

1 SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

1.1 Series de Potencias

Una serie de potencias en el plano complejo es de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots \quad (1)$$

donde c_n son constantes reales y complejos llamados coeficientes " z_0 " es constante y se llama *centro de la serie*, " z " es la variable compleja.

Si $z_0 = 0$, la serie (1) se reduce a la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$, serie de potencias z .

OBSERVACIÓN.-

- Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente, $\forall z \in C$ tal que $\|z-z_0\| < R$ y es divergente, $\forall z \in C$, tal que $\|z-z_0\| > R$
- Si $\exists R > 0$, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente en $\|z-z_0\| < R$ y si $0 < \rho < R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente en $\|z-z_0\| < \rho$
- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente $\forall z \in C$ (en particular en $z = z_0$) tal que $\|z-z_0\| < R$ y si $0 < \rho < R$, entonces la serie converge uniformemente, $\forall z \in C$ tal que $0 < \|z-z_0\| < \rho$
- Al número $R > 0$ se llama radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
- Para $z \in C$, se tiene $\|z-z_0\| < R$, que se denomina región de convergencia.
- Para hallar el radio y región de convergencia de una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, se utiliza el criterio de la razón, que esta caracterizada por el siguiente teorema

1.2 TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN).-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia en C y sea $u_n = c_n(z-z_0)^n$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right\| = L$, entonces:

- i) Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente.
- ii) Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ diverge.
- iii) Si $L = 1$, el criterio no decide.

OBSERVACIONES

- Sea $\sum_{n=0}^{\infty}$ una serie de potencia tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|c_n\|} = L$, entonces:
 - i) Si $L = 0$, entonces $(R = \infty)$; la serie es convergente en todo el plano complejo C
 - ii) Si $L > 0$, entonces $R = \frac{1}{L}$
 - iii) Si $L = \infty$, entonces $(R = 0)$ converge solamente en el origen.
- Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ una serie de potencia tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right\| = L$, entonces:
 - i) Si $L = 0$, entonces $(R = \infty)$
 - ii) Si $L > 0$, entonces $R = \frac{1}{L}$
 - iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$

1.3 FUNCIONES REPRESENTADAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS.-

La serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, con radio de convergencia $R > 0$, define una función de z , es decir: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, donde $D_f = \{z \in C / \|z - z_0\| < R\}$ es decir que el dominio de $f(z)$ es la región de convergencia de la serie, por ejemplo consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$ convergente, $\forall z \in C$ tal que $\|z\| < R$

Donde $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{1} \right\| = 1$ es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es convergente $\forall z \in C$ tal que $\|z\| < 1$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ define la función $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$

OBSERVACIÓN.- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, entonces se dice que $f(z)$ es representada mediante la serie de potencia o se dice que $f(z)$ está desarrollado mediante una serie de potencia.

1.4 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES.-

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z \in C$ tal que $\|z - z_0\| < R$

, $R > 0$ entonces: $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$, convergente $\forall z \in C$, tal que $\|z - z_0\| < R'$

donde $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\|$, entonces se tiene:

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = R$$

por lo tanto $R = R'$

$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (z - z_0)^{n-2}$, converge $\forall z \in C$, tal que $\|z - z_0\| < R''$, de donde:

$$R'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{n(n-1) c_n}{n(n+1) c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{n(n+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right\| = R$$

por lo tanto $R = R''$

Las series obtenidas, derivando de la serie de potencia original tienen el mismo radio de convergencia que la serie original.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z \in C$ tal que $\|z - z_0\| < R$

$\int_{z_0}^z f(z) dz = \int_{z_0}^z \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^z (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$, es convergente $\forall z \in C$ tal que $\|z - z_0\| < R$

1.5 SERIE DE TAYLOR Y DE MACLAURIN COMPLEJA.-

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z \in C$ tal que $\|z - z_0\| < R$, calculando sus derivadas y evaluando en $z = z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z_0) = c_0 \text{ de donde } c_0 = f(z_0)$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-z_0)^{n-1} \Rightarrow f'(z_0) = c_1 \text{ de donde } c_1 = f'(z_0)$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n(z-z_0)^{n-2} \Rightarrow f''(z_0) = 1.2.c_2 \text{ de donde } c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$$

$$f'''(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n(z-z_0)^{n-3} \Rightarrow f'''(z_0) = 1.2.3.c_3 = 3!c_3 \text{ de donde } c_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!}$$

·
·
·

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)...2.1.c_n(z-z_0)^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} n!c_n(z-z_0)^{n-m} \text{ entonces } f^{(n)}(z_0) =$$

$$n!c_n \text{ de donde } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, desarrollando

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots$$

∴

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!} \quad (2)$$

es la serie de Taylor alrededor de $z = z_0$

cuando $z_0 = 0$, se tiene la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!} \quad (3)$$

que se denomina serie de MACLAURIN

1.6 TEOREMA.-

Sea $f(z)$ una función analítica en z_0 , entonces $f(z)$ tiene una representación en serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$, $\forall z$ en algún disco de centro en z_0

Demostración

Como f es analítica $\Rightarrow \exists$ un disco $\|z - z_0\| < r$ en donde f es derivable, sea $\gamma: \|z - z_0\| = \frac{r}{2}$, entonces f es derivable en todos los puntos sobre y dentro de γ . Sea $w \in \gamma$ y z cualquier punto dentro de γ , entonces escribiremos:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \dots \quad (1)$$

como w está más lejos a z_0 que lo de z , entonces $\|z - z_0\| < \|w - z_0\|$ por lo tanto $\|\frac{z - z_0}{w - z_0}\| < 1$, mediante la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n \dots \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene: $\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$

ahora por la fórmula de la integral de Cauchy se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \dots \quad (3)$$

pero se conoce que: $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \dots \quad (4)$

al reemplazar (4) con (3) se obtiene: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

que es la representación de la serie de Taylor en un disco abierto de centro z_0 .

1.7 SERIE DE LAURENT.-

Si f es analítica en z_0 , entonces se puede desarrollar f en una serie de Taylor alrededor de z_0 contenido potencia en $z \rightarrow z_0$ ahora veremos el caso en que f no sea analítica en z_0 , si aún podríamos tratar de representar en una serie alrededor de z_0 .

Si incluimos potencias de $\frac{1}{z - z_0}$, esta es la idea detrás de la serie de Laurent.

Sea $\gamma_1: \|z - z_0\| > r$, $\gamma_2: \|z - z_0\| < R$, $r < R$

$D = \{z \in \mathbb{C} / r < \|z - z_0\| < R\}$, la región anular (Disco) acotado por γ_1 y γ_2

Sea $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica dentro y sobre la frontera de D , entonces

$$\forall z \in D \text{ se tiene: } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de la serie de Laurent y $a_n = \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}}$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw$$

En la serie de Laurent

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ es la parte analítica}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ es la parte principal

1.8 TEOREMA.-

Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo $\gamma_1 < \|z - z_0\| < \gamma_2$, entonces para z en este anillo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ donde $a_n = \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$ para $n = 0, +1, +2, \dots$, y γ es cualquier circunferencia $\|z - z_0\| = \rho$, con $r_1 < \rho < r_2$

Demostración

Sea z en el anillo, elegimos los números R_1 y R_2 , tal que $r_1 < R_1 < \|z - z_0\| < R_2 < r_2$, tal como en la figura:

Sea $\gamma_2 : \|z - z_0\| = R_2$, la circunferencia de radio R_2 y $\gamma_1 : \|z - z_0\| = R_1$, la circunferencia de radio R_1

Por la fórmula generalizada del teorema de Integral de Cauchy se puede escribir:

$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z}$ calculando ambas integrales en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

Consideremos las integrales de línea por separado para la integral $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z}$

escribiremos $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$, entonces se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} \right] (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

, donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}$; para $n = 0, +1, +2, \dots$

para la integral $\oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z}$, escribiremos en la forma

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}}, \text{ se observa que para } w \in \gamma_1, \text{ se tiene:}$$

$\left\| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right\| < 1$, luego por la serie geométrica se tiene:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n},$$

por lo tanto se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw \right] \frac{1}{(z-z_0)^n}$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(w)(w-z_0)^{n-1} dw$, para $n = 1, 2, 3, \dots$ ahora utilizamos el teorema de la deformación para reemplazar γ_1 y γ_2 con la circunferencia $\gamma_\rho : \|z - z_0\| = \rho$, esto nos sirve para expresar una fórmula para $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{-1}, a_{-2}, \dots$, en una sola fórmula

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)dw}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{(z-z_0)^n} \right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\therefore f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$