1 TEORÍA DE SINGULARIDADES Y DEL RESIDUO.

1.1 SINGULARIDAD.-

Un punto z_0 es un punto singular o una singularidad deu na función F, si F es analítica en algún punto de toda variedad de z_0, excepto en z_0 mismo.
Existen Varios tipos de Singularidades.

1º **SINGULARIDAD AISLADA.-** El punto $z = z_0$ si $\exists\ \delta > 0$, tal que el círculo $\| z - z_0 \| = \delta$ no encierra puntos singulares distintos de z_0 (es decir $\exists\ V_\delta(z_0)$ sin singularidad).
Si tal $\delta \nexists$, decimos que z_0 es una singularidad no aislada.
Si z_0 no es un punto singular y si $\exists\ \delta > 0\ /\ \| z - z_0 \| = \delta$ no encierra puntos singulares, decimos que z_0 es un punto ordinario de $F(z)$.

2º **POLOS.-** Si podemos encontrar un entero positivo n tal que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n F(z) = A \neq 0$, entonces $z = z_0$ es llamado polo de orden n, si $n = 1$. z_0 es llamado un polo simple.
Ejemplo.- $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$, se tiene un polo de orden tres en $z = 2$.
Ejemplo.- $f(z) = \dfrac{3z-2}{(z-1)^2(z+1)(z-4)}$;tiene un polo de orden dos en $z = 1$ y polos simples en $z = -1$ y $z = 4$
Si $y(z) = (z - z_0)^n F(z)$, de donde $F(z_0) \neq 0$ y n es un entero positivo, entonces $z = z_0$ es llamado un cero de orden n de $y(z)$.
Si $n = 1$, z_0 es llamado un cero simple, en tal caso z_0 es un polo de orden n de la función $\dfrac{1}{y(z)}$.

3º **LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN.-**
Ejemplos.-

(a) $f(z) = (z-3)^{\frac{1}{2}}$ tiene un punto de ramificación en $z = 3$

(b) $f(z) = ln(z^2 + z - 2)$ tiene puntos de ramificación donde $z^2 + z - 2 = 0$, es decir $z = 1$, $z = -2$.

4º **SINGULARIDADES REMOVIBLES.-** El punto singular z_0 es llamado una singularidad removible de $F(z)$ si $\lim_{z \to z_0 f(z)}$ existe.
Ejemplo.- El punto singular $z = 0$, es una singularidad removible de $f(z) = \dfrac{sen(z)}{z}$, puesto que $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{sen(z)}{z} = 1$.

5º **SINGULARIDADES ESENCIALES.-** Una singularidad que no sea polo, ni punto de ramificiación, ni singularidad removible es llamado una singularidad esencial.
Ejemplo.- $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, tiene una singularidad esencial en $z = 2$ se una función unívoca tiene una singularidad, entonces las singularidades es un polo o una singularidad esencial, por esta razón un polo es llamado algunas veces una singularidad evitable.

Equivalentemente $z = z_0$ es una singularidad esencial si no podemos encontrar algún positivo n tal que: $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$.

6º **SINGULARIDAD EN EL INFINITO.-** El tipo de singularidad de $f(z)$ en $z = \inf$ (el punto en el infinito) es el mismo como el de $f(\frac{1}{w})$ en $w = 0$.
Ejemplo.- La función $f(z) = z^3$ tiene como polo de tercer orden en $z = \inf$, ya que $f(\frac{1}{w}) = \frac{1}{w^3}$ tiene un polo de tercer orden en $w = 0$.
Ejemplo.- Localizar y clasificar las singularidades

1) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$

Desarrollo

$f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$
$\lim_{z \to 2i} (z-2i)^2 f(z) = \lim_{z \to 2i} \dfrac{z}{(z+2i)^2} = \dfrac{1}{8i} \neq 0$, de donde $z = 2i$ es un polo de segundo orden, simultánmeamente.
$z = -2i$ es un polo de segundo orden.
Como se pueden encontrar $\delta > 0$ tal que ninguna singularidad distinta de $z = 2i$ está dentro del círculo.
$\| z - 2i \| = \delta$ entonces $z = 2i$ es una singularidad aislada, simultáneamente para $z = -2i$ es una singularidad aislada.

2) $f(z) = \dfrac{ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$

Desarrollo

El punto $z = 2$ es un punto de ramificación y es una singularidad aislada, también $z^2 + 2z + 2 = 0$ de donde se tiene $z = -1 + -2i$ y se dice que $z = -1 + -2i$ son polos de cuarto orden de los culaes son singularidades aisladas.

3) $f(z) = \dfrac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$

Desarrollo

Como $\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \dfrac{sen(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = 1 \neq 0$, entonces $z = 0$ es una singularidad removible.

1.2 RESIDUOUS.-

Se conoce por el desarrollo de la serie de Laurent de una función analítica $f(z)$ es una región anular $D = \{ z \epsilon C \; R_1 < \| z - z_0 \| < R_2 \}$ está dado por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \dots (*)$$

Si la parte principal consiste de un número finito de términos es decir $b_n = 0$, para $n > m$ y $b_m \neq 0$ entonces la serie (*) toma la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b1}{z - z_0} + \frac{b2}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + 0 + 0...$$

en este caso $F(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$ y el coeficiente b_1 denotado por $a_{-1} = b_1$ recibe el nombre de residuo de F en z_0.

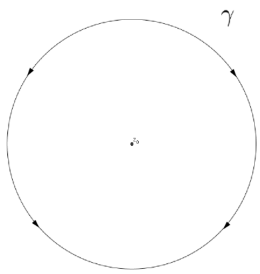
Si $F(z)$ tiene un polo simple $z = z_0$, entonces la serie es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b1}{z - z_0}$

$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ... + a_n(z - z_0)^n + ... + \frac{b_1}{z - z_0}$

$(z - z_0) f(z) = a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + ... + a_n(z - z_0)^{n+1} + ... + b_1$ ahora tomamos el límite cuando $z \to z_0$

se tiene: $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1 = Re(f, z_0)$, b_1 recibe el nombre de $F(z)$ en $z = z_0$.

Luego si $F(z)$ tiene un polo en $z = z_0$ y z_0 est aen el interior de γ entonces $\oint_\gamma F(z) dz \neq 0$



En este caso $F(z)$ se puede expresar mediante la serie

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, convergente $\forall\ z \epsilon C$ tal que

$0 <\| z - z_0 \|< R$ y $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{F(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$, $b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma F(z) dz$

donde γ es una curva cerrada contenida e nel anillo $0 <\| z - z_0 \|< R$

Si $n = 1$, $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma F(z) dz$, de donde

$\oint_\gamma F(z) dz = 2\pi b_1 i$ donde b_1 es el coeficiente de $\frac{1}{z - z_0}$ y b_1 es el residuo de $F(z)$ que denotaremos por $Re(F, z_0) = b_1$, por lo tanto

$$\oint_\gamma F(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i Re(F, z_0)$$

1.3 TEOREMA DEL RESIDUO.-

Si $f(z)$ es uan fracción analítica dentror y sobre la curva γ excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, z_3, ..., z_j, ..., z_m$ pertenecientes al interior de γ, entonces:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Re(f, z_j)$$

Demostración

Sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada en γ, excepto en los puntos $z1, z3, ..., z_m$ dentro de γ
También sea $Cr_j(z_j)$ la circunferencia de centro z_j y de radio r_j suficientemente pequeño para que $Cr_j(z_j) \subset \gamma$, $\forall\, j$
$Cr_j(z_j) \cap Cr_k(z_k) = \phi$, $\forall k \neq j$ entonces
$\oint_{gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \oint Cr_j(z_j) f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} 2\pi i Re(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Re(f, z_j)$
$\therefore \oint_{\gamma} f(z)dz = 2\, pii \sum_{j=1}^{m} Re(f, z_j)$
OBSERVACIÓN.- Si z_0 es un polo de orden m, hay una fórmula relativamente simple para calcular $Re(f, z_0)$

1.4 TEOREMA.-

Si z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$ entonces:

$$Re(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

En el caso $m = 1$ y $0! = 1$, por lo tanto si f tiene un polo simple de z_0, entonces se tiene: $Re(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

Demostración

Como z_0 es un polo de orden m de la función $f(z)$, entonces f tiene un desarrollo en serie de Laurent en el anillo $0 <\| z - z_0 \|< R$
$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...(\alpha)$
con $a_{-m} \neq 0$, puesto que $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0
ahora lo que quieremos evaluar es a_{-1} que es el residuo de f en z_0 es decir:

$$Re(f, z_0) = a_{-1} \qquad ...(1)$$

a la ecuación (α) multiplicamos por $(z - z_0)^m$
$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + ...$
como la serie de la derecha es una serie de Taylor alrededor de z_0, entonces $(z - z_0)^m f(z)$ es analítica en z_0 ahora derivamos esta ecuación $m - 1$ veces es decir:
$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = a_{-1}(m-1)(m-2)...(1) + a_0 m(m-1)(m-2)...(2)(z - z_0) + ...$
tomando límite cuando $z \to z_0$ se tiene:
$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = \lim_{z \to z_0} [a_{-1}(m-1)! + a_0 m!(z - z_0) + ...]$ $=$
$a_{-1}(m-1)! + 0 + 0 + ... + 0$
de donde se obtiene: $a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$ ...(2)
al reemplazar (2) en (1) se obtiene:
$Re(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$

1.5 COROLARIO.-

Sea $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$, de donde g, h son analíticas en z_0, $g(z)\neq 0$ y h tiene un cero simple en z_0, entonces f tiene un polo simple de z_0 y $Re(f,z_0)=\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Demostración

Como f tiene un polo simple de z_0 y h tiene un cero simple en z_0 , $h(z_0)=0$ y $h'(z_0)\neq 0$ entonces:

$$Re(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{h(z)}$$

$$\lim_{z\to z_0}g(z)\frac{z-z_0}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}g(z).\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}=g(z_0).\frac{1}{h'(z_0)}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

$$\therefore Re(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

1.6 EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

1) Hallar las singularidades de la función $f(z)=\dfrac{(z+3)^2(z-i)z}{[z^2+(3-i)z-3i]^2z^2}$

Demostración

$f(z)=\dfrac{(z+3)^2(z-i)z}{[z^2+(3-i)z-3i]^2z^2}$, es analítica excepto en $z=-3$, i , 0 puesto que sería ∞, por el denominador

$$f(z)=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2+(3-i)z-3i)^2z^2}=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z^2+3z-iz-3i)^2z^2}=\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z-3)^2(z-i)^2z^2}$$

$$\lim_{z\to -3}f(z)=\lim_{z\to -3}\frac{(z+3)^2(z-i)z}{(z-3)^2(z-i)^2z^2}=\lim_{z\to -3}\frac{1}{(z-i)z}=\frac{1}{(-3-i)(-3)}$$

$$=\frac{1}{3(3+i)}=\frac{3-i}{3(9+1)}=\frac{1}{10}-\frac{i}{30}$$

exuste por lo tanto $f(z)$ tiene una singularidad en $z=-3$

$\lim\limits_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{i}=-i$, es decir que $f(z)$ tiene un polo simple de $z=i$

$$\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+3)^2(z-i)z}{(z+3)^2(z-i)^2z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-i}=i$$

por lo tanto $f(z)$ tiene un polo simple en $z=0$

2) Calcular la integral $\oint_\gamma ctgzdz$. donde $\gamma:\| z\|=4$

Desarrollo

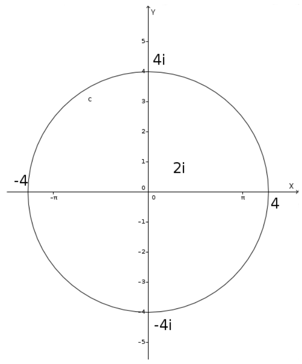
$f(z)=ctgz=\dfrac{cosz}{senz}$, los polos de $f(z)$ se encuentra en

$$senz=0\Rightarrow\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0\Rightarrow e^{iz}-e^{-iz}=0\Rightarrow e^{2iz}=1$$

de donde $z=k\pi$, $k=0,+-1,+-2,\ldots$

Luego $f(z)$ tiene 3 polos simples $0,\pi,-\pi$ que están en el interior de γ entonces:

como $f(z)=ctgz=\dfrac{cosz}{senz}=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ donde $q'(z)=cosz$



$Re(f,0) = \dfrac{p(0)}{q'(0)} = \dfrac{cos0}{cos0} = 1$

$Re(f,\pi) = \dfrac{p(\pi)}{q'(\pi)} = \dfrac{cos\pi}{cos\pi} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

$Re(f,-\pi) = \dfrac{p(-\pi)}{q'(-\pi)} = \dfrac{cos(-\pi)}{cos(-\pi)} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

$\oint_\gamma ctgzdz = 2\pi i[1+1+1] = 6\pi i$

3) Calcular $f(z) = \dfrac{e^{4z}}{(z^2+1)(z^2+9)}$, tiene polos simples de $z = +-i$; $z = +-3i$ de los cuáles solamente $z = +-i$ están en el interior de γ, entonces:

$\oint_\gamma \dfrac{e^{4z}dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i[Re(f,i)+Re(f,-i)]$, donde

$Re(f,i) = \lim\limits_{z\to i}(z-i)\dfrac{e^{4z}}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} = \lim\limits_{z\to i}\dfrac{e^{4z}}{(z+i)(z^2+9)} = \dfrac{e^{4i}}{2i(-1+9)} = \dfrac{e^{4i}}{16i}$

$Re(f,-i) = \lim\limits_{z\to -i}(z+i)\dfrac{e^{4z}}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} = \lim\limits_{z\to -i}\dfrac{e^{4z}}{(z-i)(z^2+9)} = \dfrac{e^{-4i}}{-2i(-1+9)} = -\dfrac{e^{-4i}}{16i}$

$\oint_\gamma \dfrac{e^{4z}dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i[\dfrac{e^{4i}}{16i} - \dfrac{e^{-4i}}{16i}] = \dfrac{\pi}{8}(e^{4i}-e^{-4i}) = \dfrac{\pi i}{4}(\dfrac{e^{4i}-e^{-4i}}{2i}) = \dfrac{\pi i}{4}sen4$

4) **Calcular la integral** $\oint_\gamma z^8 e^{\frac{1}{z}} dz$ **, de donde** $\gamma = \{z \epsilon C \,/\, \| z \| = \frac{1}{2}\}$

<u>**Desarrollo**</u>

$e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!z^n} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!.z^2} + \dfrac{1}{3!.z^3} + \ldots + \dfrac{1}{n!.z^n} + \ldots$

$z^8 e^{\frac{1}{z}} = z^8 + z^7 + \dfrac{z^6}{2!} + \dfrac{z^5}{3!} + + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^3}{5!} + \dfrac{z^2}{6!} + \dfrac{z}{7!} + + \dfrac{1}{8!} + \dfrac{1}{9!.z} + \ldots$

Luego $Re(f,0) =$ Coeficiente de $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{9!}$, entonces:

$\oint_\gamma z^8 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i Re(f,0) = 2\pi i(\dfrac{1}{9!}) = \dfrac{\pi i}{177840}$