1 SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

1.1 Series de Potencias

Una serie de potencias en el plano complejo es de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \tag{1}$$

donde c_n son constantes reales y complejos llamados coeficientes "z_0" es constante y se llama *centro de la serie*,"z" es la variable compleja.
Si $z_0 = 0$, la serie (1) se reduce a la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots +$, serie de potencias z.
OBSERVACIÓN.-

- Diremos que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente, $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$ y es divergente, $\forall \epsilon C$, tal que $\| z - z_0 \| > R$
- Si $\exists R > 0$, tal que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente en $\| z - z_0 \| < R$ y si $0 < \rho < R$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge uniformente en $\| z - z_0 \| < \rho$
- La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente $\forall z \epsilon C$ (en particular en $z = z_0$) tal que $\| z - z_0 \| < R$ y si $0 < \rho < R$, entonces la serie converge uniformentente, $\forall z \epsilon C$ tal que $0 < \| z - z_0 \| < \rho$
- Al número $R > 0$ se llama radio de convergencia de las serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
- Para $z \epsilon C$, se tiene $\| z - z_0 \| < R$, que se denomina región de convergencia.
- Para hallar el radio y región de convergencia de una serie de la forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, se utiliza el criterio de la razón, que esta caracterizada por el siguiente teorema

1.2 TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN).-

Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia en C y sea $u_n = c_n(z-z_0)^n$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \| = L$, entonces:

i) Si $L < 1$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ diverge.

iii) Si $L = 1$, el criterio no decide.

OBSERVACIONES

- Sea $\sum_{n=0}^{\infty}$ una serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| c_n \|} = L$, entonces:
  i) Si $L = 0$, entonces $(R = \infty)$; la serie es convergente en todo el plano complejo C
  ii) Si $L > 0$, entonces $R = \frac{1}{L}$
  iii) Si $L = \infty$, entonces $(R = 0)$ converge solamente en el origen.
- Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ uan serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty} \| \frac{c_{n+1}}{c_n} \| = L$, entonces:
  i) Si $L = 0$, entonces $(R = \infty)$
  ii) Si $L > 0$, entonces $R = \frac{1}{L}$
  iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$

1.3 FUNCIONES REPRESENTADAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS.-

La serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, con radio de convergencia $R > 0$, define una función de z, es decir: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, donde $D_f = z\epsilon C / \| z - z_0 \| < R$ es decir que el dominio de $f(z)$ es la región de convergencia de la serie, por ejemplo consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$ convergente, $\forall z\epsilon C$ tal que $\| z \| < R$
Donde $R = \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{1} \| = 1$ es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es convergente $\forall z\epsilon C$ tal que $\| z \| < 1$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ define la función $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

OBSERVACIÓN.- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, entonces se dice que $f(z)$ es representada mediante la serie de potencia o se dice que $f(z)$ esta desarrolado mediante una serie de potencia.

1.4 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES.-

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z\epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$, $R > 0$ entonces: $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$, convergente $\forall z\epsilon C$, tal que $\| z - z_0 \| < R'$ donde $R = lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \|$, entonces se tiene:

$$R' = \lim_{n\to\infty} \| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} . \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = 1. \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = R$$

por lo tanto $R = R'$

$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (z - z_0)^{n-2}$, converge $\forall z\epsilon C$, tal que $\| z - z_0 \| < R''$, de donde:

$$R'' = \lim_{n\to\infty} \| \frac{n(n-1) c_n}{n(n+1) c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n(n+1)} . \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = 1. \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = R$$

por lo tanto $R = R''$
Las series obtenidas, derivando de la serie de potencia original tien el mismo radio de convergencia que la serie original.
Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$
$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{z_0}^{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z} (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$, es convergente $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$

1.5 SERIE DE TAYLOR Y DE MACLAURIN COMPLEJA.-

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$, calculando sus derivadas y evaluando en $z = z_0$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z_0) = c_0$ de donde $c_0 = f(z_0)$
$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} \Rightarrow f'(z_0) = c_1$ de donde $c_1 = f'(z_0)$
$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2} \Rightarrow f''(z_0) = 1.2.c_2$ de donde $c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$
$f'''(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n(z-z_0)^{n-3} \Rightarrow f'''(z_0) = 1.2.3.c_3 = 3!c_3$ de donde $c_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!}$
.
.
.
$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)...2.1.c_n(z-z_0)^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} n!c_n(z-z_0)^{n-m}$ entonces $f^(n)(z_0) = n!c_n$ de donde $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, desarrollando
$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ... + c_n(z-z_0)^n + ...$
$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + ...$

$\therefore$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!} \tag{2}$$

es la serie de Taylor alrededor de $z = z_0$
cuando $z_0 = 0$, se tiene la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!} \tag{3}$$

que se denomina serie de MACLAURIN

1.6 TEOREMA.-

Sea $f(z)$ una función analítica en z_0, entonces $f(z)$ tiene una representación en serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$, $\forall z$ en algún disco de centro en z_0

Demostración

Como f es analítica $\Rightarrow \exists$ un disco $\| z-z_0 \| < r$ en donde f es derivable, sea $\gamma : \| z-z_0 \| = \frac{r}{2}$, entonces f es derivable en todos los puntos sobre y dentro de γ. Sea $w \epsilon \gamma$ y z cualquier punto dentro de γ, entonces escribiremos:
$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} . \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}$ **... (1)**
como w esta más lejos a z_0 que lo de z, entonces $\| z-z_0 \| < \| w-z_0 \|$ por lo tanto $\| \frac{z-z_0}{w-z_0} \| < 1$, mediante la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-z_0}{w-z_0})^n \text{ ... (2)}$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-z_0}{w-z_0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$
ahora por la fórmula de la integral de Cauchy se tiene:
$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)(z-z_0)^n}{(w-z)^{n+1}} dw$
$\sum_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}](z-z_0)^n$ **... (3)**
pero se conoce que: $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ **... (4)**
al reemplazar (4) con (3) se obtiene: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
que es la representación de la serie de Taylor en un disco abierto de centro z_0.

1.7 SERIE DE LAURENT.-

Si f es analítica en z_0, entonces se puede desarrollar f en una serie de Taylor alrededor de z_0 contenido potencia en $z \to z_0$ ahora veremos el caso en que f no sea analítica en z_0, si aún podríamos tratar de representar en una serie alrededor de z_0.
Si incluimos potencias de $\frac{1}{z-z_0}$, esta es la idea detrás de la serie de Laurent.
Sea $\gamma_1 : \| z-z_0 \| > r$, $\gamma_2 : \| z-z_0 \| < R$, $r < R$
$D = \{z \epsilon C / r < \| z-z_0 \| < R\}$, la región anular (Disco) acotado por γ_1 y γ_2
Sea $f : D \subset C \longrightarrow C$ una función analítica dentro y sobre la frontera de D, entonces $\forall z \epsilon D$ se tiene : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$
donde a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Laurent y $a_n = \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$
$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw$
En la serie de Laurent
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es la parte analítica

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ es la parte principal

1.8 TEOREMA.-

Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo $\gamma_1 <\| z-z_0 \|< \gamma_2$, entonces para z en este anillo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ donde $a_n = \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$ para $n = 0, +-1, +-2, ...,$ y γ es cualquier circunferencia $\| z-z_0 \|= \rho$, con $r_1 < \rho < r_2$

<u>**Demostración**</u>

Sea z en el anillo, elegimos los números R_1 y R_2, tal que $r_1 < R_1 <\| z-z_0 \|< R_2 < r_2$, tal como en la figura:
Sea $\gamma_2 :\| z-z_0 \|= R_2$, la circunferencia de radio R_2 y $\gamma_1 :\| z-z_0 \|= R_1$, la circunferencia de radio R_1
Por la fórmula generalizada del teorema de Integral de Cauchy se puede escribir:
$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}dz$ calculando ambas integrales en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.
Consideremos las integrales de línea por separado para la integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z}$
escribiremos $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$, entonces se tiene
$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}](z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$
, donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$; para $n = 0, +-1, +-2, ...$
para la integral $\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z}$, escribiremos en la forma
$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0}.\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}$, se observa que para $w\epsilon\gamma_1$, se tiene:
$\| \frac{w-z_0}{z-z_0} \|< 1$, luego por la serie geométrica se tiene:
$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-z_0}.\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{w-z_0}{z-z_0})^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$,
por lo tanto se tiene:
$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = -\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1}dw]\frac{1}{(z-z_0)^n}$
donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1}dw$, para $n = 1, 2, 3, ...$ ahora utilizamos el teorema de la deformación para reemplazar γ_1 y γ_2 con la circunferencia $\gamma_\rho :\| z-z_0 \|= \rho$, esto nos sirve para expresar una fórmula para $a_0, a_1, a_2, ..., a_{-1}, a_{-2}, ...$, en una sola fórmula
$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(\frac{1}{(z-z_0)^n})$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$