Definição de funções: Relações, tabelas e gráficos

1. Considere as seguintes regras de associações:

(a) Associa a cada número natural, seu conjunto de divisores (um número natural a divide um número natural b se existe outro número natural c tal que $b = ac$).

(b) Associa a cada casa, o conjunto de pessoas que moram nela.

(c) Associa a cada pessoa que possui pelo menos uma casa, o conjunto de casas em que ela mora.

Alguma das associações acima define uma função? Justifique.

2. Esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = x + 16$

(b) $f(x) = 3x - 2$

(c) $f(x) = x^2 + 12x + 6$

(d) $f(x) = (x - 3)^2$

Funções afins, polinômiais e raízes

3. Determine a inclinação e a interceptação no eixo y da linha cuja equação é dada.

(a) $2y + 5x - 8 = 0$

(b) $7y + 12x - 2 = 0$

(c) $-4y + 2x + 8 = 0$

(d) $12x = 6y + 4$

4. Cada gráfico na Figura 1 corresponde com uma das equações abaixo. Identifique-os.

(I) $y = x - 5$

(II) $-3x + 4 = y$

(III) $5 = y$

(IV) $y = -4x - 5$

(V) $y = x + 6$

(VI) $y = \frac{x}{2}$

5. Seja $f(x) = \alpha x + \beta$ uma função afim.

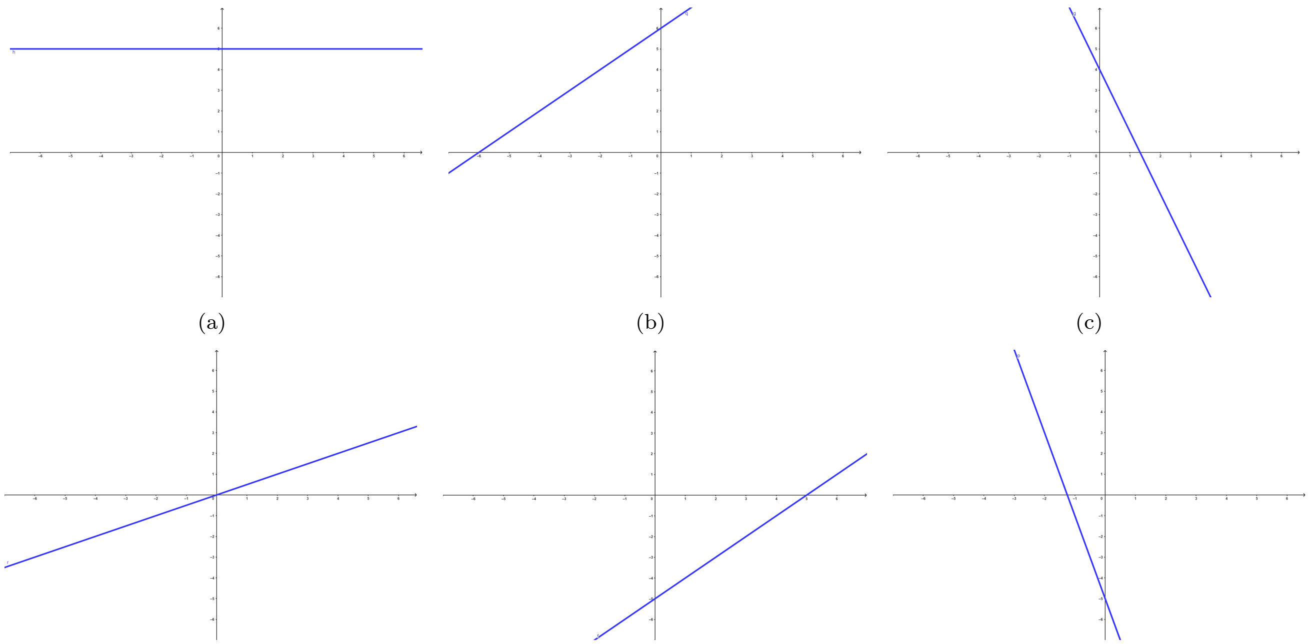
(a) Encontre os valores de α e β tais que $f(0) = 2$ e $f(3) = -2$.

(b) Agora encontre os valores de α e β para os quais $f(0) = -2$ e $f(3) = 2$.

(c) Existem valores de α e β para os quais $f(0) = 2$ e $f(3) = 2$?

(d) Existem valores de α e β para os quais $f(0) = 2$, $f(1) = 3$ e $f(2) = 5$?

(e) Mais geralmente, mostre que uma função afim é determinada ao saber seu valor em dois pontos distintos. Isto é, dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, existem únicos α, β tais que $f(a) = b$ e $f(c) = d$.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Figura 1: Os gráficos para o Exercício 4.

6. O objetivo desse exercício é verificar a fórmula de Bháskara, e identificar consequências da dessa fórmula. Considere o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Seja $\Delta = b^2 - 4ac$. Verifique que'

$$p(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

(b) Conclua do item anterior que se $\Delta \geq 0$, as raízes de $p(x)$ são dadas por

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(c) Verifique que

$$x_+ + x_- = -\frac{b}{a}, \quad x_+ x_- = \frac{c}{a}.$$

(d) Verifique que

$$p(x) = a(x - x_+)(x - x_-).$$

(e) Suponha que $\Delta < 0$. Mostre que:

- se $a > 0$, então $p(x) > 0$ para todo x.
- se $a < 0$, então $p(x) < 0$ para todo x.

7. Use o exercício anterior para fatorar os seguintes polinômios.

(a) $x^2 - 3x + 2$.

(b) $4x^2 - 9$.

(c) $3x^2 + x - 2$.

(d) $2x^2 - 5x$.

x	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$
0.2	13.2016	10.6416	202.
-0.2	6.8016	10.6416	198.
20	160330	166410	2000200
-20	159690	166410	1999800
2000	16000000032010	16000064000010	20000020000
-2000	15999999968010	16000064000010	19999980000

8. Considere a seguinte tabela
Sem usar a calculadora, identifique os polinômios p, q e r dentre as opções abaixo.

$$x^4 + 16x^2 + 10, \quad 5000x^2 + 10x, \quad x^4 + 16x + 10.$$

9. (a) Verifique as igualdades

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a), \quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2).$$

(b) Use o item anterior para encontrar as raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 1$.

(c) Encontre as raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 8$.

(d) Encontre as raízes do polinômio $f(x) = x^3 + 27$.

(e) Dado $a \in \mathbb{R}$, você consegue descrever todas as raízes de $f(x) = x^3 - a^3$?

(f) Verifique a igualdade

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

10. Cada gráfico na Figura 2 corresponde com uma das equações abaixo. Identifique-os.

(I) $\frac{x}{2} = y$

(II) $y - x^2 = -4$

(III) $x^2 + 2 = y + 3x$

(IV) $y + 16x = x^3$

(V) $y = -2x^3 - 4$

(VI) $y = x^2$

11. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática.

(a) Encontre os valores de a, b e c para os quais $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ e $f(-1) = 0$.

(b) Existem valores de a, b e c tais que $p(1) = -1$, $p(2) = 3$, $p(0) = 7$ e $p(-1) = 0$?

(c) Mostre que uma função quadrática é determinada ao saber seu valor em três pontos distintos. Isto é, dados $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, existem únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$.

12. Dois carros partem de um ponto inicial, perpendicularmente, em linha reta, o primeiro a 40 km/h, e o segundo a 60 km/h. Sabendo que a distância entre eles é o comprimento do segmento de reta que os conectam, decida se o problema de encontrar a distância entre os carros é modelado por uma função afim, ou uma função quadrática. Resolva este problema.

13. Considere os seguintes polinômios:

$$p(x) = x^7 + 16x^3 + 3, \quad q(x) = -18x^2 + 5x + 12, \quad r(x) = 8000x^5 + 7000x^6 + 16000x^5 + 16$$

Para cada polinômio acima, preencha a seguinte tabela de valores (utilize a calculadora) Qual dos polinômios acima cresce mais rápido? Qual cresce mais rápido quando valores ficam muito negativos?

14. Considere um retângulo $R(t)$ de lados A, B, C, D, onde os lados A e C são paralelos (resp. B e D). O lado A tem comprimento $c_A(t) = 2t$ e o lado B tem comprimento $c_B(t) = 12t$. Como função de t, a área do retângulo é modelado por uma função afim ou uma função quadrática? Calcule a área.

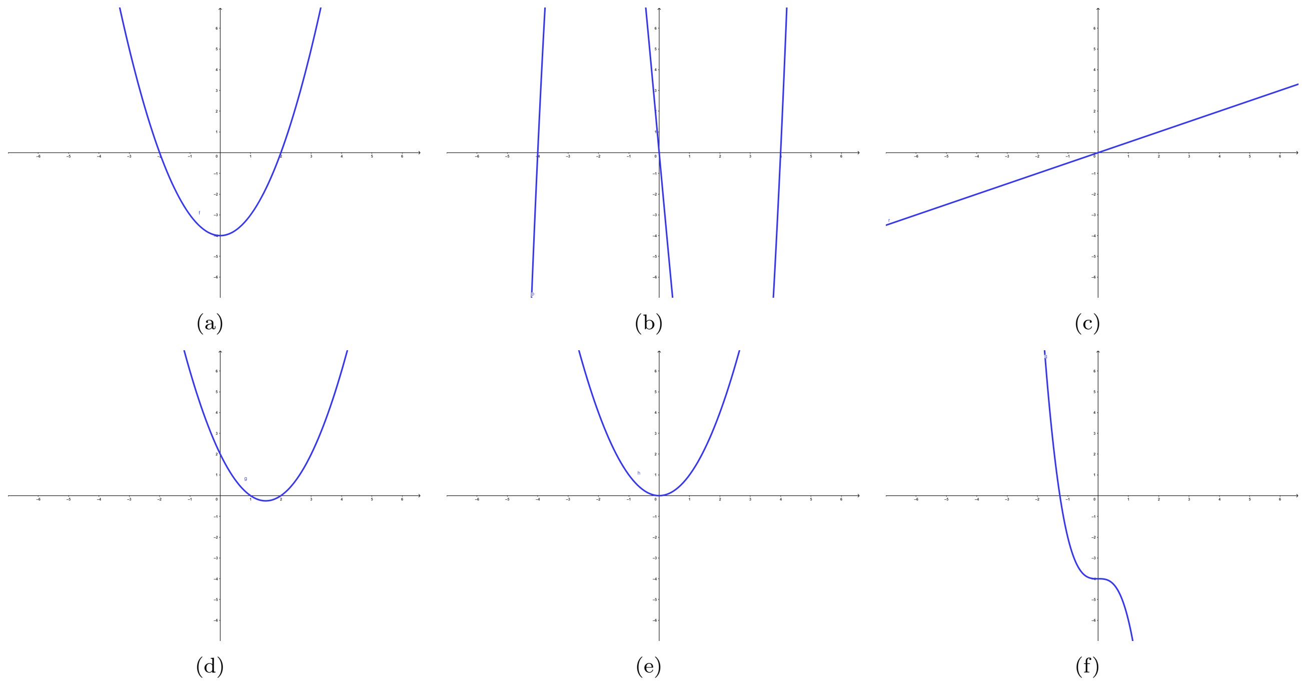


Figura 2: Os gráficos para o Exercício 10.

x	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$
0			
1			
-1			
-10			
100			
-100			
1000			
-1000			

Funções Trigonométricas, Exponencial e Logarítmo

15. As funções seno e cosseno satisfazem as relações:

$$\operatorname{sen}(x)^2 + \cos(x)^2 = 1, \quad \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a), \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b).$$

(a) Verifique as fórmulas do arco duplo:

$$\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a), \quad \cos(2a) = \cos(a)^2 - \operatorname{sen}(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1.$$

(b) Calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

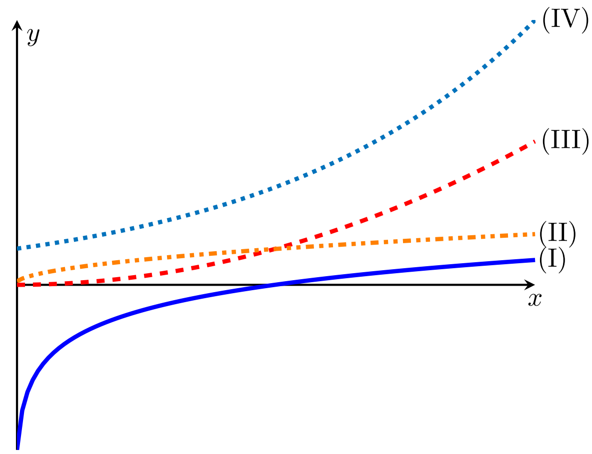
(c) Mostre que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

16. Verifique:

1. $e^{\log_b(x)} = x^{\frac{1}{\log b}}$.
2. $\frac{\log(b^x)}{\log b} = x$.

17. Identifique cada uma das funções $x^2, \sqrt{x}, e^x, \ln(x)$ no gráfico abaixo. Quais translações das funções (I) e (IV) fazem com que todos os gráficos passem por um ponto em comum?



18. A Tabela 1 descreve o valor de 3 funções f, g e h. Qual delas cresce quadraticamente? Qual cresce linearmente? E qual cresce exponencialmente?

x	f(x)	g(x)	h(x)
2	36	5.8	6.25
4	68	10.2	39.0625
8	100	16.2	244.141

Tabela 1: Tabela para o Exercício 18
.

19. Simplifique as expressões abaixo:

(a) $e^{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$

(b) $10^{\log(AB)}$

(c) $5e^{\log(A^2)}$

(d) $\log\left(e^{2AB}\right)$

(e) $\log\left(\frac{1}{e}\right) + \log(AB)$

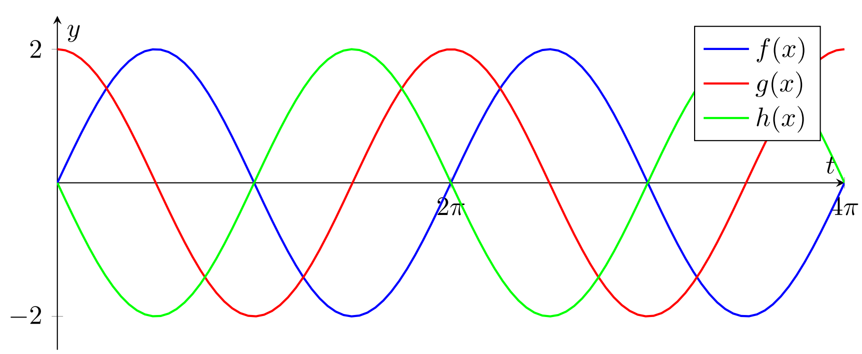
(f) $2\log\left(e^{A}\right) + 3\log\left(Be\right)$

20. Sem usar calculadora ou computador, associe as funções com os gráficos abaixo.

(a) $f(x) = 2\cos(x)$

(b) $f(x) = 2\cos(x + \pi/2)$

(c) $f(x) = 2\cos(x - \pi/2)$



Operações sobre funções

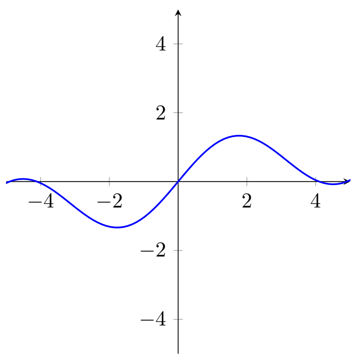
21. Uma função $f(x)$ é chamada de *par* se satisfaz

$$f(x) = f(-x) \quad \text{para todo } x,$$

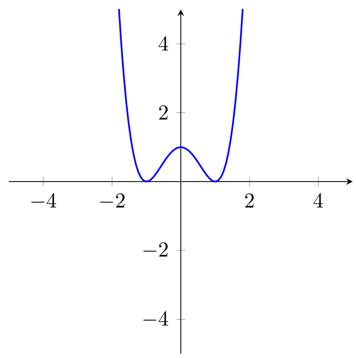
e ela é chamada de *ímpar* se satisfaz

$$f(x) = -f(-x), \quad \text{para todo } x.$$

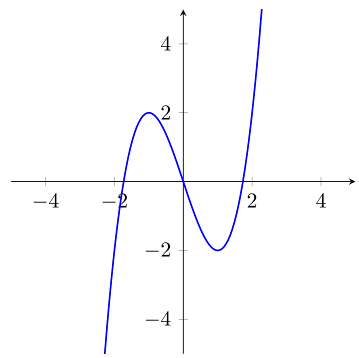
Para cada um dos gráficos abaixo, decida se a função é par ou ímpar.



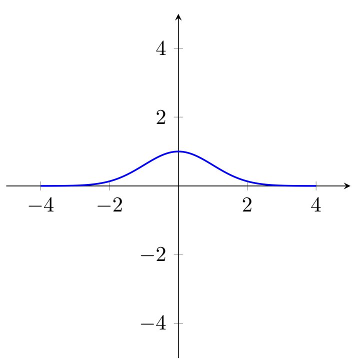
(a)



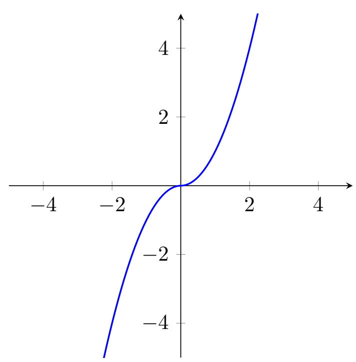
(b)



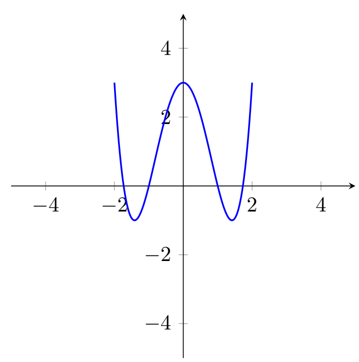
(c)



(d)



(e)



(f)

22. Suponha que f seja uma função ímpar. Determine se cada uma das seguintes funções é par ou ímpar.

(a) $g(x) = f(-x/2)$

(b) $g(x) = (f(x))^2$

Repita o exercício, agora assumindo que f é uma função par.

23. Calcule $f(g(0))$, $g(f(0))$, $g(f(x))$, $f(g(x))$ e $f(x)g(x)$, onde

(a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 16$.

(b) $f(x) = \log(x), g(x) = e^x$.

(c) $f(x) = \frac{x+12}{x-6}$, $g(x) = (x-6)(x+12)$.

Caso não seja possível calcular alguns dos valores acima, explique o porque.

24. Recorde que o domínio de uma função é o conjunto de pontos onde a função pode ser calculada. Por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$ pode ser calculada em qualquer valor real exceto em $x = 0$, portanto seu domínio é o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ao passo que a função $g(x) = \sqrt{x}$ pode ser calculada em qualquer número positivo mas não em números negativos, e portanto seu domínio é o intervalo $[0, +\infty)$.

Sejam $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = 2x + 7$. Encontre o domínio das funções $\frac{f(x)}{g(x)}$ e $\frac{g(x)}{f(x)}$.

25. Em cada um dos casos abaixo, verifique se as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são iguais ou diferentes.

(a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

(b) $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

(c) $f(x) = \log_{10}(x)$ e $g(x) = 10^x$.

26. Simplique as seguintes expressões:

(a) $\frac{x^2-1}{x-1}$.

(b) $\frac{x^n-a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$.

27. Escreva uma fórmula explícita e encontre o domínio de $g \circ f$, onde:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x$.

(c) $f(x) = \log(x)$, $g(x) = (x-3)(x-4)$.

28. Dizemos que uma função f é uma *translação* quando existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que$f(x) = x + \beta$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma função é chamada de *homotetia* quando existe $\alpha \neq 0$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sejam f uma homotetia e g uma translação. Mostre que $f \circ g$ e $g \circ f$ são aplicações afins. Em geral, $f \circ g = g \circ f$?

(b) Mostre que toda função afim h pode ser escrita como uma composição $h = f_1 \circ g_1$, onde f_1 é uma homotetia e g é uma translação. Mostre também que pode-se escrever $h = g_2 \circ f_2$, onde f_2 é uma homotetia e g_2 é uma translação. Em geral, $g_1 = g_2$ e $f_1 = f_2$?