Lógica y métodos discretos. 19-Septiembre-2014

Nombre: **DNI:**

Grupo:

Ejercicio 1 Sea la función booleana:

$$f(x, y, z, t) = (x \uparrow y) \oplus (z \downarrow t)$$

donde $\uparrow$ representa al operador NAND, $\downarrow$ es el operador NOR y $\oplus$ es XOR. Calcula una expresión minimal como suma de productos y una expresión minimal como producto de sumas para f.

Ejercicio 2 Prueba que

$$\models \Big[\big([(a \to b) \to (\neg c \to \neg d)] \to c\big) \to e\Big] \to \Big[(e \to \neg b) \to [(e \to a) \to (d \to a \wedge \neg b)]\Big]$$

Ejercicio 3

1. Sea $\alpha = \forall x[P(x, f(x)) \to \exists y P(a, y)]$ y sea $\mathcal{E}$ la estructura dada por:

$$\begin{array}{l} D = \mathbb{N} \\ a = 0 \\ f(x) = x + 1 \\ P(x, y) \equiv x < y \end{array}$$

   (es decir, $P(x, y)$ se interpreta como verdadero cuando $x < y$).

   a) Calcula el valor de verdad de α en la estructura dada.

   b) Prueba que α es satisfacible y refutable.

2. Encuentra una fórmula en forma normal prenexa, con el menor número posible de cuantificadores, que sea lógicamente equivalente con la fórmula:

$$\big(\forall x \exists y \neg P(x, y) \to Q(z)\big) \to \forall x \exists z R(x, z)$$

Ejercicio 4 Sean

- $\alpha_1 = \forall x(\exists y P(x, y) \to Q(x))$.
- $\alpha_2 = \forall x(Q(x) \to (\exists y P(f(x), y) \vee \forall z \forall t P(z, t)))$.
- $\alpha_3 = \exists x \forall y(\neg Q(y) \to P(x, f(y)))$.
- $\beta = \exists y Q(f(y))$.

Demuestra que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$.

Ejercicio 5 Encuentra una fórmula explícita para la sucesión definida por:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_n = -x_{n-1} + 2^n + 1 \end{cases}$$

Ejercicio 6 Consideramos la secuencia $[2, 2, a, a, 1, 1, 1, 1]$.

1. ¿Puede ser, para $a = 5$, la sucesión gráfica de un grafo conexo?
2. ¿Y para $a = 1$?
3. ¿Para qué valores de a es dicha secuencia una suciesión gráfica?
4. ¿Para qué valores de a es dicha secuencia una sucesión gráfica de un árbol?