Modelo dinámico de R. Becker

José Ángel Martínez Navarro

6 de julio de 2017

1. Introducción

El modelo dinámico del sistema esta basado en el propuesto por Yorihisa Yamamoto en el documento NXTway-GS Model-Based Design Control of self balancing two-wheeled robot built with LEGO Mindstorms NXT -
Las ecuaciones que describen las fuerzas que interactúan en el sistema son las siguientes.

2. Ecuaciones del modelo dinamico

2.1. Variables

- $g = 9{,}81\ m/s^2$ aceleración debida a la gravedad
- $m = 0{,}18\ Kg$ masa de la rueda
- $R = 0{,}0625\ m$ radio de la rueda
- $jw = 3{,}5156x10^{-4}\ Kgm^2$ momento de inercia de la rueda
- $M = 4{,}14\ Kg$ peso del cuerpo
- $W = 0{,}6\ m$ ancho del cuerpo
- $D = 0{,}2\ m$ largo del cuerpo
- $H = 1\ m$ alto del cuerpo
- $L = 0{,}0386\ m$ distancia del eje de la rueda al centro de masa
- $j\psi = 2{,}0561448x10^{-3}\ Kgm^2$ momento de inercia del cuerpo (pitch)
- $j\phi = 0{,}138\ Kgm^2$ momento de inercia del cuerpo (yaw)
- $jm = 1x10^{-5}\ Kgm^2$ momento de inercia del motor (propuesto)
- $R_m = 2{,}4\ \Omega$ resistencia del motor
- $k_b = 0{,}5295\ Vseg/rad$ constante contra electromotriz del motor (back EMF)
- $k_t = 0{,}24\ Nm/A$ constante de torque del motor

- $n = 1$ reducción del motor (es 50 pero los datos del fabricante la toman en cuenta en las constantes)
- $fm = 0{,}0022$ coeficiente de fricción entre el motor y el cuerpo(propuesto)
- $fw = 0$ coeficiente fricción entre las ruedas y el piso (propuesto)

2.2. Fuerzas que actúan en el modelo

$$(F_\theta, F_\psi, F_\phi) = (F_l + F_r, F_\psi, \frac{\omega}{2 * R}(F_r - F_l)) \tag{1}$$

Fuerza en la rueda izquierda

$$F_l = nk_t i_l + fm(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - fw\dot{\theta}_l \tag{2}$$

Fuerza en la rueda derecha

$$F_r = nk_t i_r + fm(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) - fw\dot{\theta}_r \tag{3}$$

Fuerza en el eje del péndulo

$$F_\psi = -nk_t i_l - nk_t i_r - fm(\dot{\psi} - \dot{\theta}_l) - fm(\dot{\psi} - \dot{\theta}_r) \tag{4}$$

Las fuerzas son puestas en función a los voltajes de entrada de los motores utilizando la siguiente relación.

$$L_m i_{l,r} = v_{l,r} + k_b(\dot{\psi} - \dot{\theta_{l,r}}) - R_m i_{l,r} \tag{5}$$

Considerando que la inductancia es muy pequeña simplificamos la ecuación de la siguiente manera

$$i_{l,r} = \frac{v_{l,r} + k_b(\dot{\psi} - \dot{\theta_{l,r}})}{R_m} \tag{6}$$

Como resultado obtenemos las nuevas ecuaciones en función del voltaje

$$F_\theta = \alpha(v_l + v_r) - 2(\beta + fw)\dot{\theta} + 2\beta\dot{\psi} \tag{7}$$

$$F_\psi = -\alpha(v_l + v_r) + 2\beta\dot{\theta} - 2\beta\dot{\psi} \tag{8}$$

$$F_\phi = \frac{\omega}{2R}\alpha(v_r - v_l) - \frac{\omega^2}{2R^2}(\beta + fw)\dot{\phi} \tag{9}$$

$$\alpha = \frac{nk_t}{R_m} \tag{10}$$

$$\beta = \frac{nk_t k_b}{R_m} + fm \tag{11}$$

2.3. Velocidades angulares

Las velocidades angulares del sistema quedan expresadas de la siguiente manera.

Velocidad angular promedio de las ruedas

$$\dot{\theta} = A_1(3,2)\psi + A_1(3,3)\dot{\theta} + A_1(3,4)\dot{\psi} + b_1(3)v_l + b_1(3)v_r \tag{12}$$

Velocidad angular de la inclinación del péndulo

$$\dot{\psi} = A_1(4,2)\psi + A_1(4,3)\dot{\theta} + A_1(4,4)\dot{\psi} + b_1(4)v_l + b_1(4)v_r \tag{13}$$

Velocidad angular de rotación (dirección del giro)

$$\dot{\phi} = \frac{-J}{I}\dot{\phi} + \frac{-k}{I}v_l + \frac{k}{I}v_r \tag{14}$$

Valor de las constantes.

$$A_1(3,2) = \frac{-gMLE(1,2)}{det(E)} \tag{15}$$

$$A_1(3,3) = \frac{-2[(\beta + fw)E(2,2) + \beta E(1,2)]}{det(E)} \tag{16}$$

$$A_1(3,4) = \frac{2\beta[E(2,2) + E(1,2)]}{det(E)} \tag{17}$$

$$b_1(3) = \frac{\alpha[E(2,2) + E(1,2)]}{det(E)} \tag{18}$$

$$b_1(4) = \frac{\alpha[E(1,1) + E(1,2)]}{det(E)} \tag{19}$$

3. Programa en Matlab

El programa en Matlab (yomodel) sirve para demostrar que el sistema es observable y controlable, además para obtener los valores de las constantes utilizadas en la simulación (Beckeryo)