LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

7 de Septiembre de 2016

Alumno:________________________________ **D.N.I.:**_______________ **Grupo:**_______

Ejercicio 1. *Dadas las funciones booleanas* $f, g : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ *dadas por:*

$$f(x,y,z) = (x \uparrow y) \uparrow z; \qquad g(x,y,z) = (x \downarrow y) \downarrow z$$

1. *Calcula las respectivas formas canónicas en mintérminos y expresiones minimales como suma de productos.*
2. *Prueba que* $g \leq f$.
3. *Calcula una expresión minimal como producto de sumas de*

$$h(x,y,z,t) = \begin{cases} f(x,y,z) & si\ t = 0 \\ g(x,y,z) & si\ t = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2. *Determina si la siguiente implicación semántica es cierta o no; si no lo es encuentra una interpretación que lo demuestre.*

$$\{a \wedge b \to c \vee d; \neg((a \vee c \vee d) \wedge e)\} \vDash (a \to b) \to (e \to \neg a)$$

Ejercicio 3.

1. *Interpreta cada una de las siguientes fórmulas en cada una de las estructuras que se describen:*
   a) $\exists x \forall y P(f(y), x)$
   b) $\forall x \exists y P(f(y), x)$
   c) $\forall y \exists x P(f(y), x)$

Estructura 1	***Estructura 2***	***Estructura 3***
$D_1 = \mathbb{R}$	$D_2 = \mathbb{Z}_5$	$D_3 = \mathbb{Z}_2$
$f(z) = z^2$	$f(z) = z^2$	$f(z) = z^2$
$P(x,y) \equiv x + y = 0$	$P(x,y) \equiv x + y = 0$	$P(x,y) \equiv x + y = 0$

   ¿Es alguna de ellas universalmente válida? Razona la respuesta.

2. *Calcula una forma prenexa con el menor número posible de cuantificadores y una forma de Skolem para la fórmula*

$$\forall x \left[\forall y \exists z \left(P(y,z) \to Q(x)\right) \to \exists z \left(\neg P(x, f(x)) \vee Q(z)\right)\right]$$

Ejercicio 4. *Determina si el siguiente conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible:*

$$\{C(x) \vee D(f(x), x);\ C(y) \vee \neg D(x,y) \vee B(x);\ \neg A(x) \vee B(x);\ \neg C(a);$$

$$\neg B(x) \vee \neg A(x) \vee C(y) \vee \neg D(x,y);\ A(x) \vee \neg B(x)\}$$

Ejercicio 5.

1. *Demuestra que para cualquier número natural* n *el número* $n^2 - n$ *es par. Utiliza esto para demostrar que* $n^3 - 3n^2 - 4n$ *es múltiplo de 6 para todo* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Obtén dos soluciones distintas del problema de recurrencia lineal no homogénea siguiente:*

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + (-2)^n$$

   Comprueba que si z_n *es una solución de dicha recurrencia, entonces también lo es* $w_n = z_n + n$.

Ejercicio 6. *La siguiente matriz debe ser la matriz de adyacencia de un grafo simple, sin lazos y no dirigido con 6 vértices. Complétala como sea conveniente en cada caso para que el grafo resultante sea como se pide en cada apartado:*

1. *un árbol con 3 hojas (vértices de grado 1).*
2. *regular de grado 2.*
3. *conexo, no sea un árbol y no sea de Euler.*
4. *tenga el mayor número posible de lados.*
5. *tenga número cromático 3.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \_ \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \_ \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \_ \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$