1 SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

1.1 Series de Potencias

Una serie de potencias en el plano complejo es de la forma siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ... + c_n(z-z_0)^n + ... \tag{1}$$

donde c_n son constantes reales y complejos llamados coeficientes "z_0" es constante y se llama *centro de la serie*,"z" es la variable compleja.
Si $z_0 = 0$, la serie (1) se reduce a la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ...+$, serie de potencias z.
OBSERVACIÓN.-

- Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ es absolutamente convergente, $\forall z \epsilon C$ tal que $\| z-z_0 \| < R$ y es divergente, $\forall \epsilon C$, tal que $\| z-z_0 \| > R$
- Si $\exists R > 0$, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente en $\| z-z_0 \| < R$ y si $0 < \rho < R$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge uniformente en $\| z-z_0 \| < \rho$
- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente $\forall z \epsilon C$ (en particular en $z = z_0$) tal que $\| z-z_0 \| < R$ y si $0 < \rho < R$, entonces la serie converge uniformentente, $\forall z \epsilon C$ tal que $0 < \| z-z_0 \| < \rho$
- Al número $R > 0$ se llama radio de convergencia de las serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
- Para $z \epsilon C$, se tiene $\| z-z_0 \| < R$, que se denomina región de convergencia.
- Para hallar el radio y región de convergencia de una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, se utiliza el criterio de la razón, que esta caracterizada por el siguiente teorema

1.2 TEOREMA (CRITERIO DE LA RAZÓN).-

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ una serie de potencia en C y sea $u_n = c_n(z-z_0)^n$, tal que $\lim_{n\to\infty} \| \frac{u_{n+1}}{u_n} \| = L$, entonces:

i) Si $L < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ diverge.

iii) Si $L = 1$, el criterio no decide.

OBSERVACIONES

- Sea $\sum_{n=0}^{\infty}$ una serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| c_n \|} = L$, entonces:

  i) Si $L = 0$, entonces ($R = \infty$); la serie es convergente en todo el plano complejo C

  ii) Si $L > 0$, entonces $R = \dfrac{1}{L}$

  iii) Si $L = \infty$, entonces ($R = 0$) converge solamente en el origen.

- Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ uan serie de potencia tal que: $\lim_{n\to\infty} \| \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \| = L$, entonces:

  i) Si $L = 0$, entonces ($R = \infty$)

  ii) Si $L > 0$, entonces $R = \dfrac{1}{L}$

  iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$