Funções e suas propriedades

1. A função valor absoluto (ou módulo) é definida por

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(a) Desenhe o gráfico de $|x|$.

(b) Para cada função $f(x)$ abaixo, desenhe o gráfico de $|f(x)|$.

(i) $\text{sen}(x)$

(ii) $\log(x)$

(iii) e^x

(iv) $(x-1)(x-3)$

2. Considere as seguintes funções básicas

$$f(x) = x^d, \quad g(x) = |x|, \quad p(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = \ln(x), \quad q(x) = \mathrm{e}^x, \quad s(x) = \cos(x), \quad L(x) = ax + b. \tag{1}$$

Observe que a função $L(x)$ depende de dois valores reais $a, b \in \mathbb{R}$, e a função $f(x)$ depende de um real valor $d > 0$.

Escreva cada uma das funções abaixo como uma composição das funções em (1). Caso utilize $f(x)$ ou $L(x)$, também especifique os valores de a, b e d utilizados.

(a) $2\,\text{sen}(x)$

(b) $x^{-1/3}$

(c) $x^6 + 2x^3 + 1$

(d) $\begin{cases} x+1, & x > -1, \\ -x-1, & x < -1, \end{cases}$

(e) $x^2 + 1$

(f) e^x

(g) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

(h) $1 - (\text{sen}(x))^2$

3. Uma função $f(x)$ é chamada de *par* se satisfaz

$$f(x) = f(-x) \quad \text{para todo } x,$$

e ela é chamada de *ímpar* se satisfaz

$$f(x) = -f(-x), \quad \text{para todo } x.$$

(a) Decida se cada uma das funções abaixo é par ou ímpar. Caso alguma não seja nem par nem impar, explique o porque.

(1) $\text{sen}(x)$

(2) $\cos(x)$

(3) $\text{sen}(x) + \cos(x)$

(4) $x^3 + x$

(5) $x^2 + 1$

(6) e^x

(7) e^{-x^2}

(8) $x + \text{sen}(x)$

(9) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

(10) $h(x) = 2x^3 + 2x^4$

(11) $q(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$

(12) $a(x) = e^{-x^2}$

(13) $b(x) = \log(|x| + 1)$

(b) Verifique que se f e g são funções pares (resp. ímpares), então $f(x) + g(x)$ também é par (resp. ímpar). O que você pode dizer sobre $f(x)g(x)$?

(c) Usando o ítem anterior, conclua que um polinômio $p(x)$ que não possui nenhuma potência ímpar, é uma função par. Analogamente, se $p(x)$ não possui nenhuma potência par, então p é uma função ímpar.

4. As seguintes funções são dadas em termos de um parametro $a > 0$. Descreva como aumentar o valor do parâmetro modifica a função:

(a) $f(x) = ax$

(b) $f(x) = x + a$

(c) $f(x) = A\,\mathrm{sen}(x)$

(d) $f(x) = \mathrm{sen}(Ax)$

(e) $f(x) = \log(Ax)$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^{x+A}$

5. Em palavras, uma função f é crescente se quando aumentamos o valor da variável x, o valor da função $f(x)$ também aumenta. Em termos matemáticos, uma função f é chamada crescente (resp. estritamente crescente) quando para todo $x < y$, tem-se $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$). Defina o que é uma função ser decrescente (resp. estritamente decrescente). Decida se cada uma das das seguintes funções é crescente, decrescente, ou se não possui nenhum dos dois comportamentos.

(a) $x^2 + 4x$

(b) $3x^3 + 3$

(c) $-7x^5 + x$

(d) x^n, para n par

(e) x^n, para n impar.

(f) $\cos(x)$

(g) $\tan(x)$.

6. (a) Considere a função $f(x) = x^2$, definida no intervalo $[0, +\infty)$. Verifique que fixado $y \geq 0$, a equação $y = x^2$ possui uma única solução $x \in [0, +\infty)$, dada por $x = \sqrt{y}$. Observe que trocando os papéis de x e y na igualdade $x = \sqrt{y}$ obtemos a inversa de x^2.

(b) Considere $g(x) = x^3$, definida na reta real. Verifique que para todo $y \in \mathbb{R}$, a equação $y = x^3$ admite uma única solução $x = \sqrt[3]{y}$. Observe que trocando os papéis de x e y na igualdade obtida, obtemos a inversa de x^3.

(c) Repita o primeiro item deste exercicio para a função $f(x) = \log(x)$, definida no intervalo $(0, +\infty)$.

7. O exercício a seguir tem por objetivo apresentar um método que garante a existência de uma função inversa f^{-1} através do gráfico de f.

(a) Mostre que a interseção do gráfico de $f(x) = x^3$ com a reta $y = 9$ possui exatamente um ponto.

(b) Mais geralmente, para cada número real a, a interseção do gráfico de $f(x)$ com $y = a$, é composta por um único ponto $x = \sqrt[3]{y}$. Novamente note que ao trocar os papéis de x e y na igualdade acima, obtemos a inversa de x^3.

O processo acima é condição para a existência da inversa de uma função f: Uma função f definida num intervalo I admite uma inversa f^{-1} se para todo número real a, a interseção do gráfico de f com a curva $y = a$ tem no máximo um ponto. Além disso, a “troca de papéis” entre x e y corresponde a trocar os eixos: Veja a Figura 1

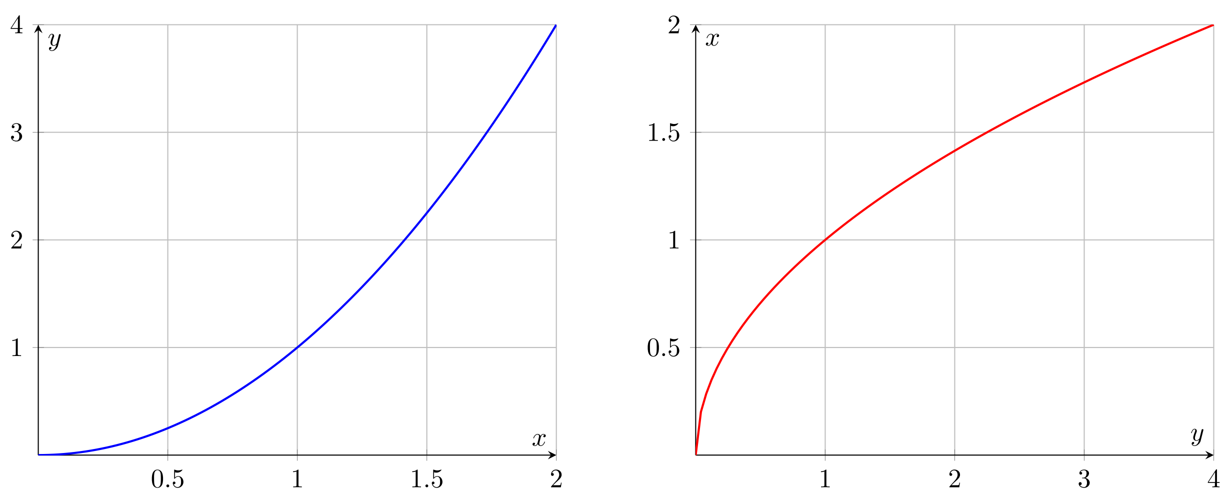


Figura 1: A primeira imagem é o gráfico de $y = x^2$, a segunda é obtida ao trocar os eixos de posição. Note que o segundo gráfico é exatamente o gráfico da função $g(y) = \sqrt{y}$

.

8. Recorde que função valor absoluto foi introduzida no Exercício 1 pela lei

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

.

(i) Verifique que para todo $a \in \mathbb{R}$, vale $|ax| = |a||x|$. Em particular, $|-y| = |y|$. Isto é, a função valor absoluto "remove o sinal" de um número.

(ii) Verifique que

$$x \leq |x|, \quad -x \leq |x|$$

(iii) Mostre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

A desigualdade acima é chamada de *desigualdade triangular. Dica: Assuma* $x \geq y$. *Qual o valor de* $|x - y|$?

(iv) Verifique que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Dica: Suponha que o máximo ocorre em x. *Qual o valor de* $|x - y|$*?*

Modelagem matemática

9. A demanda para um certo produto $q = D(p)$ é linear, onde p é o preço por item, e q é a quantidade demandada. Se p aumenta em 9 reais, uma pesquisa de mercado mostra que q diminui em 8. Além disso, 30 items são comprados se o preço é 55 reais.

(a) Encontre uma fórmula para q como função linear de p. Escreva uma para p como função linear de q.

(b) Escreva um dois gráficos, um com p como eixo horizontal, outro com q com o eixo horizontal.

10. Decida qual das funções a seguir tem valor maior para valores de x arbitrariamente grandes.

(a) $1000x^4$ ou $0.002x^6$.

(b) $\left(\frac{99}{100}\right)^x$ ou $\left(\frac{101}{100}\right)^x$.

(c) $\sqrt{x}$ ou $\log x$.

11. Considere as seguintes oportunidades de investimento:

(I) A primeira te dá um lucro mensal de 5%, com um pagamento de imposto no momento do resgate de 15% sobre o lucro.

(II) A segunda te dá um lucro mensal de 4%, com um pagamento de imposto no resgate 10% sobre o lucro.

Suponha que você tenha investido 50 reais em ambos investimentos e sejam $f(t)$ e $g(t)$ as funções que modelam o valor obtido ao resgatar o investimento depois de um período de t meses.

(a) Encontre expressões para as funções f e g.

(b) Escreva f e g como composição entre as funções que descrevem o lucro mensal, e o pagamento de imposto.

12. A energia gerada, E, de um painel solar varia com a posição do sol. Seja $E = 10 \sin\theta$ watts, onde θ é o ângulo entre os raios do sol e o painel, $0 \leq \theta \leq \pi$. Em um dia típico de verão em São Carlos, o sol nasce às 6h e se põe às 18h, e o ângulo é $\theta = \frac{\pi t}{14}$, onde t é o tempo em horas desde as 6h e $0 \leq t \leq 12$.

(a) Escreva uma fórmula para uma função, $f(t)$, que dê a potência de saída do painel solar (em watts) t horas após as 6h em um dia típico de verão em São Carlos.

(b) Represente graficamente a função $f(t)$ na parte (a) para $0 \leq t \leq 14$.

(c) Em que momento a energia de saída é máxima? Qual é a energia nesse momento?

(d) Suponha que num dia de inverno, o sol nasce às 8h e se põe às 17h. Escreva uma fórmula para uma função, $g(t)$, que dê a potência de saída do painel solar (em watts) t horas após as 8h em um dia típico de inverno.

13. Durante abril de 2073, a taxa de inflação de Marte foi, em média, 0,67% ao dia. Isso significa que, em média, os preços aumentaram 0,67% de um dia para o outro.

(a) Em que percentual os preços de Marte aumentaram em abril de 2073?

(b) Supondo que a mesma taxa permaneceu durante todo o ano, qual foi a taxa de inflação anual de Marte em 2073?

14. Uma cultura de 100 bactérias dobra de quantidade após 2 horas. Quanto tempo levará para o número de bactérias atingir 3.200?

15. O preço de um produto aumenta em 5% por ano. Em quanto tempo esse preço se tornará o dobro do preço inicial?

Limites

16. A figura 16 apresenta gráficos de funções polinomiais. Assuma que o domínio apresentado contém todos os zeros das funções. O que você pode dizer sobre o coeficiente lider destes polinômios? E sobre os seus graus?

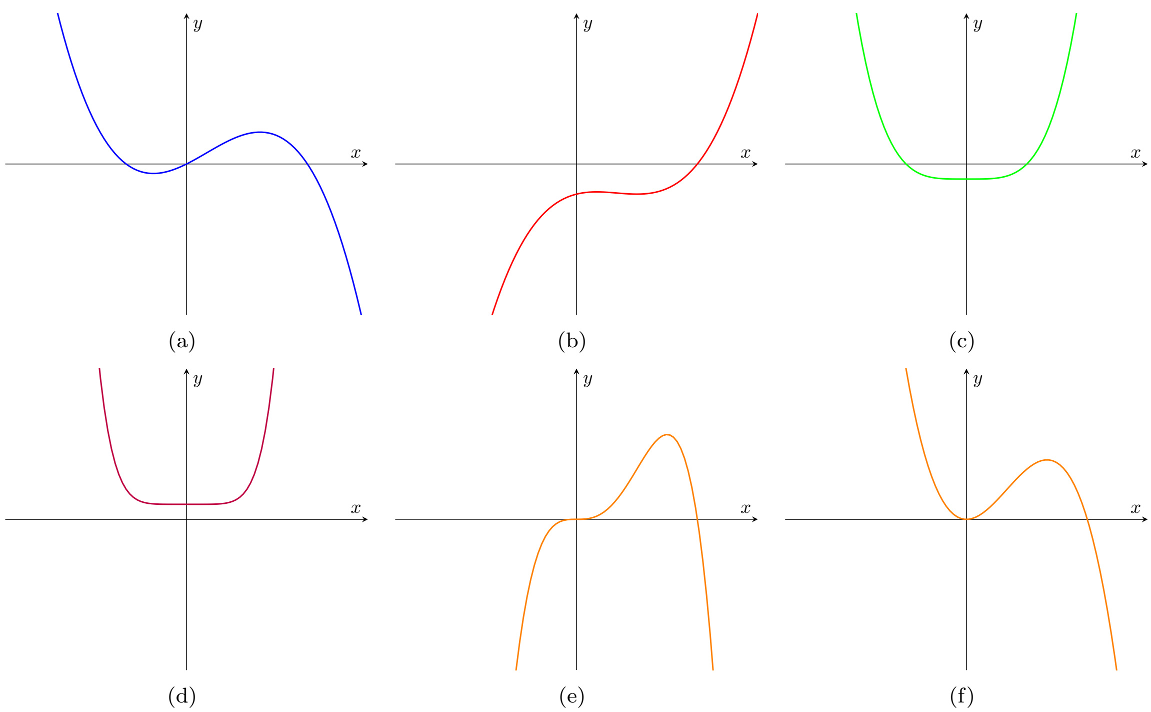
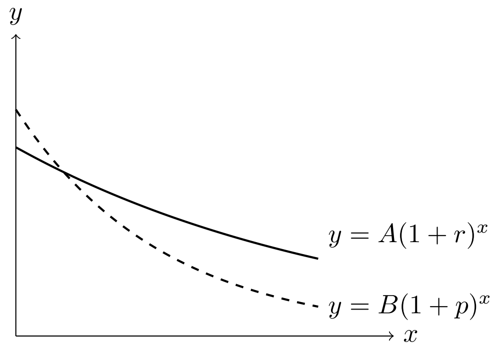


Figura 2: Figura correspondente ao exercício 16

.

17. Considere o gráfico a seguir de duas funções com suas fórmulas dadas.



As letras A, B, r, p são todas constantes.

Compare as duas quantidades fornecidas colocando um dos símbolos " $>$ ", " $<$ "ou " $=$ "no espaço em branco fornecido. Se a relação entre as quantidades não puder ser determinada, escreva "N "no espaço em branco.

(a) A $\qquad$ B

(b) r $\qquad$ p

(c) $\lim_{x\to\infty} A(1+r)^x$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} B(1+p)^x$

18. Considere a função f dada pela lei

$$f(x) = \begin{cases} xe^{Ax} + b, & x < 3, \\ C(x-3)^2, & 3 \leq x \leq 5, \\ \frac{130}{x}, & x > 5. \end{cases}$$

Suponha que f satisfaça cada uma das condições abaixo.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3), \qquad \lim_{x\to 5^+ = 2 + \lim_{x\to 5^-}} f(x), \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -4.$$

Encontre os valores de A, B e C. Qual o valor do limite

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)\sqrt[3]{x^3+1}?$$

19. Associe as seguintes funções com os gráficos na Figura (3). Assuma que $0 < b < a$.

(a) $y = \frac{a}{x} - x$

(b) $y = \frac{(x-a)(x+a)}{x}$

(c) $y = \frac{(x-a)(x^2+a)}{x^2}$

(d) $y = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-b)(x+b)}$

20. Limites do tipo $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ com o numerador e o denominador se aproximando de zero são chamados de *indeterminações do tipo* $0/0$. Eles são delicados porque não podemos aplicar a regra do quociente. Se f e g são polinômios, então $f(a) = g(a) = 0$, e portanto $x = a$ é uma raiz do numerador e do denominador. Deste modo, podemos fatorá-los na forma $(x-a)p(x)$, com p sendo um polinômio de grau menor. Em alguns casos, isso permite eliminar a indeterminação, como no exemplo abaixo

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{6-2x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{-2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{-2} = \frac{2}{-2}.$$

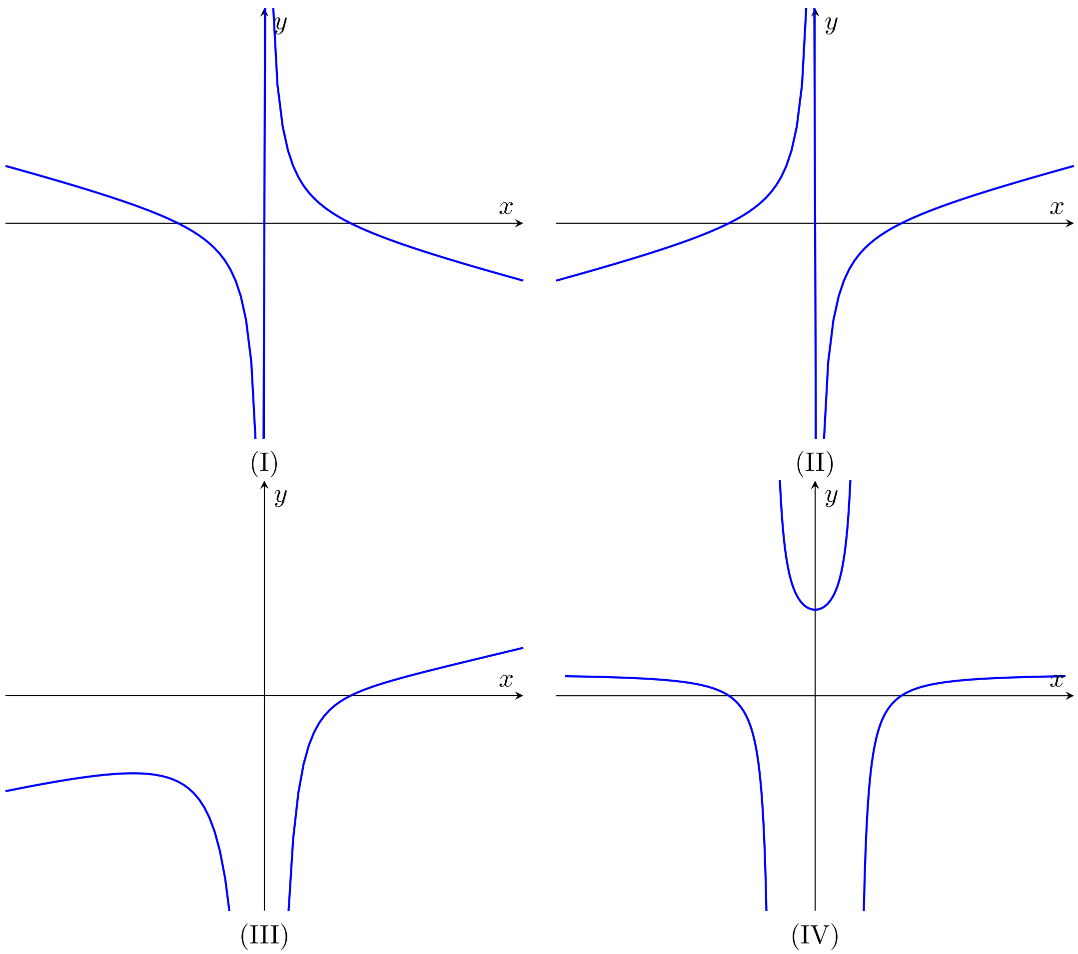


Figura 3: Figura correspondente ao exercício 19

.

De maneira similar, algumas indeterminações do tipo $0/0$ podem ser resolvidas usando-se o artifício de multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado de um deles, conforme o exemplo abaixo

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)}\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Observe que, em cada um dos exemplos, o limite é efetivamente calculado somente na última passagem.

Utilize as ideias acima para calcular os limites a seguir.

(a) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2+2z}{z}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-6x+4}{2-x}=$

(c) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}=$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=$

21. As funções f e g são dadas na Figura 4. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-}(f(x)+g(x))$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^+}(f(x)+2g(x))$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)g(x)$

(d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)}$

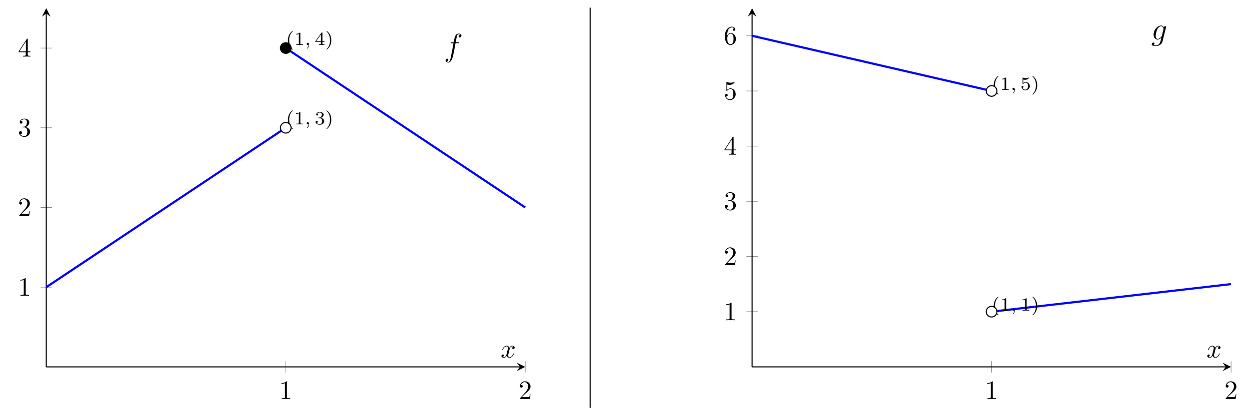


Figura 4: Figuras para o Exercício 21.

22. Vamos usar a noção de limite para estudar taxas de crescimento de funções. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções positivas e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0.$$

A depender do valor de L, podemos saber se f cresce mais rápidamente que g, e vice-versa: caso $L > 1$, então para valores de x suficientemente grandes teremos $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$ e portanto $f(x) > g(x)$. Analogamente, se $L < 1$, para valores de x suficientemente grande temos $f(x) < g(x)$.

Em cada item abaixo, utilize o critério acima para decidir qual função cresce mais rapidamente quando $x \to +\infty$.

1. $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.
3. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $g(x) = x^k$, (dica: Escreva $x^k = \mathrm{e}^{\log(x^k)}$ e use que $\lim_{x\to+\infty}(x - k\log(x)) = +\infty$).

Observação: A ideia acima não funciona quando $L = 1$. Por exemplo, para $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + 1$ e $g(x) = 1$ tem-se $L = 1$, mas a função f fica oscilando ao redor de 1 (use o Geogebra para ver isso!).

23. Calcule cada um dos limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} =$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} =$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} =$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} =$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3} =$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x =$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) =$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} =$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{x} =$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4^{4x} - 1}{\operatorname{sen} x} =$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} =$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan(x)}{x^3} =$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^4} =$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} =$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x^2} =$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} =$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x =$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x} =$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))^2}{x^2} =$

(u) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{3+3x^2}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-1}{3+3x^2} =$

(w) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-x}+3}{3\mathrm{e}^{-x}+2} =$

(x) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-x}+3}{3\mathrm{e}^{-x}+2} =$

(y) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-5} =$

(z) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-5} =$

24. Encontre um valor da constante k para que o limite exista.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-k^2}{x-4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-kx+4}{x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+k}{x+2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+5}{4x+1+x^k}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}-5}{\mathrm{e}^{kx}+3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-6}{x^k+3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{kx}+6}{3^{2x}+4}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{kx}+6}{3^{2x}+4}$