1 TEORÍA DE SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO.

1.1 SINGULARIDAD.-

Un punto z_0 es un punto singular o una singularidad deu na función F, si F es analítica en algún punto de toda variedad de z_0, excepto en z_0 mismo.
Existen Varios tipos de Singularidades.

1º **SINGULARIDAD AISLADA.-** El punto $z = z_0$ si $\exists\ \delta > 0$, tal que el círculo $\| z - z_0 \| = \delta$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 (es decir $\exists\ V_\delta(z_0)$ sin singularidad).
Si tal $\delta \nexists$, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.
Si z_0 no es un punto singular y si $\exists\ \delta > 0\ /\ \| z - z_0 \| = \delta$ no encierra puntos singulares, decimos que z_0 es un punto ordinario de $F(z)$.

2º **POLOS.-** Si podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^n$ $F(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado polo de orden n, si $n = 1$. z_0 es llamado un polo simple.
Ejemplo.- $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$, se tiene un polo de orden tres en $z = 2$.
Ejemplo.- $f(z) = \dfrac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$;tiene un polo de orden dos en $z = 1$ y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$
Si $y(z) = (z - z_0)^n F(z)$, de donde $F(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z = z_0$ es llamado un cero de orden n de $y(z)$.
Si $n = 1$, z_0 es llamado un cero simple, en tal caso z_0 es un polo de orden n de la función $\dfrac{1}{y(z)}$.

3º **LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN.-**
Ejemplos.-

(a) $f(z) = (z-3)^{\frac{1}{2}}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$

(b) $f(z) = ln(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir $z = 1$, $z = -2$.

4º **SINGULARIDADES REMOVIBLES.-** El punto singular z_0 es llamado una singularidad removible de $F(z)$ si $\lim_{z\to z_0 f(z)}$ existe.
Ejemplo.- El punto singular $z = 0$, es una singularidad removible de $f(z) = \dfrac{sen(z)}{z}$, puesto que $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{sen(z)}{z} = 1$.

5º **SINGULARIDADES ESENCIALES.-** Una singularidad que no sea polo, ni punto de ramificiación, ni singularidad removible es llamado una singularidad esencial.

Ejemplo.- $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, tiene una singularidad esencial en $z = 2$ se una función unívoca tiene una singularidad, entonces las singularidades es un polo o una singularidad esencial, por esta razón un polo es llamado algunas veces una singularidad evitable.

Equivalentemente $z = z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún positivo n tal que: $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

6º **SINGULARIDAD EN EL INFINITO.-** El tipo de singularidad de $f(z)$ en $z = \text{inf}$ (el punto en el infinito) es el mismo como el de $f(\dfrac{1}{w})$ en $w = 0$.

Ejemplo.- La función $f(z) = z^3$ tiene como polo de tercer orden en $z = \text{inf}$, ya que $f(\dfrac{1}{w}) = \dfrac{1}{w^3}$ tiene un polo de tercer orden en $w = 0$.

Ejemplo.- Localizar y clasificar las singularidades

1) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$

Desarrollo

$f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$

$\lim\limits_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{z}{(z+2i)^2} = \dfrac{1}{8i} \neq 0$, de donde $z = 2i$ es un polo de segundo orden, simultánmeamente.

$z = -2i$ es un polo de segundo orden.

Como se pueden encontrar $\delta > 0$ tal que ninguna singularidad distinta de $z = 2i$ está dentro del círculo.

$\| z - 2i \| = \delta$ entonces $z = 2i$ es una singularidad aislada, simultáneamente para $z = -2i$ es una singularidad aislada.

2) $f(z) = \dfrac{ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$

Desarrollo

El punto $z = 2$ es un punto de ramificación y es una singularidad aislada, también $z^2+2z+2 = 0$ de donde se tiene $z = -1 + -2i$ y se dice que $z = -1 + -2i$ son polos de cuarto orden de los culaes son singularidades aisladas.

3) $f(z) = \dfrac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$

Desarrollo

Como $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = 1 \neq 0$, entonces $z = 0$ es una singularidad removible.