Derivada como taxa de variação

1. Cada um dos gráficos na Figura 1 mostra a posição de uma partícula se movendo ao longo do eixo x como uma função do tempo, $0 \leq t \leq 5$. As escalas verticais dos gráficos são as mesmas. Durante esse intervalo de tempo, alguma partícula tem:

(a) Velocidade constante?

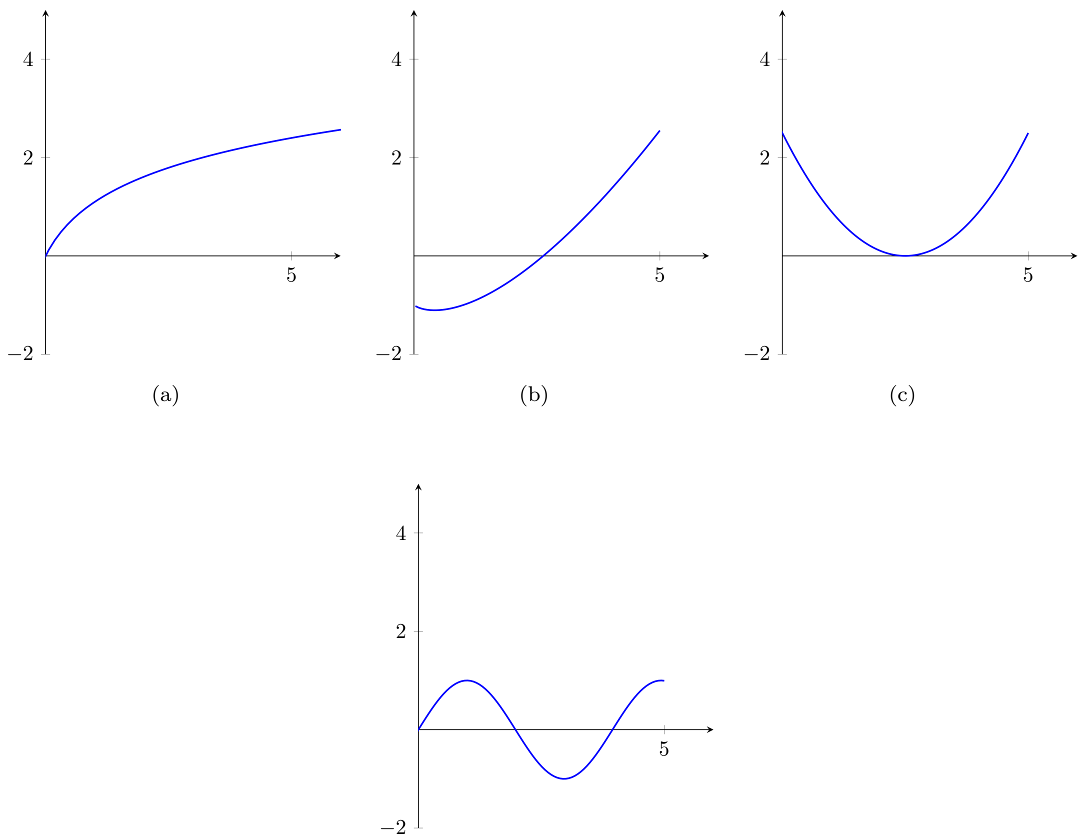
(b) A maior velocidade inicial?

(c) A maior velocidade média?

(d) Velocidade média zero?

(e) Aceleração zero?

(f) Aceleração positiva durante todo o intervalo?



(a) (b) (c) (d)

2. Escreva o gráfico de f' onde f é dada na Figura 2

3. Seja $C(t)$ a temperatura de São Carlos após o meio-dia. A função T', a derivada de T, é dada na Figura 2

(a) Em quais intervalos de t a temperatura é constante?

(b) Em quais intervalos a temperatura está crescendo? E decrescendo?

(c) Em qual instante de tempo a temperatura tem maior taxa de variação?

(d) Em qual instante de tempo a temperatura é a maior possível?

4. Uma certa empresa entrou no mercado de ações. Seja S a função que modela o preço de uma ação t horas após a abertura do mercado, em dólares. O gráfico de S' encontra-se na Figura 3.

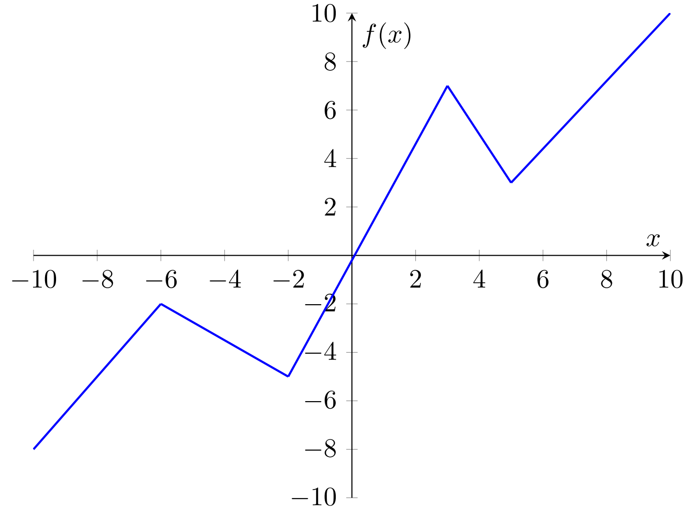


Figura 1: Função f para o Exercício 2.

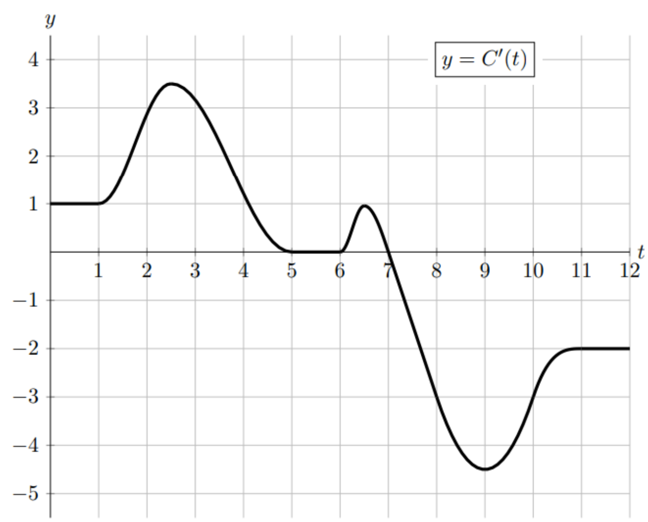


Figura 2: Função C' para o Exercício 3

1. Em qual momento o preço de uma ação está crescendo o mais rápido possível?
2. É possível determinar em qual momento o preço da ação foi o menor possível?
3. Em qual intervalo de tempo o preço estava estritamente decrescendo?
4. Em quais momentos a função S teve comportamento linear?

5. Seja $f(t)$ uma função diferenciável cuja reta tangente em $t = 2$ passa pelos pontos $(1, 10)$ e $(4, 19)$. Encontre os valores de $f(2)$ e $f'(2)$.

6. Uma função f é dita ser convexa (resp. côncava) quando dados quaisquer dois pontos $a < b$, a velocidade média de a e b é maior ou igual (resp. menor ou igual) a velocidade instantânea de qualquer ponto em (a, b).

(a) Escreva a definição acima em termos matemáticos (dica: lembre-se da fórmula de velocidade média, e que a velocidade instantânea é dada pela derivada de f).

(b) É verdade qualquer função é côncava ou convexa?

(c) Verifique que se uma função é côncava e convexa, então f é constante.

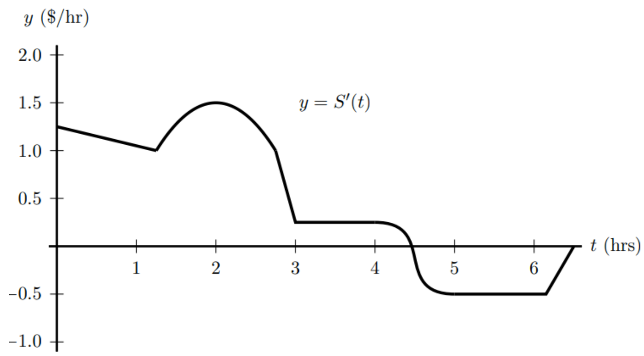


Figura 3: Função S' para o Exercício 4

(d) Usando algum software de plotar gráficos responda quais das seguintes funções é convexa.

(a) x^2

(b) x^3

(c) $\ln(x)$

(d) e^x

(e) $\frac{1}{x}$ no intervalo $(0, +\infty)$.

Derivadas Simples

7. Calcule a derivada das seguintes funções.

(a) x^5.

(b) $3x^2 + 7x - 5$.

(c) e^x.

(d) $\sin(x) + \cos(x)$.

(e) $\ln(x)$.

(f) $x^2 \ln(x)$.

(g) $\sqrt{x}$.

(h) $\tan(x)$.

(i) $\frac{1}{x^3}$.

(j) $\arcsin(x)$.

(k) $x^2 e^x$.

(l) $x^3 \sin(x)$.

(m) $\ln(x)\cos(x)$.

(n) $x^5 \ln(x)$.

(o) $x^2 \arctan(x)$.

(p) $\frac{e^x}{x^2}$.

(q) $\frac{x^2+1}{\ln(x)}$.

(r) $\frac{\sin(x)}{x^2}$.

(s) $\frac{\ln(x)}{x^3}$.

(t) $\frac{x^4+1}{xe^x}$.

8. Use a regra da cadeia para calcular a derivada das seguintes funções.

(a) $\sin(x^2)$.

(b) e^{x^3}.

(c) $\ln(5x+2)$.

(d) $\cos(x^2+1)$.

(e) $\sqrt{x^2+4}$.

(f) $\sin(\ln(x))$.

(g) $e^{\sin(x)}$.

(h) $\ln(\cos(x))$.

(i) $(3x+5)^4$.

(j) $\tan^2(x)$.

9. Calcule o limite para $a > 0$.

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$

(b) $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$

(c) $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h}$

(d) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$
Dica: Multiplique por $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$ no numerador e no denominador.

(e) $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{h}$