

1 TEORÍA DE SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO.

1.1 SINGULARIDAD.-

Un punto z_0 es un punto singular o una singularidad de la función F , si F es analítica en algún punto de toda variedad de z_0 , excepto en z_0 mismo.

Existen Varios tipos de Singularidades.

1º **SINGULARIDAD AISLADA.-** El punto $z = z_0$ si $\exists \delta > 0$, tal que el círculo $\|z - z_0\| = \delta$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 (es decir $\exists V_\delta(z_0)$ sin singularidad).

Si tal $\delta \nexists$, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.

Si z_0 no es un punto singular y si $\exists \delta > 0 / \|z - z_0\| = \delta$ no encierra puntos singulares, decimos que z_0 es un punto ordinario de $F(z)$.

2º **POLOS.-** Si podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n F(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado polo de orden n , si $n = 1$. z_0 es llamado un polo simple.

Ejemplo.- $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$, se tiene un polo de orden tres en $z = 2$.

Ejemplo.- $f(z) = \frac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$; tiene un polo de orden dos en $z = 1$ y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$

Si $y(z) = (z - z_0)^n F(z)$, de donde $F(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z = z_0$ es llamado un cero de orden n de $y(z)$.

Si $n = 1$, z_0 es llamado un cero simple, en tal caso z_0 es un polo de orden n de la función $\frac{1}{y(z)}$.

3º **LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN.-**

Ejemplos.-

(a) $f(z) = (z-3)^{\frac{1}{2}}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$

(b) $f(z) = \ln(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir $z = 1$, $z = -2$.

4º **SINGULARIDADES REMOVIBLES.-** El punto singular z_0 es llamado una singularidad removable de $F(z)$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Ejemplo.- El punto singular $z = 0$, es una singularidad removable de

$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$, puesto que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.

5º **SINGULARIDADES ESENCIALES.-** Una singularidad que no sea polo, ni punto de ramificación, ni singularidad removable es llamado una singularidad esencial.

Ejemplo.- $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, tiene una singularidad esencial en $z = 1$ se una función unívoca tiene una singularidad, entonces las singularidades es un polo o una singularidad esencial, por esta razón un polo es llamado algunas veces una singularidad evitable.

Equivalentemente $z = z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún positivo n tal que: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

6º **SINGULARIDAD EN EL INFINITO.**- El tipo de singularidad de $f(z)$ en $z = \infty$ (el punto en el infinito) es el mismo como el de $f(\frac{1}{w})$ en $w = 0$.

Ejemplo.- La función $f(z) = z^3$ tiene como polo de tercer orden en $z = \infty$, ya que $f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ tiene un polo de tercer orden en $w = 0$.

Ejemplo.- Localizar y clasificar las singularidades

$$1) f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2}$$

Desarrollo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z}{(z + 2i)^2} = \frac{1}{8i} \neq 0, \text{ de donde } z = 2i \text{ es un polo de segundo orden, simultáneamente.}$$

$z = -2i$ es un polo de segundo orden.

Como se pueden encontrar $\delta > 0$ tal que ninguna singularidad distinta de $z = 2i$ está dentro del círculo.

$\|z - 2i\| = \delta$ entonces $z = 2i$ es una singularidad aislada, simultáneamente para $z = -2i$ es una singularidad aislada.

$$2) f(z) = \frac{\ln(z - 2)}{(z^2 + 2z + 2)^2}$$

Desarrollo

El punto $z = 2$ es un punto de ramificación y es una singularidad aislada, también $z^2 + 2z + 2 = 0$ de donde se tiene $z = -1 - 2i$ y se dice que $z = -1 - 2i$ son polos de cuarto orden de los cuales son singularidades aisladas.

$$3) f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

Desarrollo

Como $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = 1 \neq 0$, entonces $z = 0$ es una singularidad removible.

1.2 RESIDUOS.-

Se conoce por el desarrollo de la serie de Laurent de una función analítica $f(z)$ es una región anular $D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < \|z - z_0\| < R_2\}$ está dado por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \dots (*)$$

Si la parte principal consiste de un número finito de términos es decir $b_n = 0$, para $n > m$ y $b_m \neq 0$ entonces la serie (*) toma la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + 0 + 0 \dots$$

en este caso $F(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$ y el coeficiente b_1 denotado por $a_{-1} = b_1$ recibe el nombre de residuo de F en z_0 .

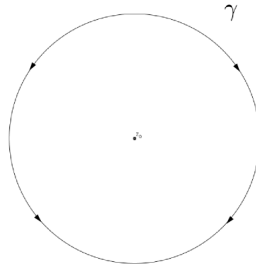
Si $F(z)$ tiene un polo simple $z = z_0$, entonces la serie es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0}$

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots + \frac{b_1}{z-z_0}$$

$(z-z_0)f(z) = a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^{n+1} + \dots + b_1$ ahora tomamos el límite cuando $z \rightarrow z_0$

se tiene: $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z) = b_1 = \text{Re}(f, z_0)$, b_1 recibe el nombre de $F(z)$ en $z = z_0$.

Luego si $F(z)$ tiene un polo en $z = z_0$ y z_0 está en el interior de γ entonces $\oint_{\gamma} F(z) dz \neq 0$



En este caso $F(z)$ se puede expresar mediante la serie

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}, \text{ convergente } \forall z \in C \text{ tal que}$$

$$0 < \|z - z_0\| < R \text{ y } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{F(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) dz$$

donde γ es una curva cerrada contenida en el anillo $0 < \|z - z_0\| < R$

Si $n = 1$, $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} F(z) dz$, de donde

$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i b_1$ donde b_1 es el coeficiente de $\frac{1}{z-z_0}$ y b_1 es el residuo de $F(z)$ que denotaremos por $\text{Re}(F, z_0) = b_1$, por lo tanto

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Re}(F, z_0)$$

1.3 TEOREMA DEL RESIDUO.-

Si $f(z)$ es una fracción analítica dentro y sobre la curva γ excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, z_3, \dots, z_j, \dots, z_m$ pertenecientes al interior de γ , entonces:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Re}(f, z_j)$$

Demostración

Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada en γ , excepto en los puntos z_1, z_2, \dots, z_m dentro de γ

También sea $Cr_j(z_j)$ la circunferencia de centro z_j y de radio r_j suficientemente pequeño para que $Cr_j(z_j) \subset \gamma, \forall j$

$Cr_j(z_j) \cap Cr_k(z_k) = \emptyset, \forall k \neq j$ entonces

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \oint_{Cr_j(z_j)} f(z) dz = \sum_{j=1}^m 2\pi i \operatorname{Re}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(f, z_j)$$

$$\therefore \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(f, z_j)$$

OBSERVACIÓN.- Si z_0 es un polo de orden m , hay una fórmula relativamente simple para calcular $\operatorname{Re}(f, z_0)$

1.4 TEOREMA.-

Si z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$ entonces:

$$\operatorname{Re}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

En el caso $m = 1$ y $0! = 1$, por lo tanto si f tiene un polo simple de z_0 , entonces se tiene: $\operatorname{Re}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

Demostración

Como z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$, entonces f tiene un desarrollo en serie de Laurent en el anillo $0 < \|z - z_0\| < R$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$