UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS ESPE
EXTENSIÓN LATACUNGA

MATEMÁTICA SUPERIOR

1) Resuelva la siguiente EDP

$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{4du}{dy}$

$u = xy$

$u_{xx} = x^{"}y \qquad u_y = xy^{'}$

$entonces$

$x^{"}y = 4xy^{'}$

$\frac{x^{"}}{x} = \frac{4y^{'}}{y} = -\lambda$

$cuando \quad \lambda = 0.$

$x^{"} = 0 \qquad 4y^{'} = 0$

$D^2 = 0 \qquad 4D = 0$

$x = c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} \qquad y = c_3e^{0x} = c_3$

$x = c_1 + c_2x$

$u = xy = [c_1 + c_2x] * c_1 = c_4 + c_5x$

$cuando \quad \lambda = \alpha^2$

$x^{''} + \alpha^2x = 0 \qquad 4y^{'} + \alpha^2y = 0$

$D^2 + \alpha^2 = 0 \qquad 4D + \alpha^2 = 0$

$D^2 = \pm j\alpha \qquad D = -\frac{\alpha^2}{4}$

$x = e^{0x}[c_1cos\alpha x + c_2sen\alpha x]$

$x = c_1cos\alpha x + c_2sen\alpha x$

$y = c_3e^{-\frac{\alpha^2}{4}x}$

$u = xy = [c_1cos\alpha x + c_2sen\alpha x] * c_3e^{-\frac{\alpha^2}{4}x}$

$cuando \quad \lambda = -\alpha^2$

$x^{''} - \alpha^2x = 0 \qquad 4y^{'} - \alpha^2y = 0$

$D^2 - \alpha^2 = 0 \qquad 4D - \alpha^2 = 0$

$D = \pm\alpha \qquad D = \frac{\alpha^2}{4}$

$x = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}$

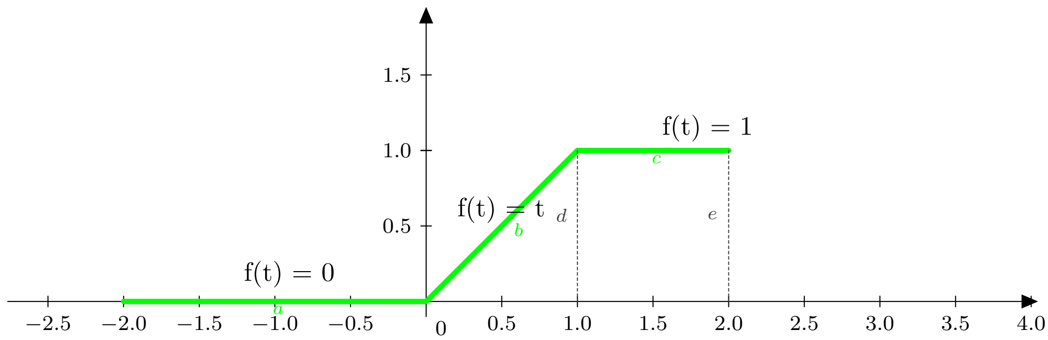
$x = c_1cos\alpha x + c_2sen\alpha x$

$y = c_3e^{\frac{\alpha^2}{4}x}$

$u = xy = [c_1cos\alpha x + c_2sen\alpha x] * c_3e^{\frac{\alpha^2}{4}x}$

2) Halle la Serie de Fourier, la Transformada de Fourier, la transformada Inversa de Fourier y el Espectro de Frecuencias de la Función dada:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -2 < t < 0 \\ t & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$



Resolución

Serie de Fourier

Término a_0

$T = 4$ y $\delta = -2$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{\delta}^{\delta+T} f(t)dt = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)dt = \frac{1}{2}(0 + \int_0^1 tdt + \int_1^2 1dt)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}(0 + \frac{t^2}{2} \mid_0^1 + t \mid_1^2) = \frac{1}{2}(\frac{1^2 - 0}{2} + 2 - 1) = \frac{3}{4}$$

Término a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\delta}^{\delta+T} f(t)cos(n\omega t)dt = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)cos(n\omega t)dt = \frac{1}{2}(0 + \int_0^1 tcos(n\omega t)dt + \int_1^2 cos(n\omega t)dt)$$

$$a_n = \frac{1}{2}[\frac{sen(n\omega t)t}{n\omega} - \int_0^1 \frac{sen(n\omega t)}{n\omega}dt + \mid_0^1 \frac{sen(n\omega)t}{n\omega} \mid_1^2]$$

$$a_n = \frac{1}{2}[(\frac{sen(n\omega t)}{n\omega} - \frac{cos(n\omega t)}{(n\omega)^2}) \mid_0^1 + \frac{sen(n\omega t)t}{n\omega} \mid_1^2]$$

$$a_n = \frac{1}{2}[\frac{2sen(n\omega) - 0}{n\omega} - \frac{cos(n\omega) - cos(0)}{(n\omega)^2} + \frac{sen(2n\omega) - sen(n\omega)}{n\omega}]$$

$$a_n = \frac{1}{2}[\frac{sen(2n\omega)}{n\omega} - \frac{cos(n\omega) - 1}{(n\omega)^2}]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}[\frac{sen(n\pi)}{n\omega} - \frac{cos(n\frac{\pi}{2}) - 1}{(n\omega)^2}]$$

$$sen(n\pi) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2}[\frac{1 - cos(n\omega)}{(n\omega)^2}]$$

Término b_0

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\delta}^{\delta+T} f(t)sen(n\omega t)dt = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)sen(n\omega t)dt = \frac{1}{2}(+\int_0^1 tsen(n\omega t)dt + \int_1^2 sen(n\omega t)dt)$$

$$b_n = \frac{1}{2}[(\frac{-cos(n\omega t)t}{n\omega} + \int_0^1 \frac{cos(n\omega t)}{n\omega}dt) \mid_0^1 - \frac{cos(n\omega t)}{n\omega} \mid_1^2]$$

$$b_n = \frac{1}{2}[(\frac{-cos(n\omega t)t}{n\omega} + \frac{sen(n\omega t)}{(n\omega)^2}) |_0^1 - \frac{cos(n\omega t)}{n\omega} |_1^2]$$
$$b_n = \frac{1}{2}[(-\frac{cos(n\omega) - 0cos(0)}{n\omega} + \frac{sen(n\omega) - sen(0)}{(n\omega)^2}) - \frac{cos(2n\omega) - cos(n\omega)}{n\omega}]$$
$$b_n = \frac{1}{2}[\frac{sen(n\omega)}{(n\omega)^2} - \frac{cos(2n\omega)}{n\omega}]$$
$$b_n = \frac{1}{2}[\frac{sen(n\omega)}{(n\omega)^2} - \frac{(-1)^n}{n\omega}]$$

Serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nt) + b_n sen(nt))$$
$$f(t) = \frac{3}{8}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((\frac{1 - cos(n\omega)}{(n\omega)^2})cos(nt) + (\frac{sen(n\omega)}{(n\omega)^2} - \frac{(-1)^n}{n\omega})sen(nt))$$

Transformada de Fourier

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$F(j\omega) = \int_{-2}^{2} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$F(j\omega) = 0 + \int_{0}^{1} te^{-j\omega t}dt + \int_{1}^{2} e^{-j\omega t}dt$$
$$F(j\omega) = (-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2}) |_0^1 - \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} |_1^2$$
$$F(j\omega) = (-\frac{e^{-j\omega} - 0}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega} - 1}{(j\omega)^2}) - \frac{e^{-2j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega}$$
$$F(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} - \frac{e^{-2j\omega}}{j\omega}$$

Espectro de Frecuencias

3) Defina: -Defina una funcion ortonormal
la expresion $(u, u) = \parallel u \parallel^2$ se llama norma cuadrada.Por tanto podemos definir la norma cuadrada de una funcion como:
$\parallel \phi_n(x) \parallel^2 = \int_a^b \phi_n^2 dx, \qquad \parallel \phi_n(x) \parallel = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2 dx},$
Si$\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal en [a,b] con la propiedad de que $\parallel \phi_n(x) \parallel =$ 1,para todo n,entonces se llama conjunto ortonormal en [a,b]

-Dedusca los coeficientes de la S.F en terminos de seno de 1/2 recorrido.

Se tiene la forma general de la serie de Fourier:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos\frac{n\pi}{p}x + a_n sen\frac{n\pi}{p}x)$

Si multiplicamos la ecuacion 1 por .. e integramos y usamos los resultados
.

$$\int_{-p}^{p} f(x)a_n sen\frac{m\pi}{p}xdx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} sen\frac{m\pi}{p}xdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-p}^{p} a_n cos\frac{n\pi}{p}x * sen\frac{m\pi}{p}xdx$$
$$+b_n\int_{-p}^{p} sen\frac{m\pi}{p}x * sen\frac{m\pi}{p}xdx)$$

Mediante ortogonalidad tenemos:

$\int_{-p}^{p} sen\frac{m\pi}{p}xdx = 0 \qquad , m > 0, \int_{-p}^{p} sen\frac{m\pi}{p}x * sen\frac{n\pi}{p}xdx = 0$

$\int_{-p}^{p} sen\frac{m\pi}{p}x * sen\frac{n\pi}{p}xdx = \begin{cases} 0; m\neq n \\ p; m=n \end{cases}$

$encontramos \quad que \quad :$
$b_n = \int_{-p}^{p} f(x) * sen\frac{n\pi}{p}xdx$

4) Defina y explique que es una Serie de Bessel Es un caso particular de la series Generalizadas de Fourier, basado en la Función de Bessel que es la función:
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0$
Estas series son usadas en la solución de las ecuaciones diferenciales parciales particularmente en los sistemas de coordendas cilíndricas.

La serie de Fourier-Bessel de una función f definida en el intervalo (0,b) está dada por:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x)$$
$$c_i = \frac{2}{b^2 J_{n+1}^2(\alpha_i b)}\int_0^b xJ_n(\alpha_i x)f(x)$$

donde los α_i están definidos por $J_n(\alpha b) = 0$