TEMA 3

Lenguajes de primer orden (complementaria)

Ejercicio 1. *Consideramos el lenguaje de primer orden en el que sus elementos son:*

- Símbolos de constante: t, s, l.

- Símbolos de variable: x, y, z.

- Símbolos de predicado: P^1, S^1, E^1, G^2, Eq^2.

Sea ahora una $\mathcal{L}$-estructura en la que el universo es el conjunto de los astros celestes.

Completa la estructura asignándole un significado a las constantes y a los predicados, y expresa con este lenguaje los siguientes enunciados:

1. *Hay a lo sumo un planeta.*
2. *Hay exactamente un planeta.*
3. *Hay al menos dos planetas.*
4. *Hay a lo sumo dos planetas.*
5. *Hay exactamente dos planetas.*
6. *La Luna es el único satélite de la Tierra.*
7. *Si un astro gira alrededor de un planeta, entonces es un satélite.*
8. *La Tierra tiene un movimiento de rotación y uno de traslación alrededor del Sol.*
9. *Todo cuerpo celeste, o es estrella, o gira alrededor de una estrella.*

Ejercicio 2. *Calcula la interpretación de las siguientes fórmulas en cada una de las $\mathcal{L}$-estructuras que se dan:*

1. $\forall x \forall y E(f(x,y), f(y,x))$

   a) $D = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
   $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \textit{si } x+y \in D \\ x & \textit{en otro caso} \end{cases}$
   $E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(1,7),(7,1),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3)\}$

   b) $D = M_3(\mathbb{R})$
   $f(x,y) = xy$
   $E(x,y) \equiv x = y$

   c) $D = \mathbb{Z}$
   $f(x,y) = xy$
   $E(x,y) \equiv x = y$

2. $\forall x E(f(x,e), f(e,x))$

   a) $D = M_3(\mathbb{R})$
   $e = I_3$
   $f(x,y) = xy$
   $E(x,y) \equiv x = y$

   b) $D = M_3(\mathbb{R})$
   $e = O_3$
   $f(x,y) = xy$
   $E(x,y) \equiv x = y$

c) $D = M_3(\mathbb{R})$
$e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

3. $\forall x \exists y E(f(x, y), e)$

a) $D = M_3(\mathbb{R})$
$e = Id_3$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

b) $D = M_3(\mathbb{R})$
$e = O_3$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

c) $D = \mathbb{Z}$
$e = 1$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

4. $\forall x\,(E(f(x, x), e) \to E(x, e))$

a) $D = M_3(\mathbb{R})$
$e = Id_3$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

b) $D = M_3(\mathbb{R})$
$e = O_3$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

c) $D = \mathbb{Z}$
$e = 1,$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

d) $D = \mathbb{R}$
$e = 1,$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

e) $D = \mathbb{R}$
$e = 0,$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

f) $D = \mathbb{Z}_4$
$e = 0,$
$f(x, y) = xy$
$E(x, y) \equiv x = y$

Ejercicio 3. *Dadas las siguientes fórmulas*

$$\alpha = \forall x(P(x) \to P(a)), \qquad \beta = \forall x P(x) \to P(a)$$

estudia cuáles son universalmente válidas, satisfacibles y/o refutables.

Ejercicio 4. *Consideramos las siguientes sentencias:*

(1) $\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$

(2) $\forall x(Q(x) \to \exists y R(y, x))$

(3) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

(4) $\forall x \exists y R(x, y)$

(5) $\exists x \exists y \neg R(x, y)$

Encuentra, si existen, estructuras en las que:

1. *Las sentencias (1), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.*
2. *Las sentencias (1), (2) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.*
3. *Las sentencias (2) y (3) sean verdaderas y las restantes falsas.*
4. *Las sentencias (2), (3) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.*
5. *Las sentencias (2), (4) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.*
6. *Las sentencias (2), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.*
7. *Todas las sentencias sean verdaderas.*
8. *Todas las sentencias sean falsas.*

Ejercicio 5. *Dadas las siguientes sentencias:*

(1) $\forall x(\exists y R(x, y) \rightarrow P(x))$

(2) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

(3) $\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$

(4) $\exists x R(x, x)$

(5) $\exists x \neg R(x, x)$

Encuentra, si existen, estructuras en las que:

1. *Las sentencias (1), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.*
2. *Las sentencias (1), (2) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.*
3. *Las sentencias (1), (2) y (4) sean falsas y las restantes verdaderas.*
4. *Las sentencias (2) y (3) sean verdaderas y las restantes falsas.*
5. *Las sentencias (2), (3) y (4) sean verdaderas y las restantes falsas.*
6. *Las sentencias (2), (4) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.*
7. *Las sentencias (2), (3) y (5) sean verdaderas y las restantes falsas.*
8. *Todas las sentencias sean verdaderas.*
9. *Todas las sentencias sean falsas.*

Ejercicio 6. *Sea el lenguaje de primer orden con:*
- Símbolos de constante: c.
- Símbolos de variable: x, y, z.
- Símbolos de predicado: P^1, Q^1, R^2, S^2.
Consideramos la estructura cuyo universo es $\mathbb{Z}_5$, *e interpretamos cada uno de los símbolos como sigue:*

- $c = 0$.
- $P = \{0, 1, 2\}$.
- $Q = \{2, 4\}$.
- $R = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$.

- $S = \{(0,2),(2,0),(2,2)\}$.

Para cada una de las fórmulas siguientes, con variables libres, encuentra las valoraciones que las hacen ciertas. Dicho de otra forma, resuelve la ecuación $I(\varphi) = 1$.

1. $P(x) \wedge Q(x)$
2. $P(x) \wedge Q(y)$
3. $P(x) \vee Q(x)$
4. $P(x) \vee Q(y)$
5. $P(x) \to Q(x)$
6. $P(x) \to Q(y)$
7. $P(x) \leftrightarrow Q(x)$
8. $P(x) \vee \neg Q(x)$
9. $\neg R(x,y)$
10. $R(x,y) \wedge S(x,y)$
11. $P(x) \wedge \neg Q(x)$
12. $((P(x) \vee Q(x)) \wedge R(x,y))$
13. $\neg P(x) \wedge \neg Q(x)$
14. $\exists z(R(x,z) \wedge S(y,z))$
15. $\neg P(x) \vee \neg Q(x)$
16. $\forall z(R(x,z) \to S(y,z)$
17. $\exists x R(x,y)$
18. $\exists x R(y,x)$
19. $\exists x(R(x,y) \wedge S(x,y))$
20. $\exists z(R(x,z) \vee P(y))$
21. $\forall x(P(x) \to R(x,y))$
22. $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to \neg R(x,y))$
23. $\exists x(P(x) \wedge S(x,y))$
24. $\exists x(Q(x) \vee R(x,y))$
25. $\forall x(\exists y R(x,y) \to R(x,z))$
26. $\forall x(R(x,z) \to \exists y R(x,y))$
27. $\forall x(R(x,z) \to \exists y S(x,y))$
28. $((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y R(x,y))$

Ejercicio 7. *Estudia si la siguiente fórmula es o no universalmente válida*

$$P(x) \to (\forall x \neg P(x) \to \neg P(f(a)))$$

Ejercicio 8. *Dadas las siguientes fórmulas:*

$$\varphi = \forall x \exists y P(x,y); \qquad \psi = \exists x \forall y P(x,y)$$

Encuentra una interpretación en la que ambas sean ciertas y otra en la que φ *sea cierta y* ψ *sea falsa. ¿Es cierto que* $\{\varphi\} \vDash \psi$*?*

Ejercicio 9.
Describe todas las estructuras en las que la fórmula siguiente es válida:

$$R(x) \to \forall x R(x)$$

Ejercicio 10. *Consideremos el lenguaje de primer orden* $\mathcal{L}$ *definido por* $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{R} = \{P\}$ *y la* $\mathcal{L}$*-estructura* $\mathcal{E}$ *dada por:*

Dominio $D = \mathbb{Z}_6$.

Constantes $a = 2$.

Funciones $f = (x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$.

Predicados $P(x, y) \equiv x = y$.

Sea v *la valoración dada por* $v(x_1) = 2, v(x_2) = 0, v(x_3) = 0, v(x_4) = 3$.
Interpreta las siguientes fórmulas:

1. $\neg\exists x_1 \forall x_2 P(f(x_1, x_4), a)$
2. $\forall x_1 (P(x_1, g(x_1, x_1)) \leftrightarrow P(g(a, x_1), f(a, a)))$

Ejercicio 11. *Dada la fórmula*

$$R(x) \leftrightarrow \exists x R(x),$$

se pide:

1. *Prueba que no es universalmente válida.*
2. *Encuentra una estructura donde la fórmula no sea válida.*
3. *¿Es satisfacible la fórmula en cualquier estructura?*
4. *¿Es refutable en toda estructura?*

Ejercicio 12. *Interpreta la fórmula*

$$\forall x \forall y (P(x, y) \to \neg P(y, x))$$

en las siguientes estructuras

1. $D = \{0, 1, 2, 3\}$
   $P = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
2. $D = \mathbb{R}$
   P *es la relación binaria "x es estrictamente menor que y"*
3. $D = \mathbb{N}$
   P *es la relación binaria "x es múltiplo de y"*

Ejercicio 13. *Dada la fórmula*

$$P(x) \to \forall x (P(x) \vee \neg P(f(x)))$$

señala para cuáles de las siguientes interpretaciones es verdadera.

a) $\begin{cases} D = \mathbb{Z}_4 \\ f(x) = x + 1 (\mathit{mod}\, 4) \\ P = \{0, 1, 3\} \\ v(x) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} D = \mathbb{Z}_4 \\ f(x) = x + 1 (\mathit{mod}\, 4) \\ P = \{0, 1, 3\} \\ v(x) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} D = \mathbb{Z} \\ f(x) = x + 1 \\ P(x) \equiv x \textit{ es par} \\ v(x) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} D = \mathbb{Z} \\ f(x) = x + 1 \\ P(x) \equiv x \textit{ es par} \\ \nu(x) = 1 \end{cases}$

Ejercicio 14. *Para el lenguaje de primer orden correspondiente se considera la estructura:*

$$\begin{array}{l} D = \mathbb{N} \\ R(x, y) \equiv \text{“}x \textit{ es múltiplo de } y\text{''} \\ a = 0 \\ b = 1 \end{array}$$

Determina cuáles de las siguientes fórmulas son verdaderas bajo esta interpretación:

a) $R(a, b)$

b) $\exists y \neg R(y, a)$

c) $\forall x R(b, x)$

d) $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$

Ejercicio 15. *Señala las afirmaciones correctas:*
La fórmula

1. $\exists x (\forall y (P(y) \to \exists z R(y, z) \wedge \neg R(x, y))) \to R(a, b)$.
2. $\forall y R(y, b) \to \forall x (P(x) \to \exists y R(x, y)) \wedge \exists x \neg \forall y R(x, y)$.
3. $\forall x (R(x, z) \to \exists y S(x, y))$.
4. $\forall x \exists y (P(x, y) \to \neg P(f(y), x))$.
5. $\forall x P(x) \wedge \forall y Q(x, b) \to \forall x (P(x) \wedge Q(x, y))$.

es satisfacible y refutable.

Ejercicio 16. *La fórmula* $\forall x (R(x, z) \to \neg \exists y R(g(x, y), z))$

1. *Es válida en la estructura* $D = \mathbb{N};\ g(x, y) = 2x + y;\ R(x, y) \equiv x < y$.
2. *Es satisfacible en la estructura* $D = \mathbb{N};\ g(x, y) = 2x + y;\ R(x, y) \equiv x < y$.
3. *Es satisfacible en la estructura* $D = \mathbb{Z};\ g(x, y) = x + 2y;\ R(x, y) = x + y + 1 (\text{mód } 2)$.
4. *Es satisfacible y refutable en la estructura* $D = \mathbb{Q};\ g(x, y) = x^2 + y;\ R(x, y) \equiv x \cdot y = 1$.
5. *Es refutable en la estructura* $D = \mathbb{Z}_4;\ g(x, y) = x + 2y;\ R(x, y) \equiv x^2 + y^2 = 1$.

Ejercicio 17. *Dado el lenguaje de primer orden con símbolos de constantes* a, b*, símbolos de función* d, s, p *y símbolos de predicado* Pr, P, M*, y la estructura siguiente:*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Constntes $a = 0$, $b = -1$.

Funciones $d(x) = 2x$, $s(x, y) = x + y$, $p(x, y) = x \cdot y$.

Predicados $Pr(x) \equiv x$ *es primo,* $P(x) \equiv x$ *es par,* $M(x, y) \equiv x < y$.

1. *La fórmula* $\forall x (Pr(x) \to \neg P(x) \wedge \neg M(p(b, d(b)), x))$ *significa que no hay primos pares mayores que* 2.
2. *La fórmula* $\forall x \exists y (\neg (M(s(x, y), a) \vee M(a, s(x, y))) \to \neg (M(x, p(b, y)) \vee M(p(b, y), x)))$ *significa que si* $x + y = 0$ *entonces* $x = -y$.
3. $x = y$ *lo podemos decir mediante la fórmula* $\neg M(x, y) \wedge \neg M(y, x)$.
4. *La fórmula* $\forall x \exists y (\neg M(x, p(x, y)) \wedge \neg M(p(x, y), x)$ *significa que hay un elemento neutro para el producto.*

5. *Para decir que todo número par es el doble de un número lo podemos hacer con la fórmula*
$\forall x(\forall y \neg(M(x, d(y)) \wedge \neg M(d(y), x)) \to \neg P(x))$.

Ejercicio 18.

1. *Si α es satisfacible y refutable en una estructura, y x es una variable libre en α, entonces $\exists x \alpha$ es válida en esa estructura.*
2. *Si α es satisfacible y refutable, y x es libre en α entonces $\forall x \alpha$ es una contradicción.*
3. $\exists x(\alpha \vee \beta) \vDash \exists x \alpha \vee \beta$.
4. $\exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x \alpha \wedge \exists x \beta$ *es universalmente válida.*
5. *Si x no es libre en α entonces $\alpha \to \forall x \alpha$ es universalmente válida.*

Ejercicio 19. *Sea* $\alpha = \forall x(P(x, z) \to \exists x \forall z R(g(x, z), g(b, x)) \wedge Q(x))$. *Consideramos la estructura*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Constantes $b = 3$.

Funciones $g(x, y) = 3x + 2y$.

Predicados $P(x, y) \equiv x + y = 1$, $Q(x) \equiv x$ *es primo,* $R(x, y) \equiv x + y$ *es impar.*

Indica para cuál de las siguientes valoraciones la fórmula α se interpreta como cierta.

1. $v(x) = 2,\ v(z) = 3$
2. $v(x) = 5,\ v(z) = 3$
3. $v(x) = 5,\ v(z) = -3$
4. $v(x) = 0,\ v(z) = 0$
5. $v(x) = -3\ v(z) = -4$

Ejercicio 20. *(Junio 2011)*
Tenemos los predicados siguientes:

$P(x)$	*significa que*	x *es pájaro,*
$I(x)$	*significa que*	x *es insecto,*
$C(x, y)$	*significa que*	x *se come a* y.

Utiliza estos predicados para traducir cada una de las oraciones siguientes a un lenguaje de primer orden:

a) *Hay pájaros que solo comen insectos.*

b) *Todos los pájaros comen insectos.*

Ejercicio 21. *(Junio 2011)*
Sea el lenguaje de primer orden dado por $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{F} = \{f^1\}$ *y* $\mathcal{R} = \{Q^2\}$.

a) *Interpreta las fórmulas*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \forall x \exists y Q(x, f(y)), \\ \alpha_2 &= Q(x, f(a)) \to \exists y \exists z Q(y, z), \\ \alpha_3 &= Q(x, f(a)) \to \forall y \forall z Q(y, z), \\ \alpha_4 &= \exists x \exists y(\neg Q(x, y) \wedge Q(f(x), f(y))), \end{aligned}$$

utilizando la estructura $\mathcal{E}$ dada por:

- $D = \mathbb{Z}_6$.
- $a = 5$.
- $f(x) = x^2$.
- $Q = \{(0, 0),\ (1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (4, 4),\ (5, 5)\}$.

y la valoración v dada por $v(x) = v(y) = v(z) = 3$.

b) Para cada una de las fórmulas anteriores, estudia si es válida en $\mathcal{E}$ y si es universalmente válida.

Ejercicio 22. *(Septiembre 2011)*
Dada la fórmula $\alpha = \forall x \exists y (P(x,y) \to P(y,x)) \to \exists x \exists y (P(y,x) \to \neg P(x,y))$*, estudia si* α *es universalmente válida, es satisfacible y refutable o es una contradicción.*

Ejercicio 23. *(Septiembre 2011)*
Sea el lenguaje de primer orden dado por $\mathcal{C} = \{a\}$*,* $\mathcal{V} = \{x, y\}$*,* $\mathcal{F} = \{f^2\}$ *y* $\mathcal{R} = \{P^1\}$*.*

a) Interpreta las fórmulas

$$\alpha_1 = \forall x (P(x) \to \exists y P(f(x,y))),$$

$$\alpha_2 = P(y) \to \exists x (P(x) \wedge P(f(x,a))),$$

utilizando la estructura $\mathcal{E}$ dada por:

- $D = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$.
- $a = 7$.
- $f(x,y) = x + y$.
- $P(x) \equiv x$ *es primo.*

y la valoración v dada por $v(x) = v(y) = 11$.

b) Para cada una de las fórmulas anteriores, estudia si es válida en $\mathcal{E}$ y si es universalmente válida.

Ejercicio 24. *(Julio 2012)*
Sea $\alpha = \neg \exists x \forall y (P(x,y) \to P(x,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z))$*. Estudia si α es universalmente válida, satisfacible y refutable o contradicción.*

Ejercicio 25. *(Septiembre 2012)*
Sean $\alpha_1 = \forall y (Q(a,y) \to \exists z (P(z) \wedge R(z,y)))$ *y* $\alpha_2 = \exists x R(x,a) \to \forall z \exists y (R(z,y) \wedge Q(y,z))$ *dos fórmulas de un lenguaje de primer orden, y consideramos la estructura siguiente:*

- *Dominio: Números naturales* $(\mathbb{N})$.
- *Asignación de constantes:* $a = 1$.
- *Asignación de predicados:* $P(x) \equiv x$ *es primo;* $Q(x,y) \equiv x < y$*;* $R(x,y) \equiv x | y$.

Estudia si las fórmulas α_1 y α_2 se interpretan como verdaderas o falsas en esta estructura.

Ejercicio 26. *(Junio 2014)*
Demuestra:

1. *que la fórmula* $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$ *es satisfacible y refutable;*
2. *que la fórmula* $\forall x R(x) \wedge \exists y Q(y) \leftrightarrow \exists y \forall x [R(x) \wedge Q(y)]$ *es universalmente válida.*

Ejercicio 27. *(Septiembre 2014)*
Sea $\alpha = \forall x [P(x, f(x)) \to \exists y P(a,y)]$ *y sea $\mathcal{E}$ la estructura dada por:*

$$\begin{array}{l} D = \mathbb{N} \\ a = 0 \\ f(x) = x + 1 \\ P(x,y) \equiv x < y \end{array}$$

(es decir, $P(x,y)$ *se interpreta como verdadero cuando* $x < y$*).*

1. *Calcula el valor de verdad de α en la estructura dada.*
2. *Prueba que α es satisfacible y refutable.*

Ejercicio 28. *(Junio 2015)*
Sea α la siguiente fórmula:

$$\alpha = \forall y \Big(P(a,y) \to \forall y \exists x P(x,y) \Big)$$

Calcula el valor de verdad de α en cada una de las estructuras siguientes:

- *Estructura* $\mathcal{E}_1$.
  - *Dominio:* $\mathbb{N}$.
  - *Asignación de constantes:* $a = 0$.
  - *Asignación de predicados:* $P(x, y) \equiv y = x + 1$.
- *Estructura* $\mathcal{E}_2$.
  - *Dominio:* $\mathbb{Z}_9$.
  - *Asignación de constantes:* $a = 0$.
  - *Asignación de predicados:* $P(x, y) \equiv y = x + 1$.

Ejercicio 29. *(Septiembre 2015)*
Sea $\alpha = \forall x(\forall y R(y, f(x)) \to Q(x)) \vee \exists x R(x, x)$.
Estudia si α *es universalmente válida, contradicción o contingente (satisfacible y refutable).*

Ejercicio 30. *(Diciembre 2015)*
Sea $\alpha = \forall x(\forall y Q(f(y), x) \to P(x)) \vee \exists x Q(x, x)$.

1. *Consideramos la estructura* $\mathcal{E}$*:*
   - *Dominio o Universo:* $D^{\mathcal{E}} = \mathbb{N}$.
   - *Asignación de símbolos de función:* $f^{\mathcal{E}}(x) = x + 1$.
   - *Asignación de símbolos de predicado:* $P^{\mathcal{E}}(x) \equiv x$ *es par;* $Q^{\mathcal{E}}(x.y) \equiv x > y$.

   Calcula el valor de verdad de α *en la estructura* $\mathcal{E}$.
2. *Estudia si* α *es universalmente válida, contingente (es decir, satisfacible y refutable) o contradicción.*

Ejercicio 31. *(Mayo 2016) Dada la fórmula* $\alpha = \forall x \forall y(P(x, f(y)) \to \exists z(P(f(x), y) \wedge Q(z))$ *da, si es posible, una estructura donde* α *se interprete como verdadera y otra donde* α *se interprete como falsa.*

Ejercicio 32. *(Mayo 2016) Consideramos el lenguaje de primer orden con cuatro símbolos de constante* a, b, c, e*, tres símbolos de función* m^1, s^2, p^2 *y tres símbolos de predicado* Q^1, M^2, E^2.
Damos la estructura siguiente:

- *Dominio:* $D = \mathbb{R}$.
- *Constantes:* $a = 0$*,* $b = 1$*,* $c = -1$*,* $e = e$.
- *Funciones:* $m(x) = |x|$*,* $s(x, y) = x + y$*,* $p(x, y) = x \cdot y$.
- *Predicados:* $Q(x) \equiv x \in \mathbb{Q}$*,* $M(x, y) \equiv x < y$*,* $E(x, y) \equiv x = y$.

Expresa con este lenguaje los siguientes enunciados:

1. *El número* e *está entre 2 y 3.*
2. $|x| < y$ *si, y sólo si,* $-y < x < y$.
3. *Tanto* e *como* e^2 *son irracionales.*
4. *El doble de un número racional es racional.*
5. *El valor absoluto de un número es menor o igual que el propio número.*
6. *Entre dos números racionales hay un número irracional.*
7. *Todo número positivo tiene raíz cuadrada.*
8. *Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas distintas.*
9. *La función* $f(x) = 2x$ *es estrictamente creciente.*

Ejercicio 33. *(Julio 2016) Dado un lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante* a, b*, y dos símbolos de predicado binarios* E, R *consideramos la estructura siguiente:*

- *Dominio:* $D = \mathbb{N}$.
- *Asignación de constantes:* $a = 0$, $b = 1$.
- *Asignación de predicados:* $E(x, y) \equiv x = y$; $R(x, y) \equiv x$ *es múltiplo de* y.

Determina el valor de verdad de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $R(a, b)$.
2. $\forall x R(a, x)$.
3. $\forall x \forall y (R(x, y) \to \neg E(x, y))$.
4. $\forall x (\exists y (R(x, y) \wedge \forall z (R(y, z) \to E(z, y) \vee E(z, b))))$.

Ejercicio 34. *(Septiembre 2016)*
Interpreta cada una de las siguientes fórmulas en cada una de las estructuras que se describen:

1. $\exists x \forall y P(f(y), x)$
2. $\forall x \exists y P(f(y), x)$
3. $\forall y \exists x P(f(y), x)$

Estructura 1	***Estructura 2***	***Estructura 3***
$D_1 = \mathbb{R}$	$D_2 = \mathbb{Z}_5$	$D_3 = \mathbb{Z}_2$
$f(z) = z^2$	$f(z) = z^2$	$f(z) = z^2$
$P(x, y) \equiv x + y = 0$	$P(x, y) \equiv x + y = 0$	$P(x, y) \equiv x + y = 0$

¿Es alguna de ellas universalmente válida? Razona la respuesta.