LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

1 de Julio de 2016

Alumno:____________________________ **D.N.I.:**____________ **Grupo:**______

Ejercicio 1. *Sea B un álgebra de Boole, y sean $x, y, z \in B$. Demuestra que*

$$xy + yz + zx = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Sea ahora $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función dada por:

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} xy + yz + zx & si\ x = t \\ (y + z)(z + t)(t + y) & si\ x \neq t \end{cases}$$

Calcula la forma normal canónica disyuntiva de f.
Encuentra una expresión óptima como suma de productos, tanto de f como de $\overline{f}$.

Ejercicio 2. *Sean:*
$\alpha_1 = r \vee t \to p \vee s$.
$\alpha_2 = \neg r \wedge \neg s \to \neg p \wedge (p \vee q)$.
$\alpha_3 = r \to \neg p \wedge \neg t \wedge (\neg s \vee t)$.
$\beta = (s \to t \vee r) \to s \wedge \neg(r \vee \neg t)$.
Estudia si β es consecuencia lógica de $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}$. Caso de no serlo, da una interpretación que lo muestre.

Ejercicio 3. *Dado un lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante a, b, y dos símbolos de predicado binarios E, R consideramos la estructura siguiente:*

- *Dominio: $D = \mathbb{N}$.*
- *Asignación de constantes: $a = 0$, $b = 1$.*
- *Asignación de predicados: $E(x, y) \equiv x = y$; $\quad R(x, y) \equiv x$ es múltiplo de y.*

Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $R(a, b)$.
2. $\forall x R(a, x)$.
3. $\forall x \forall y (R(x, y) \to \neg E(x, y))$.
4. $\forall x (\exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(y, z) \to E(z, y) \vee E(z, b))))$.

Ejercicio 4. *Comprueba que la fórmula $\exists x (B(x) \wedge \neg C(x))$ es consecuencia lógica de*

$$\{\forall x (\exists y (P(x, y) \wedge R(x, y)) \to B(x));\ \exists x (\neg C(x) \wedge \forall y (\neg Q(y) \to R(x, y)));\ \forall x (\forall y (Q(y) \vee \neg P(x, y)) \to C(x))\}$$

Ejercicio 5.

1. *Encuentra una expresión no recurrente para la sucesión siguiente:*

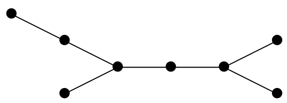
$$x_0 = 2;\ x_1 = 2;\ x_n = x_{n-2} + 2^n + (-1)^n \text{ para } n \geq 2$$

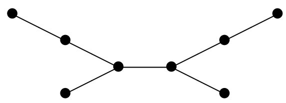
2. *Demuestra por inducción que para cada número natural $n \geq 1$ se tiene que*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$$

Ejercicio 6.

1. *Estudia si los árboles siguientes son o no isomorfos:*





2. *Sea G un grafo y A su matriz de adyacencia. Sabemos que:*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) *¿Es G conexo?*
   b) *¿Es G un grafo de Euler?*
   c) *¿Es G un árbol?*
   d) *¿Es G bipartido?*
   e) *¿Cuántos caminos de longitud 5 hay de v_1 a v_5?. ¿Y de v_1 a v_6?*