

# 1 SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

## 1.1 Series de Potencias

Una serie de potencias en el plano complejo es de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots \quad (1)$$

donde  $c_n$  son constantes reales y complejos llamados coeficientes " $z_0$ " es constante y se llama *centro de la serie*, " $z$ " es la variable compleja.

Si  $z_0 = 0$ , la serie (1) se reduce a la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ , serie de potencias  $z$ .

**OBSERVACIÓN.-**

- Diremos que la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  es absolutamente convergente,  $\forall z \in C$  tal que  $\|z-z_0\| < R$  y es divergente,  $\forall z \in C$ , tal que  $\|z-z_0\| > R$
- Si  $\exists R > 0$ , tal que  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  converge absolutamente en  $\|z-z_0\| < R$  y si  $0 < \rho < R$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  converge uniformemente en  $\|z-z_0\| < \rho$
- La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  converge absolutamente  $\forall z \in C$  (en particular en  $z = z_0$ ) tal que  $\|z-z_0\| < R$  y si  $0 < \rho < R$ , entonces la serie converge uniformemente,  $\forall z \in C$  tal que  $0 < \|z-z_0\| < \rho$
- Al número  $R > 0$  se llama radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
- Para  $z \in C$ , se tiene  $\|z-z_0\| < R$ , que se denomina región de convergencia.
- Para hallar el radio y región de convergencia de una serie de la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ , se utiliza el criterio de la razón, que esta caracterizada por el siguiente teorema

## 1.2 TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN).-

Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  una serie de potencia en  $C$  y sea  $u_n = c_n(z-z_0)^n$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = L$ , entonces:

- i) Si  $L < 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  converge absolutamente.
- ii) Si  $L > 1$ , la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  diverge.
- iii) Si  $L = 1$ , el criterio no decide.

**OBSERVACIONES**

- Sea  $\sum_{n=0}^{\infty}$  una serie de potencia tal que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|c_n\|} = L$ , entonces:
  - i) Si  $L = 0$ , entonces  $(R = \infty)$ ; la serie es convergente en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$
  - ii) Si  $L > 0$ , entonces  $R = \frac{1}{L}$
  - iii) Si  $L = \infty$ , entonces  $(R = 0)$  converge solamente en el origen.
- Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  una serie de potencia tal que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right\| = L$ , entonces:
  - i) Si  $L = 0$ , entonces  $(R = \infty)$
  - ii) Si  $L > 0$ , entonces  $R = \frac{1}{L}$
  - iii) Si  $L = \infty$ , entonces  $R = 0$

### 1.3 FUNCIONES REPRESENTADAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS.-

La serie de potencia  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , con radio de convergencia  $R > 0$ , define una función de  $z$ , es decir:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , donde  $D_f = \{z \in \mathbb{C} / \|z - z_0\| < R\}$  es decir que el dominio de  $f(z)$  es la región de convergencia de la serie, por ejemplo consideramos la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$  convergente,  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| < R$

Donde  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{1} \right\| = 1$  es decir la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  es convergente  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z\| < 1$

Luego la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  define la función  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$

**OBSERVACIÓN.-** Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ , entonces se dice que  $f(z)$  es representada mediante la serie de potencia o se dice que  $f(z)$  está desarrollado mediante una serie de potencia.

### 1.4 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES.-

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  una serie de potencia convergente  $\forall z \in \mathbb{C}$  tal que  $\|z - z_0\| < R$

,  $R > 0$  entonces:  $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$ , convergente  $\forall z \in \mathbb{C}$ , tal que  $\|z - z_0\| < R'$

donde  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\|$ , entonces se tiene:

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = R$$

por lo tanto  $R = R'$

$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (z - z_0)^{n-2}$ , converge  $\forall z \in \mathbb{C}$ , tal que  $\|z - z_0\| < R''$ , de donde:

$$R'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n(n-1) c_n}{n(n+1) c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{n(n+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = R$$

por lo tanto  $R = R''$

Las series obtenidas, derivando de la serie de potencia original tienen el mismo radio de convergencia que la serie original.

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  una serie de potencia convergente  $\forall z \in C$  tal que  $\|z - z_0\| < R$

$\int_{z_0}^z f(z) dz = \int_{z_0}^z \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^z (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$ , es convergente  $\forall z \in C$  tal que  $\|z - z_0\| < R$

## 1.5 SERIE DE TAYLOR Y DE MACLAURIN COMPLEJA.-

Sea  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  una serie de potencia convergente  $\forall z \in C$  tal que  $\|z - z_0\| < R$ , calculando sus derivadas y evaluando en  $z = z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z_0) = c_0 \text{ de donde } c_0 = f(z_0)$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-z_0)^{n-1} \Rightarrow f'(z_0) = c_1 \text{ de donde } c_1 = f'(z_0)$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n(z-z_0)^{n-2} \Rightarrow f''(z_0) = 1.2.c_2 \text{ de donde } c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$$

$$f'''(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n(z-z_0)^{n-3} \Rightarrow f'''(z_0) = 1.2.3.c_3 = 3!c_3 \text{ de donde } c_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!}$$

·  
·  
·

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)...2.1.c_n(z-z_0)^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} n!c_n(z-z_0)^{n-m} \text{ entonces } f^{(n)}(z_0) =$$

$$n!c_n \text{ de donde } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

como  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ , desarrollando

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

∴

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!} \quad (2)$$

es la serie de Taylor alrededor de  $z = z_0$

cuando  $z_0 = 0$ , se tiene la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!} \quad (3)$$

que se denomina serie de MACLAURIN

## 1.6 TEOREMA.-

Sea  $f(z)$  una función analítica en  $z_0$ , entonces  $f(z)$  tiene una representación en serie de Taylor  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$ ,  $\forall z$  en algún disco de centro en  $z_0$

### **Demostración**

Como  $f$  es analítica  $\Rightarrow \exists$  un disco  $\|z - z_0\| < r$  en donde  $f$  es derivable, sea  $\gamma: \|z - z_0\| = \frac{r}{2}$ , entonces  $f$  es derivable en todos los puntos sobre y dentro de  $\gamma$ . Sea  $w \in \gamma$  y  $z$  cualquier punto dentro de  $\gamma$ , entonces escribiremos:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \dots \quad (1)$$

como  $w$  está más lejos a  $z_0$  que lo de  $z$ , entonces  $\|z - z_0\| < \|w - z_0\|$  por lo tanto  $\|\frac{z - z_0}{w - z_0}\| < 1$ , mediante la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n \dots \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:  $\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$

ahora por la fórmula de la integral de Cauchy se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \dots \quad (3)$$

pero se conoce que:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \dots \quad (4)$

al reemplazar (4) con (3) se obtiene:  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

que es la representación de la serie de Taylor en un disco abierto de centro  $z_0$ .

### **1.7 SERIE DE LAURENT.-**

Si  $f$  es analítica en  $z_0$ , entonces se puede desarrollar  $f$  en una serie de Taylor alrededor de  $z_0$  contenido potencia en  $z \rightarrow z_0$  ahora veremos el caso en que  $f$  no sea analítica en  $z_0$ , si aún podríamos tratar de representar en una serie alrededor de  $z_0$ .

Si incluimos potencias de  $\frac{1}{z - z_0}$ , esta es la idea detrás de la serie de Laurent.

Sea  $\gamma_1: \|z - z_0\| > r$ ,  $\gamma_2: \|z - z_0\| < R$ ,  $r < R$

$D = \{z \in \mathbb{C} / r < \|z - z_0\| < R\}$ , la región anular (Disco) acotado por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$

Sea  $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica dentro y sobre la frontera de  $D$ , entonces

$$\forall z \in D \text{ se tiene: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

donde  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de la serie de Laurent y  $a_n = \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}}$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw$$

En la serie de Laurent

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ es la parte analítica}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$  es la parte principal

### 1.8 TEOREMA.-

Sea  $f(z)$  una función analítica en el anillo  $\gamma_1 < \|z - z_0\| < \gamma_2$ , entonces para  $z$  en este anillo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  donde  $a_n = \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$  para  $n = 0, +1, +2, \dots$ , y  $\gamma$  es cualquier circunferencia  $\|z - z_0\| = \rho$ , con  $r_1 < \rho < r_2$

#### Demostración

Sea  $z$  en el anillo, elegimos los números  $R_1$  y  $R_2$ , tal que  $r_1 < R_1 < \|z - z_0\| < R_2 < r_2$ , tal como en la figura:

Sea  $\gamma_2 : \|z - z_0\| = R_2$ , la circunferencia de radio  $R_2$  y  $\gamma_1 : \|z - z_0\| = R_1$ , la circunferencia de radio  $R_1$

Por la fórmula generalizada del teorema de Integral de Cauchy se puede escribir:

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z}$  calculando ambas integrales en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Consideremos las integrales de línea por separado para la integral  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z}$

escribiremos  $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ , entonces se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

, donde  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$ ; para  $n = 0, +1, +2, \dots$

para la integral  $\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z}$ , escribiremos en la forma

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}}, \text{ se observa que para } w \in \gamma_1, \text{ se tiene:}$$

$\left\| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right\| < 1$ , luego por la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n},$$

por lo tanto se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right] \frac{1}{(z-z_0)^n}$$