

**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Engenharia Elétrica e Informática**  
**Departamento de Sistemas e Computação**  
**Programa de Educação Tutorial (PET)**

**Demontiê Junior**  
([demontie@dsc.ufcg.edu.br](mailto:demontie@dsc.ufcg.edu.br))

# Fluxo Máximo a Custo Mínimo

## Min Cost Max Flow

# Agenda

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- Introdução
- Conceitos importantes
  - Algoritmo de Bellman-Ford
  - Redes de fluxo
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais



# Introdução

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

## ■ Caracterização do Problema:

- Encontrar os caminhos de menor custo que geram o fluxo máximo de uma rede.
- Utiliza algoritmos de fluxo máximo e de menor caminho de origem única.
- Cada aresta tem dois atributos: peso e capacidade



# Introdução

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

## ■ Motivação:

- Aplicável a vários problemas reais.
- Exemplo (variação: fluxo a custo mínimo):

*"Saber a quantia mínima em dinheiro que um grupo de amigos precisa dispor para se deslocar entre duas cidades. O transporte será feito por aviões, que seguem determinados trechos (existe apenas um voo para cada trecho durante todo o período do passeio, mas o tempo do voo é desprezível). Todos os voos tem a mesma capacidade, e cada um tem seu custo por pessoa."*



# Introdução

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

## ■ Objetivos:

- Apresentar um algoritmo para resolução do problema de *Fluxo Máximo a Custo Mínimo*
- Mostrar a importância do conhecimento desse tipo de algoritmos para a resolução de problemas reais





# Conceitos Importantes





# Contextualizando...

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- O que é um grafo?
  - Dois tipos de elementos: vértices e arestas
  - De maneira mais formal, grafos são tuplas do tipo  $G = \langle V, E \rangle$ :
    - $V$  é o conjunto finito, não vazio, de vértices
    - $E$  é o conjunto finito de arestas
    - Se  $\exists e = \{v, w\} \mid e \in E$ , então, dizemos que  $e$  é incidente a  $v$  e  $w$ , bem como  $v$  e  $w$  são adjacentes



# Menor caminho de origem única

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- Em que consiste?
  - Encontrar os menores caminhos entre um vértice inicial e todos os outros vértices de um grafo
  - Utiliza grafos valorados
  - Algoritmos mais famosos:
    - Dijkstra
    - Bellman-Ford
    - Floyd-Warshall





# Algoritmo de Bellman-Ford

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

**Bellman-Ford( $G, w, s$ )**

**for**  $\forall u \in V[G]$  **do**

$d[u] \leftarrow \infty$

$\pi[u] \leftarrow \text{NIL}$

$d[s] \leftarrow 0$

**for**  $i \leftarrow 1$  **to**  $|V[G]| - 1$  **do**

**for**  $\forall (u, v) \in E[G]$  **do**

**if**  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  **then**

$d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\pi[v] \leftarrow u$

**for**  $\forall (u, v) \in E[G]$  **do**

**if**  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  **then**

**return** FALSE

**return** TRUE

Inicia as variáveis

Relaxamento

Checa a presença de ciclo negativo



# Redes de fluxo

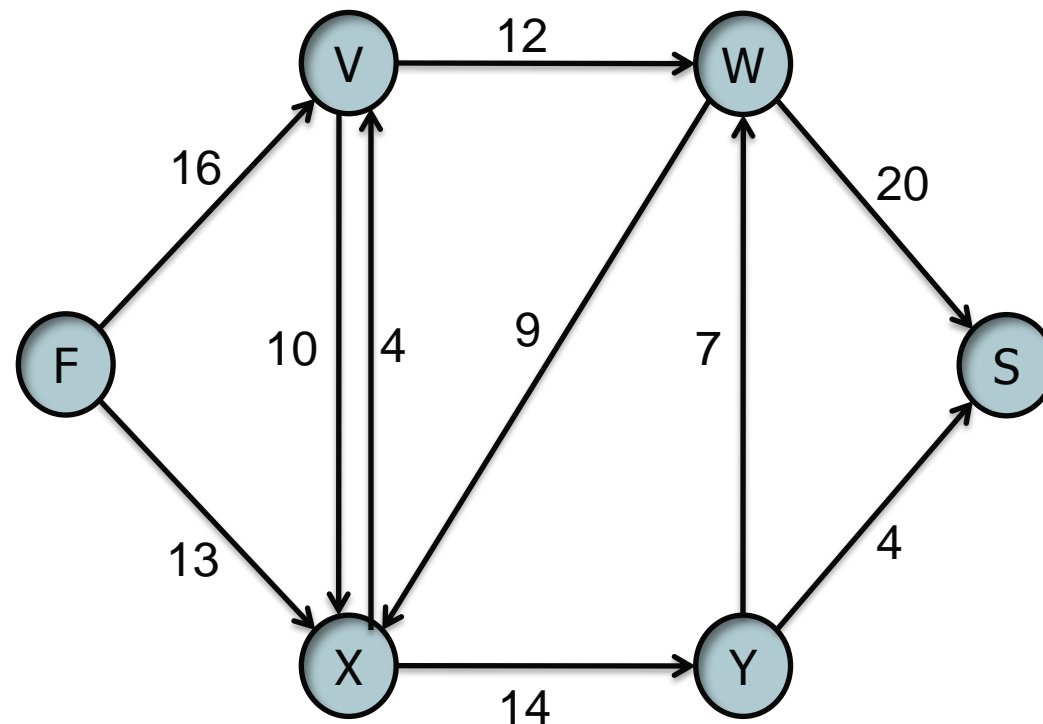
- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- O que são redes de fluxo?
  - Cada aresta tem uma capacidade (fluxo máximo nessa aresta)
  - Possui dois vértices especiais: **fonte** (**f**) e **sovedouro** (**s**)
  - $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , existe um caminho entre **f** e **s** passando por **v**



# Redes de fluxo

## ■ Exemplo:



# Rede residual

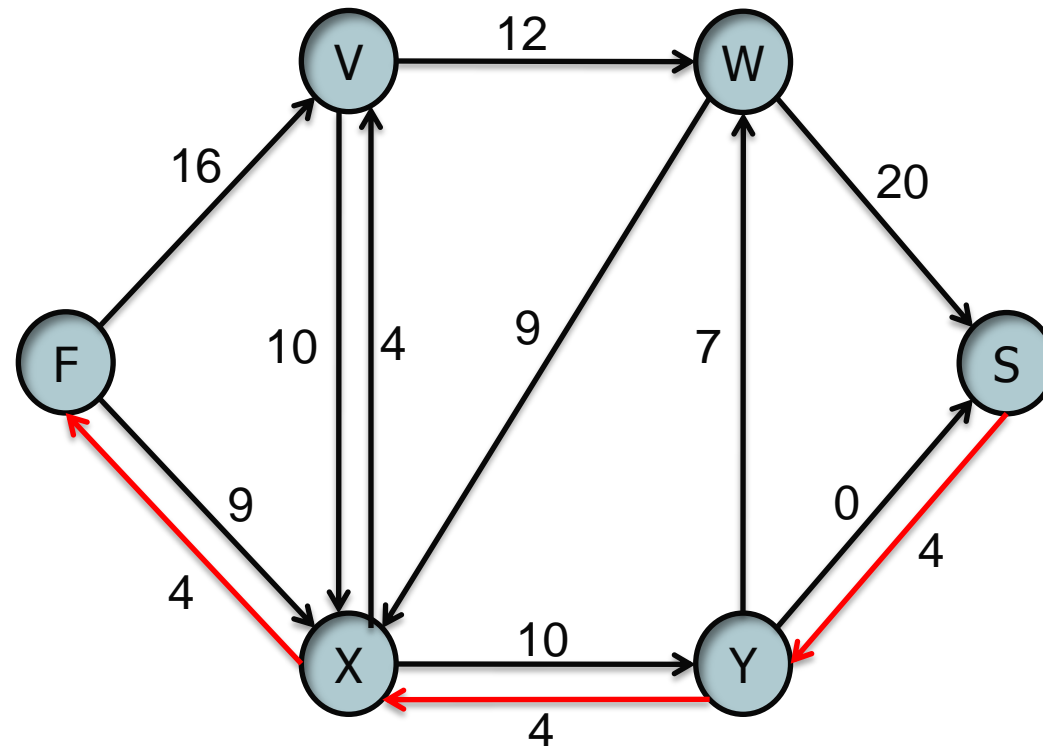
- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- Considere  $c(e)$  a função capacidade de  $e$ ,  $e \in E$
- A rede residual de uma rede  $R$  é um grafo  $R = \langle V, E_{\text{residual}} \rangle$ , tal que:
  - $\forall e \in E, \exists$  uma  $e_{\text{residual}}$  cuja capacidade é  $c_{\text{residual}}$
  - $c_{\text{residual}}(e) = c(e) - \text{fluxo}(e)$



# Rede residual

- Rede residual após um fluxo de 4 no caminho  $F \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow S$



# Algoritmo de fluxo máximo

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- Ford-Fulkerson
  - Rede residual
  - Caminho expandível

```
Ford-Fulkerson( $G, s, t$ )  
  for  $\forall e \in E[G]$  do  
     $\text{fluxo}[e] \leftarrow 0$   
  
  while existir um caminho expandível  $p$  na rede residual do  
    aumentar  $f$  (*) ao longo de  $p$   
  return  $f$ 
```

(\*) capacidade do arco de menor capacidade de  $p$







# Apresentação e análise do algoritmo

# Fluxo Máximo a Custo Mínimo

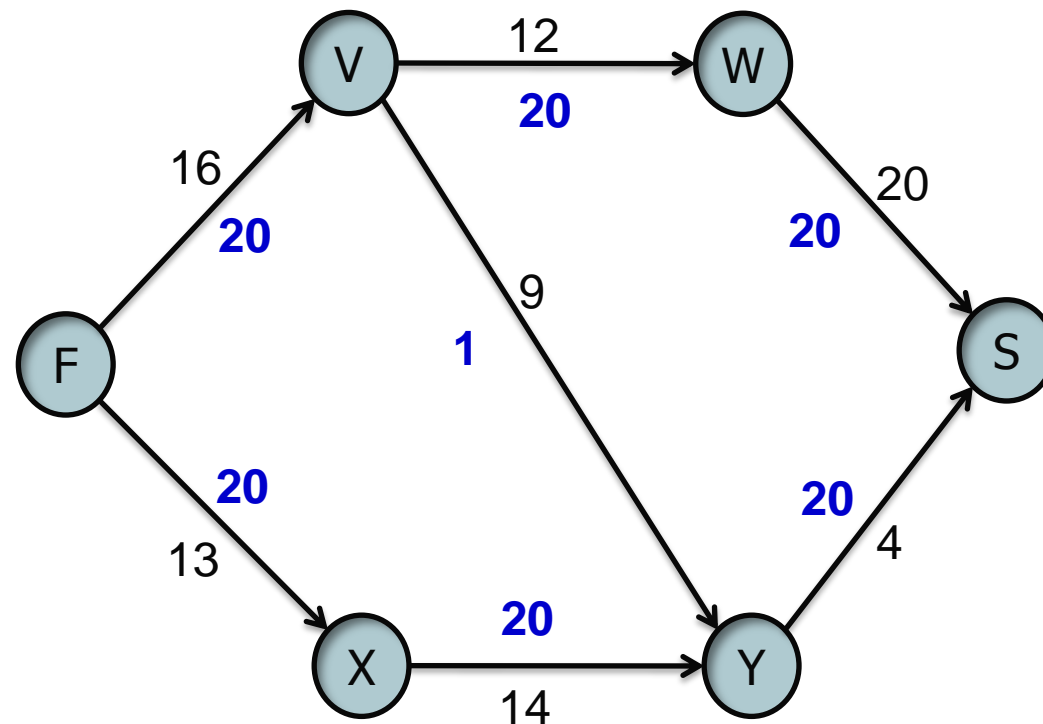
- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- “Por que não encontrar os menores caminhos com Dijkstra e, simplesmente, sair distribuindo o fluxo?”
  - Temos que gerar, sempre, a rede residual, para que não seja encontrado um fluxo diferente do máximo
  - Quando geramos a rede residual, temos que modificar, também, os custos das arestas
  - Algumas vezes invertemos o custo de uma aresta
  - Dijkstra não funciona bem com pesos negativos



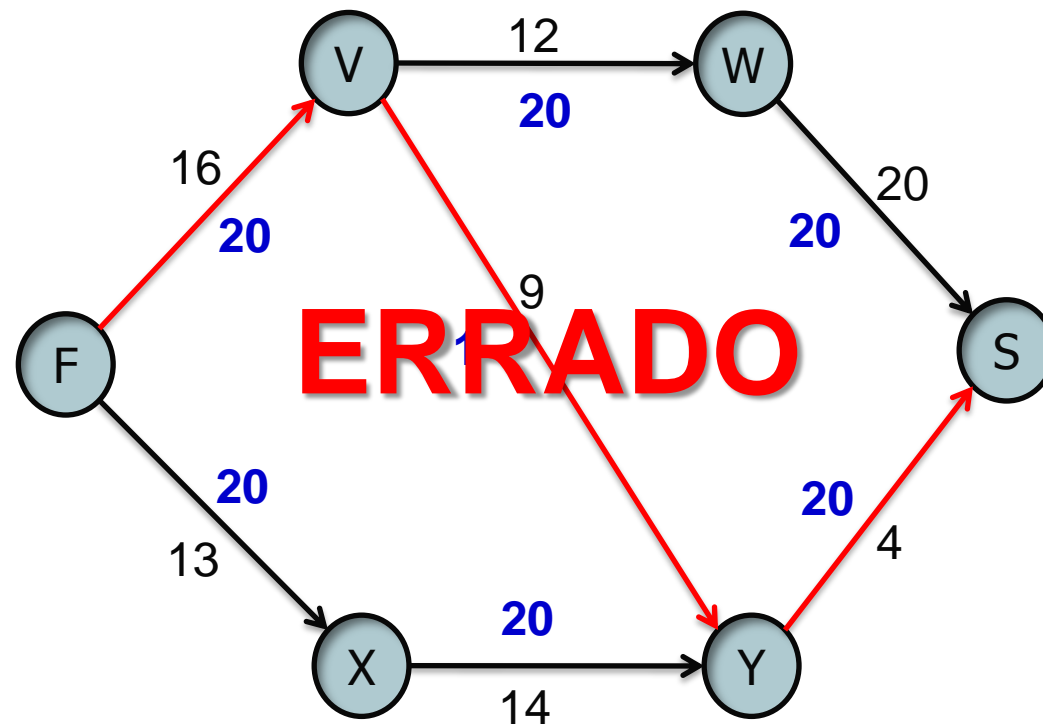
# Fluxo Máximo a Custo Mínimo

## ■ Exemplo



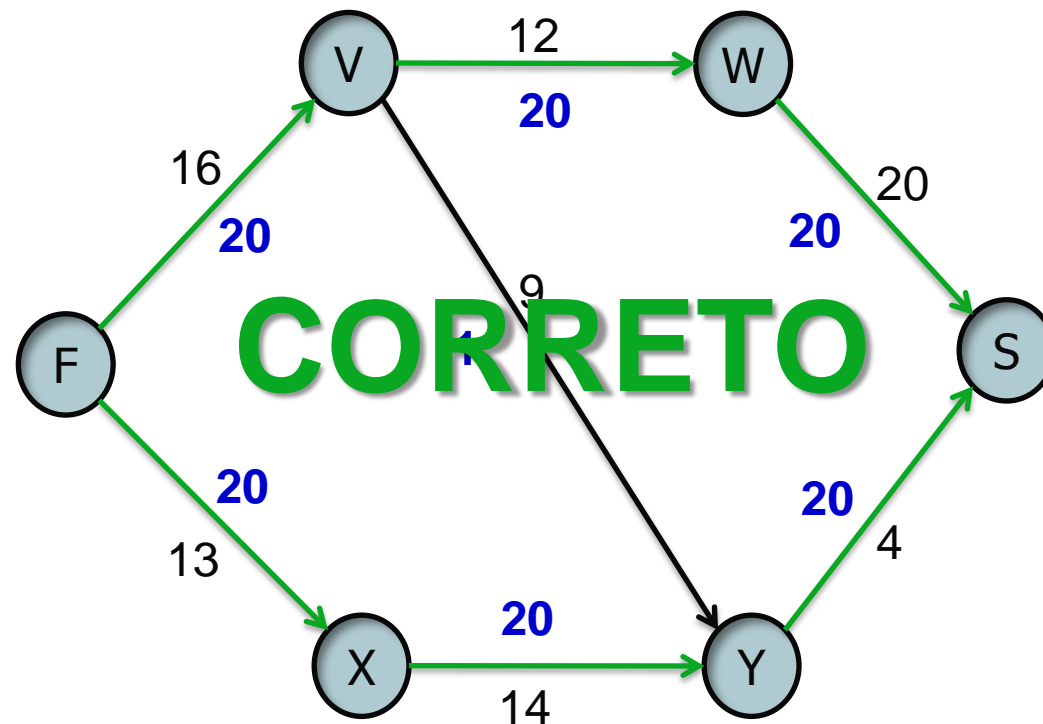
# Fluxo Máximo a Custo Mínimo

## ■ Exemplo



# Fluxo Máximo a Custo Mínimo

## ■ Exemplo



# O algoritmo

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

**MinCostMaxFlow( $G, s, t$ )**

**for**  $\forall e \in E[G]$  **do**

fluxo[e]  $\leftarrow 0$

redeResidual  $\leftarrow G$

custo  $\leftarrow 0$

**while** **existir um caminho entre F e S** (rodar Bellman-Ford para encontra menor caminho  $F \rightarrow S$  (\*)) **do**

atualizar custo

aumentar fluxo ao longo do caminho  $c$

gerar rede residual, modificando o custo das arestas

**return** fluxo, custo

(\*) o Bellman-Ford roda em cima da rede residual





# Analizando o algoritmo

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- Análise do Bellman-Ford
  - Ordem de complexidade:  $\Theta(|V| \cdot |E|)$
- Análise do Ford-Fulkerson
  - Ordem de complexidade:  $O(E \cdot |f^*|)$
  - Na implementação de Edmonds-Karp, utilizando busca em largura:  $O(V \cdot E^2)$



# Analizando o algoritmo

## ■ Análise do Fluxo Máximo a Custo Mínimo

```
MinCostMaxFlow(G, s, t)
  for  $\forall e \in E[G]$  do
    fluxo[e]  $\leftarrow$  0
  redeResidual  $\leftarrow$  G
  custo  $\leftarrow$  0

  while exisitr um caminho entre F e S (rodar Bellman-Ford
    para encontra menor caminho  $F \rightarrow S$  (*)) do
    atualizar custo
    aumentar fluxo ao longo do caminho  $c$ 
    gerar rede residual, modificando o custo das arestas

  return fluxo, custo
```

$O(E)$

$O(|f^*| \cdot E \cdot V)$

$O(E)$

■  $\text{MinCostMaxFlow} = O(V \cdot E^2)$

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais



# Exemplo de Implementação

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- Código Java que responde ao exemplo citado



# Referências

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

- Prof. Jorge Figueiredo, notas de aula 6 e 10;
- CORMEN, THOMAS H., Introduction To Algorithms 2.ed. MIT PRESS, 2001
- <http://www.slideshare.net/rafaelspereira/fluxo-a-custo-mnimo-1828149>
- <http://courses.csail.mit.edu/6.854/06/scribe/s12-minCostFlowAlg.pdf>



# Dúvidas?

- Introdução
- Conceitos importantes
- Apresentação e análise do algoritmo
- Exemplo de implementação
- Considerações Finais

