1 SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

1.1 Series de Potencias

Una serie de potencias en el plano complejo es de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \tag{1}$$

donde c_n son constantes reales y complejos llamados coeficientes "z_0" es constante y se llama *centro de la serie*,"z" es la variable compleja.
Si $z_0 = 0$, la serie (1) se reduce a la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots +$, serie de potencias z.
OBSERVACIÓN.-

- Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente, $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z-z_0 \| < R$ y es divergente, $\forall \epsilon C$, tal que $\| z-z_0 \| > R$
- Si $\exists R > 0$, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente en $\| z-z_0 \| < R$ y si $0 < \rho < R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge uniformente en $\| z-z_0 \| < \rho$
- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente $\forall z \epsilon C$ (en particular en $z = z_0$) tal que $\| z-z_0 \| < R$ y si $0 < \rho < R$, entonces la serie converge uniformentente, $\forall z \epsilon C$ tal que $0 < \| z-z_0 \| < \rho$
- Al número $R > 0$ se llama radio de convergencia de las serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
- Para $z \epsilon C$, se tiene $\| z-z_0 \| < R$, que se denomina región de convergencia.
- Para hallar el radio y región de convergencia de una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, se utiliza el criterio de la razón, que esta caracterizada por el siguiente teorema

1.2 TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN).-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia en C y sea $u_n = c_n(z-z_0)^n$, tal que $\lim_{n\to\infty} \| \frac{u_{n+1}}{u_n} \| = L$, entonces:

i) Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ diverge.

iii) Si $L = 1$, el criterio no decide.

OBSERVACIONES

- Sea $\sum_{n=0}^{\infty}$ una serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| c_n \|} = L$, entonces:
  i) Si $L = 0$, entonces $(R = \infty)$; la serie es convergente en todo el plano complejo C
  ii) Si $L > 0$, entonces $R = \frac{1}{L}$
  iii) Si $L = \infty$, entonces $(R = 0)$ converge solamente en el origen.
- Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ uan serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty} \| \frac{c_{n+1}}{c_n} \| = L$, entonces:
  i) Si $L = 0$, entonces $(R = \infty)$
  ii) Si $L > 0$, entonces $R = \frac{1}{L}$
  iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$

1.3 FUNCIONES REPRESENTADAS MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS.-

La serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, con radio de convergencia $R > 0$, define una función de z, es decir: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, donde $D_f = z\epsilon C / \| z - z_0 \| < R$ es decir que el dominio de $f(z)$ es la región de convergencia de la serie, por ejemplo consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ...$ convergente, $\forall z\epsilon C$ tal que $\| z \| < R$

Donde $R = \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{1} \| = 1$ es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es convergente $\forall z\epsilon C$ tal que $\| z \| < 1$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ define la función $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

OBSERVACIÓN.- Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, entonces se dice que $f(z)$ es representada mediante la serie de potencia o se dice que $f(z)$ esta desarrolado mediante una serie de potencia.

1.4 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES.-

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z\epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$, $R > 0$ entonces: $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$, convergente $\forall z\epsilon C$, tal que $\| z - z_0 \| < R'$ donde $R = lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \|$, entonces se tiene:

$R' = \lim_{n\to\infty} \| \frac{n c_n}{(n+1)c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} . \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = 1. \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = R$

por lo tanto $R = R'$

$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2}$, converge $\forall z\epsilon C$, tal que $\| z - z_0 \| < R''$, de donde:

$R'' = \lim_{n\to\infty} \| \frac{n(n-1)c_n}{n(n+1)c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n(n+1)} . \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = 1. \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = \lim_{n\to\infty} \| \frac{c_n}{c_{n+1}} \| = R$

por lo tanto $R = R''$
Las series obtenidas, derivando de la serie de potencia original tien el mismo radio de convergencia que la serie original.
Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$
$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{z_0}^{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z} (z-z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$, es convergente $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$

1.5 SERIE DE TAYLOR Y DE MACLAURIN COMPLEJA.-

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia convergente $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z - z_0 \| < R$, calculando sus derivadas y evaluando en $z = z_0$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow f(z_0) = c_0$ de donde $c_0 = f(z_0)$
$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} \Rightarrow f'(z_0) = c_1$ de donde $c_1 = f'(z_0)$
$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2} \Rightarrow f''(z_0) = 1.2.c_2$ de donde $c_2 = \frac{f''(z_0)}{2!}$
$f'''(z) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n(z-z_0)^{n-3} \Rightarrow f'''(z_0) = 1.2.3.c_3 = 3!c_3$ de donde $c_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!}$
.
.
.
$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)(n-2)...2.1.c_n(z-z_0)^{n-m} = \sum_{n=m}^{\infty} n!c_n(z-z_0)^{n-m}$ entonces $f^(n)(z_0) = n!c_n$ de donde $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, desarrollando
$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ... + c_n(z-z_0)^n + ...$
$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + ...$

$\therefore$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!} \qquad (2)$$

es la serie de Taylor alrededor de $z = z_0$
cuando $z_0 = 0$, se tiene la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)z^n}{n!} \qquad (3)$$

que se denomina serie de MACLAURIN

1.6 TEOREMA.-