1 TEORÍA DE SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO.

1.1 SINGULARIDAD.-

Un punto z_0 es un punto singular o una singularidad deu na función F, si F es analítica en algún punto de toda variedad de z_0, excepto en z_0 mismo.
Existen Varios tipos de Singularidades.

1º **SINGULARIDAD AISLADA.-** El punto $z = z_0$ si $\exists\ \delta > 0$, tal que el círculo $\| z - z_0 \| = \delta$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 (es decir $\exists\ V_\delta(z_0)$ sin singularidad).
Si tal $\delta \nexists$, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.
Si z_0 no es un punto singular y si $\exists\ \delta > 0\ /\ \| z - z_0 \| = \delta$ no encierra puntos singulares, decimos que z_0 es un punto ordinario de $F(z)$.

2º **POLOS.-** Si podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n F(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado polo de orden n, si $n = 1$. z_0 es llamado un polo simple.
Ejemplo.- $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$, se tiene un polo de orden tres en $z = 2$.
Ejemplo.- $f(z) = \dfrac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$;tiene un polo de orden dos en $z = 1$ y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$
Si $y(z) = (z - z_0)^n F(z)$, de donde $F(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z = z_0$ es llamado un cero de orden n de $y(z)$.
Si $n = 1$, z_0 es llamado un cero simple, en tal caso z_0 es un polo de orden n de la función $\dfrac{1}{y(z)}$.

3º **LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN.-**
Ejemplos.-

(a) $f(z) = (z-3)^{\frac{1}{2}}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$

(b) $f(z) = ln(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir $z = 1$, $z = -2$.

4º **SINGULARIDADES REMOVIBLES.-** El punto singular z_0 es llamado una singularidad removible de $F(z)$ si $\lim_{z \to z_0 f(z)}$ existe.
Ejemplo.- El punto singular $z = 0$, es una singularidad removible de $f(z) = \dfrac{sen(z)}{z}$, puesto que $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{sen(z)}{z} = 1$.

5º **SINGULARIDADES ESENCIALES.-** Una singularidad que no sea polo, ni punto de ramificiación, ni singularidad removible es llamado una singularidad esencial.
Ejemplo.- $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, tiene una singularidad esencial en $z = 2$ se una función unívoca tiene una singularidad, entonces las singularidades es un polo o una singularidad esencial, por esta razón un polo es llamado algunas veces una singularidad evitable.

Equivalentemente $z = z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún positivo n tal que: $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

6º **SINGULARIDAD EN EL INFINITO.-** El tipo de singularidad de $f(z)$ en $z = \inf$ (el punto en el infinito) es el mismo como el de $f(\frac{1}{w})$ en $w = 0$.
Ejemplo.- La función $f(z) = z^3$ tiene como polo de tercer orden en $z = \inf$, ya que $f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ tiene un polo de tercer orden en $w = 0$.
Ejemplo.- Localizar y clasificar las singularidades

1) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$

Desarrollo

$f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$
$\lim_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z) = \lim_{z\to 2i}\dfrac{z}{(z+2i)^2} = \dfrac{1}{8i} \neq 0$, de donde $z = 2i$ es un polo de segundo orden, simultánmeamente.
$z = -2i$ es un polo de segundo orden.
Como se pueden encontrar $\delta > 0$ tal que ninguna singularidad distinta de $z = 2i$ está dentro del círculo.
$\| z-2i \| = \delta$ entonces $z = 2i$ es una singularidad aislada, simultáneamente para $z = -2i$ es una singularidad aislada.

2) $f(z) = \dfrac{ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$

Desarrollo

El punto $z = 2$ es un punto de ramificación y es una singularidad aislada, también $z^2+2z+2 = 0$ de donde se tiene $z = -1+-2i$ y se dice que $z = -1+-2i$ son polos de cuarto orden de los culaes son singularidades aisladas.

3) $f(z) = \dfrac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$

Desarrollo

Como $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\dfrac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = 1 \neq 0$, entonces $z = 0$ es una singularidad removible.

1.2 RESIDUOUS.-

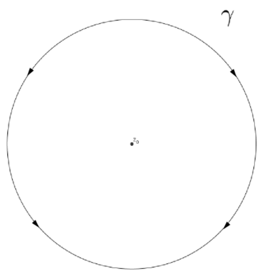
Se conoce por el desarrollo de la serie de Laurent de una función analítica $f(z)$ es una región anular $D = \{ z \epsilon C \; R_1 < \| z-z_0 \| < R_2 \}$ está dado por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n} \; ... \; (*)$$

Si la parte principial consiste de un número finito de términos es decir $b_n = 0$, para $n > m$ y $b_m \neq 0$ entonces la serie (*) toma la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b1}{z - z_0} + \frac{b2}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + 0 + 0...$$

en este caso $F(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$ y el coeficiente b_1 denotado por $a_{-1} = b_1$ recibe el nombre de residuo de F en z_0.
Si $F(z)$ tiene un polo simple $z = z_0$, entonces la serie es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b1}{z - z_0}$
$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... + a_n(z - z_0)^n + ... + \frac{b_1}{z - z_0}$
$(z - z_0) f(z) = a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + ... + a_n(z - z_0)^{n+1} + ... + b_1$ ahora tomamos el límite cuando $z \to z_0$
se tiene: $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1 = Re(f, z_0)$, b_1 recibe el nombre de $F(z)$ en $z = z_0$.
Luego si $F(z)$ tiene un polo en $z = z_0$ y z_0 est aen el interior de γ entonces $\oint_\gamma F(z) dz \neq 0$



En este caso $F(z)$ se puede expresar mediante la serie
$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, convergente $\forall\ z \epsilon C$ tal que
$0 <\| z - z_0 \|< R$ y $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{F(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$, $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma F(z) dz$
donde γ es una curva cerrada contenida e nel anillo $0 <\| z - z_0 \|< R$
Si $n = 1$, $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma F(z) dz$, de donde
$\oint_\gamma F(z) dz = 2\pi b_1 i$ donde b_1 es el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$ y b_1 es el residuo de $F(z)$ que denotaremos por $Re(F, z_0) = b_1$, por lo tanto

$$\oint_\gamma F(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i Re(F, z_0)$$

1.3 TEOREMA DEL RESIDUO.-

Si $f(z)$ es uan fracción analítica dentror y sobre la curva γ excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, z_3, ..., z_j, ..., z_m$ pertenecientes al interior de γ, entonces:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Re(f, z_j)$$

Demostración

Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada en γ, excepto en los puntos $z1, z3, ..., z_m$ dentro de γ
También sea $Cr_j(z_j)$ la circunferencia de centro z_j y de radio r_j suficientemente pequeño para que $Cr_j(z_j) \subset \gamma$, $\forall\, j$
$Cr_j(z_j) \cap Cr_k(z_k) = \phi$, $\forall k \neq j$ entonces
$\oint_{gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \oint Cr_j(z_j) f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} 2\pi i Re(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Re(f, z_j)$
$\therefore \oint_{\gamma} f(z)dz = 2\ pii \sum_{j=1}^{m} Re(f, z_j)$
OBSERVACIÓN.- Si z_0 es un polo de orden m, hay una fórmula relativamente simple para calcular $Re(f, z_0)$

1.4 TEOREMA.-

Si z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$ entonces:

$$Re(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

En el caso $m = 1$ y $0! = 1$, por lo tanto si f tiene un polo simple de z_0, entonces se tiene: $Re(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$

Demostración

Como z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$, entonces f tiene un desarrollo en serie de Laurent en el anillo $0 < \| z - z_0 \| < R$
$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ...(\alpha)$
con $a_{-m} \neq 0$, puesto que $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0
ahora lo que quieremos evaluar es a_{-1} que es el residuo de f en z_0 es decir:

$$Re(f, z_0) = a_{-1} \qquad ...(1)$$

a la ecuación (α) multiplicamos por $(z-z_0)^m$
$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + ...$
como la serie de la derecha es una serie de Taylor alrededor de z_0, entonces $(z-z_0)^m f(z)$ es analítica en z_0 ahora derivamos esta ecuación $m-1$ veces es decir:
$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] = a_{-1}(m-1)(m-2)...(1) + a_0 m(m-1)(m-2)...(2)(z-z_0) + ...$
tomando límite cuando $z \to z_0$ se tiene:
$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] = \lim_{z \to z_0} [a_{-1}(m-1)! + a_0 m!(z-z_0) + ...] =$
$a_{-1}(m-1)! + 0 + 0 + ... + 0$
de donde se obtiene: $a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \qquad ...(2)$
al reemplazar (2) en (1) se obtiene:
$Re(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$

1.5 COROLARIO.-

Sea $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, de donde g, h son analíticas en z_0, $g(z)\neq 0$ y h tiene un cero simple en z_0, entonces f tiene un polo simple de z_0 y $Re(f,z_0)=\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

<u>Demostración</u>

Como f tiene un polo simple de z_0 y h tiene un cero simple en z_0 , $h(z_0)=0$ y $h'(z_0)\neq 0$ entonces:

$$Re(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{h(z)}$$

$$\lim_{z\to z_0}g(z)\frac{z-z_0}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}g(z).\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}=g(z_0).\frac{1}{h'(z_0)}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$\therefore Re(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

1.6 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1)