TEMA 2

Lógica proposicional (complementaria)

Ejercicio 1. Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \vee \beta$ es contingente.
2. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingente.
3. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \to \beta$ es contingente.
4. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es contingente.
5. Si α y β son contradicciones, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es tautología.
6. Si α es tautología, entonces $\beta \vee \alpha$ es tautología.
7. Si α es insatisfacible, entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.
8. $\alpha \vee \beta$ es una tautología si, y sólo si, α y β son tautologías.
9. Si $\alpha \vee \beta$ es contradicción, entonces α y β son contradicciones.
10. Si $\alpha \vee \beta$ es una tautología, entonces α o β son tautologías.
11. Si $\alpha \vee \beta$ es contingente, entonces α y β lo es.
12. Si $\alpha \to \beta$ es una tautología, entonces α es una contradicción o β es una tautología.
13. Si $\alpha \to \beta$ es una fórmula contingente, entonces α y β son contingentes.

Ejercicio 2. Señala en que casos la tercera cláusula es resolvente de las dos anteriores:

a) $a \vee b,\ a \vee \neg b,\ a$.

b) $\neg a \vee b,\ \neg a \vee \neg c,\ b \vee \neg c$.

c) $\neg a \vee b,\ a \vee \neg b,\ \square$.

d) $\neg a \vee b \vee c,\ \neg a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee c$.

Ejercicio 3. Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\{\neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ a \vee b \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b \vee \neg d\}$$

Razona cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta y cuáles no.

1. $c \vee \neg a \vee b$ es una resolvente de la primera y segunda cláusulas.
2. $\neg a \vee d \vee a \vee b$ es una resolvente de la primera y tercera cláusulas.
3. $\neg a$ es una resolvente de la primera y cuarta cláusulas.

4. $\neg c \vee b$ es una resolvente de la segunda y tercera cláusulas.
5. No hay resolventes de la tercera y cuarta cláusulas.

Ejercicio 4. En cada una de las situaciones siguientes indica en cada caso que tipo de fórmula es β (o que tipo de fórmula no es β). Justifica la respuesta.

1. α es una tautología y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
2. α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es cotingente.
3. α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.
4. α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es contingente.
5. α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es una contradicción.
6. α es una contradicción y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
7. α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es una contradicción.
8. α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es contingente.
9. α es una contradicción y $\beta \to \alpha$ es una tautología.
10. α es contingente y $\alpha \vee \beta$ es una tautología.
11. α es contingente y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.
12. α es contingente y $\alpha \to \beta$ es una tautología.
13. α es contingente y $\alpha \to \beta$ es contingente.

Ejercicio 5. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología, entonces también lo es $\neg(\alpha \wedge \beta)$.

b) Si α es una contradicción entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.

c) Si α y β son contingentes, entonces también lo es $\alpha \to \beta$.

d) Si α es contingente y $\alpha \vee \beta$ es tautología entonces β es tautología.

e) Si $\alpha \to \beta$ es contingente, entonces α y β lo son.

Ejercicio 6. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si una fórmula no es satisfacible, su negación sí lo es.
2. Si una fórmula no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación sí lo es.
3. Si una fórmula no es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas, su negación tampoco.

Ejercicio 7. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $\{a, \neg b\} \vDash b \to \neg a$.

b) $\{a, \neg b\} \vDash \neg b \to a$.

c) $\{a, \neg b\} \vDash \neg a \vee b$.

d) $\{a, \neg b\} \vDash b \vee a$.

Ejercicio 8. Estudia cuál (o cuáles) de las siguientes implicaciones son ciertas:

1. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash \neg a \wedge \neg c$
2. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash \neg a \to \neg c$
3. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash a \leftrightarrow \neg b$
4. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash b \to c$
5. $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash a \leftrightarrow \neg c$.
6. $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash \neg a \wedge \neg b \wedge c$.
7. $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash (b \to \neg c) \wedge (c \to a)$.
8. $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash c \to a \vee b$.
9. $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash b \to \neg c) \wedge (\neg c \to a)$.

Ejercicio 9. Sea Γ un conjunto de fórmulas, y sean α, β y γ tres fórmulas. Demuestra que:

1. Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \neg\beta$ entonces $\Gamma \vDash \alpha$ (Reducción al absurdo).
2. Si $\Gamma \vDash \alpha$ y $\Gamma \vDash \neg\alpha$ entaonces $\Gamma \vDash \beta$ (Principìo de inconsistencia).
3. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$ entonces $\Gamma \vDash \beta$ (Prueba por casos).
4. Si $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$ y $\Gamma \vDash \neg\alpha \to \beta$ entonces $\Gamma \vDash \beta$.
5. Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \alpha$ entonces $\Gamma \vDash \alpha$ (Regla de retorsión).
6. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \gamma$ y $\Gamma \cup \{\beta\} \vDash \gamma$ entonces $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vDash \gamma$.

Ejercicio 10. Para cada una de las equivalencias siguientes, encuentra fórmulas α y β que las hagan ciertas.

1. $\alpha \equiv \alpha \to \beta$
2. $\neg\alpha \equiv \alpha \to \beta$.
3. $\alpha \equiv \neg\alpha \wedge \beta$.
4. $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \to \beta$.
5. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \beta \to \neg\alpha$.
6. $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \wedge \beta$.

Ejercicio 11. ¿Es cierto que

$$\{(a \to \neg b \vee d) \wedge (b \wedge \neg d \to a \vee c),\ \ (d \to (a \leftrightarrow \neg b)) \vee (b \wedge \neg c)\} \vDash (\neg b \to (d \wedge (c \vee \neg d))) \to c \wedge d?$$

En caso de respuesta afirmativa, demuéstralo, y en caso de respuesta negativa, da una interpretación que lo muestre.

Ejercicio 12. En cada uno de los apartados siguientes encuentra una fórmula α que lo haga verdadero.

1. $\{\alpha,\ a \to b\} \vDash a \to c$, pero $\alpha \nvDash a \to c$.
2. $\{\alpha,\ a \vee \neg b\} \vDash \neg a$ y $\{\alpha, b \to c\} \vDash c$.
3. $\{\alpha,\ a \to b\} \vDash \neg a$ y $\alpha \vDash b \to c$.
4. $\{\alpha,\ a \to b\} \vDash \neg \alpha$ y $\alpha \nvDash b$.
5. $\{\alpha,\ a\} \vDash b$ y $\alpha \vDash a \wedge \neg b$.
6. $\{\alpha,\ a \to c,\ b \to c\} \vDash c$, pero $\alpha \nvDash a$ y $\alpha \nvDash b$.

Ejercicio 13. Demuestra que para cualesquiera proposiciones α y β, se da lo siguiente:

$$\vDash (\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$$

Ejercicio 14. En el Cálculo de Proposiciones, si

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta \to (\delta \to \gamma) \text{ y } \Gamma \cup \{\beta\} \vDash \alpha \to \delta$$

Prueba que $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \vDash \gamma$

Ejercicio 15. Prueba los siguientes enunciados:

1. $\vDash (\beta \to \gamma) \to (\neg(\alpha \to \gamma) \to \neg(\alpha \to \beta))$
2. $\vDash \alpha \to (\beta \to (\gamma \to \gamma))$
3. $\vDash ((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
4. $\vDash (((\psi \to \theta) \to \theta) \to (\chi \to \theta)) \to (\psi \to (\chi \to \theta))$

Ejercicio 16. Prueba que $\{q \to (\neg p \to r)\} \vDash r \to \neg q$

Ejercicio 17. ¿Para cuál de las siguientes interpretaciones:

a) $I(a) = I(c) = 0$, $I(b) = I(d) = 1$.

b) $I(a) = I(b) = I(c) = 1$, $I(d) = 0$.

c) $I(a) = 1$, $I(b) = I(c) = I(d) = 0$.

d) $I(a) = I(b) = 1$, $I(c) = I(d) = 1$.

la fórmula $((a \to \neg b) \to (b \vee c)) \to (c \to \neg a \wedge b)$ es cierta?

Ejercicio 18. ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas tienen como interpretación $I(a) + I(b) + I(b) \cdot I(c)$?

a) $(b \to c) \to \neg a$.

b) $a \to (b \leftrightarrow c)$.

c) $a \leftrightarrow (b \to c)$.

d) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \wedge c)$.

e) $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$.

Ejercicio 19. Sea $\alpha = (a \to \neg b \wedge c) \wedge ((\neg a \vee b) \wedge c)$. Indica cuál o cuáles de los siguientes conjuntos podrían ser las cláusulas de una forma clasulada de α.

a) $\{\neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee c,\ \neg a \vee b,\ c\}$.

b) $\neg(a \wedge b),\ \neg a \vee c,\ \neg a \vee b,\ c\}$.

c) $\{\neg a \vee b,\ \neg a \wedge c,\ \neg a \vee b\}$.

d) $\{\neg a \vee b,\ c,\ \neg a \vee \neg b\}$.

e) $\{c,\ \neg a\}$.

Ejercicio 20. ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías?

a) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to c)$.

b) $((a \to (b \vee c)) \wedge \neg c \wedge \neg b) \to \neg a$.

c) $((a \to b) \to c) \to (a \to (b \to c))$.

d) $(a \to b) \vee (b \to a)$.

e) $(\neg a \to \neg b) \to (a \vee b \to a)$.

Ejercicio 21. El problema

$$\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta,\ \neg\beta\} \models \alpha$$

es equivalente a:

a) $\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta,\ \neg\alpha\} \models \beta$.

b) $\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta,\ \neg\alpha\} \models \neg\beta$.

c) $\Gamma \models \{(\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$.

d) $\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta\} \models \beta \vee \alpha$.

e) $\Gamma \models \{\neg\alpha \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \beta$.

Ejercicio 22. El problema

$$\Gamma \cup \{\neg(\alpha \to \beta),\ \neg\beta\} \models \neg\alpha$$

no es equivalente a:

a) $\Gamma \models \neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

b) $\Gamma \models \neg\beta(\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha)$.

c) $\Gamma \cup \{\neg(\alpha \to \beta)\} \models \neg\beta \to \neg\alpha$.

d) $\Gamma \cup \{\neg(\alpha \to \beta)\} \models \neg\alpha \to \neg\beta$.

Ejercicio 23. La siguiente implicación

$$\{b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b\} \models b \leftrightarrow c \vee d$$

es falsa. Señala cuál o cuáles de las siguientes interpretaciones nos sirven para mostrar esto.

a) $I(a) = I(b) = 1, I(c) = I(d) = 0$.

b) $I(a) = I(c) = 1, I(b) = I(d) = 0$.

c) $I(a) = I(b) = I(c) = 1, I(d) = 0$.

d) $I(a) = I(b) = I(c) = I(d) = 1$.

e) $I(a) = I(d) = 0$, $I(b) = I(c) = 1$.

Ejercicio 24. Indica en que casos se ha aplicado correctamente alguna regla del algoritmo de Davis-Putnam:

a) $\{\neg a \vee \neg b \vee \neg c,\ \neg a \vee c \vee d,\ a \vee \neg b \vee \neg d,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ b \vee \neg d\}$ es satisfacible si, y sólo si, lo son $\{\neg b \vee \neg c,\ b \vee \neg d\}$ y $\{\neg b \vee \neg c,\ c \vee d,\ b \vee c \vee d,\ b \vee \neg d\}$.

b) $\{a\vee\neg c,\ \neg b,\ a\vee b\vee d,\ \neg b\vee\neg c\vee d,\ d\}$ es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\{a\vee\neg c,\ \neg a\vee\neg d,\ \neg c\vee d,\ a\vee d\}$.

c) $\{a \vee b \vee \neg c,\ a \vee c \vee \neg d,\ \neg b \vee \neg d,\ d\}$ es instatisfacible si, y sólo si, lo es $\{\neg b \vee \neg d,\ d\}$.

d) $\{\neg b\vee c\vee\neg d,\ a\vee c\vee d,\ \neg a\vee\neg b\vee d,\ a\vee\neg b,\ \neg a\vee\neg d\}$ es satisfacible si, y sólo si, lo es $\{a\vee c\vee d,\ \neg a\vee\neg d\}$.

e) $\{a\vee\neg b\vee c,\ \neg b,\ \neg a\vee b\vee c,\ a\vee\neg c\vee d,\ \neg a\vee\neg d\}$ es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\{a\vee\neg c\vee d,\ \neg a\vee\neg d\}$.

Ejercicio 25. Sean α, β y γ tales que para cualquier interpretación se tiene que $1 + I(\alpha)\cdot I(\beta) = I(\gamma)$. Entonces:

a) $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$ es una tautología.

b) $\alpha \wedge \beta$ y $\neg\gamma$ son equivalentes.

c) $\gamma \leftrightarrow \alpha \wedge \beta$ es una contradicción.

d) $\alpha \vee \beta \to \gamma$ es una contradicción.

e) $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ es insatisfacible.

Ejercicio 26. Sean α, β y γ tres fórmulas tales que $\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma$ es una contradicción. Entonces:

a) $\{\alpha,\ \beta\} \vDash \gamma$.

b) $\{\alpha,\ \gamma\} \vDash \beta$.

c) $\{\beta,\ \gamma\} \vDash \alpha$.

d) $\{\alpha,\ \neg\beta\} \vDash \gamma$.

e) $\{\alpha,\ \neg\beta\} \vDash \neg\gamma$.

Ejercicio 27. Indica para cuáles de los siguientes conjuntos es b consecuencia lógica.

a) $\{a \to b,\ \neg a\}$.

b) $\{\neg b \to \neg a,\ \neg a\}$.

c) $\{a \to c,\ a \wedge \neg b,\ \neg c\}$.

d) $\{a \vee b,\ \neg a \to c,\ \neg c\}$.

e) $a \to b,\ \neg a \to c,\ c\}$.

Ejercicio 28. Si Juan viene en tren, llegará antes de las 6. Si Juan viene en coche, llegará antes de las 6. Por tanto, tanto si viene en tren como si viene en coche, llegará antes de las 6.

Formaliza el anterior razonamiento en un lenguaje proposicional y comprueba que es correcto.

Ejercicio 29 (Junio 2011)**.** Sean α, β, γ fórmulas de un lenguaje proposicional, y Γ un conjunto de fórmulas. Demuestra que la fórmula

$$(\alpha \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma))$$

es una tautología.

Supongamos ahora que $\Gamma \vDash \alpha \to \gamma$. Demuestra que

$$\Gamma \vDash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$$

Ejercicio 30 (Septiembre 2011)**.** Sobre determinadas proposiciones lógicas α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 se sabe lo siguiente:

- α_2 es condición necesaria para α_1.
- $\alpha_2 \vee \alpha_3$ es condición suficiente para $\neg(\alpha_4 \vee \alpha_5 \vee \alpha_6)$.
- α_5 es condición suficiente para $\neg\alpha_1$.

Representa esta información mediante tres proposiciones lógicas β_1, β_2 y β_3 respectivamente, y a continuación demuestra que β_3 es consecuencia lógica de $\{\beta_1, \beta_2\}$.

Ejercicio 31 (Julio 2012)**.** Sea $\alpha = a \to (b \wedge \neg c)$ y $\beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$. Encuentra una fórmula γ tal que para cualquier interpretación I se verifique que $I(\gamma) = I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$. Calcula una forma clasulada de γ.

Ejercicio 32 (Septiembre 2012)**.** Sea $\Gamma = \{(p \to q) \to p,\ p \to \neg r,\ \neg(q \wedge \neg r)\}$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es consecuencia lógica de Γ?

a) $(q \to p) \to r$.

b) $p \wedge (\neg q \vee r)$.

c) $p \to q \vee r$.

d) q.

Ejercicio 33 (Julio 2013)**.** Utiliza el teorema de la deducción para probar que la siguiente fórmula es una tautología.

$$(a \to c) \to ((b \to c) \to (a \vee b \to c)).$$

Ejercicio 34 (Abril 2016)**.** Sea $\Gamma = \{a \to b \vee c,\ \neg(\neg a \to c),\ a \vee b\}$ ¿Cuál de las siguientes fórmulas es consecuencia lógica de Γ ?

a) $b \to c$.

b) $\neg a \wedge b$.

c) $\neg c \to a$.

d) $a \vee \neg b$.

Ejercicio 35 (Marzo 2014)**.** Utiliza el algoritmo de Davis-Putnam para determinar si el siguiente conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

$$\Sigma = \{d \vee a \vee \neg e, \neg d \vee a, d \vee \neg c \vee a \vee e, \neg d \vee b \vee a, d \vee \neg a \vee e, d \vee \neg a \vee \neg e, b \vee c \vee a, \neg d\}$$

Ejercicio 36 (Marzo 2014). De entre los siguientes problemas de consecuencia lógica ¿cuáles son ciertos?

a) $\{a \vee \neg b \to \neg c\} \vDash (c \vee a) \to (b \wedge a)$

b) $\{a \vee \neg b \to \neg c\} \vDash (\neg c \to a) \to (b \vee a)$

c) $\{(a \vee \neg b) \to (b \wedge \neg c)\} \vDash c \to (a \to b)$

Ejercicio 37 (Junio 2014). Estudia si:

$$\{(\neg a \to b) \wedge (c \to d),\, a \to c,\, (\neg b \wedge \neg c) \to d,\, b \to a,\, d \wedge \neg c \to a,\, a \to d\} \vDash a \wedge c \wedge d$$

Ejercicio 38 (Marzo 2015). Señala si cada una de las siguientes afirmaciones es equivalentes a

$$\Gamma \vDash \alpha \to (\beta \to \neg\gamma)$$

a) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \vDash \gamma$

b) $\Gamma \cup \{\beta\} \vDash \alpha \to \neg\gamma$

c) $\Gamma \cup \{\gamma\} \vDash \alpha \to \beta$

d) $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\} \vDash \neg\gamma$

e) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ es insatisfacible.

f) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \neg\gamma\}$ es satisfacible.

g) $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta, \gamma\}$ es insatisfacible.

h) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta \to \neg\gamma\}$ es satisfacible.

Ejercicio 39 (Marzo 2015). Indica en cada caso si el siguiente conjunto de fórmulas es insatisfacible

a) $\{a \to b,\, a \to (b \to c),\, \neg c\}$

b) $\{a \to b,\, (a \to b) \to c,\, \neg c\}$

c) $\{a \to b,\, c \to (a \to b),\, \neg c\}$

d) $\{\neg(a \to b),\, a \to (b \to c),\, c\}$

Ejercicio 40 (Marzo 2015). Dadas las fórmulas:

- $\alpha_1 = a \wedge b \to c \vee d$.
- $\alpha_2 = c \to ((b \to a) \wedge (b \to \neg a))$.
- $\alpha_3 = e \to (a \leftrightarrow \neg c)$.
- $\alpha_4 = a \vee (c \wedge (\neg b \to d))$.
- $\beta = (c \to b) \to (a \wedge d)$.

estudia si es cierto que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash \beta$. Caso de no ser cierto, da una interpretación que lo muestre.

Ejercicio 41 (Junio 2015). Clasifica la proposición lógica siguiente:

$$\Big((t \vee p)\neg q \to r\Big) \wedge \Big(\neg r \wedge (p \vee t)\Big) \to q \vee s.$$

Ejercicio 42 (Abril 2016).

$$\Gamma \vDash a \to (\neg b \vee c)$$

es equivalente a

a) $\Gamma \vDash b \to (\neg a \vee c)$

b) $\Gamma \cup \{a, b\} \vDash c$

c) $\Gamma \cup \{\neg a, b \vee c\}$ es insatisfacible.

d) $\Gamma \cup \{a, b, c\}$ es insatisfacible.

Ejercicio 43 (Abril 2016). Sea $\alpha = (a \to \neg b \wedge c) \wedge (b \vee d) \to ((b \to a) \to (c \to b))$. Estudia si α es tautología, contingente o contradicción.

Caso de ser contingente da una interpretación I para la que $I(\alpha)$ valga 1 y otra para la que $I(\alpha)$ valga cero.

Ejercicio 44. Estudia cuál de las dos siguientes ofertas es mejor:

- Formula un enunciado. Si es cierto, ganas 50 Euros. Si es falso, ganas una cantidad distinta de 50 Euros.
- Formula un enunciado. Tanto si es cierto como si es falso ganas más de 50 Euros.

Algunos ejercicios de mentirosos y veraces.

Estamos en una isla donde los habitantes se clasifican en dos grupos: los veraces, que formulan únicamente enunciados verdaderos, y los mentirosos, que formulan únicamente enunciados falsos.

Ejercicio 45. Llegamos a la isla, llamamos a una casa, nos abre un matrimonio y preguntamos. ¿Cuál, si alguno lo es, es veraz, y cuál, si alguno lo es es mentiroso?.

A lo que el marido responde: Ambos somos mentirosos.

¿A que grupo pertenece el marido y que grupo la esposa?.

Ejercicio 46. Ante la misma pregunta, en otra casa, nos responden: "Por lo menos uno de nosotros es un mentiroso".

¿A que grupo pertenece el marido y a que grupo pertenece la esposa?.

Ejercicio 47. En otra casa, la respuesta que obtuvimos fue: "Si soy veraz, entonces también lo es mi mujer".

Determina a que grupo pertenecen tanto el marido como la mujer.

Ejercicio 48. En una cuarta casa, la respuesta que dio el esposo fue: "Soy veraz si, y sólo si, lo es mi esposa". ¿Qué puede deducirse sobre el marido y sobre la mujer?.

Ejercicio 49. En esta ocasión, la pregunta es si hay oro en la isla. La respuesta que obtuvimos de dos personas, Ana y Bartolomé fueron:

- Ana: "Si Bartolomé y yo somos veraces, entonces hay oro en la isla".

- Bartolomé" Si Ana y yo somos veraces, entonces hay oro en la isla".

¿Hay oro en la isla?.

Demuestra que

$$\{\alpha \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma),\ \beta \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \to \gamma)\} \vDash \gamma$$

Ejercicio 50. Ante la misma pregunta, Carmen nos respondió: "Daniel es veraz y hay oro en la isla". Sin embargo, no recordamos la respuesta de Daniel. Sabemos que dijo que Carmen es mentirosa, pero no estamos seguros si dijo que había oro o que no había oro. Sí recuerdo que la respuesta fue suficiente para determinar si había o no oro. ¿Podrías tú saber si había o no oro?.

Ejercicio 51 (Septiembre 2012)**.** En la isla se encuentran reunidas unas cuantas personas.
En un momento de la reunión, una de las personas, Carlos, dice:

1. Aquí no hay más de tres personas.
2. Todos los que estamos en esta reunión somos mentirosos.

A continuación, otra persona, Dolores, dice:

1. Aquí no hay más de cuatro personas.
2. No todos los aquí presentes somos mentirosos.

Y posteriormente, Esteban, que también estaba allí presente, afirmó:

1. Aquí hay cinco personas.
2. En esta sala hay tres mentirosos.

¿Cuántas personas había en la isla y cuáles eran mentirosas o veraces?

Ejercicio 52. Demuestra que la siguiente fórmula es una tautología.

$$((p \leftrightarrow (q \wedge r)) \wedge (q \leftrightarrow (\neg p \wedge r))) \rightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

Deduce de que clase son Antonio, Benito y Celia a partir de las siguienes afirmaciones:
- Antonio: Benito y Celia son ambos veraces.
- Benito: Antonio es un mentiroso y Celia es veraz.

Ejercicio 53. Demuestra que

$$\{p \leftrightarrow \neg q,\ q \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg r)\} \vDash r$$

¿Qué podemos afirmar de Celia a partir de las afirmaciones siguientes?
- Antonio: Benito es un mentiroso.
- Benito: Antonio y Celia son de clases diferentes.

Ejercicio 54. ¿Qué podemos deducir de las siguientes afirmaciones?
- Eugenia: Si soy veraz y Francisco es un mentiroso, entonces hay oro en la isla.
- Francisco: Eso es falso.

Ejercicio 55. Llega a la isla un policía pues había un fugitivo y había sospechas de que hubiera pasado por dicha isla. Juntó a cinco habitantes: Antonio, Esperanza, Ismael, Óscar y Úrsula, que sabiendo el propósito del policía le dijeron:

- Antonio: El fugitivo estuvo aquí ayer.
- Esperanza: Si Úrsula es veraz, también lo es Antonio.
- Ismael: El fugitivo está en la isla.
- Óscar: El fugitivo no está en la isla.
- Úrsula: Ni estuvo ayer ni estuvo hoy.

El policía se quedó pensando pero no logró sacar nada en claro. Les pidió que dijeran algo más, e Ismael dijo entonces: *o Esperanza miente o Antonio dice la verdad.*

El policía pudo entonces llegar a una conclusión sobre si el fugitivo estaba o no en la isl y sobre que tipo de persona era cada uno de los entrevistados. ¿Podrías averiguar lo que dedujo el policía?