14}$	-180488	$6,76 \cdot 10^{15}$
1000	10^{21}	-17994988	$7,024 \cdot 10^{21}$
-1000	-10^{21}	-18004988	$6,976 \cdot 10^{21}$

Funções Trigonométricas, Exponencial e Logarítmo

15. As funções seno e cosseno satisfazem as relações:

$$\operatorname{sen}(x)^2+\cos(x)^2=1, \quad \operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a), \quad \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

(a) Verifique as fórmulas do arco duplo:

$$\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}(a)\cos(a), \quad \cos(2a)=\cos(a)^2-\operatorname{sen}(a)^2=2\cos(a)^2-1.$$

(b) Calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

(c) Mostre que

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Solução 15. (a) Para o seno do arco duplo:

$$\operatorname{sen}(2a)=\operatorname{sen}(a+a)=\operatorname{sen}(a)\cos(a)+\operatorname{sen}(a)\cos(a)=2\operatorname{sen}(a)\cos(a).$$

Para o cosseno do arco duplo:

$$\cos(2a)=\cos(a+a)=\cos(a)\cos(a)-\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(a)=\cos(a)^2-\operatorname{sen}(a)^2.$$

Pela primeira relação, temos que $\operatorname{sen}(a)^2=1-\cos(a)^2$, logo

$$\cos(2a)=\cos(a)^2-\operatorname{sen}(a)^2=\cos(a)^2-(1-\cos(a)^2)=2\cos(a)^2-1.$$

(b) Note que $\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$. Usando a fórmula do seno do arco duplo, obtemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(c) Usando a igualdade $\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, temos

$$\tan(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a}{\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}.$$

O truque agora é dividir o numerador e o denominador por $\cos a\cos b$ e usar novamente a relação $\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\tan(a+b)=\frac{(\operatorname{sen} a\cos b)/(\cos a\cos b)+(\operatorname{sen} b\cos a)/(\cos a\cos b)}{(\cos a\cos b)/(\cos a\cos b)-(\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b)/(\cos a\cos b)}=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}.$$

16. Verifique:

1. $e^{\log_b(x)}=x^{\frac{1}{\log b}}$.
2. $\frac{\log(b^x)}{\log b}=x$.

Solução 16. Estamos assumindo que $\log(x)$ é o logaritmo natural, isto é, na base e. Para esse exercício, lembre da fórmula da mudança de base do logaritmo

$$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}.$$

(a) Usando a fórmula da mudança de base

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)}$$

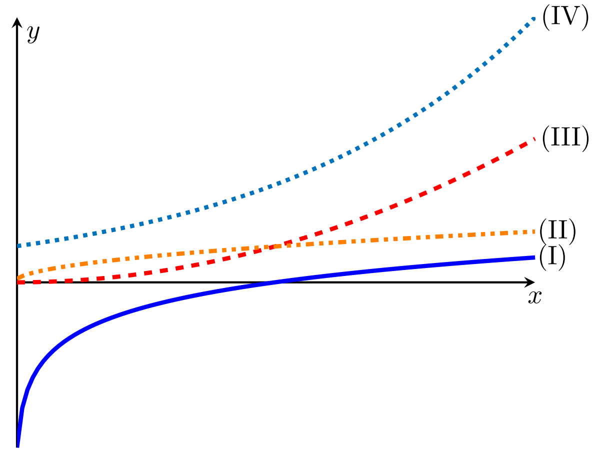
obtemos

$$e^{\log_b(x)} = e^{\frac{\log(x)}{\log(b)}} = e^{\log(x)\cdot\frac{1}{\log(b)}} = \left(e^{\log(x)}\right)^{\frac{1}{\log(b)}} = x^{\frac{1}{\log(b)}}.$$

(b) Temos que $\log(b^x) = x\log(b)$, logo

$$\frac{\log(b^x)}{\log(b)} = \frac{x\log(b)}{\log(b)} = x.$$

17. Identifique cada uma das funções $x^2, \sqrt{x}, e^x, \ln(x)$ no gráfico abaixo. Quais translações das funções (I) e (IV) fazem com que todos os gráficos passem por um ponto em comum?



Solução 17. (I) $ln(x)$;

(II) $\sqrt{x}$;

(III) x^2;

(IV) e^x.

As funções $e^x - 1$ e $ln(x+1)$ passam pelo ponto $(0,0)$, assim como x^2 e $\sqrt{x}$.

18. A Tabela 1 descreve o valor de 3 funções f, g e h. Qual delas cresce quadraticamente? Qual cresce linearmente? E qual cresce exponencialmente?

x	f(x)	g(x)	h(x)
2	36	5.8	6.25
4	68	10.2	39.0625
8	100	16.2	244.141

Tabela 1: Tabela para o Exercício 18

.

Solução 18. A ser atualizado.

19. Simplifique as expressões abaixo:

(a) $e^{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$

(b) $10^{\log(AB)}$

(c) $5e^{\log(A^2)}$

(d) $\log\left(e^{2AB}\right)$

(e) $\log\left(\frac{1}{e}\right) + \log(AB)$

(f) $2\log\left(e^A\right) + 3\log(Be)$

Solução 19. (a) $e^{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

(b) $10^{\log(AB)} = 10^{\log(A)+\log(B)} = 10^{\log(A)}10^{\log(B)}$

(c) $5e^{\log(A^2)} = 5A^2$

(d) $\log\left(e^{2AB}\right) = 2AB$

(e) $\log\left(\frac{1}{e}\right) + \log(AB) = \log(1) - \log(e) + \log(A) + \log(B) = 1 + \log(A) + \log(B)$

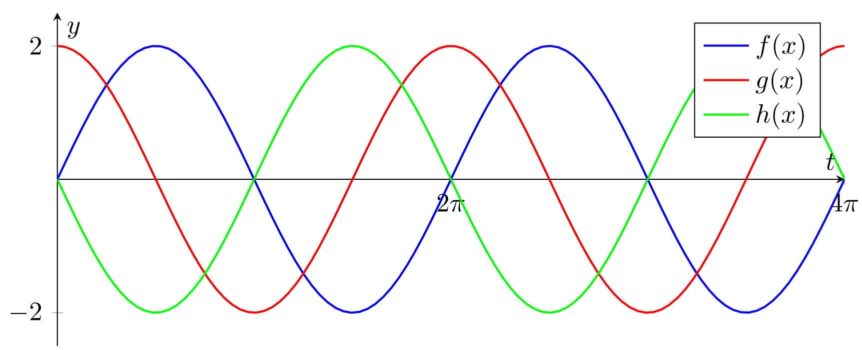
(f) $2\log\left(e^A\right) + 3\log(Be) = 2A + 3(\log(B) + \log(e)) = 2A + 3(\log(B) + 1)$.

20. Sem usar calculadora ou computador, associe as funções com os gráficos abaixo.

(a) $f(x) = 2\cos(x)$

(b) $f(x) = 2\cos(x + \pi/2)$

(c) $f(x) = 2\cos(x - \pi/2)$



Solução 20. (a) $2\cos(0) = 2$, logo esta é a função $g(x)$

(b) $2\cos(\pi/2 + \pi/2) = 2\cos(\pi) = -2$, logo esta é a função $h(x)$ (deslocamento de g para a esquerda em $pi/2$ unidades)

(c) $2\cos(\pi/2 - \pi/2) = 2\cos(0) = 2$, logo esta é a função $f(x)$ (deslocamento de g para a direita em $pi/2$ unidades)

Operações sobre funções

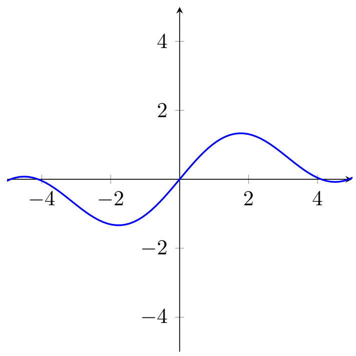
21. Uma função $f(x)$ é chamada de *par* se satisfaz

$$f(x) = f(-x) \quad \text{para todo } x,$$

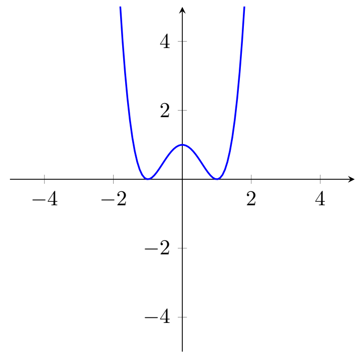
e ela é chamada de *ímpar* se satisfaz

$$f(x) = -f(-x), \quad \text{para todo } x.$$

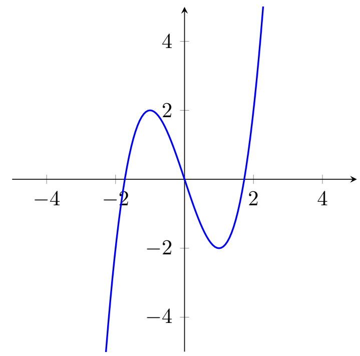
Para cada um dos gráficos abaixo, decida se a função é par ou ímpar.



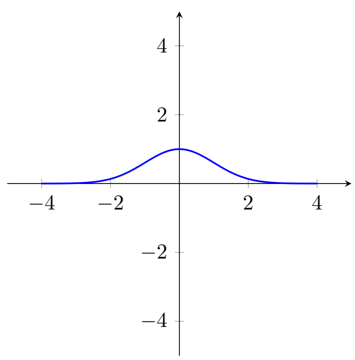
(a)



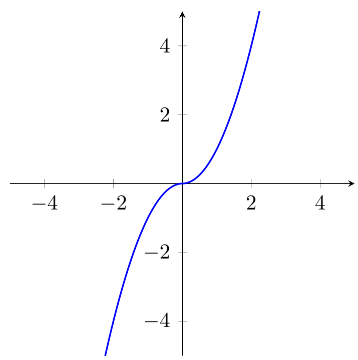
(b)



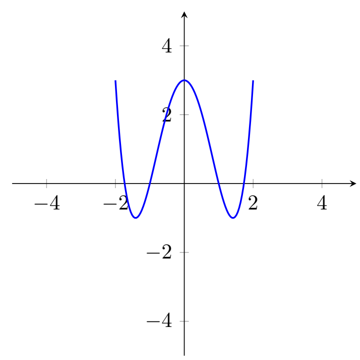
(c)



(d)



(e)



(f)

Solução 21. A condição $f(x) = f(-x)$ implica que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y. A condição $f(x) = -f(-x)$ implica que a parte relativa a $x < 0$ do gráfico de uma função ímpar é a reflexão seguida de uma inversão do sinal da parte relativa a $x > 0$.

Funções pares: (b), (d) e (f). Funções ímpares: (a), (c) e (e).

22. Suponha que f seja uma função ímpar. Determine se cada uma das seguintes funções é par ou ímpar.

(a) $g(x) = f(-x/2)$

(b) $g(x) = (f(x))^2$

Repita o exercício, agora assumindo que f é uma função par.

Solução 22. Se f é uma função ímpar, temos

(a) $g(x) = f(-x/2) = -f(x/2) = -g(-x)$, logo g é ímpar.

(b) $g(x) = (f(x))^2 = (-f(-x))^2 = (f(-x))^2 = g(-x)$, logo g é par.

Se f é uma função par, temos

(a) $g(x) = f(-x/2) = f(x/2) = g(-x)$, logo g é par.

(b) $g(x) = (f(x))^2 = (f(-x))^2 = g(-x)$, logo g é par.

23. Calcule $f(g(0))$, $g(f(0))$, $g(f(x))$, $f(g(x))$ e $f(x)g(x)$, onde

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 16$.

(b) $f(x) = \log(x), g(x) = e^x$.

(c) $f(x) = \frac{x+12}{x-6}$, $g(x) = (x-6)(x+12)$.

Caso não seja possível calcular alguns dos valores acima, explique o porque.

Solução 23.

(a)
- $f(g(0)) = f(0-16) = (-16)^2 = 256$
- $g(f(0)) = g(0^2) = -16$
- $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 16$
- $f(g(x)) = f(x-16) = (x-16)^2$
- $f(x)g(x) = x^2(x-16) = x^3 - 16x^2$

(b)
- $f(g(0)) = f(e^0) = f(1) = \log(1) = 0$
- Não é possível calcular, pois f não está definida em 0
- $g(f(x)) = g(\log(x)) = e^{\log(x)} = x$
- $f(g(x)) = f(e^x) = \log(e^x) = x$
- $f(x)g(x) = \log(x)e^x$

(c)
- $f(g(0)) = f(-6 \cdot 12) = f(72) = \frac{72+12}{12-6} = 14$
- $g(f(0)) = g(12/(-6)) = g(-2) = (-2-6)(-2+12) = -80$
- $g(f(x)) = g(\frac{x+12}{x-6}) = \left(\frac{x+12}{x-6} - 6\right)\left(\frac{x+12}{x-6} + 12\right)$
- $f(g(x)) = f((x-6)(x+12)) = \frac{(x-6)(x+12)+12}{(x-6)(x+12)-6}$
- $f(x)g(x) = \frac{x+12}{x-6}(x-6)(x+12) = (x+12)^2$

24. Recorde que o domínio de uma função é o conjunto de pontos onde a função pode ser calculada. Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ pode ser calculada em qualquer valor real exceto em $x = 0$, portanto seu domínio é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ao passo que a função $g(x) = \sqrt{x}$ pode ser calculada em qualquer número positivo mas não em números negativos, e portanto seu domínio é o intervalo $[0, +\infty)$.

Sejam $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = 2x + 7$. Encontre o domínio das funções $\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Solução 24.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ só não está definida quando $g(x) = 0$, isto é, quando $2x+7 = 0$, ou seja, quando $x = -7/2$. Logo o domínio desta função é $\mathbb{R} \setminus \{-7/2\}$.
- $\frac{g(x)}{f(x)}$ só não está definida quando $f(x) = 0$, isto é, quando $x^2 - 9 = 0$, ou seja, quando $x = 3$ ou $x = -3$. Logo o domínio desta função é $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

25. Em cada um dos casos abaixo, verifique se as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são iguais ou diferentes.

(a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

(b) $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

(c) $f(x) = \log_{10}(x)$ e $g(x) = 10^x$.

Solução 25. (a) A função $\sqrt{x}$ está definida apenas para $x \geq 0$, assim $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 = x$, para $x \geq 0$. Por outro lado, x^2 está definida para todo x real, logo $(g \circ f)(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. As funções são diferentes.

(b) Tanto x^3 quanto $\sqrt[3]{x}$ estão definidas em todo o conjunto $\mathbb{R}$. Por um lado, $(f \circ g)(x) = f(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x}^3 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$; por outro lado, $(g \circ f)(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. As funções são iguais.

(c) A função 10^x está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $(f \circ g)(x) = f(10^x) = \log_{10}(10^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. No entanto, $\log_{10}(x)$ só está definida para $x > 0$, assim $(g \circ f)(x) = g(\log_{10}(x)) = 10^{\log_{10}(x)} = x$ para $x > 0$. As funções são diferentes por possuirem domínios diferentes.

26. Simplique as seguintes expressões:

(a) $\frac{x^2-1}{x-1}$.

(b) $\frac{x^n-a^n}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Solução 26. (a)

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

(b) Pelo exercício 8, item (b), temos $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})$. Então

$$\begin{aligned}\frac{x^n-a^n}{x-a} &= \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}\end{aligned}$$

27. Escreva uma fórmula explícita e encontre o domínio de $g \circ f$, onde:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x$.

(c) $f(x) = \log(x)$, $g(x) = (x-3)(x-4)$.

Solução 27. (a) Encontrando a fórmula explícita:

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(\frac{1}{x})^2 + 1}{\frac{1}{x} - 2}.$$

As restrições no domínio são: $x \neq 0$ e $\frac{1}{x} - 2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 0$ e $x \neq \frac{1}{2}$. O domínio é, portanto, $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

(b) Encontrando a fórmula explícita:

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = -\sqrt{x}.$$

O domínio de $(g \circ f)$ é $[0, +\infty)$.

(c) Encontrando a fórmula explícita:

$$(g \circ f)(x) = g(\log(x)) = (\log(x) - 3)(\log(x) - 4).$$

O domínio de $(g \circ f)$ é $(0, +\infty)$.

28. Dizemos que uma função f é uma *translação* quando existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que$f(x) = x + \beta$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma função é chamada de *homotetia* quando existe $\alpha \neq 0$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sejam f uma homotetia e g uma translação. Mostre que $f \circ g$ e $g \circ f$ são aplicações afins. Em geral, $f \circ g = g \circ f$?

(b) Mostre que toda função afim h pode ser escrita como uma composição $h = f_1 \circ g_1$, onde f_1 é uma homotetia e g é uma translação. Mostre também que pode-se escrever $h = g_2 \circ f_2$, onde f_2 é uma homotetia e g_2 é uma translação. Em geral, $g_1 = g_2$ e $f_1 = f_2$?

Solução 28. (a) As funções f e g são da forma $f(x) = \alpha x$ e $g(x) = x + \beta$. Então $(f \circ g)(x) = f(x+\beta) = \alpha x + \alpha\beta$ e $(g \circ f)(x) = g(\alpha x) = \alpha x + \beta$, que são funções afins. Em geral, são diferentes (tente com $\alpha = 2$ e $\beta = 3$).

(b) Seja $h(x) = mx + n$ uma função afim, com $m \neq 0$. Podemos reescrever

$$h(x) = mx + n = mx + \frac{mn}{m} = m(x + \frac{n}{m}).$$

Defina $f_1(x) = mx$ e $g_1(x) = x + \frac{n}{m}$. Assim, $h(x) = (f_1 \circ g_1)(x)$.

Agora defina $f_2(x) = mx$ e $g_2(x) = x + n$, portanto temos também que $h(x) = (g_2 \circ f_2)(x)$. Finalmente, veja que $f_1 = f_2$, mas o mesmo não vale em geral para g_1 e g_2.