



UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS
ARMADAS ESPE

PROYECTO DE MATEMÁTICA SUPERIOR

Desarrollo de varias ondas de audio a través de una síntesis de Fourier.

AUTORES

- *Hidrovo Andrés*
- *Jácome José*
- *Quijije Erik*

31 de julio de 2014

Índice general

Índice del Proyecto	3
0.1. Tema	4
0.2. Objetivo General	4
0.3. Objetivos Específicos	4
0.4. Marco Teórico	4
0.4.1. Transformada de Fourier	4
0.4.2. El sonido como una transformada de Fourier	4
0.4.3. Transformada Rápida de Fourier	5
0.4.4. Espectro Sonoro de un Sonido Complejo	5
0.4.5. Programación en Scilab	8
0.4.6. Equipo usado para la reproducir el sonido: Raspberry Pi .	9
0.4.7. Puertos GPIO	9
0.4.8. Código para generar una onda de sonido	10
0.5. Conclusiones	10
0.6. Recomendaciones	10
0.7. Bibliografía	10

0.1. Tema

Desarrollo de varias ondas de audio a través de una síntesis de Fourier.

0.2. Objetivo General

Generar varias ondas de audio para desarrollar una aplicación con la Serie de Fourier.

0.3. Objetivos Específicos

Aproximar una onda de audio mediante un análisis por la serie de Fourier.
Generar varias ondas de audio de diferente forma y amplitud.
Usar un circuito amplificador para aumentar la amplitud de la onda.

0.4. Marco Teórico

0.4.1. Transformada de Fourier

Fourier es una técnica matemática, desarrollada a finales del siglo XVIII por Jean Bautista Fourier y publicada en su libro *Théorie analytique de la chaleur*, y que da cuenta de la complejidad de los sonidos, más allá de las características de intensidad-tono-timbre, dicha investigación demostro que cualquier forma de onda puede descomponerse en la suma de una serie de ondas senoidales individuales, de frecuencia, amplitud y fase individual.

La transformada de Fourier se encarga de convertir la función de amplitud vs tiempo en amplitud vs frecuencia

0.4.2. El sonido como una transformada de Fourier

A la hora de analizar el sonido podemos decir que es una vibración del aire tratable como un fenómeno ondulatorio. Los valores cuantitativos que caracterizan una onda son su *amplitud* y *frecuencia* íntimamente relacionados con los valores cualitativos de volumen y tono. Sin embargo esta manera de describir el sonido no podría diferenciar por ejemplo el tono "Do" de un piano del tono "Do" de un violín, es decir, diferenciar el timbre de estos instrumentos. Realmente el sonido creado por un instrumento musical es una *compleja maraña de pequeñas ondas* a lo largo de una onda fundamental y con correspondiente frecuencia fundamental. Esa frecuencia fundamental es la que corresponde al tono del sonido producido por el instrumento. Las frecuencias de las "pequeñas ondas" que viajan a lo largo de la fundamental producen el timbre del sonido.

El movimiento de las moléculas de aire debido a los cambios de presión y el retorno a sus posiciones iniciales (elasticidad del medio) tiene la dirección de la perturbación generada, por ello, la onda sonora se denomina longitudinal.

Las podemos diferenciar de ondas transversales como las de la vibración de una cuerda.

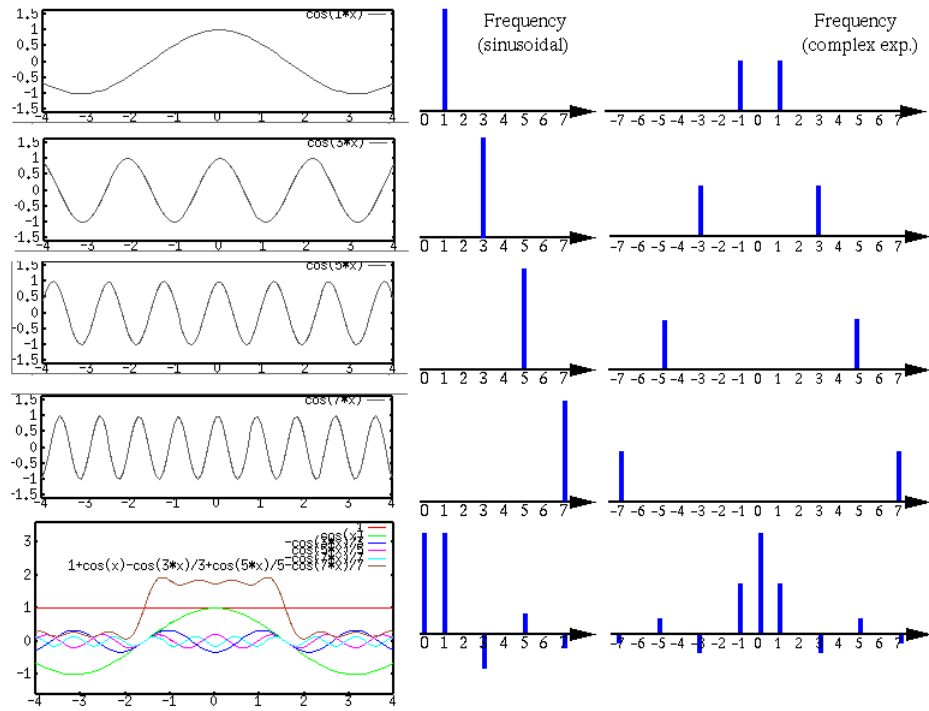
El sonido de una pieza musical, compuesto por una superposición de ondas de los distintos instrumentos según el paso del tiempo se puede analizar mediante la "Transformación de Fourier". Si visualizásemos las ondas de un sonido complejo como una pieza musical, no podríamos reconocer en la superposición final, de qué instrumento procede cada frecuencia. Con esta transformación matemática conseguimos a partir de una señal sonora que varía en el tiempo (frecuencias y amplitudes), representarla como sumas de ondas independientes de distintas frecuencias. Por tanto, obtenemos las frecuencias que conforman el sonido que estamos escuchando.

0.4.3. Transformada Rápida de Fourier

Abreviada como FFT (Fast Fourier Transform) es un eficiente algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier Discreta y su inversa. Este algoritmo tiene una gran importancia en una amplia variedad de aplicaciones, desde el tratamiento digital de señales y filtrado digital. La FFT se encarga de resolver la Transformada Discreta de Fourier,

0.4.4. Espectro Sonoro de un Sonido Complejo

El análisis a la Fourier de un sonido lo descompone en todas y cada una de las frecuencias que lo forman, y le asigna a cada frecuencia una intensidad o amplitud específica. Al conjunto de frecuencias amplitudes se le llama el espectro del sonido analizado. En un sonido nuestra sensación de tono que no está determinada únicamente por la "frecuencia" del sonido, cuando éste es complejo, ya que, sencillamente, un sonido complejo no tiene una sola frecuencia, y ni siquiera bastan para definirlo sus armónicos principales. La sensación de "un" sonido es el resultado de toda una serie de ondulaciones de distintas frecuencias, cuyas importancias relativas cambian rápidamente con el tiempo.



Cualquier forma de onda, a condición de que sea periódica (se repita siempre igual) se puede descomponer en una serie más o menos larga (quizás infinita) de ondas puras (senoidales) llamadas armónicos. Estos armónicos son tales que su combinación o mezcla dan lugar de nuevo al sonido original, y sus frecuencias son múltiplos enteros de la del sonido fundamental.

Proposición 1

Para todo $n, p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} a) \int_0^T \cos \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi p}{T} x dx &= \begin{cases} T & \text{si } n = p = 0 \\ T/2 & \text{si } n = p > 0 \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases} \\ b) \int_0^T \sin \frac{2\pi n}{T} x \sin \frac{2\pi p}{T} x dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = p = 0 \\ T/2 & \text{si } n = p > 0 \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases} \\ c) \int_0^T \cos \frac{2\pi n}{T} x \sin \frac{2\pi p}{T} x dx &= 0 \end{aligned}$$

Demostración:

a) Utilizando la relación $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ resulta que:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi p}{T} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left(\frac{2\pi n}{T} + \frac{2\pi p}{T} \right) x dx + \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left(\frac{2\pi n}{T} - \frac{2\pi p}{T} \right) x dx \\ &= \begin{cases} T/2 + T/2 & \text{si } n = p = 0 \\ 0 + T/2 & \text{si } n = p > 0 \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases} \end{aligned}$$

b) Se demuestra de manera análoga utilizando la relación

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

c) Se demuestra de forma análoga utilizando la relación

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

Proposición 2

Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función T -periódica e integrable en un intervalo de longitud T , entonces se verifica:

$$\int_a^{a+T} g(x) dx = \int_0^T g(x) dx \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}$$

es decir, la integral en todo intervalo de longitud T toma siempre el mismo valor.

Demostración:

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+T} g(x) dx - \int_0^T g(x) dx = \\ &= \int_a^0 g(x) dx + \int_0^T g(x) dx + \int_T^{a+T} g(x) dx - \int_0^T g(x) dx \\ &= \int_a^0 g(x) dx + \int_T^{a+T} g(x) dx \end{aligned}$$

y esta última suma es cero, ya que haciendo el cambio de variable $x = t + T$ en la integral $\int_T^{a+T} g(x) dx$, resulta ser igual a $-\int_a^0 g(x) dx$.

Proposición 3

Si $f : [-a, a]$

$\rightarrow R$ es integrable, se puede asegurar que:

a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Demostración:

a)

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$

pero las dos últimas integrales quedan, después de hacer el cambio de variable $t = -x$ en la penúltima de ellas, así

$$= \int_a^0 -f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

b)

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 -f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$

pero las dos últimas integrales quedan, después de hacer el cambio de variable $t = -x$ en la penúltima de ellas, así

$$= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = - \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0$$

0.4.5. Programación en Scilab

```
clc
clear
printf('\n\nProyecto de matematicas superior/n /n')
printf('\n\nIntegrantes:')
printf('\n\nJose Jacome\t Maqueavelo Hidrovo\t Erik Quijije\n\n')
```

```
sample_rate=input('ingrese el periodo');
inicio=input('ingrese el rango de inicio')
final=input('ingrese el rango a terminar')
t = inicio:1/sample_rate:final;

N=size(t,'*'); //number of samples
r=input('ingrese la funcion f(t)')
//s=sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*70*t+pi/4)+grand(1,N,'nor',0,1);
s=r+grand(1,N,'nor',0,1);
y=fft(s);
```

```
//s is real so the fft response is conjugate symmetric and we retain only the first N
```

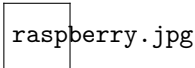


```
f=sample_rate*(0:(N/2))/N; //associated frequency vector
n=size(f,'*')
clf()
plot(f,abs(y(1:n)))
```

0.4.6. Equipo usado para la reproducir el sonido: Raspberry Pi

Un Raspberry Pi es una computadora de bajo costo, del tamaño de una tarjeta de crédito que se conecta a un monitor de ordenador o un televisor, y utiliza un teclado y un ratón estándar. Es un dispositivo pequeño que permite a las personas de todas las edades a explorar la computación, y para aprender a programar en lenguajes como Python y Scratch. Es capaz de hacer todo lo que espera que una computadora haga, desde navegar por Internet y reproducción de vídeo de alta definición, hacer hojas de cálculo, procesadores de texto, y jugar juegos.

Lo que es más, el Raspberry Pi tiene la capacidad de interactuar con el mundo exterior, y se ha utilizado en una amplia gama de proyectos digitales, desde las máquinas de música y detectores de sonido hasta estaciones meteorológicas y pajareras con cámaras infrarrojas. Queremos ver la Raspberry Pi siendo utilizado por los niños de todo el mundo para aprender a programar y entender cómo funcionan las computadoras.



raspberrypi.jpg

0.4.7. Puertos GPIO

GPIO (General Purpose Input/Output, Entrada/Salida de Propósito General) es un pin genérico en un chip, cuyo comportamiento (incluyendo si es un pin de entrada o salida) se puede controlar (programar) por el usuario en tiempo de ejecución.

Los pines GPIO no tienen ningún propósito especial definido, y no se utilizan de forma predeterminada. La idea es que a veces, el para el diseño de un sistema completo que utiliza el chip podría ser útil contar con un puñado de líneas digitales de control adicionales, y tenerlas a disposición ahorra el tiempo de tener que organizar circuitos adicionales para proporcionarlos. Por ejemplo, los chips Realtek ALC260 (códec de audio) tienen 8 pines GPIO, que quedan sin utilizar de forma predeterminada. Algunos integradores de sistemas (Acer Inc. laptops) que emplea el ALC260 utilizan la primera GPIO (GPIO0) para encender el amplificador utilizado para los altavoces internos y el conector de auriculares del ordenador portátil.

0.4.8. Código para generar una onda de sonido

El siguiente código puede ser ejecutado sobre un Raspberry Pi gracias al Lenguaje de Programación Python y la librería Wiringpi2

```
import sys
import time
import wiringpi2

io = wiringpi2.GPIO(wiringpi2.GPIO.WPI_MODE_PINS)

wiringpi2.softToneCreate(7)

wiringpi2.softToneWrite(7,int(sys.argv[1]))
time.sleep(float(sys.argv[2]))
```

0.5. Conclusiones

- El análisis espectral de señales continuas y no periódicas se puede llevar a cabo usando Fourier, con aproximación de una o de varias ondas que forman la onda la onda de sonido.
- El sonido es una onda periódica en el tiempo que se puede ajustar fácilmente a una serie de Fourier, tomando en cuenta se amplitud modulo, entre otras, ya que estas le dan las características y comportamiento de las ondas espectrales.
- El circuito amplificador permitió reproducir y apreciar la forma sonora de las ondas espectrales de sonido por medios auditivos, pudiendo constatar la onda producida.

0.6. Recomendaciones

1. Realizar los cálculos en un software matemático y el diseño en un programa que permita simular correctamente la onda de sonido con los diferentes parámetros asignados
2. Realizar la simulación del análisis por medio de equipos auditivos y observar de forma gráfica el comportamiento de estas.
3. Tener el equipo necesario para poder llevar a cabo todas las tareas de análisis, ya que al tener falencias no se podrá llegar a comprender de forma clara el trabajo realizado.

0.7. Bibliografía

1. “Graficador de serie de Fourier”, <http://mygnet.net/codigos/matlab/graficacion>, Consultado en Junio del 2014.
2. “Señales y análisis de Fourier”, <http://www.slideshare.net/psyrtd/sa-fourier-con-matlab> , Consultado en diciembre del 2013.

3. “Series de Fourier”, Aplicación de las matemáticas, <http://personal.us.es/niejimjim/tema07.pdf>, Consultado en Junio del 2014