La Ecuación de Laplace

Jácome Jose, Semanate Clinton, Toalombo Inti, Torres Guido

August 6, 2014

Pierre Simon Laplace

Beaumont-en-Auge (Normandía) (1749) - París(1827) fue un astrónomo, físico y matemático francés que inventó y desarrolló la transformada de Laplace y la ecuación de Laplace. Su trabajo se baso en la Mecánica Celeste (la cual le tomo cinco volumenes) también Ecuaciones Diferenciales y estudio de Probabilidades, fue estudiante de Jean d'Alembert, entre sus estudiantes destacan Siméon Denis Poisson y Joseph Fourier, fue conocido como el Newton de Francia, otro discípulo de él fue Napoleón.

Se denomina *Ecuación de Laplace* a la expresión de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico (recordando la clasificación de las ED de segundo orden), es usado por las necesidades de la mecánica newtoniana y tiene muchas aplicación en otras ramas de la física teórica (astronomía, electrostática, mecánica de fluidos, mecánica cuántica).

A grandes rasgos estas EDP elípticas involucran solamente derivadas parciales respecto a variables en el espacio y, como una consecuencia, las soluciones de dichas ecuaciones están determinadas en condiciones de fronteras únicas.

Los tipos de EDP nos permiten describer sistemas, así las EDP elípticas (Ecuación de Laplace) permiten describir un sistema de estado estable, una EDP parabólica (ecuación de Calor) describe un sistema difuso y la EDP hiperbólica (ecuación de la Onda) describe un estado vibratorio.

Deducción de la Ecuación de Laplace

Partimos del operador Nabla. $\bigtriangledown = \hat{x}\frac{d}{dx} + \hat{y}\frac{d}{dy} + \hat{z}\frac{d}{dz}$

($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son los vectores unitarios)

Laplaciano es igual al producto escalar de nabla:

$$\triangle V = (\bigtriangledown\bigtriangledown)V = \bigtriangledown^2 V$$

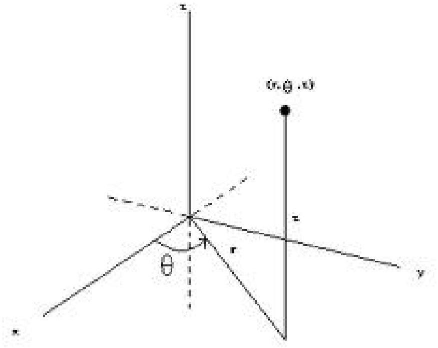
$$\bigtriangledown^2 V = (i\frac{dV}{dx} + j\frac{dV}{dy} + k\frac{dV}{dz}).(i\frac{dV}{dx} + j\frac{dV}{dy} + k\frac{dV}{dz})$$

$$\bigtriangledown^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}$$

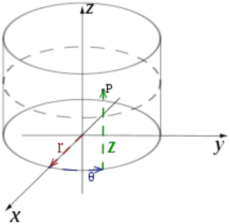
Igualando a cero el operador nabla obtenemos la ecuación de laplace que en coordenadas cartesianas la podemos escribir como:

$$\bigtriangledown^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Laplace en coordenadas Rectangulares

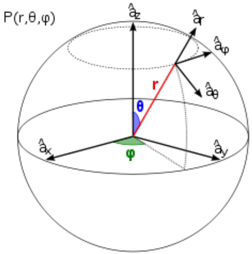


Ecuación de Laplace en coordenadas Cilíndricas



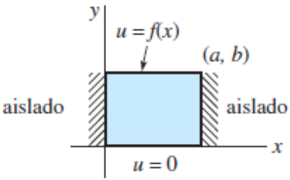
$$x = r.cos\phi$$
$$y = r.sen\phi$$
$$z = z$$
$$\frac{1}{r^2}.\frac{d^2u}{d\Theta^2} + \frac{1}{r}.\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr}) + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

Ecuación de Laplace en coordenadas Esféricas



$$x = p.sen\Theta.cos\phi$$
$$y = p.sen\Theta.cos\phi$$
$$z = p.cos\Theta$$
$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{dp}(p^2\frac{du}{dp}) + \frac{1}{p^2 sen\phi}\frac{d}{d\phi}(sen\phi.\frac{du}{d\phi}) + \frac{1}{p^2 sen^2\phi}.\frac{d^2u}{d\Theta^2} = 0$$

Fuente: Ecuaciones Diferenciales-Deniss Zill, Cap. 11, Vol. 1, Pág. 545. Cálculo de la temperatura u en una placa rectangular



- Suponga que deseamos encontrar la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa rectangular cuyas orillas verticales $x = 0x = a$ se encuentran aisladas, mientras las orillas superior e inferior $y = by = 0$ se mantienen a temperaturas f (x) y 0, respectivamente. Consulte la figura cuando no escapa calor desde las superficies laterales de la placa, resolvemos el siguiente problema de valores en la frontera:

$$\frac{d^2u}{} + \frac{d^2u}{} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ (1)$$

Ejercicio Resuelto

- $\frac{du}{dx}|x = 0 = 0, \; \frac{du}{dx}|x = a = 0, \; 0 < y < b, \; (2)$
  $u(x, 0) = 0, u(x, b) = f(x), \; 0 < x < a, \; (3)$
  Solución del problema de valores en la frontera.
  Con $u(x, y) = X(x)Y(y)$, la separación de variables en (1) conduce a

$$\frac{X^{''}}{X} = -Y^{''}Y = -\lambda$$

$X^{''} + \lambda.X = 0, \; (4)$
$Y^{''} + \lambda.Y = 0, \; (5)$

Ejercicio Resuelto

- En (2) y (3), las tres condiciones de frontera homogéneas se traducen en $X^{'}(0) = 0$, $X^{'}(a) = 0$ y $Y(0) = 0$. El problema de Sturm-Liouville asociado con la ecuación (4) es entonces
  $X^{''} + \lambda.X = 0, X^{'}(0) = 0, X^{'}(a) = 0$ (6)
  El análisis de los casos correspondientes
  a$\lambda = 0, \lambda = -\alpha^2 < 0 y \lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$, Por comodidad, a continuación presentamos una versión sintetizada de dicho análisis.

Ejercicio Resuelto

- Para $\lambda = 0$, (6) se convierte en
$X^{"} = 0, X^{'}(0) = 0, X^{'}(a) = 0$
La solución de la ecuación diferencial ordinaria es
$X = C1 + C2x$. La condición de frontera $X^{'}(0) = 0$ entonces, implica que $c2 = 0$, por lo que $X = c1$. Observe que para cualquier c1, esta solución constante satisface la segunda condición de frontera $X^{'}(a) = 0$.
Haciendo que $c1 \neq 0, X = c1$ es una solución no trivial del problema de valores en la frontera (6). Para $\lambda = -\alpha^2 < 0$, (6) no tiene una solución no trivial. Para $\alpha = \alpha^2 > 0$, (6) se convierte en
$X^{"} + \alpha^2 X = 0, X^{'}(0) = 0, X^{'}(a) = 0$

Ejercicio Resuelto

Fuente: Ecuaciones Diferenciales-Deniss Zill, Cap. 11, Vol. 1, Pág. 545. Cálculo de la temperatura u en una placa rectangular

- Al aplicar la condición de frontera $X'(0) = 0$, la solución $X = c1.cos(\alpha.x) + c2.sen(\alpha.x)$ implica que $c2 = 0$, por lo que $X = c1.cos(\alpha.x)$. La segunda condición de frontera $X'(a) = 0$ aplicada a esta última expresión nos da entonces $-c1\alpha.sen\alpha.a$. Debido a que $\alpha > 0$, la última ecuación se satisface cuando $\alpha.a = n.\pi 0\alpha = n\frac{\pi}{a}, n = 1, 2, ...$Los valores propios de (6) son entonces λ_0 y $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\frac{\pi^2}{a^2}, n = 1, 2, ...$ Por la correspondiente $\lambda_0 = 0$ con $n = 0$, las funciones propias de (6) son
  $X = c1, n = 0$
  $X = c1.cos\frac{n\pi}{a}x, n = 1, 2...$
  Ahora debemos resolver la ecuación (5) sujeta a la única condición de frontera homogénea $Y(0) = 0$. Primero, para

Ejercicio Resuelto

Fuente: Ecuaciones Diferenciales-Deniss Zill, Cap. 11, Vol. 1, Pág. 545. Cálculo de la temperatura u en una placa rectangular

- Ahora debemos resolver la ecuación (5) sujeta a la única condición de frontera homogénea $Y(0) = 0$. Primero, para $\lambda_0 = 0$, la ecuación diferencial en (5) es simplemente $Y^{''} = 0$ y, por lo tanto, su solución es $Y = c3 + c4y$. Sin embargo, $Y(0) = 0$ implica que $c3 = 0$, en consecuencia, $Y = c4y$. Segundo, para $\lambda_n = n^2\frac{\pi^2}{a^2}$, la ecuación diferencial en (5) es $Y^{''} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y = 0$. Como $0 < y < b$ es un intervalo finito, escribimos la solución general en términos de las funciones hiperbólicas:
  $Y = c3.cosh(n\pi.\frac{y}{a}) + c4senh(n\pi\frac{y}{a})$

Ejercicio Resuelto

Fuente: Ecuaciones Diferenciales-Deniss Zill, Cap. 11, Vol. 1, Pág. 545. Cálculo de la temperatura u en una placa rectangular

- A partir de esta solución podemos observar que $Y(0) = 0$ de nuevo implica $c3 = 0$, en consecuencia $Y = c4senh(n\pi\frac{y}{a})$. Las soluciones producto $u_n = X(x)Y(y)$ que satisfacen la ecuación de Laplace (1) y las tres condiciones de frontera homogéneas dadas en (2) y (3) son
  $A_0 y, n = 0$
  $A_n senh\frac{n\pi}{a}$
  $cos\frac{n\pi}{a}x, n = 1, 2....$
  donde hemos escrito nuevamente c1c4 como A_0 para $n = 0$ y como An para $n = 1, 2...$ El principio de superposición da otro resultado

$$u(x, y) = A_0 y + \sum^{\infty} A_n senh\frac{n\pi}{} y cos\frac{n\pi}{} x$$

- Por último, sustituyendo $y = b$ en (7) observamos que $u(x,b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n senh\frac{n\pi}{a}b.cos\frac{n\pi}{a}b$
Donde
$A_0 = \frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$
$A_n = \frac{2}{a.senh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)cos\frac{n\pi}{a}xdx$