Lógica y métodos discretos. 18-Septiembre-2015

Nombre: **DNI:**

Grupo:

Ejercicio 1

1. Sea B un álgebra de Boole finita, y sean a y b dos átomos distintos. Razona cuáles de las siguietes afirmaciones son necesariamente ciertas.
   - $a \wedge \overline{b} = 0$.
   - $\overline{a} \vee \overline{b} = 1$.
   - $\overline{a}$ es un coátomo.
   - $a \vee b = 1$.
2. Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booleana definida como:

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} (x + y) \cdot (y + \overline{z}) & \text{si } t = 0 \\ x \uparrow y & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

   a) Encuentra una expresión booleana para la función f.

   b) Calcula una expresión lo más reducida posible de f como suma de productos de literales.

   c) Expresa $\overline{f}$ usando únicamente los operadores *producto* y *complemento*.

Ejercicio 2 Estudia si cada una de las siguientes implicaciones semánticas es cierta o no. Cuando no lo sea, encuentra una interpretación que lo pruebe.

1. $\{a \wedge \neg b \to a \vee c\} \models (\neg a \vee b \to a \vee c) \to a \vee c$
2. $\{a \vee d \to (b \to c)\} \models (a \vee d \to \neg b) \to \neg c$

Ejercicio 3

1. Sea $\alpha = \forall x(\forall y R(y, f(x)) \to Q(x)) \vee \exists x R(x, x)$.
   Estudia si α es universalmente válida, contradicción o contingente (satisfacible y refutable).
2. Traduce a un lenguaje de primer orden con dominio $\mathbb{N}$ la frase
   Todo número natural mayor que 1 tiene al menos dos divisores distintos
   usando los símbolos de predicado P^2, E^2, Q^2 con los significados

$$\begin{array}{lcl} P(x, y) & : & x > y; \\ E(x, y) & : & x = y; \\ Q(x, y) & : & x \text{ es un divisor de } y. \end{array}$$

   y el símbolo de constante a con valor igual a 1.

Ejercicio 4

Sean:

- $\alpha_1 = \forall x\, [\exists y R(x, y) \to \neg Q(x)]$
- $\alpha_2 = \forall x\, [\exists z R(f(x), z) \vee Q(x)] \vee \forall x \forall y R(y, x)$
- $\alpha_3 = \forall y\, [Q(y) \to \exists x R(x, f(y))]$
- $\beta = \neg \forall x Q(f(x))$.

Demuestra que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$.

Ejercicio 5

1. Prueba por inducción que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n \cdot (n+1))^2}{4} \qquad n \geq 1$$

2. Encuentra una fórmula explícita para la sucesión siguiente:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 3^k = 0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + \cdots + n \cdot 3^n$$

Ejercicio 6

Sea G un grafo (sin lazos ni lados paralelos) cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y A su matriz de adyacencia. Sabemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. ¿Cuál es la sucesión de grados de G?
2. ¿Es G conexo?
3. ¿Es G un árbol?
4. ¿Es G plano?
5. ¿Cuántos caminos de longitud 4 hay entre v_1 y v_7? ¿Y entre v_2 y v_6?