TEMA 6

Grafos (complementaria)

Ejercicio 1. Sea G un grafo completo con cuatro vértices. Construye todos sus subgrafos salvo isomorfismos.

Ejercicio 2. Se conocen los siguientes datos sobre las personas a, b, c, d, e, f y g:

1. La persona a habla inglés.
2. La persona b habla inglés y español.
3. La persona c habla inglés, italiano y ruso.
4. La persona d habla japonés y español.
5. La persona e habla alemán e italiano.
6. La persona f habla francés, japonés y ruso.
7. La persona g habla francés y alemán.

¿Es cierto que cada par de personas se pueden comunicar entre ellas utilizando si, es necesario, a otra persona como intérprete?

Ejercicio 3. Dado un grafo G (sin lazos ni lados paralelos) se define el complementario de G, $\overline{G}$, como el grafo cuyo conjunto de vértices es el mismo que de G, y para el que existe un lado que une los vértices u y v si, y sólo sí, en G no existe un lado que una esos dos vértices.

Demuestra que si G es no conexo, el complementario de G es conexo. ¿Es cierto que si G es conexo su complementario no lo es?.

Ejercicio 4. Un grafo G se dice autocomplementario, si $G \cong \overline{G}$.

1. Demuestra que si G es autocomplementario y tiene n vértices, entonces el número de lados es $\frac{n(n-1)}{4}$.
2. Demuestra que si G es autocomplementario, entonces G tiene $4k$ ó $4k+1$ vértices.
3. Encuentra todos los grafos autocomplementarios de 4 y de 5 vértices.
4. Encuentra un grafo autocomplementario de 8 vértices.
5. Encuentra todos los árboles que sean autocomplementarios.

Ejercicio 5. Demuestra que si un grafo G tiene 11 vértices o más, entonces, o bien G, o bien $\overline{G}$ no es plano.

Ejercicio 6. Un automorfismo de un grafo G es un isomorfismo de G en G. Determina el número de automorfismos para cada uno de los grafos siguientes: K_n, P_n, C_n y $K_{m,n}$.

Ejercicio 7. Para $n \geq 1$, un n-cubo es cualquier grafo isomorfo al grafo Q_n que describimos a continuación: El conjunto de vértices es $\{0,1\}^n$, es decir, el conjunto de todas las n-uplas binarias de longitud n, y dos vértices $(a_1,\ldots,a_n), (b_1,\ldots,b_n)$ son adyacentes en Q_n si, y sólo si, éstos difieren en una sola posición.

1. Dibuja los grafos Q_n para $n = 1,2,3,4$.
2. ¿Es Q_n conexo para todo n?
3. Calcula el número de lados y el número de vértices de Q_n.
4. ¿Cuál es la distancia máxima que puede haber entre dos vértices de Q_n?
5. Calcula el número cromático de Q_n. ¿Para qué valores de n es Q_n bipartido?
6. ¿Para qué valores de n existe en Q_n un circuito de Euler?
7. Demuestra que para todo $n \geq 2$ existe en Q_n un ciclo que recorre todos los vértices.
8. Comprueba que Q_3 es plano aunque Q_4 no lo es.
9. ¿Habrá algún grafo Q_n con $n \geq 5$ que también sea plano?

Ejercicio 8 (Códigos de Gray)**.** Una forma de representar la posición de una aguja de forma digital es dividiendo la circunferencia en 2^n arcos de igual longitud, y asignándole a cada arco una sucesión de n bits. Cuando la aguja está cerca de la línea de división entre dos arcos, se puede producir un error en la lectura. Para minimizar el efecto de un error al determinar la posición de la aguja, la asignación de las cadenas de bits debe hacerse de forma que los bits asociados a dos arcos adyacentes difieran únicamente en un bit.

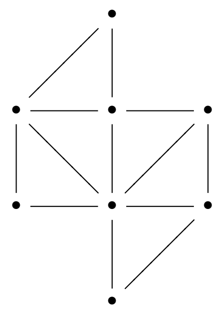
Un *código de Gray* es una forma de etiquetar los 2^n arcos de una circunferencia por medio de n bits de forma que las etiquetas de dos arcos adyecentes difieran únicamente en un bit.

Por ejemplo, un código de Gray, con tres bits, podría ser 000, 010, 011, 001, 101, 111, 110, 100.

Demuestra, usando el ejercicio anterior, que existen códigos de Gray para cadenas de bits de cualquier longitud.

Ejercicio 9. Dado un grafo plano G, y una representación plana de éste, se define el grafo dual G' como aquel cuyo conjunto de vértices es el conjunto de caras de la representación plana de G, el conjunto de lados es el mismo que el de G. Un lado e es incidente (en G') en los vértices u y v si el lado e es frontera común de las caras correspondientes a u y v en el grafo G.

Calcula el dual del grafo



Ejercicio 10. Sea G un grafo sin lazos ni lados paralelos que tiene $2n$ vértices. Demuestra que si G no tiene ciclos de longitud 3 entonces el número de lados de G es menor o igual que n^2.

Da un ejemplo de un grafo que tenga $2n$ vértices, n^2 lados y no tenga ciclos de longitud 3.

Ejercicio 11. Un árbol con raíz se dice binario si cada nodo tiene a lo sumo dos hijos. Se dice completo si cada nodo tiene 0 o dos hijos. Construye todos los árboles binarios completos con siete vértices.

Ejercicio 12. Calcula el número de vértices de un árbol sabiendo que tiene 33 vértices de grado 1, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3 y los restantes de grado 4.

Ejercicio 13. (Junio 2014)
Sea $G = K_{20}$. Calcula el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que:

1. nos quede un grafo de Euler.
2. Nos quede un grafo que no sea de Hamilton.
3. Nos quede un grafo plano.
4. nos quede un grafo que no sea conexo.
5. nos quede un grafo que no tenga ciclos.
6. nos quede un grafo cuyo número cromático sea 2.

Ejercicio 14. Sea $G = K_{10,15}$. Calcula el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que:

1. ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que añadir a G para obtener un grafo de Hamilton?
2. ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que añadir a G para obtener un grafo de Euler?
3. ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que el grafo no sea conexo?
4. ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que el grafo sea de Euler?
5. ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que el grafo no tenga ciclos?
6. ¿Cuál es el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que nos quede un grafo plano?
7. nos quede un grafo cuyo número cromático sea 2.

Ejercicio 15. (Junio 2015)

Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y cuya matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Hay algún lazo ó camino cerrado de Euler en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.
2. ¿Hay algún ciclo de Hamilton en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.
3. ¿Es G un grafo plano? Si la respuesta es afirmativa, obtenga una representación plana de G.
4. Calcule el número cromático de G. ¿Es G un grafo bipartido?

Ejercicio 16. (Julio 2016)

1. Estudia si los árboles siguientes son o no isomorfos:

2. Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. Sabemos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Es G conexo?

   b) ¿Es G un grafo de Euler?

   c) ¿Es G un árbol?

   d) ¿Es G bipartido?

   e) ¿Cuántos caminos de longitud 5 hay de v_1 a v_5?. ¿Y de v_1 a v_6?

Ejercicio 17. (Septiembre 2016) La siguiente matriz debe ser la matriz de adyacencia de un grafo simple, sin lazos y no dirigido con 6 vértices. Complétala como sea conveniente en cada caso para que el grafo resultante sea como se pide en cada apartado:

1. un árbol con 3 hojas (vértices de grado 1).
2. regular de grado 2.
3. conexo, no sea un árbol y no sea de Euler.
4. tenga el mayor número posible de lados.
5. tenga número cromático 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \_ \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \_ \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \_ \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18. (Septiembre 2016. Incidencias)

¿Puede haber un árbol que tenga 13 vértices de grado 5, 20 vértices de grado 3, 23 vértices de grado 2, 95 hojas y el resto vértices de grado 4?

En caso afirmativo, ¿cuántos lados habría que añadir como mínimo para obtener un grafo de Euler?