RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 2.

JUAN MANUEL URBANO BLANCO

1. Sean $X = \{1,2,3,4,5\}$ e $Y = \{a,b,c\}$. Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ es

   a) 256 b) 225 c) 125 d) 243

2. Dados dos conjuntos A y B tales que $|A \times B| = 112$ y $|\mathcal{P}(A)| = 256$, entonces $|B|$ vale

   a) 12 b) 17 c) 9 d) 14

3. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{4,5,6\}$. El cardinal del conjunto $A \times (A \cup B)$ es

   a) 6 b) 12 c) 16 d) 24

4. Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{1,4\}$ y $D = \{a\}$. El cardinal del conjunto
$$(A \times B) \setminus (C \times D)$$
   es

   a) 8 b) 9 c) 10 d) 12

5. Sea el conjunto X^4, donde $X = \{1,2,3,4,5\} \subseteq \mathbb{N}$.
   a) ¿Cuántos elementos de X^4 verifican que todas sus componentes son pares?
   b) ¿Cuántos elementos de X^4 verifican que todas sus componentes son impares?
   c) ¿Cuántos elementos de X^4 verifican que todas sus componentes son pares ó bien todas son impares?

6. En una bocadillería cada bocadillo debe incluir al menos dos de los siguientes ingredientes: queso, salmón, tomate, lechuga, mayonesa y espárragos. ¿Cuántos bocadillos distintos podemos elegir?

7. Un viajante puede ir desde un país P_1 hasta un país P_2 en coche, en autobús, en tren ó en avión, y puede ir desde P_2 hasta un tercer país P_3 en barco, en tren ó en avión. ¿De cuántas formas se puede hacer el viaje desde P_1 hasta P_3 pasando por P_2?

8. En un tablero de ajedrez, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres iguales de manera que ninguna pueda capturar a otra?

9. ¿Cuántos números con diez cifras significativas satisfacen que todas sus cifras son pares?

10. Un número natural se dice que es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 7, 181, 2442 y 11 son capicúas. ¿Cuántos números naturales con diez cifras significativas son capicúas?

11. ¿Cuántos elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ son múltiplos de 5, de 6 ó de 8?

12. ¿De cuántas formas podemos ordenar los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ de forma que ninguno de ellos aparezca en su posición inicial? Por ejemplo, $4, 1, 6, 5, 2, 3$ sería una ordenación válida, pero $3, 5, 2, 4, 6, 1$ no, pues el 4 aparece en la cuarta posición.

13. En un curso de programación de ordenadores hay matriculados 73 alumnos, de los cuales 52 saben programar en el lenguaje C, 25 saben programar en el lenguaje Pascal, 20 en Fortran, 17 en C y en Pascal, 12 en C y en Fortran, 7 en Pascal y en Fortran, y sólo hay un alumno que sabe programar en C, en Pascal y en Fortran. ¿Hay algún alumno que no sepa programar en ninguno de los tres lenguajes de programación?

14. ¿Cuántos números con diez cifras significativas tienen al menos una cifra impar?

15. Determine cuántos números naturales x verifican que $1 \leq x \leq 200$, y además x no es múltiplo de 4 ni de 6.

16. ¿Cuántos números naturales se escriben con a lo sumo cinco cifras siendo al menos una de ellas igual a 1? Es decir, son números válidos 1, 121, 10000, 11189, pero no son válidos 0, 82, 123456.

17. ¿Cuántos subconjuntos de $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ contienen al conjunto $\{2, 6, 7\}$?

18. ¿Cuántas n-uplas de longitud $n \geq 3$ formadas por ceros y unos contienen exactamente tres ceros?

19. ¿De cuántas formas se pueden colocar doce bolas en cinco recipientes diferentes si todas las bolas son distintas? ¿Y si todas las bolas son idénticas?

20. Demuestre las siguientes propiedades sobre coeficientes binomiales:
    a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
    b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
    c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, siempre que $1 \leq k < n$

21. Calcule el coeficiente con el que aparece el término x^3y^8 al expandir cada uno de los polinomios siguientes:

$$(x+y)^{11}; \quad (2x-y)^{11}; \quad (x+2y)^{14}; \quad (x-3y)^{10}; \quad (1-2y)^{11}.$$

22. Lanzando un dado 5 veces, ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse, si se tiene en cuenta el orden de lanzamiento? ¿Y si no se tiene en cuenta el orden de lanzamiento?

23. Si A es un conjunto de cardinal $n \geq 1$, demuestre que el número de subconjuntos de A de cardinal par es igual que el número de subconjuntos de A de cardinal impar.

24. Queremos formar un comité de 12 personas las cuales han de ser escogidas de entre 10 hombres y 10 mujeres.
    a) ¿De cuántas formas podemos hacerlo?
    b) ¿Y si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres?
    c) ¿Y si queremos que el número de mujeres sea mayor que el número de hombres?

25. Un examen tipo test consta de diez preguntas cada una con dos alternativas. Si se responde a todas las preguntas, ¿de cuántas formas distintas se puede responder al examen?

26. ¿Cuántos resultados posibles pueden obtenerse al lanzar cuatro dados idénticos?

27. Una pastelería ofrece 8 tipos de pasteles distintos. Si se supone que hay al menos una docena de cada tipo, ¿de cuántas formas se puede seleccionar una docena de pasteles?

28. Encuentre el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, si:
    a) $0 \leq x_1$, $0 \leq x_2$ y $0 \leq x_3$.
    b) $2 \leq x_1$, $0 \leq x_2$ y $0 \leq x_3$.
    c) $2 \leq x_1$, $3 \leq x_2$ y $0 \leq x_3$.
    d) $0 \leq x_1 < 7$, $0 \leq x_2$ y $0 \leq x_3$.
    e) $0 \leq x_1 < 7$, $0 \leq x_2 < 5$ y $0 \leq x_3$.

29. Calcule el número de soluciones de la inecuación $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$ cuyas incógnitas se consideran en $\mathbb{N}$.

30. El consejo de administración de una empresa está compuesto por nueve personas. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse pero sí puede votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación? Considerando que se aprueba el proyecto con al menos cinco votos favorables, ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?

31. En un centro de enseñanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de las siguientes asignaturas: Informática, Matemáticas, Física e Inglés. Cada asignatura tiene una puntuación entera entre 5 y 10.
    a) ¿Cuántas puntuaciones distintas puede tener un expediente académico?
    b) ¿En cuántos casos distintos se obtiene de nota media 7?

32. ¿Cuántas aplicaciones hay del conjunto $\{1,2,3,4\}$ en el conjunto $\{x,y,z,t,u,v\}$? ¿Cuántas de ellas son inyectivas?

33. ¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas se pueden definir del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ en el conjunto $\{x,y\}$?

34. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir ocho libros diferentes entre cinco niños? ¿Y si cada niño ha de recibir al menos un libro?

35. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir veinte canicas idénticas entre seis niños?

36. Sea un cuadrado de diagonal 3 cm en el que marcamos al azar 10 puntos $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$. Demuestre que siempre tenemos al menos dos puntos que están a distancia no mayor que 1 cm.

37. ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener un grupo de ALEM para estar seguros que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? Se supone que las puntuaciones son números enteros de 0 a 10.

38. ¿En cualquier conjunto de 12 enteros podemos asegurar que existen siempre al menos dos cuya diferencia es divisible por 11?

39. Un número entero es un cuadrado perfecto, si es el cuadrado de otro número entero. ¿Cuál es el menor cardinal que puede tener un conjunto de enteros cuadrados perfectos para garantizar que existan siempre al menos dos de ellos a, b tales que $(a+b)\cdot(a-b)$ sea múltiplo de 16?

40. Un gimnasio abre todos los días de la semana y cada socio acude al menos tres días por semana. ¿Cuál es el mínimo número de socios que debe tener el gimnasio para garantizar que cada semana existan al menos dos de ellos que coincidan los mismos días en el gimnasio?

41. Sobre una circunferencia se marcan n puntos y a continuación se unen cada dos puntos por un segmento. ¿Cuántos segmentos resultan?. Suponiendo ahora que no hay tres o más segmentos que se corten en un mismo punto, ¿cuál es el número de puntos de intersección entre segmentos que hay en el interior de la circunferencia?

42. Suponiendo que desde un punto cualquiera (x,y) del plano podemos realizar sólo dos tipos de movimientos que son ir al punto $(x+1,y)$ o bien ir al punto $(x,y+1)$, ¿cuántos caminos distintos podemos seguir para trasladarnos desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(6,8)$? ¿Y desde el punto (a,b) hasta el punto (c,d) si $a \leq c$ y $b \leq d$?

43. ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6, cuyas cifras son todas distintas?

44. Dado un conjunto X de cardinal n, determine el número de pares ordenados (A,B) tales que $A \subseteq B \subseteq X$.

45. Si ordenamos las permutaciones del conjunto $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ según el orden lexicográfico y numeramos la primera de ellas con el número 0, ¿cuál es la permutación que ocupa la posición 21570? ¿Qué posición ocupa la permutación $6,2,7,5,8,3,4,1$?

46. ¿De cuántas formas pueden seis personas agarradas de las manos formar un círculo?

47. Supongamos n objetos, de los cuales hay r_1 de un primer tipo, r_2 de un segundo tipo, y así hasta r_t de un tipo t, con $r_1+r_2+\cdots+r_t = n$ y donde dos objetos de un mismo tipo se consideran indistinguibles. Cada forma de ordenar los n objetos dados, se denomina una permutación con repetición de los n objetos. El número de permutaciones con repetición de los n objetos, se denota por

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_t}, \quad \text{y se puede demostrar que} \quad \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_t} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_t!}.$$

Aplique la fórmula anterior para calcular el número de formas de ordenar todas las letras de la palabra “concienzudamente”. ¿En cuántas de dichas ordenaciones aparecen todas las letras “e” en posiciones contiguas?