Prueba de clase 8 de Abril de 2016

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**____________ **Grupo:**______

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST[1]

	a)	*b)*	*c)*	*d)*
Pregunta 1	V	F	F	F
Pregunta 2	V	V	F	V
Pregunta 3	V	F	F	V
Pregunta 4	F	F	F	F

PREGUNTAS TEST

Ejercicio 1. *Del número n se conoce que el conjunto $D(n)$ es un álgebra de Boole (con las operaciones mcd y mcm) con 4 átomos y que $66 \in D(n)$. Así que n podría ser*

a) 858

b) 99

c) 660

d) 726

Solución:

Para que $D(n)$ sea un álgebra de Boole es necesario que en la descomposición de n como producto de números primos no aparezca ningún primo elevado a un exponente mayor que 1.

Al tener $D(n)$ cuatro átomos, n debe tener cuatro divisores primos.

Y como $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ es un divisor de n, entre los cuatro divisores primos de n tienen que estar el 2, el 3 y el 7.

Tenemos entonces:

a) Puesto que $858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$, n podría valer 858.

b) Puesto que $99 = 3^2 \cdot 11$, n no puede valer 99 (no es múltiplo de 66 y el primo 3 está elevado al cuadrado).

c) Puesto que $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, n no puede valer 660 (pues aunque sea múltiplo de 66 y tiene cuatro divisores primos, hay uno que está elevado al cuadrado).

d) Puesto que $726 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2$, n no puede valer 726, ya que el primo 11 está elevado al cuadrado.

[1] Cada casilla del cuadro debe ser rellenada con V (verdadero) o F (falso).

Ejercicio 2. *La función booleana de 3 variables* $f = \Sigma_3\mathfrak{m}(1,3,5,6,7)$ *puede expresarse como*

a) $f(x,y,z) = (x+y+z)(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+z)$

b) $f(x,y,z) = (x+z)(y+z)$

c) $f(x,y,z) = xy + yz$

d) $f(x,y,z) = xy + z$

Solución:

Dado que tenemos f como suma de minterm, vamos a simplificar f usando un diagrama de Karnaugh:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$	0	2	6	4
z	1	3	7	5

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$			1	
z	1	1	1	1

Y vemos que $f(x,y,z) = z + xy$, que se corresponde con la respuesta cuarta.

Para calcular la forma conjuntiva, nos fijamos en los maxterm. Volvemos a representar f por medio de un diagrama de Karnaugh, pero ahora marcando los puntos en los que f toma el valor 0.

	$x+y$	$x+\overline{y}$	$\overline{x}+\overline{y}$	$\overline{x}+y$
z	0	0		0
$\overline{z}$				

Y la forma normal conjuntiva de f es $f(x,y,z) = (x+y+z)(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+z)$, que se corresponde con la respuesta primera.

Si ahora agrupamos los ceros, tenemos:

	$x+y$	$x+\overline{y}$	$\overline{x}+\overline{y}$	$\overline{x}+y$
z	0	0		0
$\overline{z}$				

Y tenemos la expresión de f siguiente: $f(x,y,z) = (x+z)(y+z)$ que es la respuesta segunda.

Por último, si evaluamos la tercera expresión en $x=0$, $y=0$, $z=1$ nos queda $0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$, mientras que $f(0,0,1) = 1$. Por tanto, esa expresión no representa a la función f.

Es decir, que son correctas las respuestas primera, segunda y cuarta.

Ejercicio 3. *Señala para cuál o cuáles de las siguientes fórmulas se obtiene que el valor de una interpretación es* $1 + I(a)I(b) + I(a)I(b)I(c)$

a) $a \wedge b \rightarrow c$

b) $a \wedge c \rightarrow b$

c) $a \wedge b \wedge c$

d) $a \rightarrow \neg b \vee c$

Solución:

Vamos a calcular una expresión para el valor de verdad de cada una de las fórmulas que aparecen en función de $I(a)$, $I(b)$ e $I(c)$ (lo que se conoce como el polinomio de Gegalkine).

$$\begin{array}{lcl} a)\ I(a \wedge b \rightarrow c) & = & 1 + I(a \wedge b) + I(a \wedge b)I(c) \\ & = & 1 + I(a)I(b) + I(a)I(b)I(c). \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} b)\ I(a \wedge c \rightarrow b) & = & 1 + I(a \wedge c) + I(a \wedge c)I(b) \\ & = & 1 + I(a)I(c) + I(a)I(c)I(b). \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} c)\ I(a \wedge b \wedge c) & = & I(a)I(b)I(c). \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} d)\ I(a \rightarrow \neg b \vee c) & = & 1 + I(a) + I(a)I(\neg b \vee c) \\ & = & 1 + I(a) + I(a)(I(\neg b) + I(c) + I(\neg b)I(c)) \\ & = & 1 + I(a) + I(a)(1 + I(b) + I(c) + (1 + I(b))I(c)) \\ & = & 1 + I(a) + I(a)(1 + I(b) + I(c) + I(c) + I(b)I(c)) \\ & = & 1 + I(a) + I(a) + I(a)I(b) + I(a)I(c) + I(a)I(c) + I(a)I(b)I(c) \\ & = & 1 + I(a)I(b) + I(a)I(b)I(c). \end{array}$$

Son correctas las respuestas primera y cuarta.

También podemos ver la respuesta a partir de la siguiente tabla:

a	b	c	$I(a)I(b)$	$I(a)I(b)I(c)$	$1 + I(a)I(b) + I(a)I(b)I(c)$	$a \wedge b$	$a \wedge b \rightarrow c$	$a \wedge c$	$a \wedge c \rightarrow b$	$a \wedge b \wedge c$	$\neg b \vee c$	$a \rightarrow \neg b \vee c$
0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	**0**	1	**1**
0	0	1	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	**0**	1	**1**
0	1	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	**0**	0	**1**
0	1	1	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	**0**	1	**1**
1	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	**1**	**0**	1	**1**
1	0	1	0	0	**1**	0	**1**	1	**0**	**0**	1	**1**
1	1	0	1	0	**0**	1	**0**	0	**1**	**0**	0	**0**
1	1	1	1	1	**1**	1	**1**	1	**1**	**1**	1	**1**

Ejercicio 4. *Indica si son ciertas o no las siguientes equivalencias lógicas*

a) $a \wedge b \to c \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$

b) $a \to b \wedge c \equiv \neg(a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

c) $\neg(a \to b) \equiv \neg a \to \neg b$

d) $(a \vee b) \wedge c \equiv a \vee (b \wedge c)$

Solución:
Vamos a ir analizando cada uno de los casos.

a) Tenemos que:

$a \wedge b \to c \equiv \neg(a \wedge b) \vee c \equiv \neg a \vee \neg b \vee c.$

$(a \to b) \vee (a \to c) \equiv (\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c) \equiv \neg a \vee b \vee c.$

Y vemos que no son equivalentes. Podemos tomar la interpretación $I(a) = I(b) = 1$, $I(c) = 0$ para comprobarlo.

b) En esta ocasión:

$a \to b \wedge c \equiv \neg a \vee (b \wedge c) \equiv (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c).$

$\neg(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \equiv \neg a \vee b \vee c.$

Y tampoco son equivalentes. La interpretación $I(a) = I(c) = 1$, $I(b) = 0$ nos lo muestra.

c) Al igual que antes, transformamos ambas fórmulas en otras equivalentes a ellas:

$\neg(a \to b) \equiv \neg(\neg a \vee b) \equiv a \wedge \neg b.$

$\neg a \to \neg b \equiv a \vee \neg b.$

Que claramente no son equivalentes, como podemos comprobar con la interpretación $I(a) = I(b) = 1$.

d) Aquí, para comprobar que no son equivalentes tomamos la interpretación $I(a) = 1$, $I(b) = 1$ e $I(c) = 0$. En tal caso, $I((a \vee b) \wedge c) = 0$ mientras que $I(a \vee (b \wedge c)) = 1$. Por tanto, tampoco son equivalentes.

Ejercicio 5. *Sea la función booleana elemental $g(x, y, z) = xy+yz+xz$, también llamada función mayoría*[2]*, se define $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ por*

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} 1 & t = g(x, y, z) \\ 0 & t \neq g(x, y, z) \end{cases}$$

Calcula una expresión reducida de f como suma de productos, y expresa $\overline{f}$ usando únicamente los operadores **`producto`** *y complemento.*

Solución:

Notemos que la función f devuelve uno si el voto de t coincide con la mayoría de los restantes y 0 si no coincide.

Vamos a calcular la tabla de la función f.

x	y	z	t	xy	yz	xz	$g(x, y, z)$	$h(x, y, z, t)$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Es decir, $f = m_0 + m_2 + m_4 + m_7 + m_8 + m_{11} + m_{13} + m_{15}$. Para obtener una expresión reducida nos valemos de un mapa de Karnaugh:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1	1		1
$\overline{z}\,t$			1	
$z\,t$		1	1	1
$z\,\overline{t}$	1			

Luego la expresión reducida de f es

$$f(x, y, z, t) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + x\,y\,t + x\,z\,t + y\,z\,t$$

También se podría haber obtenido una expresión de f como sigue:

[2]Si tres personas, x, y, z realizan una votación con dos posibles resultados, la función g nos devuelve el voto mayoritario.

$$\begin{aligned}
f(x,y,z,t) &= \overline{t} \oplus g(x,y,z) \\
&= t\, g(x,y,z) + \overline{t}\, \overline{g(x,y,z)} \\
&= t(xy + yz + xz) + \overline{t}\, \overline{(xy + yz + xz)} \\
&= x\,y\,t + y\,z\,t + x\,z\,t + \overline{t}(\overline{xy}\,\overline{yz}\,\overline{xz}) \\
&= x\,y\,t + y\,z\,t + x\,z\,t + \overline{t}(\overline{x} + \overline{y})(\overline{y} + \overline{z})(\overline{x} + \overline{z}) \\
&= x\,y\,t + y\,z\,t + x\,z\,t + \overline{t}(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{x} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{x} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{y}\,\overline{x} + \overline{y}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{x} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{z}) \\
&= x\,y\,t + y\,z\,t + x\,z\,t + \overline{t}(\overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}) \\
&= x\,y\,t + y\,z\,t + x\,z\,t + \overline{t}(\overline{x}\,\overline{y} + \overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{z}) \\
&= x\,y\,t + y\,z\,t + x\,z\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t}
\end{aligned}$$

Y por último expresamos $\overline{f}$ usando únicamente los operadores `producto` y complemento.

$$\begin{aligned}
\overline{f}(x,y,z,t) &= \overline{x\,y\,t + y\,z\,t + x\,z\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t} + \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t}} \\
&= \overline{x\,y\,t}\;\overline{y\,z\,t}\;\overline{x\,z\,t}\;\overline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{t}}\;\overline{\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t}}\;\overline{\overline{x}\,\overline{z}\,\overline{t}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Dadas las fórmulas:*

- $\alpha_1 = c \wedge d \to a \vee b$.
- $\alpha_2 = \neg c \to ((a \to b) \wedge (\neg b \to a))$.
- $\alpha_3 = \neg a \leftrightarrow c$.
- $\alpha_4 = \neg a \vee (\neg c \wedge (d \to \neg b))$.
- $\beta = (b \to c) \to \neg(\neg a \to d)$.

estudia si es cierto que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash \beta$. *Caso de no ser cierto, da una interpretación que lo muestre.*

Solución:

Por el teorema de la deducción esto es equivalente a estudiar si $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ b \to c\} \vDash \neg(\neg a \to d)$, y esto último, a estudiar si el conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ b \to c,\ \neg a \to d\}$ es insatisfacible.

Pasamos cada fórmula a forma clausular:

- $\alpha_1 = c \wedge d \to a \vee b \equiv \neg(c \wedge d) \vee (a \vee b) \equiv (\neg c \vee \neg d) \vee (a \vee b) \equiv a \vee b \vee \neg c \vee \neg d$.
- $\alpha_2 = \neg c \to ((a \to b) \wedge (\neg b \to a)) \equiv c \vee ((\neg a \vee b) \wedge (b \vee a)) \equiv (c \vee \neg a \vee b) \wedge (c \vee b \vee a)$.
- $\alpha_3 = \neg a \leftrightarrow c \equiv (\neg a \to c) \wedge (c \to \neg a) \equiv (a \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg a)$.
- $\alpha_4 = \neg a \vee (\neg c \wedge (d \to \neg b)) \equiv \neg a \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee \neg b)) \equiv (\neg a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee \neg b)$.
- $b \to c \equiv \neg b \vee c$.
- $\neg a \to d \equiv a \vee d$.

Con las cláusulas que nos han quedado, estudiamos si el conjunto es o no insatisfacible.

$$\{a \vee b \vee \neg c \vee \neg d,\ \neg a \vee b \vee c,\ a \vee b \vee c,\ a \vee c,\ \neg a \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b \vee \neg d,\ \neg b \vee c,\ a \vee d\}$$

$\lambda = a$:

$$\{b \vee c,\ \neg c,\ \neg b \vee \neg d,\ \neg b \vee c\} \xrightarrow{\lambda = \neg c} \{b,\ \neg b \vee \neg d,\ \neg b\} \xrightarrow{\lambda = b} \{\neg d,\ \square\}$$

$\lambda = \neg a$:

$$\{b \vee \neg c \vee \neg d,\ b \vee c,\ c,\ \neg b \vee c,\ d\} \xrightarrow{\lambda = c} \{b \vee \neg d,\ d\} \xrightarrow{\lambda = d} \{b\} \xrightarrow{\lambda = b} \emptyset$$

Al llegar una rama hasta $\emptyset$, la implicación semántica no es cierta. Además, con la interpretación $I(a) = 0$, $I(b) = I(c) = I(d) = 1$ se tiene que $I(\alpha_1) = I(\alpha_2) = I(\alpha_3) = I(\alpha_4) = 1$ mientras que $I(\beta) = 0$.