

1 TEORÍA DE SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO.

1.1 SINGULARIDAD.-

Un punto z_0 es un punto singular o una singularidad de una función F , si F es analítica en algún punto de toda variedad de z_0 , excepto en z_0 mismo.

Existen Varios tipos de Singularidades.

1º **SINGULARIDAD AISLADA.-** El punto $z = z_0$ si $\exists \delta > 0$, tal que el círculo $\|z - z_0\| = \delta$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 (es decir $\exists V_\delta(z_0)$ sin singularidad).

Si tal $\delta \nexists$, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.

Si z_0 no es un punto singular y si $\exists \delta > 0 / \|z - z_0\| = \delta$ no encierra puntos singulares, decimos que z_0 es un punto ordinario de $F(z)$.

2º **POLOS.-** Si podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n F(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado polo de orden n , si $n = 1$. z_0 es llamado un polo simple.

Ejemplo.- $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$, se tiene un polo de orden tres en $z = 2$.

Ejemplo.- $f(z) = \frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$; tiene un polo de orden dos en $z = 1$ y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$

Si $y(z) = (z - z_0)^n F(z)$, de donde $F(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z = z_0$ es llamado un cero de orden n de $y(z)$.

Si $n = 1$, z_0 es llamado un cero simple, en tal caso z_0 es un polo de orden n de la función $\frac{1}{y(z)}$.

3º **LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN.-**

Ejemplos.-

(a) $f(z) = (z-3)^{\frac{1}{2}}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$

(b) $f(z) = \ln(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir $z = 1, z = -2$.

4º **SINGULARIDADES REMOVIBLES.-** El punto singular z_0 es llamado una singularidad removible de $F(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Ejemplo.- El punto singular $z = 0$, es una singularidad removible de $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, puesto que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.