



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE
Campus Passo Fundo



ESTRUTURA DE DADOS II

Prof. Adilso Nunes de Souza



ÁRVORE AVL

- É um tipo de árvore binária balanceada com relação à altura das suas sub-árvores.
- Foi criada por **Adelson-Velskii** e **Landis**, de onde originou sua nomenclatura, em 1962.
- Permite o rebalanceamento local da árvore, onde somente a parte afetada pela inserção ou remoção é rebalanceada.
- Faz uso de rotações simples ou duplas para alcançar o balanceamento da estrutura.



ÁRVORE AVL

- Busca manter-se como uma árvore binária quase completa reduzindo o custo máximo das rotinas de busca.
- O objetivo das operações de rotação é acertar o fator de balanceamento (FB) de determinado nó (o nó pai da árvore desbalanceada), restituindo assim o equilíbrio da árvore.

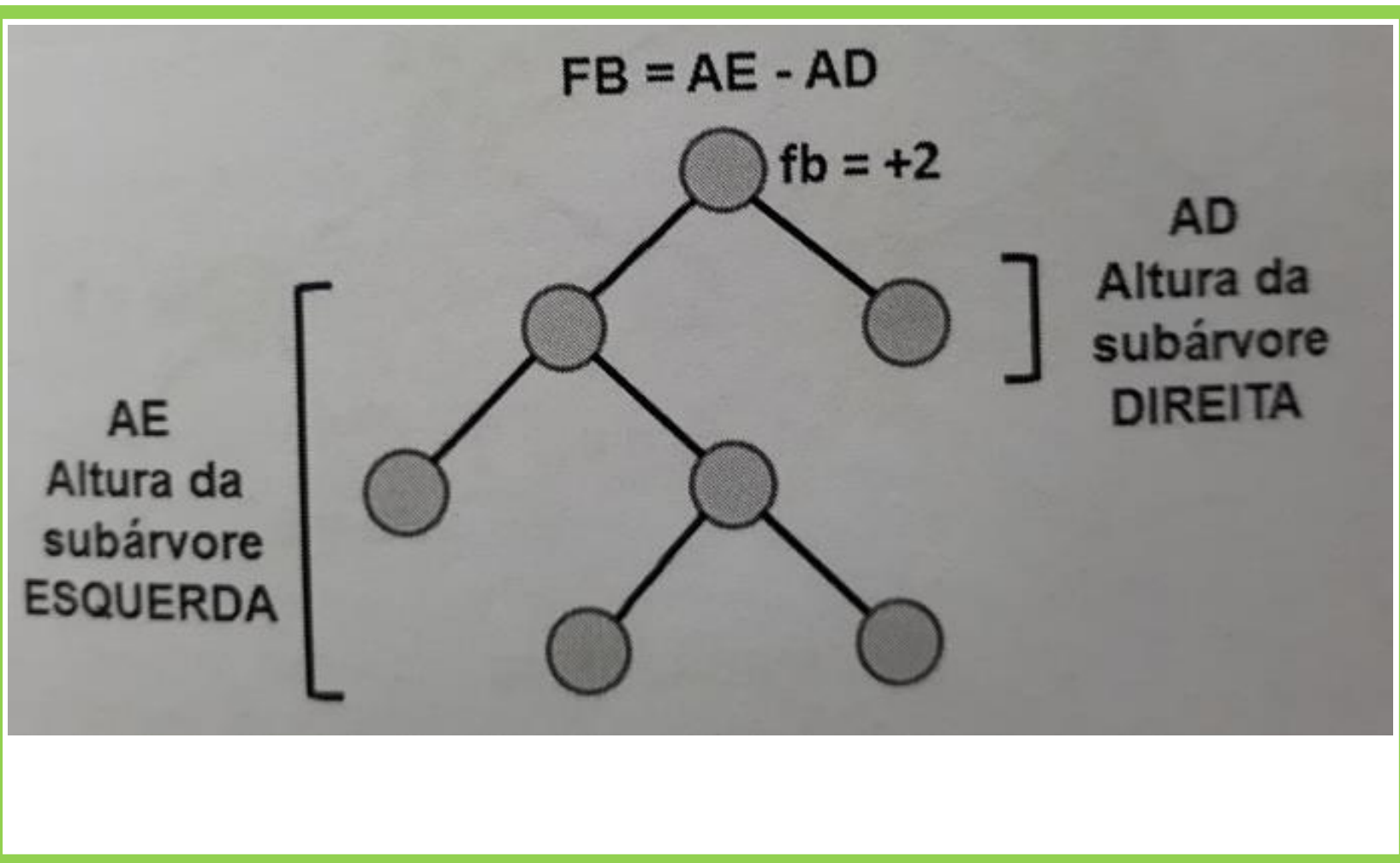


FATOR DE BALANCEAMENTO

- É a diferença das alturas das sub-árvores esquerda e direita de um nó.
- Se o Fator de Balanceamento for maior do que 1 ou menor do que -1 em um nó da árvore, então a árvore deve ser balanceada naquele nó.
- A rotação pode ser simples ou dupla, as quais diferem entre si pelo sentido da inclinação do nó pai e filho.

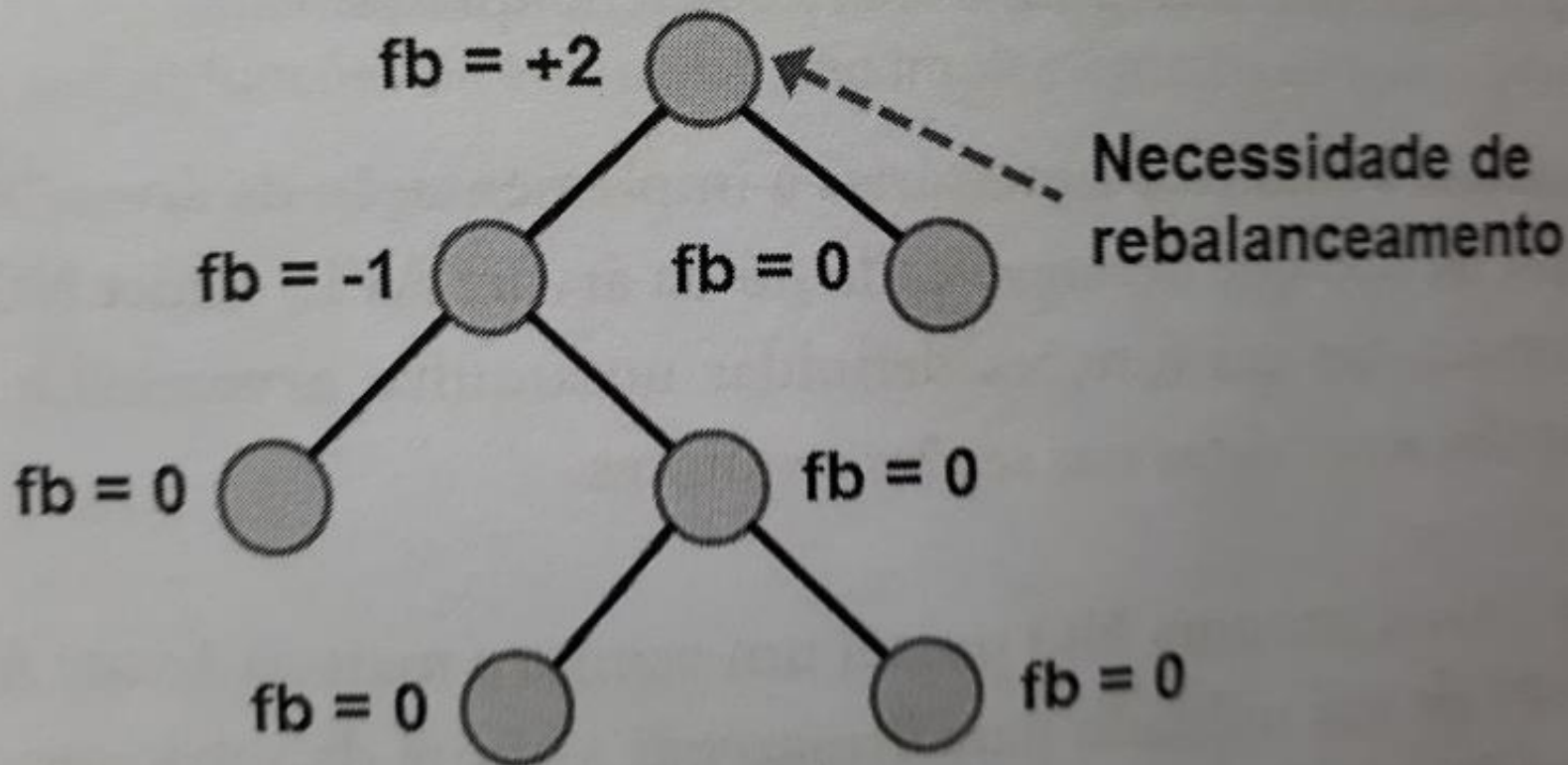


FATOR DE BALANCEAMENTO





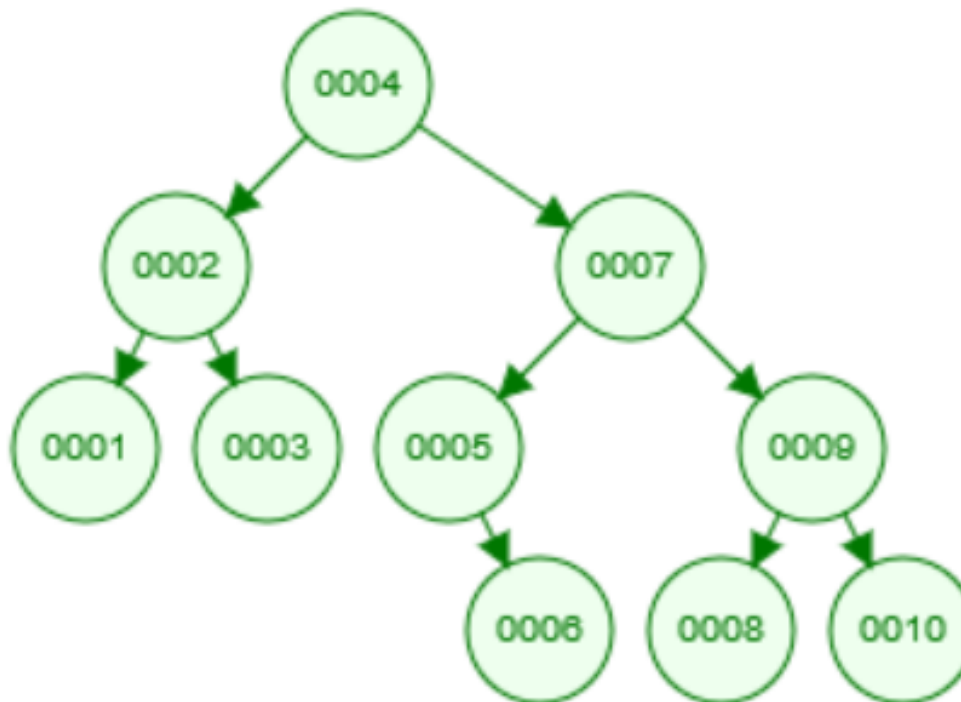
FATOR DE BALANCEAMENTO





FATOR DE BALANCEAMENTO

- A árvore apresentada está balanceada?
- Calcule o FB de cada nó da árvore abaixo





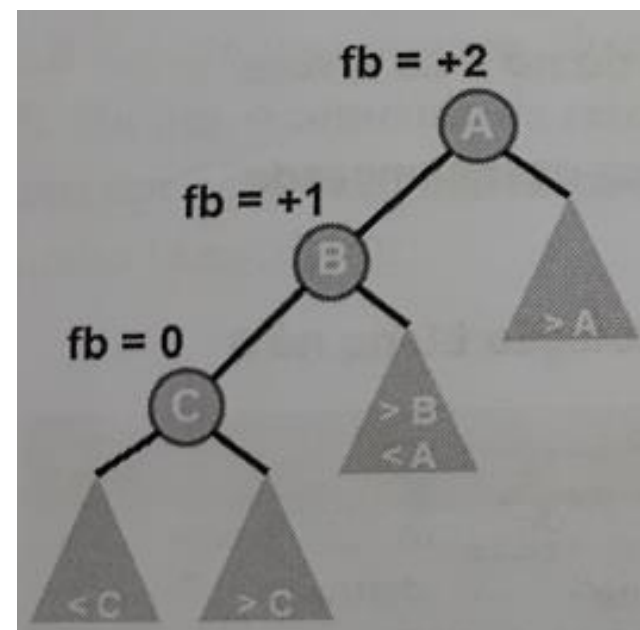
TIPOS DE ROTAÇÕES

- Rotação Simples: o nó desbalanceado (pai), seu filho e o seu neto estão todos no mesmo sentido de inclinação.
- Pode ser:
 - Rotação simples à direita **LL**
 - Rotação simples à esquerda **RR**



ROTAÇÃO SIMPLES À DIREITA - LL

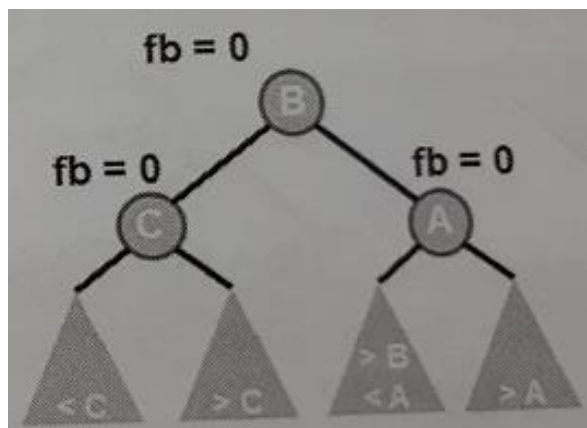
- Ocorre quando um novo nó é inserido na sub-árvore da esquerda do filho esquerdo tornando o FB do nó A inválido.
- Árvore desbalanceada.





ROTAÇÃO SIMPLES À DIREITA - LL

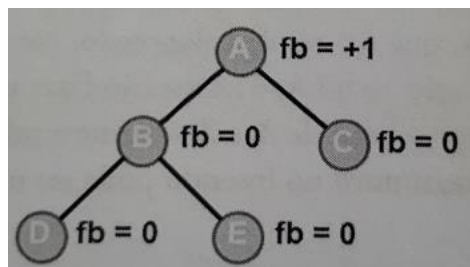
- Neste caso houve dois movimentos para a esquerda em relação ao nó A.
- É necessário fazer uma rotação à direita de modo que o nó intermediário B ocupe o lugar de A e A se torne a sub-árvore direita de B.



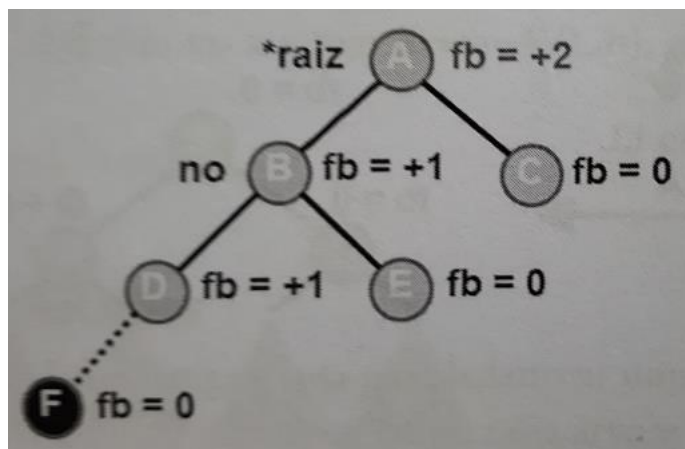


ROTAÇÃO SIMPLES À DIREITA - LL

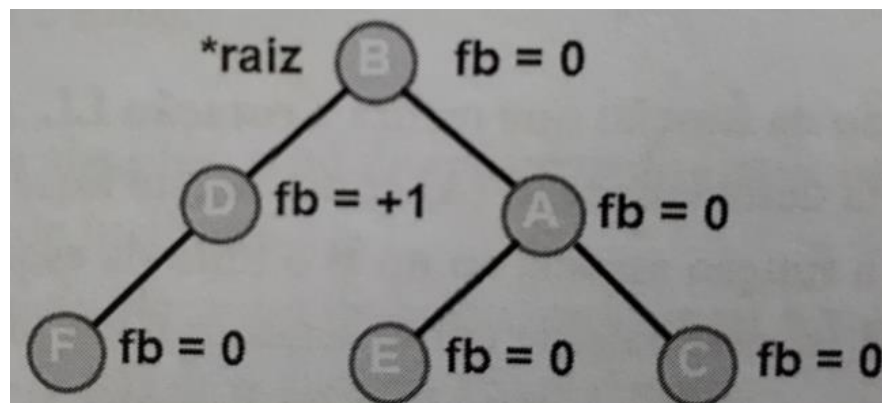
Árvore atual



Inserção do nó F



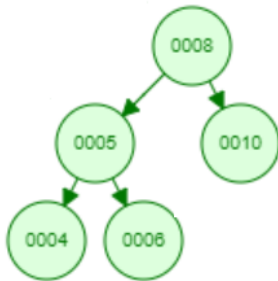
Rotação LL



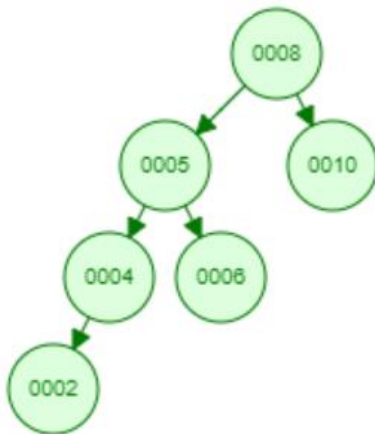


ROTAÇÃO SIMPLES À DIREITA - LL

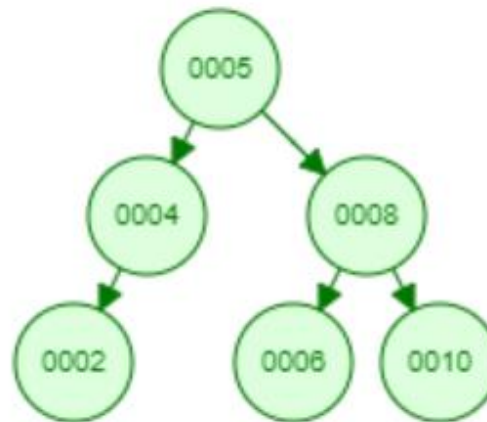
Árvore atual

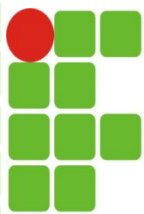


Inserção do nó 2



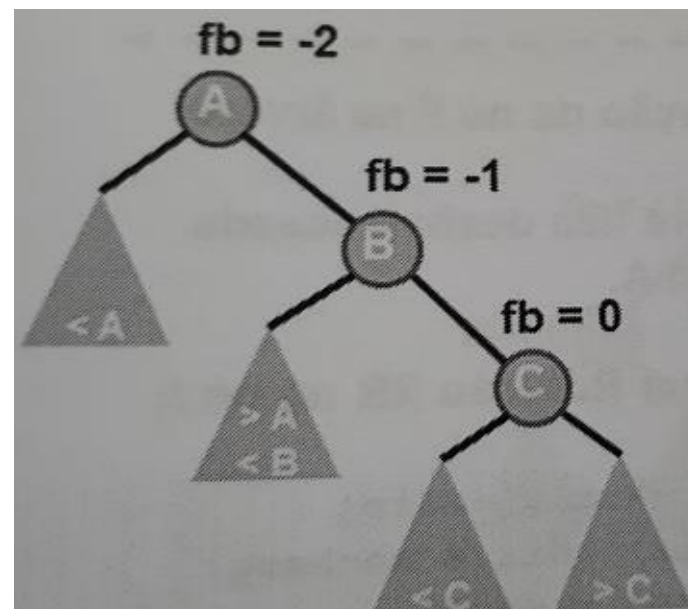
Rotação LL





ROTAÇÃO SIMPLES À ESQUERDA - RR

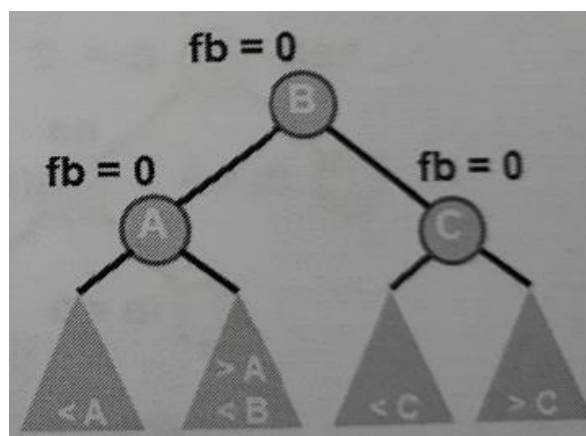
- Ocorre quando um novo nó é inserido na sub-árvore da direita do filho direito tornando o FB do nó A inválido.
- Árvore desbalanceada.





ROTAÇÃO SIMPLES À ESQUERDA - RR

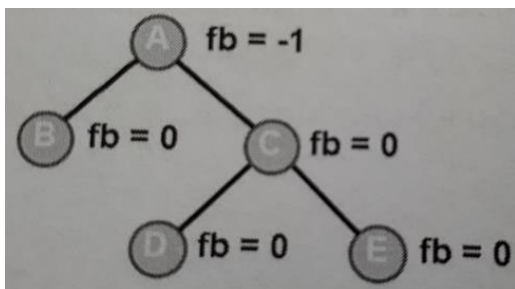
- Neste caso houve dois movimentos para a direita em relação ao nó A.
- É necessário fazer uma rotação à esquerda de modo que o nó intermediário B ocupe o lugar de A e A se torne a sub-árvore esquerda de B.



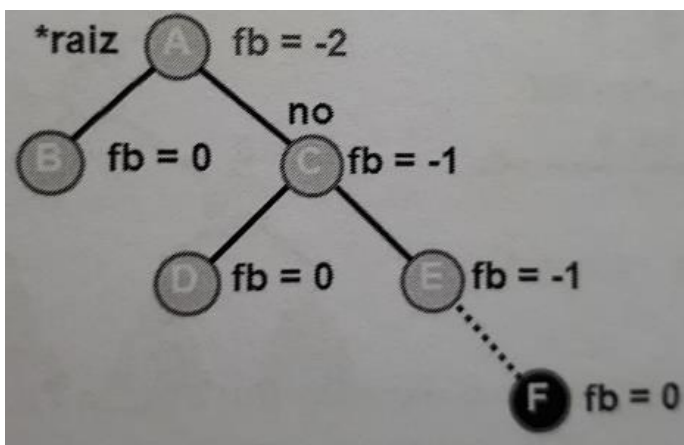


ROTAÇÃO SIMPLES À ESQUERDA - RR

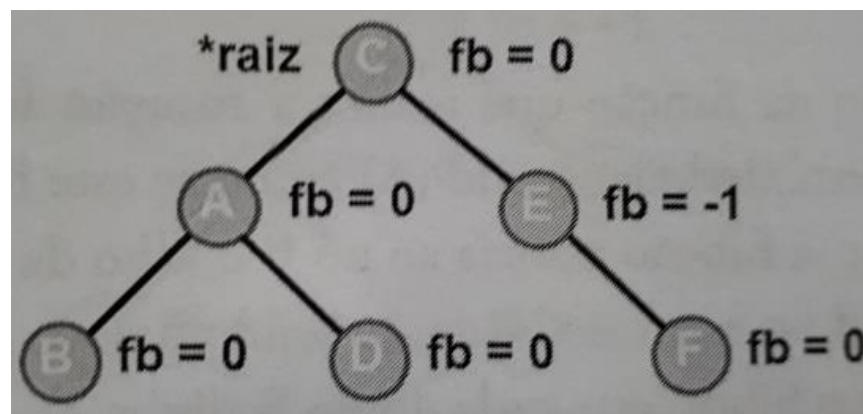
Árvore atual



Inserção do nó F



Rotação RR



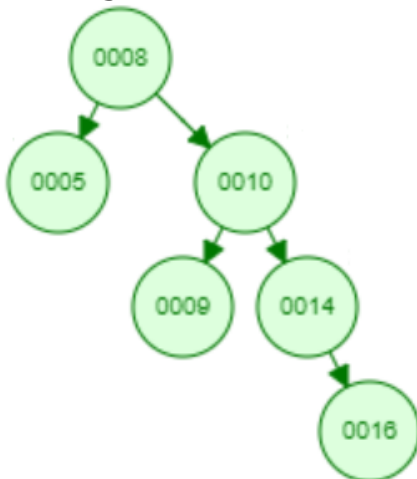


ROTAÇÃO SIMPLES À ESQUERDA - RR

Árvore atual



Inserção do nó 16



Rotação RR





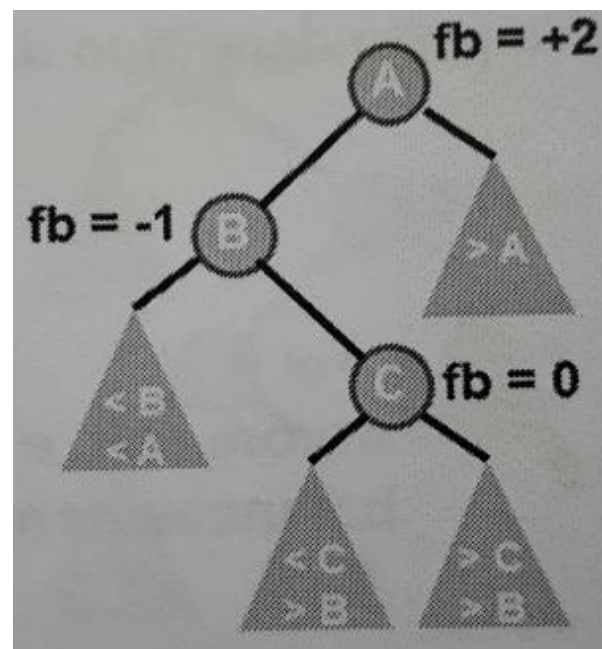
TIPOS DE ROTAÇÕES

- Rotação Dupla: o nó desbalanceado (pai) e seu filho estão inclinados no sentido inverso ao neto.
- Pode ser:
 - Rotação dupla à direita – LR
 - Rotação dupla à esquerda - RL



ROTAÇÃO DUPLA À DIREITA - LR

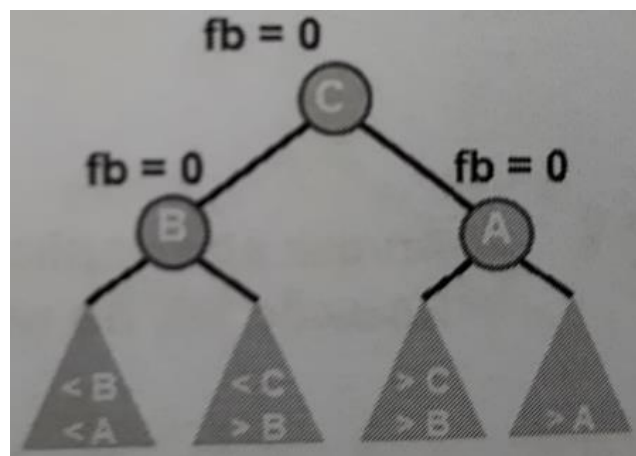
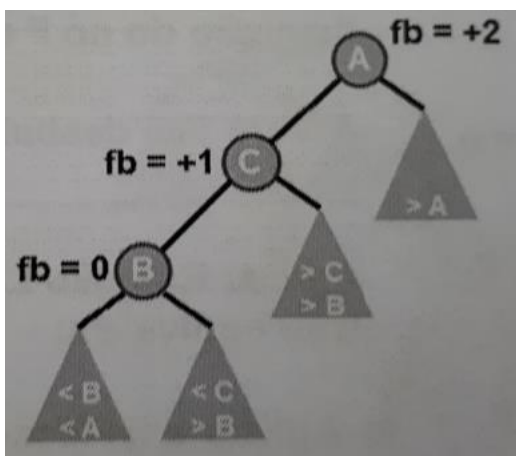
- Ocorre quando um novo nó é inserido na sub-árvore da direita do filho esquerdo tornando o FB do nó A inválido.
- Árvore desbalanceada





ROTAÇÃO DUPLA DIREITA - LR

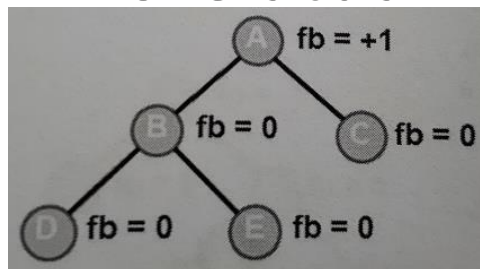
- Neste caso houve um movimento para a esquerda e outro para a direita em relação ao nó A.
- É necessário fazer duas rotações simples, uma rotação RR aplicada no filho da esquerda do nó A e uma rotação LL aplicada no nó A.



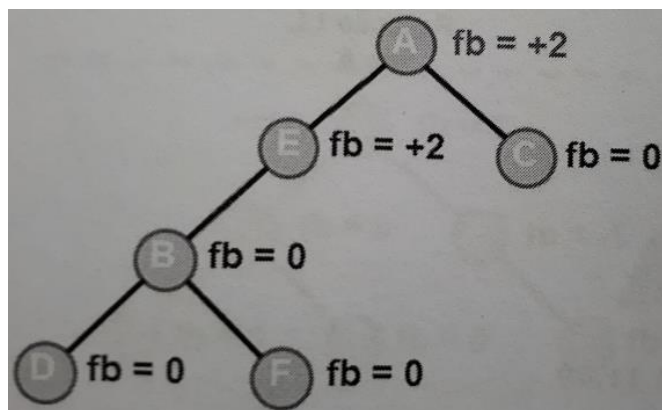


ROTAÇÃO DUPLA DIREITA - LR

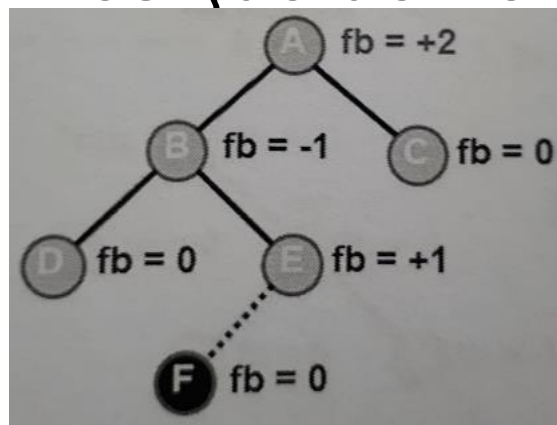
Árvore atual



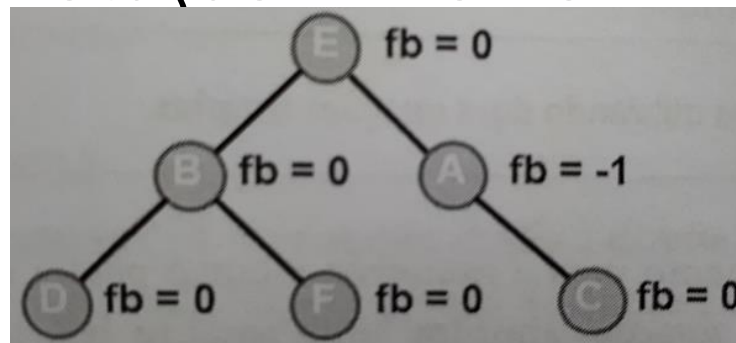
Rotação RR no nó B



Inserção do nó F



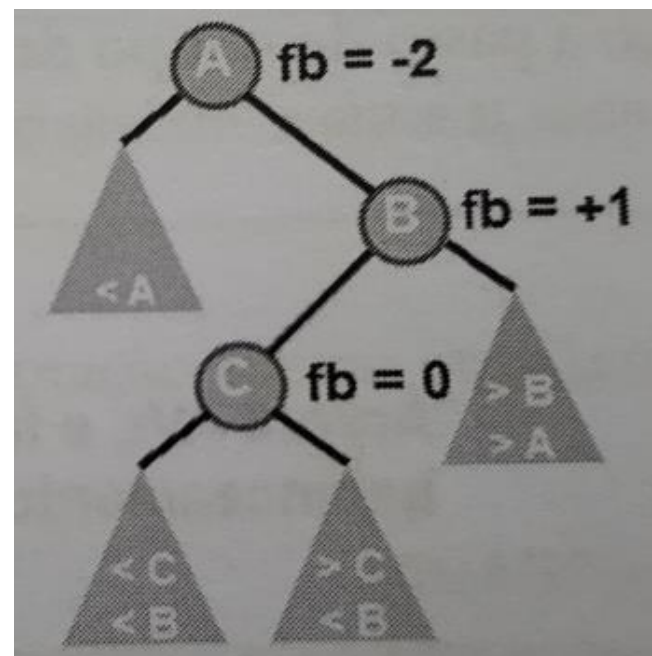
Rotação LL no nó A





ROTAÇÃO DUPLA À ESQUERDA - RL

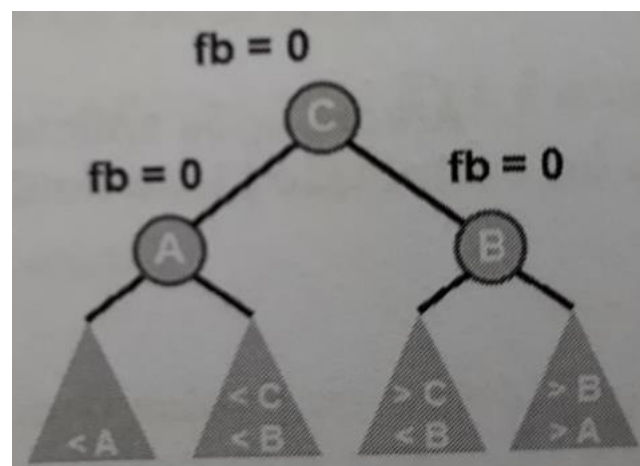
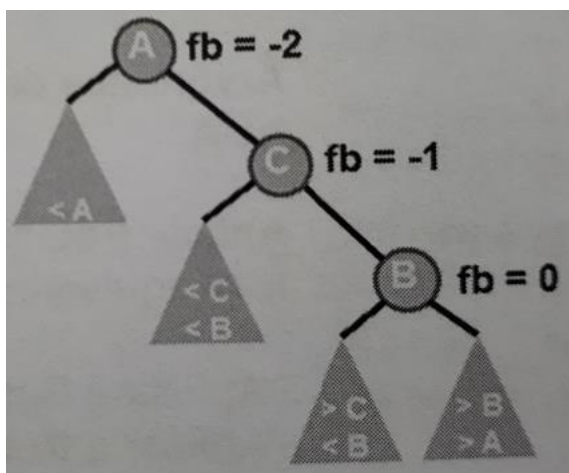
- Ocorre quando um novo nó é inserido na sub-árvore da esquerda do filho direito tornando o FB do nó A inválido.
- Árvore desbalanceada





ROTAÇÃO DUPLA À ESQUERDA - RL

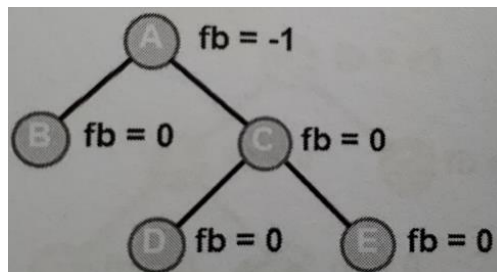
- Neste caso houve um movimento para a direita e outro para a esquerda em relação ao nó A.
- É necessário fazer duas rotações simples, uma rotação LL aplicada no filho da direita do nó A e uma rotação RR aplicada no nó A.



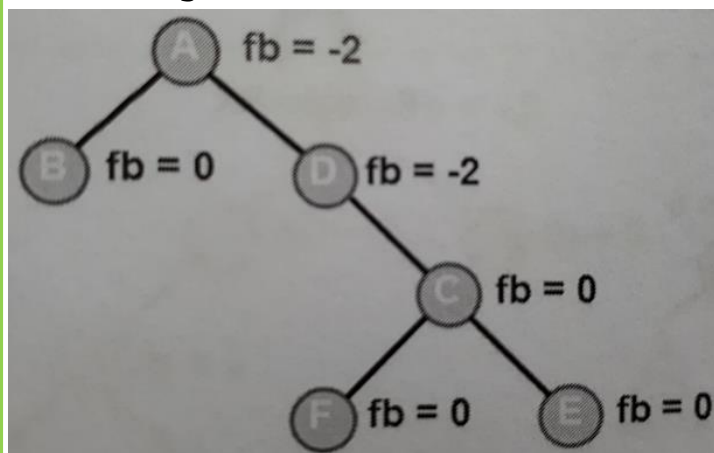


ROTAÇÃO DUPLA À ESQUERDA - RL

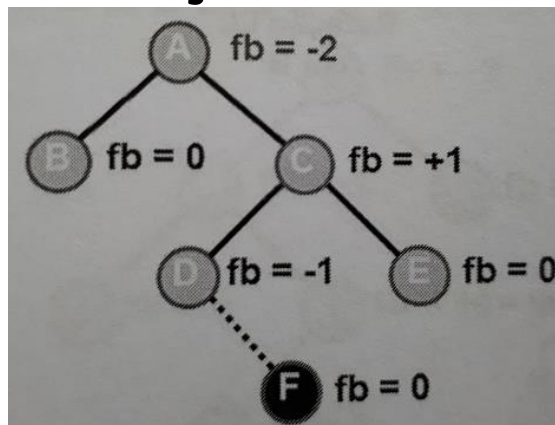
Árvore atual



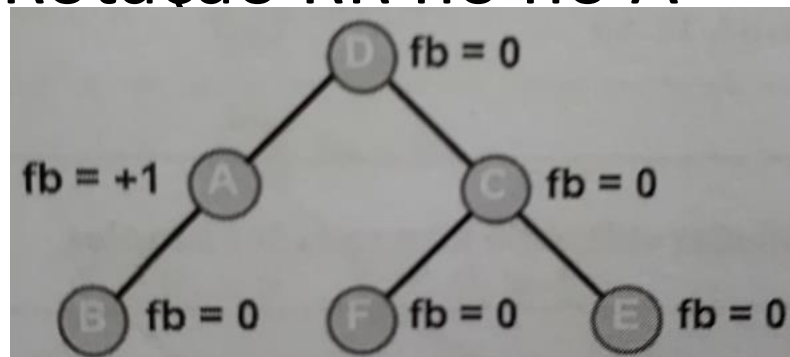
Rotação LL no nó C



Inserção do nó F



Rotação RR no nó A





DICAS

- Quando os sinais do FB nó A e do nó B são iguais, a rotação é simples.
- Se os sinais do FB são iguais e negativos a rotação é à esquerda.
- Se os sinais do FB são iguais e positivos a rotação é à direita.
- Nas rotações duplas, os sinais do nó A e do nó B são diferentes.
- Se o sinal do FB de A é positivo a rotação é dupla à direita LR, senão é uma rotação dupla à esquerda RL.



DICAS

FB de A	FB de B	Posição dos nós	Rotação
+2	+1	B é filho à esquerda de A C é filho à esquerda de B	LL
-2	-1	B é filho à direita de A C é filho à direita de B	RR
+2	-1	B é filho à esquerda de A C é filho à direita de B	LR
-2	+1	B é filho à direita de A C é filho à esquerda de B	RL



ATIVIDADE

- Em uma árvore execute as ações propostas abaixo, após cada ação calcule o FB dos nós e aplique as rotações quando necessário.

- Inserir valor 1
- Inserir valor 2
- Inserir valor 3
- Inserir valor 10
- Inserir valor 4
- Remove valor 1

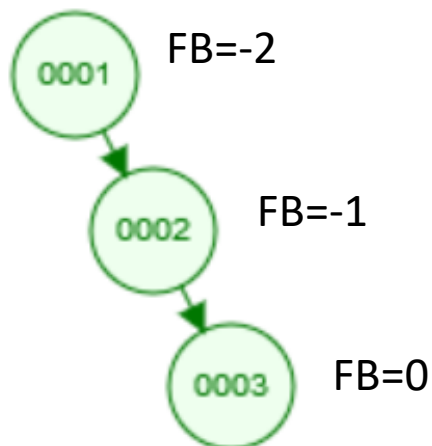
- Inserir valor 5
- Inserir valor 9
- Inserir valor 7
- Inserir valor 8
- Remove valor 2
- Remove valor 7

- Apresente em cada ação a árvore resultante e quando necessário as rotações aplicadas.



ATIVIDADE

- Inserir valor 1
- Inserir valor 2
- Inserir valor 3



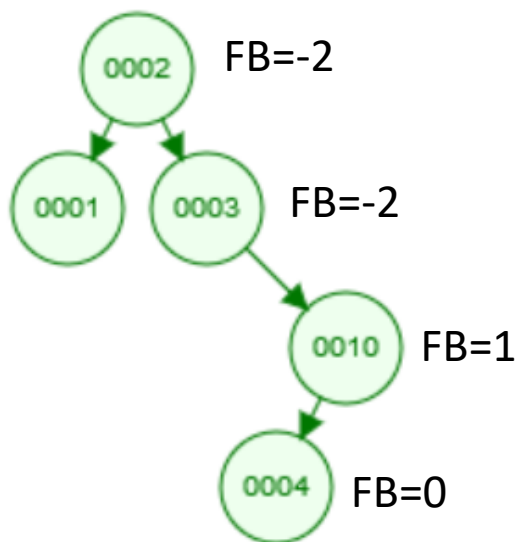
RR



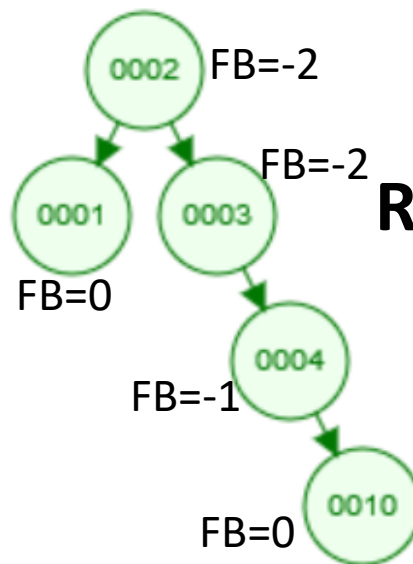


ATIVIDADE

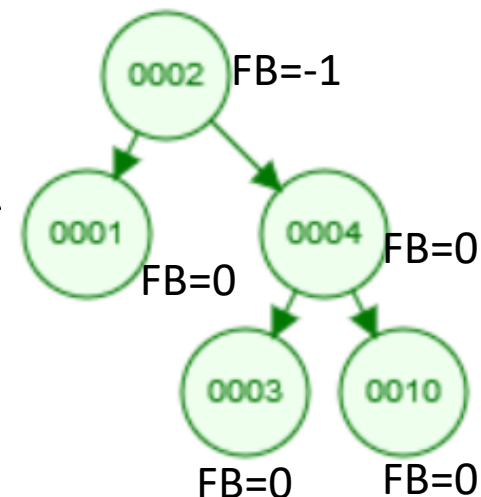
- Inserir valor 10
- Inserir valor 4



LL



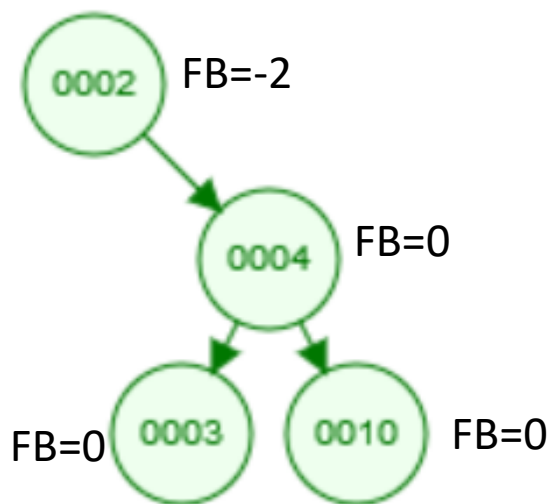
RR



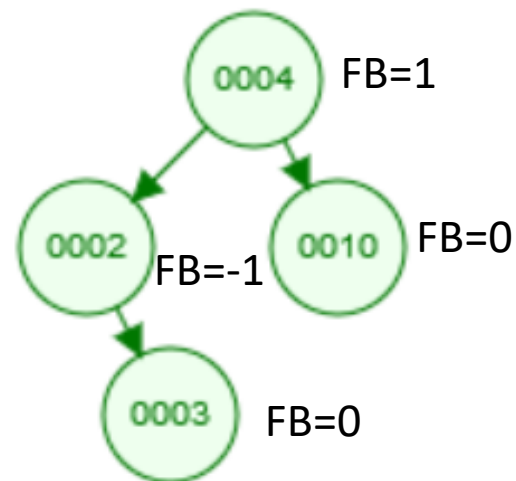


ATIVIDADE

- Remover valor 1



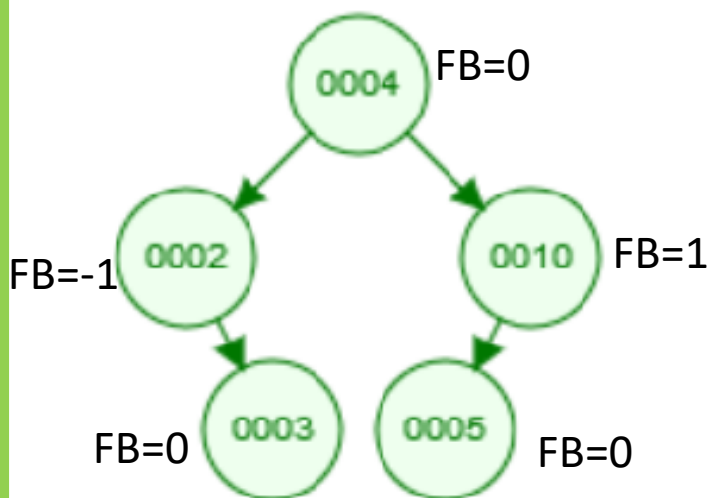
RR





ATIVIDADE

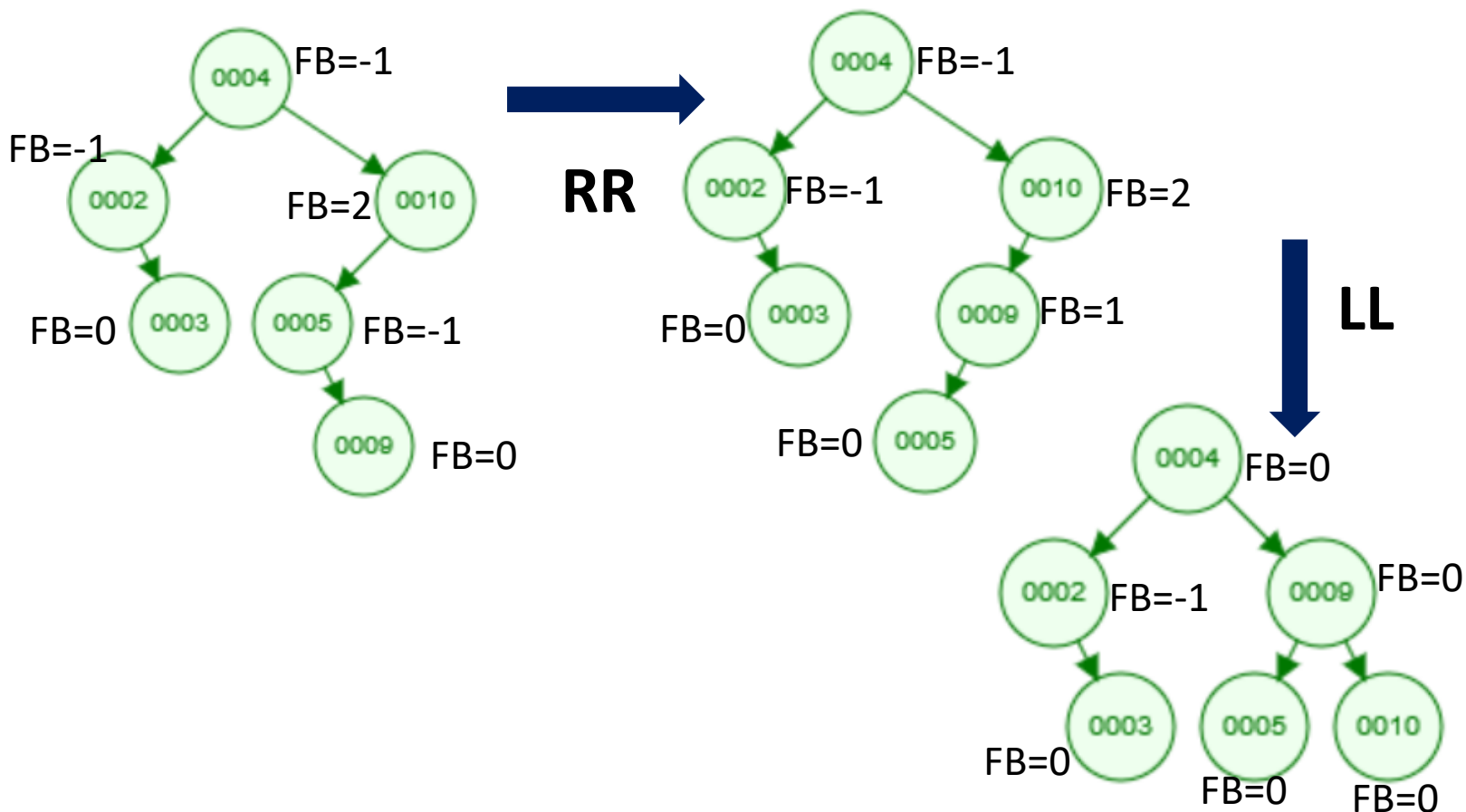
- Inserir valor 5





ATIVIDADE

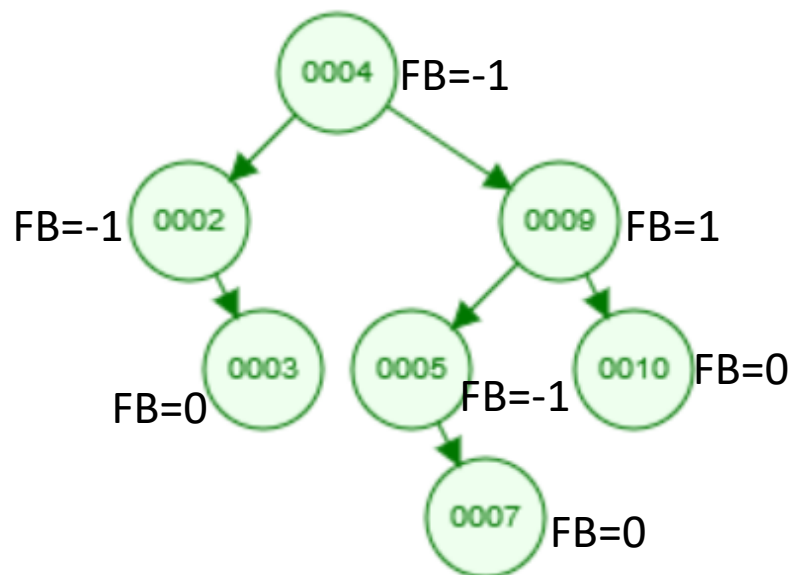
- Inserir valor 9





ATIVIDADE

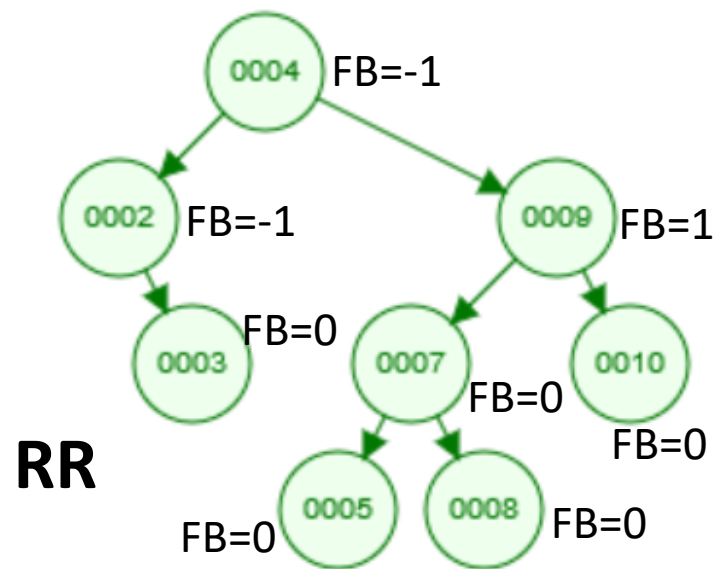
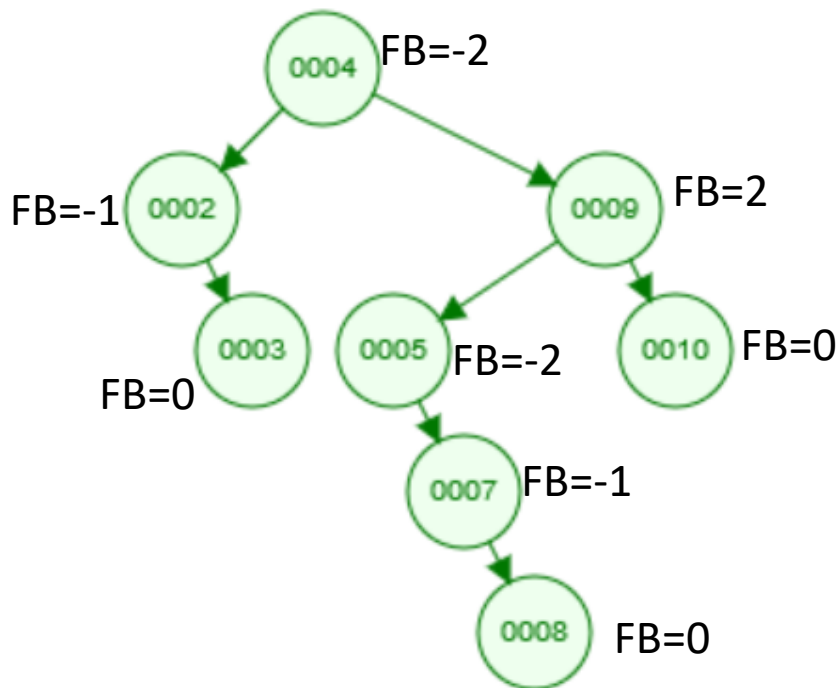
- Inserir valor 7





ATIVIDADE

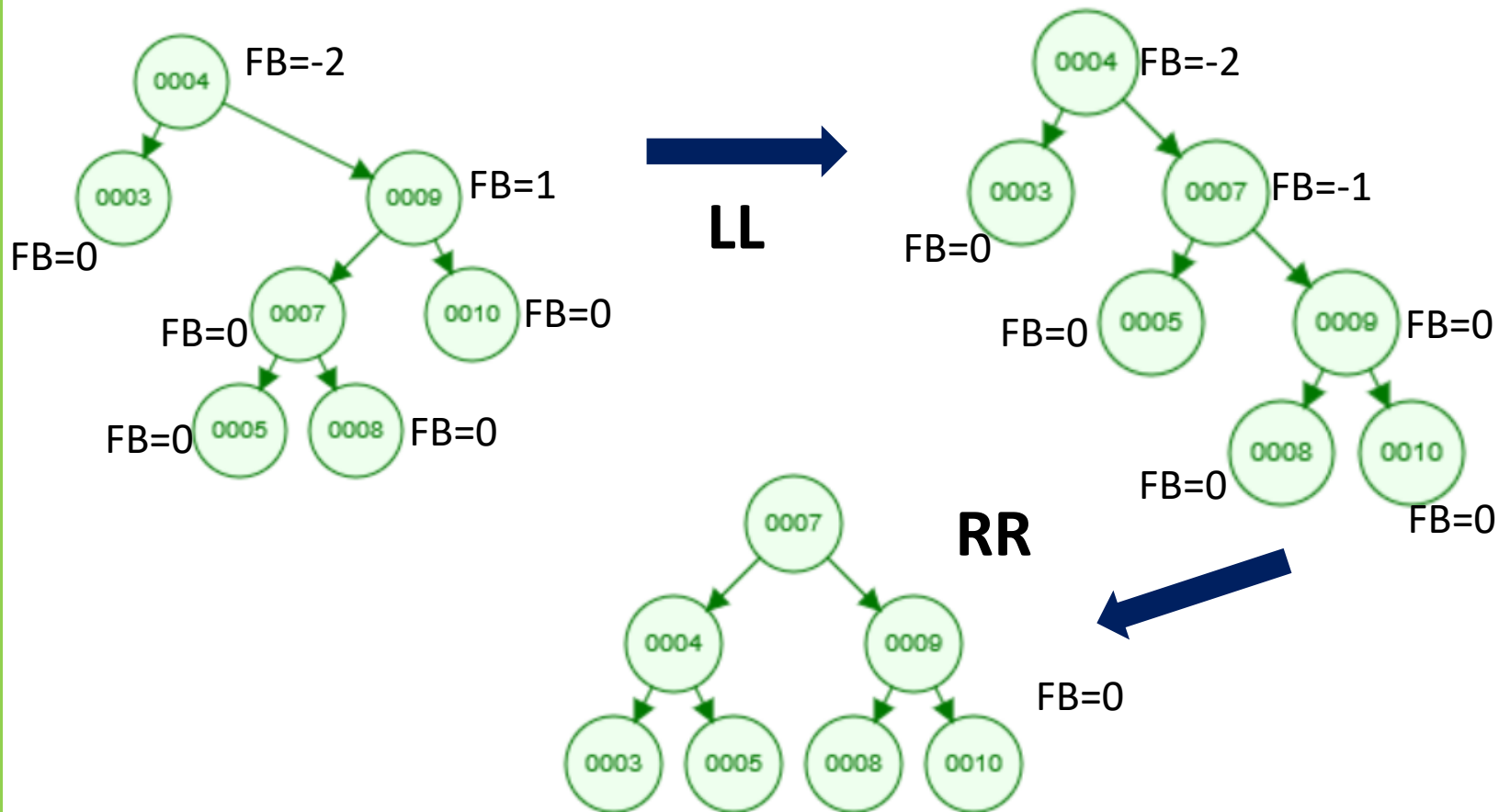
- Inserir valor 8





ATIVIDADE

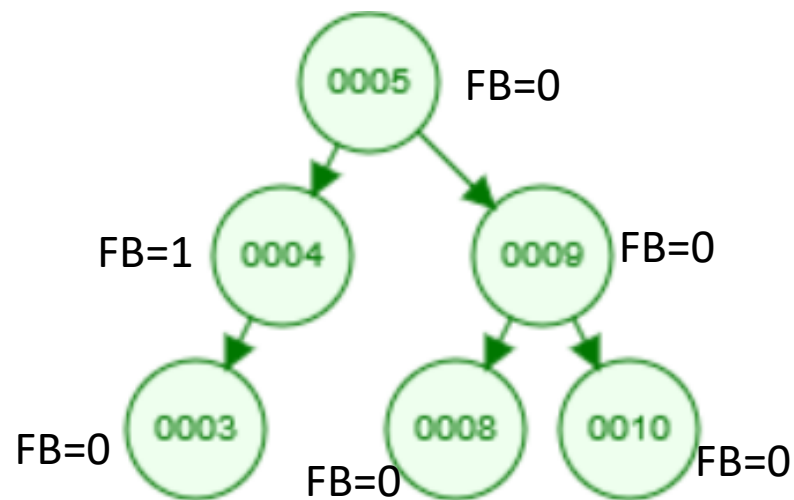
- Remove valor 2





ATIVIDADE

- Remover valor 7





DESAFIO

- Implementar uma árvore AVL com as principais funcionalidades:
 - Incluir
 - Mostrar
 - Excluir



REFERÊNCIAS

- PEREIRA, Silvio do Lago. Estrutura de Dados Fundamentais: Conceitos e Aplicações, 12. Ed. São Paulo, Érica, 2008.
- BACKES, André Ricardo, Estrutura de dados descomplicada: em linguagem C, 1 Ed. – Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.
- SENGER, H., Notas de Aula, Universidade de São Judas Tadeu, 1999.
- WALDEMAR Celes, Renato Cerqueira, José Lucas Rangel, Introdução a Estruturas de Dados, Editora Campus (2004).
- VELOSO, Paulo. SANTOS, Celso dos. AZEVEDO, Paulo. FURTADO, Antonio. Estrutura de dados. Rio de Janeiro: Ed. Elsevier, 1983 27ª reimpressão.
- <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html>