Capítulo 1

Variable Compleja

1.1. Variable compleja

Los números complejos se dice z que se puede definir como pares ordenados

$$z = \langle x, y\rangle$$

de números reales x e y con las operaciones de suma y producto. Se suele identificar los pares $\langle x, 0\rangle$ con los números reales x. El conjunto de los números contiene a los números reales como subconjunto.
Los números complejos de la forma $\langle 0, y\rangle$ se llama números imaginarios puros. Los números reales x e y en la expresión se conocen respectivamente, como parte real y parte imaginaria de z.

$$Re\langle z\rangle = x \qquad Im\langle z\rangle = y$$

Dos números complejos $\langle x_1, y_1\rangle$ y $\langle x_2, y_2\rangle$ se dicen iguales si tienen iguales la parte real e imaginarios. Es decir

$$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$$

si y solo si

$$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

La suma $z_1 + z_2$ y el producto $z_1 z_2$ de dos números complejos $z_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ y $z_2 = \langle x_2, y_2\rangle$ se definen por las ecuaciones

$$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$$

$$\langle x_1, y_1\rangle\langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 - x_1y_2\rangle$$

En particular $\langle x, 0\rangle + \langle 0, y\rangle = \langle x, y\rangle$ y $\langle 0, y\rangle\langle y, 0\rangle = \langle 0, y\rangle$ luego

$$\langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle 0, 1\rangle\langle y, 0\rangle$$

El sistema de los números complejos es un consecuencia una extensión natural de los números reales.
Pensando en un número real como x o como $\langle x, 0\rangle$ y denotamos por i al numero imaginario puro $\langle 0, 1\rangle$ podemos ver

$$\langle x, y\rangle = x + yi$$

Asimismo con el convenio $z^2 = zz, z^3 = zz^2 etc...$ Hallamos

$$t^2 = \langle 0,1\rangle\langle 0,1\rangle = \langle -1,0\rangle$$

Es decir

$$t^2 = -1$$

Se puede divisar la expresión

$$\langle x_1 + y_1 i\rangle + \langle x_2 + y_2 i\rangle = \langle x_1 + x_2\rangle + \langle y_1 + y_2\rangle i$$

$$\langle x_1 + y_1 i\rangle\langle x_2 + y_2 i\rangle = \langle x_1x_2 - y_1y_2\rangle + \langle y_1x_2 + x_1y_2\rangle i$$

Observese que los miembros de la derecha en esas ecuaciones se pueden obtener formalmente manipulando los términos de la izquierda como se sólo contuvieron números numeros reales y sustituyendo como se sólo contuvieron números reales y sustituyendo t^2 por -1 cuando aparezca

1.2. Conjugacion en C

- *DEFINICION.-* Lamaremos conjugado de $z = a + bi$ al número complejo $a - bj$, al cual representaremos por $\overline{z} = a - bi$.
- *DEFINICION.-* Dos números complejos son conjugados si diferen solamente en sus partes imaginarias en los signos. Los números coplejos conjugaso caracterizan puntos simétricos respecto al eje real, así: Si $z = a + bj$ su conjugada es: $\overline{z} = a - bi$

1.3. Multiplicación y División en Forma Polar

Sean $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ y $r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$

Dos números complejos en su forma trigonométrica, entonces:
$z_1.z_2 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2) = r_1r_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$

Si $z_2 \neq (0,0)$ y $r_2 \neq (0,0)$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$$

Ejemplo:
Si $z_1 = 3(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$ y $z_2 = 4(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$
Entonces $Z_1.Z_2 = (3)(4)[cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})] = 12(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})}{3(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})} = \frac{4}{3}[cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})] = \frac{4}{3}(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$$

1.4. TEOREMA (FORMULA DE MOIVRE)

Teorema (Formula de MOIVRE) Para todo z=a+bi y todo entero positivo n se cumple la siguiente relacion.

$$(a+bi)^n = r^n(cosn\theta + isenn\theta)$$

Llamada fórmula de MOIVRE

Demostracion

La demostración lo haremos por inducción

- Para $n = 1, a + bi = r(cos\theta + isen\theta)$
- Para $n = h, (a + bi)^h = r^h(cosh\theta + isenh\theta)$
- $Paran = h + 1,$

  $$(a+bi)^{h+1} = (a+bi)^h(a+bi) = r^h(cosh\theta + isenh\theta)r(cos\theta + isen\theta)$$

  $$(a+bi)^{h+1} = r^{h+1}(cos(h\theta+\theta)+isen(h\theta+\theta)) = r^{h+1}(cos(h+1)\theta+isen(h+1)\theta)$$

  Por lo tanto se cumple la formula para todo entero positivo n. **TEOREMA.-** Si $z = a + bi$ es un numero complejo y n es un entero positivo. La raiz n - esima de z es:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}[cos\tfrac{\theta+2krn}{n} + isen\tfrac{\theta+2krn}{n}]$$ para valores de k= 0, 1,......, n.

Demostracion

Sea $w = x + iy$, la raiz n - esima de z
Es decir: $w^n = z$ pero como $z = r(cos\theta+isen\theta)$; $w = p(cos\alpha+isen\alpha)$ $(x+iy)^n = a+bi$, reemplazando se tiene: $p^n(cosn\alpha + isenn\alpha) = r(cos\theta + isen\theta)$ de donde $p^n = r$, $\alpha n = \theta + 2k\Pi$, k= 0, 1, 2, ..., n-1
Luego $p = r^{\frac{1}{n}}$, $\alpha = \frac{\theta+2k\Pi}{n}$, k= 0, 1, 2,....,n-1
Como $w = p(cos\alpha+isen\alpha)$ se tiene: $w = r^{\frac{1}{n}}[cos\frac{\theta+2k\Pi}{n} + isen\frac{\theta+2k\Pi}{n}]$ como w es la raiz n - esima de z, se tiene:

$$Z^{\frac{1}{n}} =^{\frac{1}{n}} [cos\tfrac{\theta+2k\Pi}{n} + isen\tfrac{\theta+2k\Pi}{n}]$$ para k=0, 1, 2,...., n-1

TEOREMA.- Sea $z = a + ai$, definimos $z^{\frac{m}{n}=(z^{\frac{1}{n}}}$$)^m$, para m y n enteros positivos donde m y n son primos entre si, se cumple la relacion siguiente:

$$z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}[cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\Pi) + isen\frac{m}{n}(\theta + 2k\Pi)]$$

siendo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = arctg(\frac{b}{a})$

1.5. Logaritmo en C

La exponencial compleja $z = re^{i\theta}$ es un número complejo, el valor de θ se denomina argumento principal de z, que denominaremos por: $\theta = \arctan(z)$

Para todo complejo $z \neq 0$, le corresponde solamente un valor de θ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ Sin embargo cualquier otro intervalo de longitud 2π por ejemplo $-\pi \leq \theta \leq \theta$ se puede emplear

El logaritmo complemento es la inversa de la exponencial compleja, es decir:
Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo $\Rightarrow \exists w \in C$ único tal que $r = \|z\|$ y $\theta = \arctan(z)$

Generalizando se tiene que:

$$\boxed{\ln z = w = \ln r + i(\theta + 2k\pi)}$$

El valor pincipal de $\ln z$es el que se obtiene cuando $k = 0$, es decir:
V.P. de $\ln z = \ln r + i\theta$

Ejemplo

Hallar $\ln z$, donde $z = 1 - i$

Desarrollo

$z = 1 - i \Rightarrow r = \|z\| = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$

$\ln z = \ln(1 - i)$

$\ln r + i(\theta + 2k\pi)$

$\ln\sqrt{2} + i(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$

$\ln\sqrt{2} + (\frac{7}{4} + 2k)\pi i$

y el Valor Principal(V.P.)de

$\ln Z = \ln\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4}i$

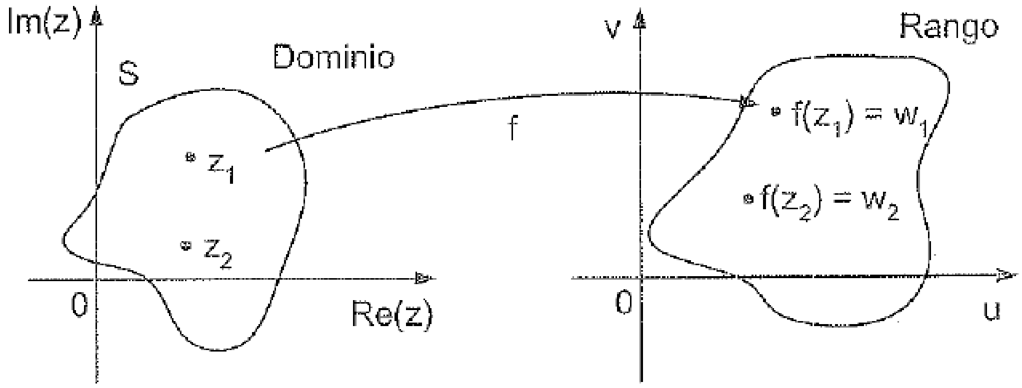
1.6. EXPONENCIAL COMPLEJA GENERAL

Sea z_1 y z_2 donde $z_1 \neq 0$, entonces consideramos una exponencia compleja $w = z_1^{z_2}$ aplicando el logaritmo de base natural tenemos:
$lnw = lnz_1^{z_2} = z_2 lnz_1$
por definición tenemos que:

$$w = e^{z_2 lnz_1} \tag{1.1}$$

FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE COMPLEJA
a) **Definición.-** Una función de variable compleja y de valor compleja es una regla que asigna un número complejo w a cada número complejo z del conjunto S, es decir: $f : S \subset C \to C$

$$z \to f(z) = w \tag{1.2}$$



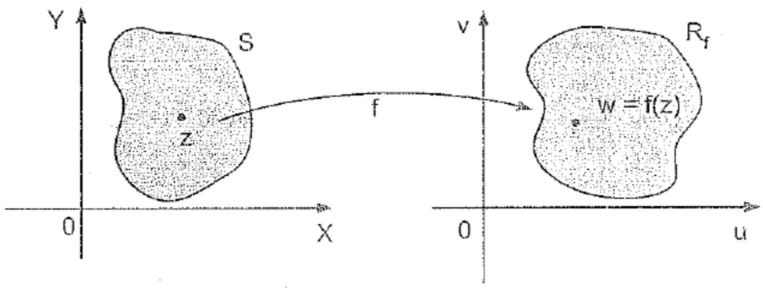
Si $w = f(z)$ es el valor de la función f en el punto z que están en el dominio S.
A la función $w = f(z)$ expresaremos en términos de la descomposición en parte real e imaginaria es decir:
Si $z = x + jy$ y $w = u + jv$ entonces $w = f(z) = f(x + jy) = f(x, y) = u(x, y) + jv(x, y)$, por lo tanto la función compleja $w = f(z)$ de una variable compleja esta formado por un par de funciones reales de dos variable resales, es decir:

$$w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \tag{1.3}$$

donde $u(x, y) = Re(f(z))$, $v(x, y) = Im(f(z))$, además $u, v : R^2 \to R$ son funciones reales de dos variables
Observación

1. Al Conjunto de números complejos que puede tomar la función $w = f(z)$ conforme "z"varia en la región S, se llama Rango de Valores de la función $w = f(z)$

2. Si $\forall z \in S$ le corresponde solamente un valor $w = f(z)$, entonces la función se llama ÜNÍVOCA"(uno a uno)



En caso contrario se llama "multiforme"

3. La función $w = f(z)$ realiza una transformación de los puntos del plano complejo (z) en los puntos correspondientes al plan complejo (w)

PROPIEDADES DE LÍMITES DE FUNCIONES COMPLEJAS
Supongamos que $\lim_{z\to\ z_0} f(z) = A$ y $\lim_{z\to\ z_0} g(z) = B$, entonces:

1. $\lim_{z\to\ z_0}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to\ z_0} f(z) + \lim_{z\to\ z_0} g(z) = A + B$
2. $\lim_{z\to\ z_0}(f(z)-g(z)) = \lim_{z\to\ z_0} f(z) - \lim_{z\to\ z_0} g(z) = A - B$
3. $\lim_{z\to\ z_0}(f(z).g(z)) = \lim_{z\to\ z_0} f(z). \lim_{z\to\ z_0} g(z) = A.B$
4. Si $\lim_{z\to\ z_0} f(z) = A \neq 0$, probar que existe $\delta > 0$, tal que $||f(z)|| > \frac{1}{2}||A||$ para $||0 < ||z - z_0|| < \delta$
5. Si $\lim_{z\to\ z_0} f(z) = A \neq 0$, entonces $\lim_{z\to\ z_0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{A}$
6. $\lim_{z\to\ z_0} \frac{f(z)}{g(z)}) = \frac{lim_{z\to\ z_0}f(z)}{lim_{z\to\ z_0}g(z)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$, $g(z) \neq 0$, $\forall z$
7. Si $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, una función polinómica z, entonces: $\lim_{z\to\ z_0} f(z) = lim_{z\to\ z_0}(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)$
$$= a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0 + a_0$$
8. Si $lim_{z\to\ z_0}f(z) = L_1$ y $lim_{z\to\ z_0}g(z) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$ (propiedad unicidad)
9. Si $lim_{z\to\ z_0}f(z) = A$ y $lim_{z\to\ A}g(z)$ existen: si $\exists V_\rho(z_0)$ tal que $f(z) \neq z_0$, $\forall z \subset V_\rho(z_0)$ entonces $lim_{z\to\ z_0}g(f(z)) = lim_{z\to\ A}g(z)$