TEMA 5

Inducción y Recurrencia (básica)

Ejercicio 1. Demuestra por las siguientes propiedades:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ para $n \geq 1$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ para $n \geq 1$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ para $n \neq 1$.
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2$ para $n \geq 1$.
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)$.
6. $\sum\limits_{k=1}^{n} (k^5+k^7) = 2 \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^4$.
7. $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ para $n \geq 0$.
8. $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, para $n \geq 0$ y $a \neq 1$.
9. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$.
10. $\sum\limits_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1$ para $n \geq 1$.
11. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum\limits_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ para $n \geq 1$.
12. $\prod\limits_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \Pi_{k=1}^{n}(2k-1)$ para $n \geq 1$.
13. $(1+a)^n \geq 1 + a \cdot n$, para $n \geq 0$ y $a > -1$.
14. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ para $n \geq 2$.
15. $2^n \geq n^2$ para $n \geq 4$.
16. $n! > 2^n$ para $n \geq 4$.
17. $\frac{1}{2n} \leq \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ para $n \geq 1$.
18. $n(n^2+2)$ es múltiplo de 3 para $n \geq 0$.
19. $2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3 para $n \geq 0$.

20. $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6 para $n \geq 0$.
21. $n^2(n^4 - 1)$ es múltiplo de 60 para $n \geq 0$.
22. $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ es múltiplo de 8 para $n \geq 0$.
23. $7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64 para $n \geq 0$.
24. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es múltiplo de 133.
25. $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ es múltiplo de 2^n para $n \geq 1$.
26. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.
27. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Ejercicio 2. Comprueba las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 2+3+4 & = & 1+8 \\ 5+6+7+8+9 & = & 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 & = & 27+64 \\ 17+18+19+20+21+22+23+24+25 & = & 64+125 \end{array}$$

Induce de estas igualdades una regla y demuéstrala.

Ejercicio 3. Definimos la sucesión H_n como:

$$H_1 = 1; \qquad H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n},\ n \geq 2$$

Demuestra que

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$$

Ejercicio 4. La sucesión de los números de Fibonacci se define. de la siguiente forma:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para } n \geq 2.$$

Demuestra cada una de las siguientes propiedades:

1. $F_{n+2} > 2 \cdot F_n$ para todo $n \geq 2$.
2. $\sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ para todo $n \geq 0$.
3. $\sum_{k=0}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$.
4. 5 divide a F_{5n} para todo $n \geq 0$.
5. $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (F_n)^2 + (-1)^n$ para todo $n \geq 1$.
6. $(F_{n+1})^2 - F_{n+1} \cdot F_n + (F_n)^2 = (-1)^n$.
7. $\sum_{k=1}^{2n} F_{k-1} F_k = (F_{2n})^2$.
8. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k F_k = F_{2n-1} - 1$.
9. $mcd(F_n, F_{n+1}) = 1$ para todo $n \geq 0$.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obtén una expresión para A^n. Demuestra que

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Utiliza esto para demostrar que $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (F_n)^2 + (-1)^n$

Ejercicio 6. Resuelve las recurrencias siguientes:

- $x_0 = 1, x_1 = 1, x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 1, x_1 = 2, x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
- $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 3, x_n = 4x_{n-1} - 5x_{n-2} + 2x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
- $x_0 = 0, x_1 = 1, x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n$ para $n \geq 2$.
- $x_0 = 0, x_1 = 1, x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + 2n$ para $n \geq 2$.

Ejercicio 7. Obtén una recurrencia lineal homogénea para cada una de las sucesiones siguientes definidas para todo $n \geq 0$:

1. $x_n = 4n + 1$.
2. $x_n = 2^n + n$.
3. $x_n = 2^n + 3^n(n + 1)$.
4. $x_n = 2^n + 3^n$.
5. $sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
6. $2^{\frac{n}{2}} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

Ejercicio 8. Obtén una fórmula para la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

y demuéstrala por inducción.

Repite lo mismo para la suma

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

Ejercicio 9. (Junio 2011)

Demuetra por el método de inducción que para todo número natural n existe un número entero $k(n)$ tal que

$$7^n - 6 \cdot n + 143 = 36 \cdot k(n).$$

Ejercicio 10. (Junio 2014)

Sea x_n la sucesión definida como:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 3 \\ x_n &= 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^{n-1} \ (n \geq 2) \end{aligned}$$

1. Calcula los cinco primeros términos de la sucesión.
2. Calcula una expresión no recurrente para el término general x_n.
3. Comprueba que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $2^n \leq x_n$.
4. Demuestra por inducción que $x_n \leq 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.