

1 TEORÍA DE SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO.

1.1 SINGULARIDAD.-

Un punto z_0 es un punto singular o una singularidad de la función F , si F es analítica en algún punto de toda variedad de z_0 , excepto en z_0 mismo.

Existen Varios tipos de Singularidades.

1º **SINGULARIDAD AISLADA.-** El punto $z = z_0$ si $\exists \delta > 0$, tal que el círculo $\|z - z_0\| = \delta$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 (es decir $\exists V_\delta(z_0)$ sin singularidad).

Si tal $\delta \nexists$, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.

Si z_0 no es un punto singular y si $\exists \delta > 0 / \|z - z_0\| = \delta$ no encierra puntos singulares, decimos que z_0 es un punto ordinario de $F(z)$.

2º **POLOS.-** Si podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n F(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado polo de orden n , si $n = 1$. z_0 es llamado un polo simple.

Ejemplo.- $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$, se tiene un polo de orden tres en $z = 2$.

Ejemplo.- $f(z) = \frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$; tiene un polo de orden dos en $z = 1$ y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$

Si $y(z) = (z - z_0)^n F(z)$, de donde $F(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z = z_0$ es llamado un cero de orden n de $y(z)$.

Si $n = 1$, z_0 es llamado un cero simple, en tal caso z_0 es un polo de orden n de la función $\frac{1}{y(z)}$.

3º **LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN.-**

Ejemplos.-

(a) $f(z) = (z-3)^{\frac{1}{2}}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$

(b) $f(z) = \ln(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir $z = 1$, $z = -2$.

4º **SINGULARIDADES REMOVIBLES.-** El punto singular z_0 es llamado una singularidad removable de $F(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Ejemplo.- El punto singular $z = 0$, es una singularidad removable de

$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, puesto que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.

5º **SINGULARIDADES ESENCIALES.-** Una singularidad que no sea polo, ni punto de ramificación, ni singularidad removable es llamado una singularidad esencial.

Ejemplo.- $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, tiene una singularidad esencial en $z = 1$ se una función unívoca tiene una singularidad, entonces las singularidades es un polo o una singularidad esencial, por esta razón un polo es llamado algunas veces una singularidad evitable.

Equivalentemente $z = z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún positivo n tal que: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

6º **SINGULARIDAD EN EL INFINITO.**- El tipo de singularidad de $f(z)$ en $z = \infty$ (el punto en el infinito) es el mismo como el de $f(\frac{1}{w})$ en $w = 0$.

Ejemplo.- La función $f(z) = z^3$ tiene como polo de tercer orden en $z = \infty$, ya que $f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ tiene un polo de tercer orden en $w = 0$.

Ejemplo.- Localizar y clasificar las singularidades

$$1) f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2}$$

Desarrollo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z + 2i)^2} = \frac{1}{8i} \neq 0, \text{ de donde } z = 2i \text{ es un polo de segundo orden, simultáneamente.}$$

$z = -2i$ es un polo de segundo orden.

Como se pueden encontrar $\delta > 0$ tal que ninguna singularidad distinta de $z = 2i$ está dentro del círculo.

$\|z - 2i\| = \delta$ entonces $z = 2i$ es una singularidad aislada, simultáneamente para $z = -2i$ es una singularidad aislada.

$$2) f(z) = \frac{\ln(z - 2)}{(z^2 + 2z + 2)^2}$$

Desarrollo

El punto $z = 2$ es un punto de ramificación y es una singularidad aislada, también $z^2 + 2z + 2 = 0$ de donde se tiene $z = -1 - 2i$ y se dice que $z = -1 - 2i$ son polos de cuarto orden de los cuales son singularidades aisladas.

$$3) f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

Desarrollo

Como $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = 1 \neq 0$, entonces $z = 0$ es una singularidad removible.

1.2 RESIDUOS.-

Se conoce por el desarrollo de la serie de Laurent de una función analítica $f(z)$ es una región anular $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid R_1 < \|z - z_0\| < R_2 \}$ está dado por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \dots (*)$$

Si la parte principal consiste de un número finito de términos es decir $b_n = 0$, para $n > m$ y $b_m \neq 0$ entonces la serie (*) toma la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + 0 + 0 \dots$$

en este caso $F(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$ y el coeficiente b_1 denotado por $a_{-1} = b_1$ recibe el nombre de residuo de F en z_0 .

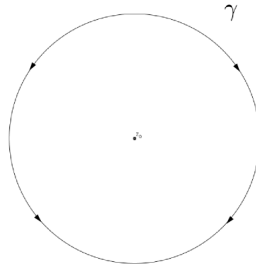
Si $F(z)$ tiene un polo simple $z = z_0$, entonces la serie es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0}$

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

$(z-z_0)f(z) = a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^{n+1} + \dots + b_1$ ahora tomamos el límite cuando $z \rightarrow z_0$

se tiene: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) = b_1 = \text{Re}(f, z_0)$, b_1 recibe el nombre de $F(z)$ en $z = z_0$.

Luego si $F(z)$ tiene un polo en $z = z_0$ y z_0 está en el interior de γ entonces $\oint_{\gamma} F(z) dz \neq 0$



En este caso $F(z)$ se puede expresar mediante la serie

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}, \text{ convergente } \forall z \in C \text{ tal que}$$

$$0 < \|z - z_0\| < R \text{ y } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) dz$$

donde γ es una curva cerrada contenida en el anillo $0 < \|z - z_0\| < R$

Si $n = 1$, $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) dz$, de donde

$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i b_1$ donde b_1 es el coeficiente de $\frac{1}{z-z_0}$ y b_1 es el residuo de $F(z)$ que denotaremos por $\text{Re}(F, z_0) = b_1$, por lo tanto

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Re}(F, z_0)$$

1.3 TEOREMA DEL RESIDUO.-

Si $f(z)$ es una fracción analítica dentro y sobre la curva γ excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, z_3, \dots, z_j, \dots, z_m$ pertenecientes al interior de γ , entonces:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Re}(f, z_j)$$

Demostración

Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada en γ , excepto en los puntos z_1, z_3, \dots, z_m dentro de γ

También sea $Cr_j(z_j)$ la circunferencia de centro z_j y de radio r_j suficientemente pequeño para que $Cr_j(z_j) \subset \gamma, \forall j$

$Cr_j(z_j) \cap Cr_k(z_k) = \emptyset, \forall k \neq j$ entonces

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \oint_{Cr_j(z_j)} f(z) dz = \sum_{j=1}^m 2\pi i \operatorname{Re}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(f, z_j)$$

$$\therefore \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(f, z_j)$$

OBSERVACIÓN.- Si z_0 es un polo de orden m , hay una fórmula relativamente simple para calcular $\operatorname{Re}(f, z_0)$

1.4 TEOREMA.-

Si z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$ entonces:

$$\operatorname{Re}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

En el caso $m=1$ y $0!=1$, por lo tanto si f tiene un polo simple de z_0 , entonces se tiene: $\operatorname{Re}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$

Demostración

Como z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$, entonces f tiene un desarrollo en serie de Laurent en el anillo $0 < \|z - z_0\| < R$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \dots (\alpha)$$

con $a_{-m} \neq 0$, puesto que $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0

ahora lo que queremos evaluar es a_{-1} que es el residuo de f en z_0 es decir:

$$\operatorname{Re}(f, z_0) = a_{-1} \quad \dots(1)$$

a la ecuación (α) multiplicamos por $(z-z_0)^m$

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + \dots$$

como la serie de la derecha es una serie de Taylor alrededor de z_0 , entonces $(z-z_0)^m f(z)$ es analítica en z_0 ahora derivamos esta ecuación $m-1$ veces es decir:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] = a_{-1}(m-1)(m-2)\dots(1) + a_0 m(m-1)(m-2)\dots(2)(z-z_0) + \dots$$

tomando límite cuando $z \rightarrow z_0$ se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} [a_{-1}(m-1)! + a_0 m!(z-z_0) + \dots] = a_{-1}(m-1)! + 0 + 0 + \dots + 0$$

$$\text{de donde se obtiene: } a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \quad \dots(2)$$

al reemplazar (2) en (1) se obtiene:

$$\operatorname{Re}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

1.5 COROLARIO.-

Sea $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, de donde g, h son analíticas en z_0 , $g(z) \neq 0$ y h tiene un cero simple en z_0 , entonces f tiene un polo simple de z_0 y $Re(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Demostración

Como f tiene un polo simple de z_0 y h tiene un cero simple en z_0 , $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} Re(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{h(z)} \\ \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = g(z_0) \cdot \frac{1}{h'(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \\ \therefore Re(f, z_0) &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \end{aligned}$$

1.6 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1) Hallar las singularidades de la función $f(z) = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{[z^2 + (3-i)z - 3i]^2 z^2}$

Demostración

$f(z) = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{[z^2 + (3-i)z - 3i]^2 z^2}$, es analítica excepto en $z = -3, i, 0$ puesto que sería ∞ , por el denominador

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2 + (3-i)z - 3i)^2 z^2} = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2 + 3z - iz - 3i)^2 z^2} = \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z-3)^2(z-i)^2 z^2} \\ \lim_{z \rightarrow -3} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -3} \frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z-3)^2(z-i)^2 z^2} = \lim_{z \rightarrow -3} \frac{1}{(z-i)z} = \frac{1}{(-3-i)(-3)} \\ &= \frac{1}{3(3+i)} = \frac{1}{3(9+i)} = \frac{1}{10} - \frac{i}{30} \end{aligned}$$

existe por lo tanto $f(z)$ tiene una singularidad en $z = -3$

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = -i, \text{ es decir que } f(z) \text{ tiene un polo simple de } z = i$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2 z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-i} = i$$

por lo tanto $f(z)$ tiene un polo simple en $z = 0$

2) Calcular la integral $\oint_{\gamma} \operatorname{ctg} z dz$. donde $\gamma: \|z\| = 4$

Desarrollo

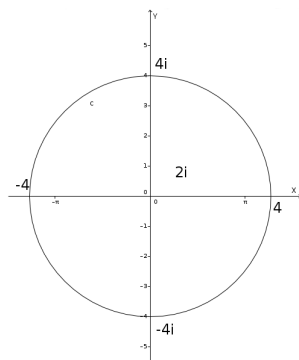
$$f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \text{ los polos de } f(z) \text{ se encuentra en}$$

$$\operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} = 1$$

de donde $z = k\pi, k = 0, +1, +2, \dots$

Luego $f(z)$ tiene 3 polos simples $0, \pi, -\pi$ que están en el interior de γ entonces:

$$\text{como } f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ donde } q'(z) = \cos z$$



$$Re(f, 0) = \frac{p(0)}{q'(0)} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1$$

$$Re(f, \pi) = \frac{p(\pi)}{q'(\pi)} = \frac{\cos \pi}{\cos \pi} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$Re(f, -\pi) = \frac{p(-\pi)}{q'(-\pi)} = \frac{\cos(-\pi)}{\cos(-\pi)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\oint_{\gamma} \operatorname{ctg} z dz = 2\pi i [1 + 1 + 1] = 6\pi i$$

3) Calcular $f(z) = \frac{e^{4z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}$, tiene polos simples de $z = +i$; $z = -i$; $z = +3i$; $z = -3i$ de los cuáles solamente $z = +i$ están en el interior de γ , entonces:

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{4z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz = 2\pi i [Re(f, i) + Re(f, -i)], \text{ donde}$$

$$Re(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{4z}}{(z - i)(z + i)(z^2 + 9)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{4z}}{(z + i)(z^2 + 9)} = \frac{e^{4i}}{2i(-1 + 9)} = \frac{e^{4i}}{16i}$$

$$Re(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{e^{4z}}{(z - i)(z + i)(z^2 + 9)} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{4z}}{(z - i)(z^2 + 9)} = \frac{e^{-4i}}{-2i(-1 + 9)} = -\frac{e^{-4i}}{16i}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{4z}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz = 2\pi i \left[\frac{e^{4i}}{16i} - \frac{e^{-4i}}{16i} \right] = \frac{\pi}{8} (e^{4i} - e^{-4i}) = \frac{\pi i}{4} \left(\frac{e^{4i} - e^{-4i}}{2i} \right) = \frac{\pi i}{4} \operatorname{sen} 4$$

4) Calcular la integral $\oint_{\gamma} z^8 e^{\frac{1}{z}} dz$, de donde $\gamma = \{z \in \mathbb{C} / \|z\| = \frac{1}{2}\}$

Desarrollo

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots + \frac{1}{n! z^n} + \dots$$

$$z^8 e^{\frac{1}{z}} = z^8 + z^7 + \frac{z^6}{2!} + \frac{z^5}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \frac{z}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9! z} + \dots$$

Luego $Re(f, 0) = \text{Coeficiente de } \frac{1}{z} = \frac{1}{9!}$, entonces:

$$\oint_{\gamma} z^8 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i Re(f, 0) = 2\pi i \left(\frac{1}{9!} \right) = \frac{\pi i}{177840}$$