SME 0520 - Introdução à Estatística

Daiane de Souza

SME/ICMC/USP

Parte III - Março de 2025

Principais Modelos Probabilísticos

Modelos Probabilísticos

Alguns Modelos Discretos:

- Distribuição Uniforme Discreta;
- Distribuição de Bernoulli;
- Distribuição Binomial;
- Distribuição Geométrica;
- Distribuição Binomial Negativa;
- Distribuição Hipergeométrica;
- Distribuição Poisson.

Modelos Probabilísticos

Alguns Modelos Contínuos:

- Distribuição Uniforme;
- Distribuição Exponencial;
- Distribuição Normal;
- Distribuição t-Student;
- Distribuição Qui-Quadrado;
- Distribuição Gama;
- Distribuição Beta;
- Distribuição Pareto;
- Distribuição Cauchy.

Recurso Computacional:

- Utilizaremos o *Software* R, disponível para *download* em:
  `https://www.r-project.org/`
- Versão atual: 4.3.1
- O *Software* R tem funções para realizar cálculos de probabilidade, incluindo geração de números aleatórios de uma determinada distribuição especificada.

- As funções têm a seguinte forma geral:

`letra`**`nome`**` (argumentos separados por vírgula)`

em que:

`letra`: indica a operação;

`nome`: indica a distribuição de probabilidade.

Tabela: Funções do *Software* R para geração de números aleatórios e cálculos de probabilidades.

Letra	Operação	Argumentos necessários
`r`	Gera números pseudo-aleatórios	Tamanho da amostra, parâmetros da distribuição
`p`	Calcula a função de probabilidade acumulada	Vetor de quantis, parâmetros da distribuição
`q`	Calcula o quantil correspondente a uma dada probabilidade	Vetor de probabilidades, parâmetros da distribuição
`d`	Calcula a densidade de probabilidade	Vetor de quantis, parâmetros da distribuição

Modelos Probabilísticos Recurso Computacional

Tabela: Algumas distribuições de probabilidade no R.

Distribuição	Nome	Argumentos	Default
Poisson	`pois`	λ	–
Binomial	`binom`	n, p	–
Binomial negativa	`nbinom`	n, p	–
Geométrica	`geom`	p	–
Hipergeométrica	`hyper`	m, n, k	–
Uniforme	`unif`	min, max	0, 1
Exponencial	`exp`	λ	–
Normal	`norm`	μ, σ	0, 1
t-Student	`t`	*df*	–
Beta	`beta`	α, β	–
Gama	`gamma`	α, β	–

Alguns Modelos Discretos

Distribuição Uniforme Discreta

- A variável aleatória assume cada um de seus valores com igual probabilidade.

Definição:

A variável aleatória discreta X, assumindo valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tem **distribuição uniforme** se, e somente se:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x = x_1, x_2, \ldots, x_k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Notação: $X \sim U_d(k)$.

No R: Não há função pronta.

- É fácil verificar que:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \frac{1}{k}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}{k}\right\}.$$

Exemplo 3.1: Seja X uma variável aleatória que indica o número de pontos marcados na face superior de um dado quando ele é lançado. Obtenha a f.m.p. de X, a esperança e variância.

Exemplo 3.1: Solução em R.

```
> ddu=function(x,a,b) ifelse(x>=a & x<=b & round(x)==x,1/length(a:b),0)
> pdu=function(x,a,b) ifelse(x<a,0,ifelse(x<=b,floor(x)/length(a:b),1))
>
> a=1
> b=6
> x=a:b
> px=ddu(x,a,b)
> px
[1] 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667
>
> E_X=sum(x*px)
> E_X
[1] 3.5
>
> Var_X=sum(((x-E_X)^2)*px)
> Var_X
[1] 2.916667
```

Distribuição de Bernoulli

- Considere uma variável aleatória X que assume apenas dois valores:

$$\begin{cases} 1, & \text{se ocorrer sucesso} \\ 0, & \text{se ocorrer fracasso} \end{cases}.$$

- Indicaremos por p a probabilidade de sucesso, isto é, $P(\text{sucesso}) = P(X = 1) = p$, sendo $0 < p < 1$.

Definição:

A variável aleatória discreta X que assume apenas os valores 0 e 1 tem **distribuição de Bernoulli** se, e somente se:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Notação: $X \sim Ber(p)$.

No R: `dbinom(x,1,p)` (Número de ensaios é 1).

- Vejamos:
  - $P(X = 1) = p$.
  - $P(X = 0) = 1 - p$.

x	0	1
$P(X = x)$	1-p	p

- Segue-se facilmente que:

$$\mu = E(X) = p$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = p(1-p).$$

Modelos Probabilísticos | Modelos Discretos

Exemplo 3.2: Suponha o lançamento de um dado perfeito e o interesse é ocorrer a face 3. Obtenha a f.m.p. dessa variável aleatória, a esperança e variância.

Exemplo 3.2: Solução em R.

```
> i=1:6
> x=0:1
> p=1/length(i)
>
> px=dbinom(x,1,p)
> px
[1] 0.8333333 0.1666667
>
> E_X=sum(x*px)
> E_X
[1] 0.1666667
>
> Var_X=sum(((x-E_X)^2)*px)
> Var_X
[1] 0.1388889
```

Distribuição Binomial

- Considere M **ensaios de Bernoulli independentes**, todos com a mesma probabilidade de sucesso p.

- A variável aleatória que conta **o número de sucessos nos M ensaios de Bernoulli** é denominada **variável aleatória Binomial** com parâmetros M e p.

Exemplo 3.3 (Teórico): Considere uma linha de produção, em que 3 peças são selecionadas aleatoriamente e são classificadas como defeituosas (D) ou não defeituosas (N). X_1, X_2 e X_3 são variáveis aleatórias que assumem 1 se a peça for não defeituosa e 0 caso contrário. A probabilidade da peça ser não defeituosa é p e, consequentemente, a probabilidade da peça se defeituosa é $1 - p$. É de interesse encontrar a distribuição de $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

Definição:

A variável aleatória discreta X, correspondente ao número de sucessos nos M ensaios independentes de Bernoulli, tem **distribuição de Binomial** se, e somente se:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}, & x = 0, 1, \ldots, M \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

em que $\binom{M}{x} = \frac{M!}{x!(M-x)!}$.

Notação: $X \sim Bin(M, p)$.

No R: **`dbinom(x,M,p)`**.

- Tem-se que:

$$\mu = E(X) = Mp$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = Mp(1-p).$$

Exemplo 3.4: Uma rede varejista compra certo tipo de equipamento eletrônico. O fabricante indica que a taxa de equipamentos em perfeito estado é 97%.

a) Seleciona-se ao acaso 20 destes itens. Qual a probabilidade de que haja pelo menos um item defeituoso nesses 20?

b) Selecionando-se aleatoriamente 20 itens em cada um de 10 carregamentos, qual a probabilidade de que haja 3 carregamentos com pelo menos um item defeituoso?

Exemplo 3.4: Solução em R.

```
> # a)
>
> M=20
> p=0.03
>
> Pi=1-pbinom(0,M,p)
> Pi
[1] 0.4562057
>
> pbinom(0,M,p,lower.tail=F) # outra maneira
[1] 0.4562057
>
>
> # b)
>
> dbinom(3,10,Pi)
[1] 0.1602161
```

Modelos Probabilísticos Modelos Discretos

Exercício Proposto 3.1: Um fabricante adquire certo tipo de componente de um fornecedor. Segundo este fornecedor, a proporção de componentes defeituosos é 2%. O fabricante adquire 10 lotes por mês e cada lote são selecionados 15 componentes para inspeção. Qual a probabilidade de que sejam encontrados 3 lotes com mais de um componente defeituoso?

Resp.: $0,2570$.

Distribuição Geométrica

- Considere uma sequência de **ensaios de Bernoulli independentes**, todos com a mesma probabilidade de sucesso p $(0 < p < 1)$.
- Seja variável aleatória X **o número de fracassos anteriores ao primeiro sucesso.**
- Similarmente, a variável aleatória X pode ser vista como **o número de ensaios que precedem o primeiro sucesso.**

Definição:

A variável aleatória discreta X tem **distribuição de Geométrica** se, e somente se:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Notação: $X \sim Geo(p)$.

No R: `dgeom(x,p)`.

- Tem-se que:

$$\mu = E(X) = \frac{1-p}{p}$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- **Observação:** Uma variável aleatória Y pode ser vista como **o número de ensaios até a ocorrência do primeiro sucesso**. Neste caso, Y **tem distribuição Geométrica** com f.m.p. dada por:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \begin{cases} p(1-p)^{y-1}, & y = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- Tem-se que $Y = X + 1$ é uma variável aleatória e $y = x + 1$ é o seu valor numérico.

- Com isso, tem-se que:

$$\mu = E(Y) = E(X) + 1 = \frac{1}{p}$$

e

$$\sigma^2 = Var(Y) = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemplo 3.5: Um pesquisador está realizando experimentos químicos independentes e sabe que a probabilidade de que cada experimento apresente uma reação positiva é 0,3. Qual a probabilidade de que menos de 3 reações negativas ocorram antes da primeira positiva?

Exemplo 3.5: Solução em R.

```
> pgeom(2,0.3)
[1] 0.657
```

Distribuição Binomial Negativa

- Considere **ensaios de Bernoulli independentes**, todos com a mesma probabilidade de sucesso p $(0 < p < 1)$.
- Definimos a variável aleatória X como **o número de fracassos anteriores ao r-ésimo sucesso**.

Definição:

A variável aleatória discreta X tem **distribuição Binomial Negativa** se sua f.m.p. é dada por:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x, & x = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Notação: $X \sim BN(r, p)$.

No R: `dnbinom(x,r,p)`.

- Tem-se que:

$$\mu = E(X) = r\left(\frac{1-p}{p}\right)$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = r\left(\frac{1-p}{p^2}\right).$$

- **Observações:**

1. Note que se $r = 1$, temos **o modelo geométrico**;
2. $\binom{x+r-1}{r-1} = \binom{x+r-1}{x}$.

- A Binomial Negativa pode ser definida como o **número de ensaios necessários para a obtenção do r-ésimo sucesso.**
- Tomando $y = x + r$, temos a quantidade desejada e seus valores variam de r em diante.
- Assim, sendo Y o **número de ensaios necessários para a obtenção de r sucessos**, temos:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \begin{cases} \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}, & y = r, r+1, \ldots, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Observação:

1. A distribuição Binomial Negativa poder ser caracterizada e termos de soma de variáveis aleatórias seguindo distribuição Geométrica:

    Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_r$ variáveis aleatórias independentes seguindo distribuição Geométrica com parâmetro p.

    Definindo $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$, temos que X tem distribuição Binomial Negativa com parâmetros r e p.

Modelos Probabilísticos — Modelos Discretos

Exemplo 3.6: Em uma série do campeonato de basquete, o time que ganhar 4 em 7 jogos será o vencedor. Suponha que o time A tenha probabilidade de 55% de ganhar de B e que A e B se enfrentarão em uma série de 7 jogos. Qual a probabilidade de que A vença a série em seis jogos?

Exemplo 3.6: Solução em R.

```
> dnbinom(2,4,0.55)
[1] 0.1853002
```

Distribuição Hipergeométrica

- Considere um conjunto de n objetos dos quais m são do Tipo I e $n - m$ são do Tipo II.

- Para um sorteio de r objetos ($r < n$), feito ao acaso e sem reposição, **defina X como o número de objetos do Tipo I selecionados**.

Modelos Probabilísticos Modelos Discretos

Definição:

A variável aleatória discreta X tem **distribuição Hipergeométrica** se sua f.m.p. é dada por:

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{n-m}{r-x}}{\binom{n}{r}},$$

em que x (inteiro) é tal que

$$\max\{0, r-(n-m)\} \leq x \leq \min\{r, m\}.$$

Notação: $X \sim Hgeo(m, n, r)$.

No R: `dhyper(x, m, n-m, r).`

- **Observação:** Os limites de x na definição garantem que situações absurdas sejam evitadas. Vejamos:
  - $\max\{0, r-(n-m)\}$: assegura a contagem adequada nos casos que existem poucos objetos do Tipo II em relação ao número de objetos do Tipo I;
  - $\min\{r, m\}$: não podemos ter mais do que o número existentes do Tipo I, tampouco mais que o total sorteado.

- Temos que:

$$\mu = E(X) = r\frac{m}{n}$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{rm(n-m)(n-r)}{n^2(n-1)}.$$

Modelos Probabilísticos | Modelos Discretos

Exemplo 3.7: Considere que em um lote de 20 peças existam 4 defeituosas. Selecionando-se 5 dessas peças, sem reposição, qual seria a probabilidade de 2 defeituosas terem sido escolhidas?

Exemplo 3.7: Solução em R.

```
> dhyper(2, 4, 16, 5)
[1] 0.2167183
```

Distribuição Poisson

- É largamente empregada quando se deseja contar o número de eventos de certo tipo que ocorrem em um certo período de tempo ou superfície ou volume.

- **Exemplos:**
  - Número de chamadas telefônicas recebidas por uma central telefônica durante 5 minutos;
  - Número de falhas de um computador em um dia de operação;
  - Número de defeitos em peças fabricadas.

Definição:

A variável aleatória discreta X tem **distribuição Poisson** com parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua f.m.p. é dada por:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Notação: $X \sim Poi(\lambda)$.

No R: `dpois(x, λ)`.

- Temos que:

$$\mu = E(X) = \lambda$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \lambda.$$

Exemplo 3.8: Uma central telefônica recebe, em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição Poisson seja adequada nessa situação, obtenha a probabilidade de que a central telefônica receba no máximo duas chamadas durante um intervalo de um minuto.

Exemplo 3.8: Solução em R.

```
> ppois(2,5)
[1] 0.124652
```

O Processo de Poisson:

- Suponha que μ seja a média de ocorrência do evento de interesse em t unidades de medida (por exemplo, tempo).
- Denotamos por λ a taxa média de ocorrência em uma unidade de medida, com $\mu = \lambda t$.
- Podemos escrever a f.m.p. por:

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, & x = 0, 1, \ldots, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Modelos Probabilísticos Modelos Discretos

Exemplo 3.9: Considerando em **Exemplo 3.8**, qual a probabilidade de que a central telefônica receba no máximo duas chamadas em quatro minutos?

Exemplo 3.9: Solução em R.

```
> ppois(2,5*4)
[1] 4.55515e-07
```

Resultados Importantes

Resultado 1: Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e $X_i \ \sim Poi(\lambda_i)$, então
$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$.

Resultado 2: Se $X \ \sim Bin(M, p)$, com M grande e p pequeno, pode-se aproximar a distribuição de X pela Poisson com parâmetro $\lambda = Mp$.

Exemplo 3.10: Em certa instalação industrial, acidentes ocorrem com baixa frequência. Sabe-se que a probabilidade de um acidente ocorrer em um certo dia é de 0,005 e que os acidentes são independentes. Qual a probabilidade de que em um período de 400 dias haja no máximo 3 dias com acidente?

Exemplo 3.10: Solução em R.

```
> M=400
> p=0.005
> Mu=M*p
>
> ppois(3,Mu)
[1] 0.8571235
```

Exercício Proposto 3.2: Considerando o **Exemplo 3.10**, calcule a probabilidade considerando a distribuição exata (Binomial) e compare os resultados

Resp.: $0,8575767$.

Distribuição Multinomial

- É uma generalização da distribuição binomial para mais de duas categorias. Enquanto a distribuição binomial lida com dois possíveis resultados (como sucesso/falha), a multinomial trata de experimentos com mais de dois resultados possíveis (categorias). Ela modela a probabilidade de observar um certo número de ocorrências para cada categoria em uma série de experimentos independentes.
- **Exemplo:**
  - Lançamento de um dado: Se você lançar um dado de 6 lados 10 vezes, a probabilidade de observar, por exemplo, três “1”, dois “2”, um “3”, zero “4”, dois “5” e dois “6” pode ser modelada por uma distribuição multinomial.

Definição:

A distribuição binomial pode ser generalizada considerando a repartição do espaço amostral em k eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, mutuamente exclusivos. Considerem-se n repetições do experimento. Seja $p_i = P(A_i)$ e suponha-se que p_i permaneça constante durante todas as repetições. Evidentemente, teremos $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Definam-se as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_k$ como segue: X_i é o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições do experimento, $i = 1, \ldots, k$.

Os X_i não são variáveis aleatórias independentes, porque $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$.

Teorema:

Se X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, forem definidas como anteriormente, teremos

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k},$$

em que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

- Para k igual a 2 a expressão anterior se torna a distribuição binomial;
- Se $X_1, \ldots, X_k$ tem distribuição multinomial,

$$E(X_i) = np_i \quad \text{e} \quad V(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

No R: `dmultinom(x,p)`.

Exemplo 3.11: Qual é a probabilidade de se lançar um dado de 6 lados 9 vezes, se encontrar 3 lados 1, 2 lados 6, e os demais lados 1 vez?

Exemplo 3.11: Solução em R.

```
> X=c(3,2,1,1,1,1)
> p=c(1/6,1/6,1/6,1/6,1/6,1/6)
>
> dmultinom(X,prob=p)
[1] 0.003000686
```

Exemplo 3.12: Uma fábrica de lâmpadas coloridas produz 50% de lâmpadas verdes, 20% de lâmpadas azuis e 30% de lâmpadas amarelas. Qual é a probabilidade de em 6 lâmpadas 2 sejam verdes, 3 azuis e 1 amarela? Qual é a probabilidade de em 8 lâmpadas 4 sejam verdes, 2 azuis e 2 amarelas?

Exemplo 3.12: Solução em R.

```
> X=c(2,3,1)
> p=c(1/2,1/5,3/10)
>
> dmultinom(X,prob=p)
[1] 0.036
```

Outros Exemplos

Exemplo 3.13: Um site contém 3 servidores idênticos. Somente um deles é usado para operar o site, os outros dois são sobressalentes que podem ser ativados no caso de o sistema principal falhar. A probabilidade de falha é 0,0005. Supondo que cada solicitação represente uma tentativa independente, qual será o número médio de solicitações até a falha dos 3 servidores? Qual a probabilidade de todos os 3 servidores falharem em 5 solicitações?

Modelos Probabilísticos Modelos Discretos

Exemplo 3.14: Contaminação é um problema de fabricação de discos ópticos. O número de partículas de contaminação que ocorrem em um disco tem distribuição de probabilidade discreta e o número médio de partículas por cm^2 de superfície é 0,1. A área da superfície do disco em estudo é 100 cm^2. Encontre a probabilidade de que 12 partículas sejam encontradas em um disco.

Exemplo 3.15: Uma batelada de peças contém 100 peças de um fornecedor local de tubos e 200 peças de um fornecedor de um fornecedor de um estado vizinho. Se 4 peças forem selecionadas, ao acaso e sem reposição, qual será a probabilidade de que elas sejam todas provenientes do fornecedor local? Qual é a probabilidade de duas ou mais peças na amostra serem provenientes do fornecedor local? Qual é a probabilidade de no mínimo uma peça na amostra ser proveniente do fornecedor local?

Exemplo 3.16: Em uma fábrica, dados mostram que em 3 semanas típicas os números médios de acidentes são 2,5 na 1 º semana, 2 na 2º semana e 1,5 na 3 º semana. Suponha que o número de acidentes por semana segue uma distribuição de Poisson. Qual a probabilidade de que ocorram 4 acidentes em 3 semanas?

Exemplo 3.17: Suponha-se que o custo de realização de um experimento seja R$1.000,00. Se o experimento falhar, ocorrerá um custo adicional de R$300,00 em virtude de serem necessárias algumas alterações antes que a próxima tentativa seja executada. Se a probabilidade de sucesso em uma tentativa qualquer for 0,20, se as provas foram independentes, e se os experimentos continuarem até que o primeiro resultado frutuoso seja alcançado, qual será o custo esperado do procedimento completo?

Modelos Probabilísticos Modelos Discretos

Exemplo 3.18: Em determinada localidade, a probabilidade da ocorrência de uma tormenta em algum dia durante o verão (nos meses de dezembro e janeiro) é igual a 0,1. Admitindo-se independência de um dia para outro, qual é a probabilidade da ocorrência da primeira tormenta da estação de verão no dia 3 de janeiro?

Alguns Modelos Contínuos

Distribuição Uniforme

Definição:

Uma variável aleatória contínua X tem **distribuição Uniforme** no intervalo $[\alpha; \beta]$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se sua f.d.p. é dada por:

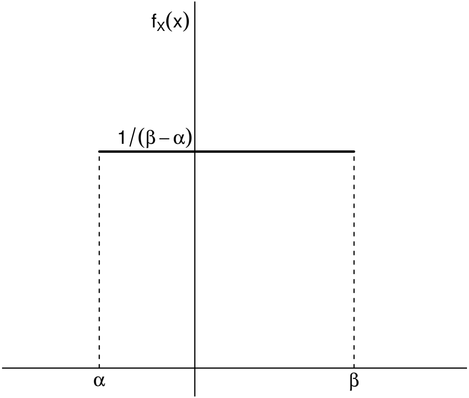
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Notação: $X \sim U(\alpha, \beta)$.

No R: `punif(x,`α`,`β`)`.

Modelos Probabilísticos Modelos Contínuos

- Uma ilustração gráfica da f.d.p. de X é:



- A f.d.a. da distribuição uniforme é facilmente encontrada:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dt = \frac{1}{\beta - \alpha} t\Big|_{\alpha}^{x} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Então,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1, & x \geq \beta \end{cases}.$$

- Temos que:

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

Exemplo 3.19: Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme, $U\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Calcule:

a) $F_X(x)$.

b) $P\left(-\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{4}\right)$.

c) $E(X)$ e $Var(X)$.

Exemplo 3.19: Solução em R.

```
> # b)
>
> a=-1/2; b=1/2
>
> punif(1/4,a,b)-punif(-1/4,a,b)
[1] 0.5
>
> # c)
>
> E_X=(a+b)/2
> E_X
[1] 0
>
> Var_X=((b-a)^2)/12
> Var_X
[1] 0.08333333
```

Exemplo 3.19: Solução em R (continuação).

```
> # c) outra maneira:
>
> fdp=function(x,a=-1/2,b=1/2) ifelse(x>=a & x<=b,1/(b-a),0)
> E_X= function(x) x*fdp(x)
> E_X2=function(x) (x^2)*fdp(x)
>
> integrate(E_X,-1/2,1/2)$value
[1] 0
> integrate(E_X2,-1/2,1/2)$value-((integrate(E_X,-1/2,1/2)$value)^2)
[1] 0.08333333
```

Distribuição Exponencial

Definição:

Uma variável aleatória contínua X tem **distribuição Exponencial** com parâmetro λ, $\lambda > 0$, se sua f.d.p. é dada por:

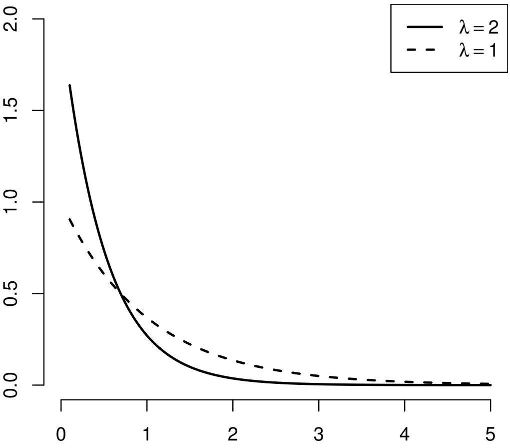
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Notação: $X \sim Exp(\lambda)$.

No R: `pexp(x,` λ`)`.

Modelos Probabilísticos — Modelos Contínuos

- Uma ilustração gráfica da f.d.p. de X é:



Modelos Probabilísticos Modelos Contínuos

- A f.d.a. da distribuição exponencial é dada por:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Então,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

- Temos que:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Propriedade:

a) Se $X \sim Exp(\lambda)$, então $P(X > a + b | X > b) = P(X > a)$.

Esta propriedade é conhecida por "falta de memória" e é a única distribuição contínua com esta propriedade.

- Outra parametrização para a distribuição exponencial:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

- Utilizando esta parametrização, temos que:

$$\mu = E(X) = \alpha$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \alpha^2.$$

Exemplo 3.20: Seja X o tempo de vida de um fusível que tem distribuição exponencial com média de 100 horas. Qual a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas?

Exemplo 3.20: Solução em R.

```
> lambda=1/100
>
> 1-pexp(150,lambda)
[1] 0.2231302
>
> # outra maneira
> pexp(150,lambda,lower=F)
[1] 0.2231302
```

Modelos Probabilísticos Modelos Contínuos

Exercício Proposto 3.3: O tempo X antes do primeiro reparo em uma certa máquina tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = \frac{1}{4}$ reparo/mês. Qual a probabilidade de que um reparo seja necessário após 6 meses de uso? E antes de um ano de uso?

Resp.: $0,22313$ e $0,95021$.

Distribuição Normal

- É o mais importante dos modelos probabilísticos.
- A **distribuição Normal** é também conhecida como **distribuição Gaussiana**.
- Sua representação gráfica é conhecida pela curva em forma de sino.

Definição:

Uma variável aleatória contínua X tem **distribuição Normal** com parâmetros μ (média) e σ^2 (variância) se sua f.d.p. é dada por:

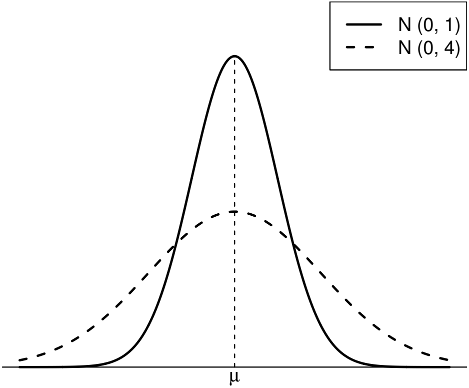
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \; -\infty < x < \infty,$$

em que $-\infty < \mu < \infty$ ($\mu \in \mathbb{R}$) e $\sigma^2 > 0$.

Notação: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$.

No R: `pnorm(x,` μ`,` σ`)`.

- Uma ilustração gráfica da sua f.d.p. é:



- Temos que:

$$\mu = E(X)$$

e

$$\sigma^2 = Var(X),$$

ou seja, a distribuição é parametrizada pela sua média e pela sua variância.

Propriedades:

a) A distribuição é simétrica em relação á média. Isto é,

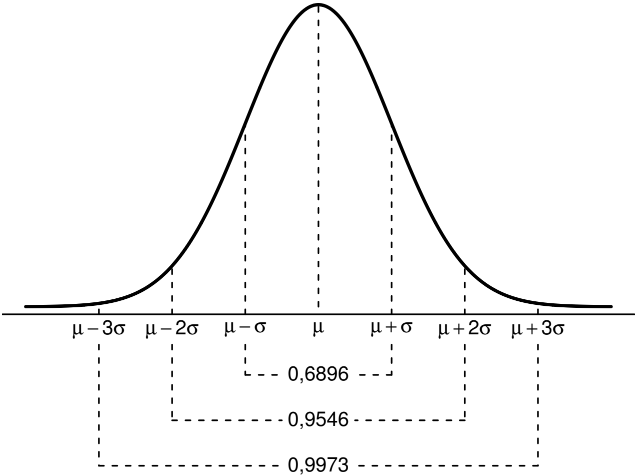
$$f_x(\mu - x) = f_x(\mu + x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

b) Como a área total sob a curva é igual a 1, à esquerda e à direita de μ a área é igual a 0,5.

c) Tem-se as seguintes probabilidades:

$$\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &= 0,6896\\
P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &= 0,9546\\
P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &= 0,9973.
\end{aligned}$$

Modelos Probabilísticos Modelos Contínuos



- A f.d.a. da distribuição normal é dada por:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt, \end{aligned}$$

cuja integral não tem solução analítica.

Pergunta: Como calcular probabilidade?

Resposta: Cálculo de probabilidades com auxílio de tabela.

Definição:

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, então a variável aleatória Z definida por

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

terá distribuição normal com média 0 e variância 1, $Z \sim N(0; 1)$, conhecida como **distribuição normal-padrão ou reduzida.**

Cáculo de Probabilidades:

- A seguir os cálculos de probabilidades a partir de exemplos.

Exemplo 3.21 (Uso da tabela normal-padrão): Seja $Z \sim N(0;1)$, calcule:

a) $P(0 \leq Z \leq 1,65)$.

b) $P(Z \leq 0,5)$.

c) $P(Z \leq -1,57)$.

d) $P(-0,65 \leq Z \leq 0,65)$.

e) $P(0,80 \leq Z \leq 1,40)$.

f) $P(0 \leq Z \leq z) = 0,4753$.

g) $P(Z \leq z) = 0,05$.

Exemplo 3.21: Solução em R.

```
> # a)
> pnorm(1.65)-pnorm(0)
[1] 0.4505285
>
> # b)
> pnorm(0.5)
[1] 0.6914625
>
> # c)
> pnorm(-1.57)
[1] 0.05820756
>
> # d)
> pnorm(0.65)-pnorm(-0.65)
[1] 0.4843078
```

Exemplo 3.21: Solução em R (continuação).

```
> # e)
> pnorm(1.40)-pnorm(0.80)
[1] 0.1310987
>
> # f)
> qnorm(0.5+0.4753)
[1] 1.965123
>
> # g)
> qnorm(0.05)
[1] -1.644854
```

Exemplo 3.22: Seja $X \sim N(90; 100)$. Determine:

a) $P(80 \leq X \leq 100)$.

b) $P(X \leq 90)$.

c) $P(60 \leq X \leq 75)$.

Exemplo 3.22: Solução em R.

```
> # a)
> pnorm(100,90,10)-pnorm(80,90,10)
[1] 0.6826895
>
> # b)
> 1-pnorm(90,90,10)
[1] 0.5
>
> # outra maneira
> pnorm(90,90,10,lower=F)
[1] 0.5
>
> # c)
> pnorm(75,90,10)-pnorm(60,90,10)
[1] 0.0654573
```

Modelos Probabilísticos Modelos Contínuos

Exemplo 3.23: Suponha que as medidas da corrente em um pedaço de fio sigam a distribuição normal, com uma média de 10 miliamperes e uma variância de 4.

a) Qual é a probabilidade de a medida exceder 13 miliamperes?
b) Qual é a probabilidade de a medida estar entre 9 e 11 miliamperes?
c) Determine o valor para o qual a probabilidade de uma medida da corrente estar abaixo desse valor seja 0,98.

Exercício Proposto 3.4: Seja $X \sim N(50; 10^2)$. Determine:

a) $P(30 \leq X \leq 70)$.

b) $P(|X - 50| < 10)$.

c) $P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0,90$.

d) $P(k \leq X \leq 70) = 0,8185$.

e) $P(k \leq X \leq 75) = 0,3031$.

Resp.: *a*) 0, 9544; *b*) 0, 6826; *c*) $a =$?; *d*) $k =$? ; *e*) $k =$?.

Observação: Seja $Z \sim N(0;1)$. Considere a probabilidade:

$$P(a \leq Z \leq b) = 0,95.$$

Quais os valores de a e b?

Vejamos:

a) $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$;

b) $P(-1,93 \leq Z \leq 2,01) = 0,951$;

c) $P(-2,55 \leq Z \leq 1,70) = 0,95$;

d) $P(-2,33 \leq Z \leq 1,75) = 0,95$.

Resultado Importante

Resultado 1 (Aproximação da Binomial pela Normal): Suponha que $X \sim Bin(M, p)$. Já sabemos que $E(X) = Mp$ e $Var(X) = Mp(1-p)$. Para calcular as probabilidades

- $\star$ $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(a < X \leq b)$ ou $P(a \leq X < b)$ ou $P(a < X < b)$
- $\star$ $P(X \geq a)$ ou $P(X > a)$
- $\star$ $P(X \leq b)$ ou $P(X < b)$,

é razoável considerar a distribuição normal com média e variância iguais às da distribuição Binomial.

- Em outras palavras, tem-se a aproximação da distribuição de probabilidade de X pela distribuição de uma variável aleatória Y, sendo $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$, em que $\mu = Mp$ e $\sigma^2 = Mp(1-p)$.

- Portanto, como exemplo,

$$P(X \geq a) \approx P(Y \geq a),$$

com $Y \sim N(Mp; Mp(1-p))$

Observação:

- O cálculo de probabilidade aproximado é feito da forma usual para a distribuição normal.
- A aproximação da distribuição binomial pela normal é boa quando $Mp(1-p) \geq 3$.

Exemplo 3.24: Uma prova é constituída de 20 testes com 4 alternativas cada. Um aluno não estudou a matéria e vai respondê-las ao acaso. Qual a probabilidade de acertar 50% ou mais das questões?

Exemplo 3.23: Solução em R.

```
> M=20
> p=1/4
>
> (Mu=M*p)
[1] 5
> (Var=M*p*(1-p))
[1] 3.75
>
> 1-pnorm(10,Mu,sqrt(Var))
[1] 0.004911637
>
> # outra maneira
> pnorm(10,Mu,sqrt(Var),lower=F)
[1] 0.004911637
```

Modelos Probabilísticos Resultado Importante

Exercício Proposto 3.5: Considere as informações do **Exemplo 3.23**. Calcule a probabilidade exata (baseada na distribuição Binomial) e avalie o erro cometido ao calcular com a aproximação pela distribuição normal.

Resp.: ?