SME 0520 - Estatística I

Daiane de Souza

SME/ICMC/USP

Parte I - Fevereiro de 2025

Probabilidade

Ideia

A ciência do comportamento aleatório é necessária para compreender a Estatística, a ciência dos dados.

Objetivo:

Definir um modelo estatístico que seja adequado à descrição e interpretação de fenômenos aleatórios.

Probabilidade

A princípio, vamos definir alguns conceitos básicos:

Experimentos ou Fenômenos Aleatórios (E)

São situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza, sob condições idênticas.

Exemplos:

E_1 : Lançamento de um dado (ou moeda).
E_2 : Tempo de vida útil de um componente eletrônico.

Na realização de um experimento aleatório **não podemos afirmar que um resultado particular ocorrerá**, porém podemos descrever o conjunto de **todos os resultados possíveis do experimento**, isto é, todas as possibilidades de resultado.

Probabilidade

Aleatoridade

Um fenômeno aleatório tem resultados que não podemos predizer, mas que, não obstante, possui, em geral, uma distribuição regular em uma grande quantidade de repetições.

Probabilidade

Aleatoridade

UM EXEMPLO: Lançamento de uma moeda
Característica: Dois resultados possíveis:

Cara ou Coroa

Não é possível afirmar a priori qual o resultado que vai ocorrer no lançamento da moeda.

É possível definir uma distribuição regular?

Probabilidade

Aleatoridade

UM EXEMPLO: Lançamento de uma moeda

O que podemos entender como uma distribuição regular?

Qual o comportamento da ocorrência de cada possível resultado em uma longa sequência de repetições do fenômeno, realizadas sob as mesmas condições

No Exemplo: Qual o comportamento do número de caras (ou de coroas) quando uma moeda é lançada um grande número de vezes.

Probabilidade

Aleatoridade

Considere 5000 lançamentos de uma moeda.

A cada lançamento determinar a proporção de caras (ou coroas) observadas até aquele lançamento.

Por exemplo: Até o 10 º lançamento, foi observado cara em 7 dos lançamentos realizados, logo a proporção de caras é de 0,7 (70%).

Probabilidade

Aleatoridade

Considere 5000 lançamentos de uma moeda.

Considere as duas situações a seguir:

A: Ocorre as seguintes faces nos primeiros lançamentos: coroa, cara, coroa, coroa.

B: Ocorre face cara em todos os 5 primeiros lançamentos

Probabilidade

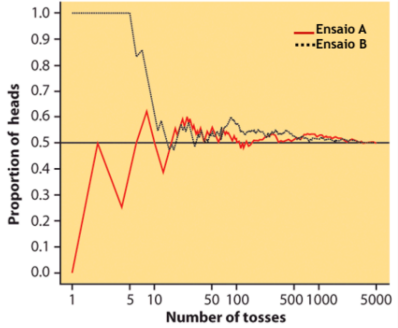
Aleatoridade

Considere 5000 lançamentos de uma moeda.

- Para o ensaio A, a proporção de caras inicia com zero no 1º. lançamento, sobe para 0,5 quando no segundo lançamento dá uma cara, cai para 0,33 e 0,25 quando obtemos mais 2 coroas.
- Para o ensaio B, a proporção de caras é 1 até o 5º lançamento.
- O ensaio A inicia com poucas caras e o B com muitas.

Probabilidade

Aleatoridade



Aleatoridade

Conclusão:

- O comportamento do acaso é imprevisível a curto prazo, mas tem um padrão regular e previsível a longo prazo.
- O resultado não pode ser predito antecipadamente. Porém, há um padrão regular nos resultados, um padrão que emerge após muitas repetições.
- Após uma longa sequência de lançamentos da moeda, a proporção de caras (consequentemente também de coroas), se a moeda for honesta, é aproximadamente 0,5 (50%).

Probabilidade

Espaço Amostral (Ω)

Refere-se ao conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento ou fenômeno aleatório,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}.$$

Exemplos: Nos experimentos listados (E_1 e E_2), os espaços amostrais são:
$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ou $\Omega_1 = \{cara, coroa\}$).
$\Omega_2 = [0, +\infty)$

Probabilidade

Evento

Chamamos de evento qualquer subconjunto do espaço amostral Ω de um experimento aleatório.

Notação: $A, B, C, D, \ldots$, ou ainda, $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Qualquer que seja o evento A, se $A \subset \Omega$, então A é um evento de Ω. Assim, o evento aleatório pode ser um único ponto amostral ou uma reunião deles.

Probabilidade

Tipos de Eventos

- **Evento simples ou elementar:** É o evento formado por um único ponto amostral, isto é, $A = \{\omega\}$ (conjunto unitário).
- **Evento composto:** É o evento formado por dois ou mais pontos do espaço amostral, isto é, $A = \{\omega_1, \omega_2\}$.
- **Evento certo:** É o evento formado por todos os pontos amostrais, isto é, $A = \Omega$.
- **Evento impossível:** É o evento que não possui elementos em Ω, isto é, $A = \emptyset$ ou $A = \{\ \}$.

Probabilidade

Um evento é sempre definido por uma sentença.

Exemplos: Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado.

A_1 : “Obter um número maior que três e menor que cinco”;

A_2 : “Obter um número par”;

A_3 : “Obter um número menor ou igual a seis”;

A_4 : “Obter um número maior que seis”.

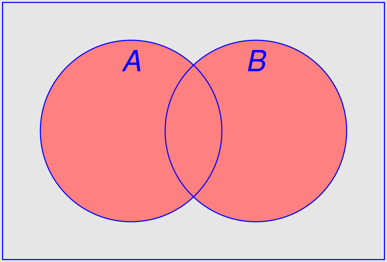
Probabilidade

Operações com Eventos

- Para ilustrar graficamente eventos, é costume utilizar-se os mesmos diagramas usados na teoria de conjuntos (diagrama de Venn).
- Para isso, considere eventos definidos em um espaço amostral Ω de um experimento ou fenômeno aleatório.

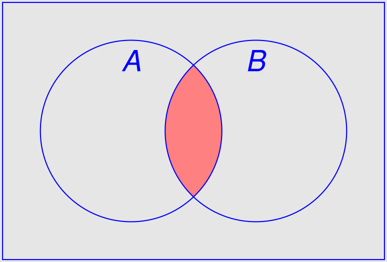
Probabilidade

1. **União de eventos ($A \cup B$):** É o evento definido por todos os elementos que pertencem a A, ou a B, ou a ambos.



Probabilidade

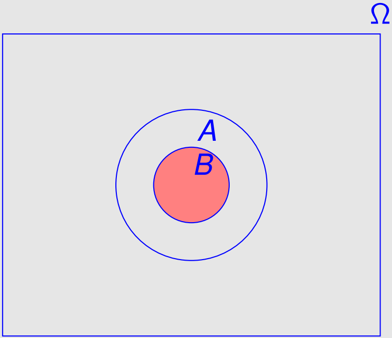
2. **Intersecção de eventos ($A \cap B$):** É o evento definido por todos os elementos que pertencem a A e a B.



Probabilidade

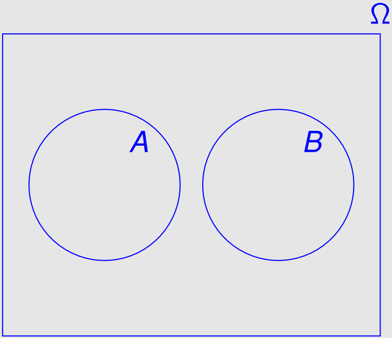
Casos Particulares:

2.1 Se $B \subset A$, então $A \cap B = B$.



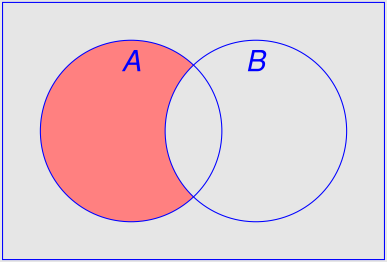
Probabilidade

2.2 Se A e B são disjuntos ou eventos mutuamente exclusivos (não tem elementos comuns), então $A \cap B = \emptyset$.



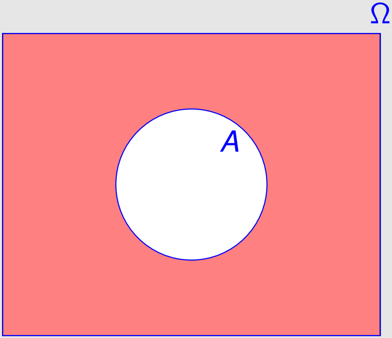
Probabilidade

3. **Diferença de eventos ($A - B$):** É o evento definido pelos elementos de A que não pertencem a B.



Probabilidade

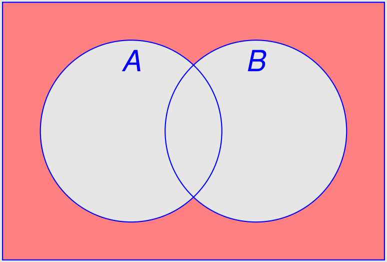
4. **Evento Complementar (A^c ou $\overline{A}$):** É o evento definido por todos elementos de Ω que não estão em A.



Probabilidade

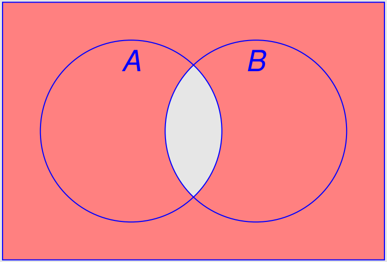
Alguns exemplos de eventos complementares:

4.1 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$



Probabilidade

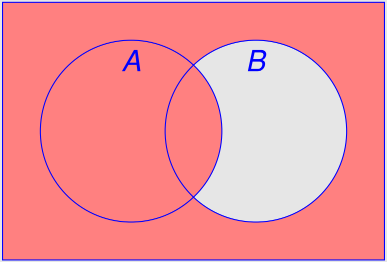
4.2 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



Observação: As igualdades (4.1) e (4.2) são conhecidas como **Leis de DeMorgan**.

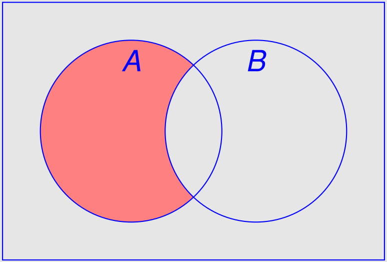
Probabilidade

4.3 $A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c = A \cup (A \cup B)^c$



Probabilidade

4.4 $A \cap B^c = (A \cup B) \cap B^c$



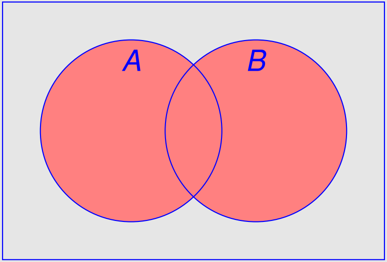
Probabilidade

Outras Operações:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $\forall A$;
- $A \cup \emptyset = A$;
- $\emptyset^c$ ou $\overline{\emptyset} = \Omega$;
- Ω^c ou $\overline{\Omega} = \emptyset$;
- $(A^c)^c = A$;
- $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$;
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

Probabilidade

Exemplo 1.1: Escrever $A \cup B$ como a união de eventos disjuntos.



Probabilidade

Exercício Proposto 1.1: Considere dois acontecimentos distintos A e B, possíveis e não certos, contidos no mesmo universo de resultados Ω. Utilizando as Leis de De Morgan, qual outra representação teríamos para $\overline{\overline{\overline{A} \cup B} \cap A}$.

Dica: Considere $C = \overline{\overline{A} \cup B}$.

Resp.: $\overline{A} \cup B$.

Definições de Probabilidade

Definição de probabilidade em espaços equiprováveis:

Se um experimento aleatório tiver n resultados possíveis, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, mutuamente exclusivos e igualmente possíveis e se um evento A tiver n_A desses resultados, então a probabilidade do evento A, representada por $P(A)$, é dada por:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Exemplo 1.2: Lançamento de duas moedas honestas. Calcular a probabilidade de obter:

a) Duas faces iguais.
b) Pelo menos uma face diferente de cara.

Definição de probabilidade frequentista:

Um experimento é realizado n vezes (n "grande"). O evento A ocorre exatamente n_A vezes ($0 \leq n_A \leq n$). A frequência relativa de vezes que ocorreu o evento A é uma forma de aproximar a probabilidade do evento A, ou seja,

$$f_r(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Quando $n \to \infty$, $f_r(A)$ se aproxima de $P(A)$.

Exemplo: Imagine que queremos calcular a probabilidade de sair cara ao lançar uma moeda.

- Se lançarmos a moeda 10 vezes e obtivermos cara 4 vezes, a frequência relativa seria:

$$P(A) \approx \frac{4}{10} = 0.4$$

- Se aumentarmos para 100 lançamentos e obtivermos cara 48 vezes, a probabilidade estimada seria:

$$P(A) \approx \frac{48}{100} = 0.48$$

- Se continuarmos aumentando o número de lançamentos para 1.000, 10.000 ou mais, a frequência relativa se aproxima cada vez mais 0.5 (50%), assumindo que a moeda seja honesta.

Definição de probabilidade axiomática:

A probabilidade de um evento A é definida como sendo um número $P(A)$ satisfazendo os seguintes axiomas:

i. $P(A) \geq 0$;
ii. $P(\Omega) = 1$;
iii. Se $A_1, A_2, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Propriedades:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$;

b) $P(\emptyset) = 0$;

c) Se $A \subset \Omega$, então $P(A) = 1 - P(A^c)$;

d) Se $A \subset B \subset \Omega$, então $P(A) \leq P(B)$;

e) Se $A, B \subset \Omega$, então vale $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$;

f) Se $A, B \subset \Omega$, então vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

g) Se $A, B, C \subset \Omega$, então vale

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Probabilidade

Exemplo 1.3: Mostre a propriedade (g). Use o fato:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Probabilidade

Exercício Proposto 1.3: Considere um experimento aleatório e os eventos A e B associados, tais que: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcule as probabilidades:

a) $P(A^c \cap B^c)$.

b) $P(A^c \cup B^c)$.

Resp.: *a)* $\frac{5}{12}$; *b)* $\frac{3}{4}$.

Probabilidade Condicional e Independência

Definição (Probabilidade Condicional):

Sejam A e B dois eventos definidos em um mesmo espaço amostral Ω. A probabilidade condicional de A dado que ocorreu o evento B, denotada por $P(A|B)$, é definida como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0.$$

Consequentemente, podemos escrever:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B),$$

conhecida como a **regra do produto de probabilidades.**

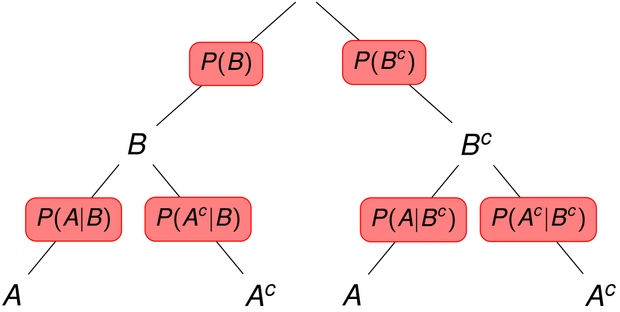
Exemplo 1.4: Suponha que um escritório possua 100 computadores dos tipos desktop (D) e laptop (L) sendo alguns novos (N) e outros com um certo tempo de uso (U), distribuídos da seguinte forma:

	D	L	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
Total	60	40	100

Um funcionário escolhe um computador ao acaso, e descobre que é novo. Qual a probabilidade de que seja desktop? E se o funcionário escolhesse um laptop ao acaso. Qual a probabilidade que seja novo?

Árvore de Probabilidades:

Sejam $A, B \subset \Omega$. Uma representação bastante útil é a árvore de probabilidades.



Exemplo 1.5: Selecionamos dois itens, ao acaso, um a um e sem reposição, de um lote que contém 10 itens do tipo A e 5 do tipo B. Qual é a probabilidade de que

(a) o primeiro item seja do tipo A?

(b) o segundo seja do tipo B se o primeiro item foi do tipo A?

Algumas Propriedades:

a) $P(\emptyset|B) = 0$;

b) Se $A \subset \Omega$, então $P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$;

c) Se $A, C \subset \Omega$, então vale

$$P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B).$$

Definição (Independência de Eventos):

Dois eventos A e B definidos em um mesmo espaço amostral Ω são independentes se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A. Isto é,

$$P(A|B) = P(A), \text{ se } P(B) > 0.$$

Logo, dois eventos A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo 1.6: Um estudante se inscreve em dois processos seletivos com probabilidade de 30% de ser aprovado na empresa I e 50% de ser aprovado na empresa II. Se as aprovações forem independentes, qual a probabilidade de que ele seja aprovado em pelo menos uma?

Independência de 3 Eventos:

Os eventos A, B e C em Ω são independentes se, e somente se:

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
b) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$;
c) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$;
d) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Resultado: Se A e B são eventos independentes em Ω, então:

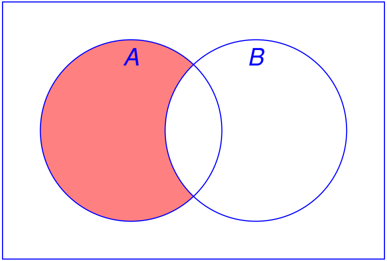
(i) A e B^c são independentes;

(ii) A^c e B são independentes;

(iii) A^c e B^c são independentes.

Observação: Não confundir eventos mutuamente exclusivos ($P(A \cap B) = 0$) com eventos independentes ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$).

Dem. (i)]: $P(A \cap B^c) = ?$



Uma vez que $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, união de eventos disjuntos, temos:

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Exemplo 1.7: Um atirador acerta 80% de seus disparos e outro (nas mesmas condições de tiro) acerta 70%. Qual a probabilidade do alvo ser acertado se ambos atiradores dispararem simultaneamente?

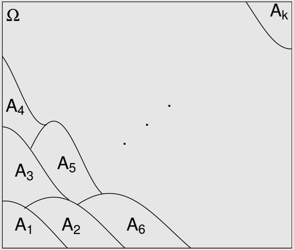
O Teorema de Bayes

Partição do Espaço Amostral: definição.

Uma coleção de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forma uma partição do espaço amostral Ω se:

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, k;$

(ii) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega.$

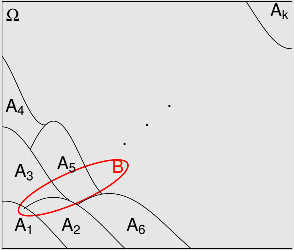


Lema da Probabilidade Total.

Se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ é uma partição do espaço amostral Ω, então para qualquer evento B de Ω vale:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i).$$



Fórmula de Bayes.

Se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω e $B \subset \Omega$ com $P(B) > 0$, então:

$$
\begin{aligned}
P(A_i|B) &= \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} P(B|A_j)P(A_j)}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.8: Uma montadora trabalha com dois fornecedores (A e B) de uma determinada peça. Sabe-se que 10% e 5% das peças provenientes dos fornecedores A e B, respectivamente, estão fora de especificações. A montadora recebe 30% das peças do fornecedor A e 70% do fornecedor B. Se uma peça do estoque inteiro é escolhida ao acaso, calcule:

a) A probabilidade de que ela esteja fora das especificações.
b) Se uma peça escolhida ao acaso está fora das especificações, qual é a probabilidade de que tenha sido fornecida por A?

Exemplo 1.9: Em um programa de televisão são mostradas três portas (1, 2 e 3) fechadas e apenas uma delas guarda um valioso prêmio. O apresentador do programa sabe qual é a porta que leva ao prêmio. Um participante deve escolher uma das portas.

Em seguida, o apresentador informa o número de uma porta, diferente da escolha do participante, e que não guarda o prêmio.

O participante escolhe a porta 1. O apresentador informa que a porta 3 não guarda o prêmio e pergunta ao participante se ele gostaria de mudar sua escolha.

Se você fosse o participante, qual seria sua decisão? Vale a pena mudar a escolha?

Exercício Proposto 1.4: Estudos revelaram que 40% dos estudantes universitários já experimentaram algum tipo de droga ilícita. Uma universidade resolveu aplicar um teste com um detector de mentira para descobrir se seus estudantes já usaram algum tipo de droga ilícita. Sabemos que se o estudante já usou algum tipo de droga, o detector vai dar positivo com certeza. Porém, sabemos que o detector erra, ou seja, apresenta testes com um falso positivo, em 5% quando aplicado em estudantes que nunca usaram drogas. Se um estudante é selecionado aleatoriamente e o teste aplicado nele deu positivo, qual a probabilidade dele já ter usado algum tipo de droga?

Resp.: $0,9302$.

Exercício Proposto 1.5: Para selecionar seus funcionários, uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante uma semana. No final do curso, eles são submetidos a uma prova e 25% são classificados como bons (B), 50% como médios (M) e os 25% restante como fracos (F). A empresa pretende substituir o treinamento por um teste contendo questões de conhecimentos gerais. Para isso, gostaria de conhecer qual a probabilidade de um indivíduo aprovado no teste ser considerado fraco, se fizesse o curso. Assim, antes do início do curso, os candidatos foram submetidos ao teste e receberam o conceito aprovado (A) ou reprovado (R). No final do curso, obtiveram-se as seguintes probabilidades condicionais:

$$P(A|B) = 0,8 \qquad P(A|M) = 0,5 \qquad P(A|F) = 0,2.$$

Resp.: $0,1$.