TEMA 1

Álgebras de Boole. Funciones booleanas (básica)

Ejercicio 1. Consideramos el álgebra de Boole de los divisores de 2310.

1. Calcula los átomos y los coátomos.
2. Evalúa las expresiones:
   $21 \vee (165 \wedge \overline{77})$, $770 \wedge \overline{(3 \vee 14)}$, $\overline{15 \vee 110}$, $\overline{15} \wedge \overline{110}$, $385 \vee (1155 \wedge 42)$, $(385 \vee 1155) \wedge (385 \vee 42)$.
3. Expresa 5, 35, 154, 231, 1155 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

Ejercicio 2.

1. Sea B un álgebra de Boole con 32 elementos. ¿Cuántos átomos tiene?
2. Sea B un álgebra de Boole cuyos átomos son a_1, a_2, a_3 y a_4. ¿Cuáles son sus coátomos?

Ejercicio 3. Calcula la forma normal canónica disyuntiva (es decir, suma de minterms) y simplifica las funciones booleanas dadas por las tablas

x	y	z	f	g
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Ejercicio 4 (Junio 2015)**.** Determine un número natural n sabiendo que el conjunto $D(n)$ de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales, y que 105 y 42 son dos coátomos. Además obtenga todos los $x \in D(n)$ tales que $\overline{105}\ \ x = 42$.

Ejercicio 5. Se desea construir un circuito que tenga como entrada cuatro líneas que suministran los dígitos de un número en binario $n = (a_3a_2a_1a_0)_2$, y que tenga como salida 1 si n es múltiplo de 3 ó de 4, y cero en otro caso. Obtén la expresión booleana de una función f que rige el comportamiento de dicho circuito. Calcula su forma normal canónica disyuntiva, y simplifica la expresión obtenida.

Ejercicio 6 (Junio 2014)**.** Sean a y b dos números naturales menores que cuatro cuyas representaciones binarias son $(xy)_2$ y $(zt)_2$ respectivamente.

Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booleana definida por

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentra una expresión booleana como suma de productos lo más simplificada posible para representar la función f, y una expresión booleana como producto de sumas para la función $\overline{f}$.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ la función dada por

$$f(x, y, z, t, u) = \overline{x}yztu + xy\overline{z}\overline{t}\overline{u} + xyzt\overline{u} + xz(\overline{y}u \oplus ut) + (x \downarrow u)yzt + xy\overline{t}(z \oplus u)$$

Calcula una expresión reducida de f como suma de productos, y expresa $\overline{f}$ usando únicamente los operadores `producto` y `complemento`.

Ejercicio 8. Sean $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ y $g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ las funciones definidas por $f(x,y,z,t) = x\,y + \overline{z\,\overline{t}} + (x+\overline{y})(\overline{z}+t)$ y $g(x,y,z,t) = x + (y\,\overline{z}) + \overline{t}(x+z)$.

1. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de las funciones f, g, $f+g$, $f\,\overline{g}$.
2. Expresa f y g usando únicamente las funciones suma y complementario.
3. Expresa $f\,g$ usando únicamente el operador $\uparrow$ (NAND).
4. Simplifica las expresiones obtenidas en el apartado 1 de este ejercicio.

Ejercicio 9. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la aplicación $f(x,y,z) = (x \uparrow y) + z$.

Ejercicio 10. Expresa, utilizando sólo la función $\downarrow$, la aplicación $f(x,y,z) = (x+z) \cdot y$.

Ejercicio 11 (Septiembre 2016)**.** Dadas las funciones booleanas $f, g : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dadas por:

$$f(x,y,z) = (x \uparrow y) \uparrow z; \qquad g(x,y,z) = (x \downarrow y) \downarrow z$$

1. Calcula las respectivas formas canónicas en mintérminos y expresiones minimales como suma de productos.
2. Prueba que $g \leq f$.
3. Calcula una expresión minimal como producto de sumas de

$$h(x,y,z,t) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } t = 0 \\ g(x,y,z) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 12. Un comité formado por tres personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar SÍ"pulsando un botón. Diseña una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoría de "votos SÍ".

Ejercicio 13. Calcula la forma normal disyuntiva y conjuntiva, y simplifica ambas expresiones, para la función cond : $\mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dada por la tabla siguiente:

c	a	b	cond
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Nota como esta función es el análogo al condicional *if-then-else*. En el caso de que se de la condición c devuelve a, y si no se da, devuelve b.

Ejercicio 14. Estudia cuál de los siguientes conjuntos de operadores es funcionalmente completo.

a) $\{+, \cdot\}$.

b) $\{+, \oplus\}$.

c) $\{\oplus, \overline{(\,)}\}$.

d) $\{\oplus, +, \cdot\}$.

e) $\{\oplus, +\}$.

f) $\{\oplus, 1, +\}$.

Ejercicio 15. Muestra si es posible una red lógica para la puerta lógica `XOR`

1. Usando únicamente puertas `AND` y `NOT`.
2. Usando únicamente puertas `AND` y `OR`.
3. Usando únicamente puertas `NOR`.