

TEMAS 5 y 6

Inducción, recurrencia y grafos

Ejercicio 1. Sea x_n la sucesión siguiente:

$$x_n = \sum_{k=0}^n 2^{n-k} \cdot 3^k; \quad n \geq 0.$$

1. Calcula $x_n - 2x_{n-1}$ y $x_n - 3x_{n-1}$ para cualquier $n \geq 1$.
2. Obtén una expresión no recurrente del término x_n .

Ejercicio 2. Demuestra por inducción que para $n \geq 1$ se tiene que:

$$3^n + 3^{n-1} \cdot 5 + \dots + 3 \cdot 5^{n-1} + 5^n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 3^{n+1}).$$

Ejercicio 3. Dadas las siguientes sucesiones encuentra para cada una de ellas una relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes:

1. $x_n = n^2 + 1$.
2. $x_n = n - (-1)^n$.
3. $x_n = n \cdot 2^n - n^2 \cdot 5^n + 3$.
4. $x_n = \sin \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2}$.
5. $x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$.

Ejercicio 4.

1. Encuentra dos grafos no isomorfos para los que el cuadrado de su matriz de adyacencia sea:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Dibuja, si es posible, un grafo plano con 10 vértices y 24 lados.
3. Dibuja, si es posible, un grafo bipartido plano con 11 vértices y 18 lados.
4. Un árbol tiene 8 vértices de grado 4, 13 vértices de grado 3, 20 vértices de grado 2, 25 vértices de grado 1 y uno del que no conocemos el grado. ¿Cuál es el grado de ese vértice?
5. ¿Puede haber un grafo cuya sucesión de grados sea 0, 8, 10, 13, 21, 10, 11, 0, 0, ... ?
6. ¿Cuál es el menor número de vértices que puede tener un grafo (sin lazos ni lados paralelos) con 5000 lados?