Interpolación polinomial

Dr. Alejandro Paredes

Facultad de Ciencias

30 de junio de 2020

Resumen

Motivación

- Las leyes físicas están expresadas en terminos de ralaciones funcionales

$$F = -kx, \quad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

- En algunos casos solo disponemos de los datos experimentales.
- Muchas veces se necesita la derivada de una determinada función o su primitiva.
- En otros casos, las leyes físicas vienen expresadas en forma de ecuaciones diferenciales $(\nabla \cdot \mathbf{B} = 0)$.

Solución: Aproximar las relaciones funcionales con polinomios.

Un problema

Se tiene un conjunto de medidas y_k a ciertos instantes de tiempo t_k con $k = 1, 2, 3, \ldots m$

$$(y_1, t_{,1}); (y_2, t_{,2}); \ldots (y_m, t_{,m})$$

Debemos encontar la función interpolante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(t_k) = y_k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, m$$

Condiciones adicionales:

- Pendiente en ciertos puntos.
- Suavidad, monotonicidad, convexidad de la función interpolante.
- Sólo consideraremos el caso unidimensional $f(x)$.

Interpolación

Ventajas:

- Hacer pasar una curva suave sobre los datos discretos.
- Hallar el valor de una medida entre dos datos.
- Tener acceso a la derivada y a la integral del conjunto de datos.

Desventajas:

- Pobres resultados con datos sujetos a errores significantes.
- Dificultad para capturar discontinuidades.

Bases de funciones

Conjunto de funciones $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)\}$ base de $E(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi_j(t)$$

Imponemos que $f(x)$ pase por los datos

$$f(t_k) = y_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi_j(t_k) \qquad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \dots & \phi_n(t_1) \\ \phi_1(t_2) & \phi_2(t_2) & \dots & \phi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(t_n) & \phi_2(t_n) & \dots & \phi_n(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Monomios

$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= t^{j-1} \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ f_{n-1}(t) &= \lambda_1 t + \lambda_2 t + \cdots + \lambda_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo: $(-2, -27), (0, -1), (1, 0)$

$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{y}, \qquad \mathbf{A}$: matriz de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$det(A) \neq 0 \Rightarrow$ solución única $\lambda = (-1, 5, -4)$

$$f_2(t) = -1 + 5t - 4t^2$$

Polinomios de Lagrange

$$\ell_j(t) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{(t - t_k)}{(t_j - t_k)} \qquad \ell_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Para los pares ordenados $(y_1, t_1), (y_2, t_2), (y_3, t_3)$, tenemos

$$\begin{aligned} \ell_1(t) &= \frac{(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} \\ \ell_2(t) &= \frac{(t - t_1)(t - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} \\ \ell_3(t) &= \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \end{aligned}$$

Polinomios de Lagrange

La matriz $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}\lambda = \mathbf{y}$ resulta ser la matriz identidad.

$$f_{n-1} = y_1\ell_1 + y_2\ell_2 + \cdots + y_n\ell_n$$

Aqui el trabajo sólo es escribir los polinomios.
Ejemplo: $(-2,-27),(0,-1),(1,0)$

$$f_2(x)(t) = -27\frac{t(t-1)}{-2(-2-1)} + (-1)\frac{(t+2)(t-1)}{2(-1)}$$

Polinomios de Newton

$$\pi_0 = 1 \quad \pi_j = \prod_{k=0}^{j-1}(t - t_k) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$f_{n-1}(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + \cdots + x_n(t - t_1)(t - t_2)\cdots(t - t_{n-1})$$

Nota:

Para $i < j, \pi_j(t_i) = 0$ entonces $\mathbf{A}$ es una matriz triangular L.

Ejemplo: $(-2, -27), (0, -1), (1, 0)$

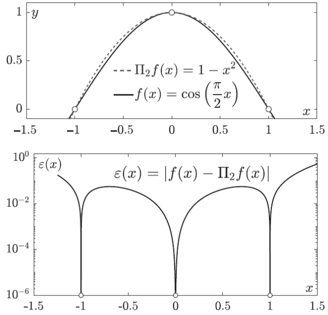
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = (-27, 13 - 4)$

$$f_2(t) = -27 + 13(t + 2) - (t + 2)t$$

Convergencia

Cosideremos la interpolación de $f(x) = Cos(\pi x/2)$ en los puntos $\{-1, 0, 1\}$ con polinomio interpolante $\Pi_2 f(x)$



- ¿Puede una función ser siempre interpolada?
- ¿Qué tan cerca esta el polinomio interpolante de la función?

Convergencia

Teorema de aproximación de Weiertrass : Sea f(x) una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un entero $n = n(\epsilon)$ y un polinomo $p(x) \in \mathbb{R}_n(x)$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \forall x \in [a, b]$$

Resto de Cauchy: Sea una función $f(x)$ $(n+1)$ veces derivable en $I = [a, b]$ y sea $\Pi_n f(x)$ el polinomio interpolante de $f(x)$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in I$. Entonces, $\forall x \in I \quad \exists$ un punto $\zeta(x)$ dentro del intervalo $[min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, max\{x_0, \ldots, x_n, x\}]$, tal que

$$R_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta)}{(n+1)!} l(x)$$

donde $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

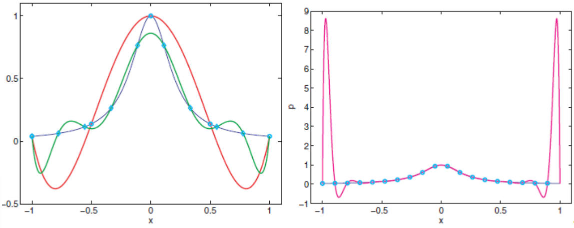
Convergencia

- El resto $R_n(x)$ es cero en los nodos.
- El factor $(n+1)!$ indica que la aproximación mejora al incrementar los puntos de interpolación.
- Si $f^{n+1}(\zeta)$ es grande degrada la precisión.

Contraejemplo de Runge: consdidere la función

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Interpolación con puntos equdistantes no funciona



(a) $n = 4, 9$. (b) $n = 19$.

Interpolación de Chebyshev

- Se tiene una función suave $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$.
- Se desea una buena interpolación y somos libres de escoger los $n+1$ puntos de interpolación $x_0, x_1, \ldots$
- ¿Que puntos escogemos para garantizar un mínimo error?

Si asumimos que que la $f^{n+1}(x)$ está acotada, entonces para minimizar el resto $R_n$debemos minimizar $|l(x)|$, donde $l(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

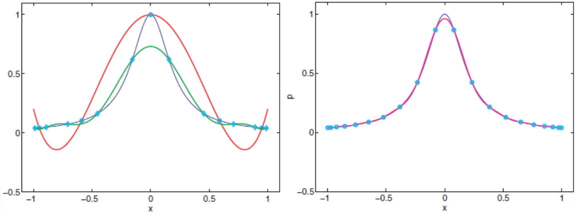
Interpolación de Chebyshev

El resultado corresponde a los puntos de Chebyshev

$$x_j = cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

Puntos de Chebyshev en el intervalo $[a, b]$ (transformación afín)

$$x_j = a + \frac{a-b}{2}\left[1 + cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right]$$



(a) $n = 4, 9$. (b) $n = 19$.

Ejercicios

Considere los datos

x	0	1	2	5.5	11	13	16	18
y	0.5	3.134	5.3	9.9	10.2	9.35	7.2	6.2

Use los monomios, polinomios de Lagrange y polinomios de Nnewton para determinar el valor de y en $x = 8$

Ejercicios

Considere la función

$$f(x) = tanh(20sin(12x)) + \frac{1}{50}e^{3x}sin(300x)$$

- En $[0,1]$ interpolar $f(x)$ con 100 puntos equidistantes y de Chebyshev (Lagrange).
- Graficar el error

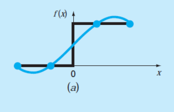
  $$Err(x) = |f(x) - \Pi f(x)| \quad \forall x \in [0,1]$$

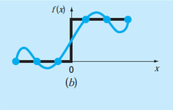
  Los $\Pi f(x)$ son los polinomios del item anterior.
- En $[0,1]$, interpolar $f(x)$ con puntos de Chebyshev para $n = 100, 200, 300, \ldots, 1000$ (Lagrange).
- Graficar con escala logarítmica en y el error

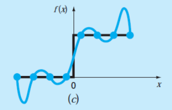
  $$Err = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|, \quad n = 100, 200, \ldots, 1000$$

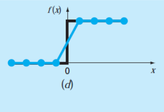
Interpolación con spline

- Utilizamos un polinomio de grado n para interpolar $n+1$ datos.
- No siempre funciona inclusive para n grande.
- Alternativa: usar polinomios de grado inferior en subgrupos de datos. Esos polinomios reciben el nombre de funciones spline.









Splines lineales

Sea un conjunto de datos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. En cada intervalo se utilizan líneas rectas para unir los puntos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + m_0(x - x_0) && x_0 \leq x \leq x_1 \\
f(x) &= f(x_1) + m_1(x - x_1) && x_1 \leq x \leq x_2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
f(x) &= f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) && x_{n-1} \leq x \leq x_n
\end{aligned}
$$

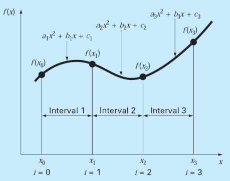
Solo se necesita especificar las pendientes de las rectas

$$
m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}
$$

Splines cuadráticas

- Para cada intervalo $i = 1, \ldots, n$ se debe en contrar un polinomio de grado 2.

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$



- Tenemos $n + 1$ puntos en las abcisas, n intervalos y $3n$ constantes que determinar. Necesitamos $3n$ ecuaciones.

Splines cuadráticas

- Dos polinomios adyacentes tienen el mismo valor en el punto de intersección.$(i = 2, \ldots, n)$

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$
$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

  En total tenemos $2n-2$.
- En los extremos las funciones deben verificar

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

  así tenemos 2 condiciones adicionales y en total $2n$.
- Las primeras derivadas de cada polinomio deben ser las misma en los puntos de intersección.

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i$$

  tenemos $n-1$ ecuaciones adicionales y en total $3n-1$ condiciones.

Splines cuadráticas

- Nos falta una condición. Asumimos que la segunda derivada enel primer punto es cero. Tenemos que $a_1 = 0$ y la primera spline es una recta.

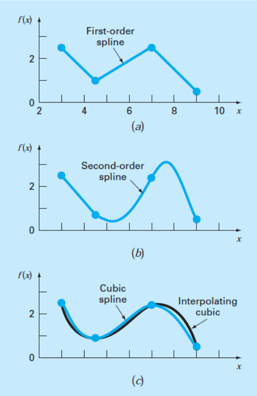
Splines cúbicas

- Se desea usar un polinomio de grado 3 en cada intervalo.

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Se tienen $4n$ incognitas en total.
- Igualdad de polinomios en puntos int.($2n - 2$ cond).
- Las funciones deben pasar por los extremos. (2 cond).
- Primeras derivadas puntos int. son igaules. ($n - 1$ cond).
- Segundas derivadas puntos int. son iguales. ($n - 1$ cond).
- Segundas derivadas en extremos igual a cero. (2 cond).

x	f(x)
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5



Interpolación con spline

Considere la función

$$Sen(t)^2$$

- Genere 8 puntos igualmente espaciados e interpole los puntos con un polinomio de orden 7.
- Interpole con una spline cúbica.
- Interpole usando ocho puntos de Chebyshev.