ALGORÍTMICA

Capítulo 1: La Eficiencia de los Algoritmos

Ejercicios prácticos

1. Demostrar

 (a) $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow \exists c, d \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}/n \geq n_0, d * g(n) \leq f(n) \leq c * g(n)$

 (b) $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

2. Demostrar

 (a) $Lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

 (b) $Lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \quad pero \quad f(n) \notin \Theta(g(n))$

 (c) $Lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \quad pero \quad f(n) \notin \Theta(g(n))$

 (d) $\Theta(f^2(n)) = \Theta(f(n))^2$

3. Demostrar

 (a) $\forall k > 0,\ k * f \in O(f)$

 (b) Si $f \in O(g)$ y $h \in O(g)$ entonces $(f + h) \in O(g)$,
 Si $f \in O(g)$ entonces $(f + g) \in O(g)$

 (c) Si $f \in O(g)$ y $g \in O(h)$ entonces $f \in O(h)$

 (d) $n^r \in O(n^5)$ si $0 \leq r \leq 5$

 (e) $n^k \in O(b^n)\ \forall b > 1$ y $k \geq 0$

 (f) $log_b n \in O(n^k)\ \forall b > 1$ y $k > 0$

 (g) $Max(n^3, 10n^2) \in O(n^3)$

 (h) $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1}), \forall k \in \aleph$

 (i) $log_a n \in \Theta(log_b n)\ \forall a, b > 1$

 (j) $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Theta(logn)$

 (k) $f \in O(g) \Leftrightarrow \frac{1}{f} \in \Omega(\frac{1}{g})$

 (l) $f(n) = c * g(n)\ c > 0 \Rightarrow \Theta(f) = \Theta(g)$

4. Demostrar

 (a) $f(n) \in O(n^a)$ y $g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n)g(n) \in O(n^{a+b})$

 (b) $f(n) \in O(n^a)$ y $g(n) \in O(n^b) \Rightarrow f(n) + g(n) \in O(n^{max(a,b)})$

5. Encontrar el menor entero k tal que $f(n) \in O(n^k)$:

 (a) $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$

 (b) $f(n) = \frac{1}{(n+1)}$

 (c) $f(n) = \frac{1}{(n-1)}$

 (d) $f(n) = (n - 1)^3$

 (e) $f(n) = \frac{(n^3+2n-1)}{(n+1)}$

 (f) $f(n) = \sqrt{n^2 - 1}$

6. Demostrar por inducción que existe $c > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \geq c * n^3$$

7. Sean $f(n)$ y $g(n)$ asintóticamente no negativas. Demostrar la veracidad o falsedad de :

 (a) $Max(f(n), g(n)) \in O(f(n) + g(n))$

 (b) $Max(f(n), g(n)) \in \Omega(f(n) + g(n))$

8. Expresar en notación $O(\cdot)$ el orden de un algoritmo cuyo $T(n)$ fuese $f(n)$ si:

 (a) $f(n) = log(n!)$

 (b) $f(n) = n!$

9. Dadas las siguientes funciones de n:

   (a) $f_1(n) = n^2$

   (b) $f_2(n) = n^2 + 1000n$

   (c) $f_3(n) = \begin{cases} n & n\, impar \\ n^3 & n\, par \end{cases}$

   (d) $f_4(n) = \begin{cases} n & n \leq 100 \\ n^3 & n > 100 \end{cases}$

   Indicar para cada par (i, j) si se da o no: $f_i(n) \in O(f_j(n))$ o si $f_i(n) \in \Omega(f_j(n))$ (o ambos)

10. Decir cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y demostrarlo:

    (a) $2^{n+1} \in O(2^n)$

    (b) $(n+1)! \in O(n!)$

    (c) $\forall f : \aleph \to \Re^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow f^2(n) \in O(n^2)$

    (d) $\forall f : \aleph \to \Re^+,\ f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$

11. Sea x un número real, $0 < x < 1$. Ordenar las tasas de crecimiento de las siguientes funciones:

    $nlog(n)$, n^8, n^{1+x}, $(1+x)^n$, $(n^2 + 8n + log^3(n))^4$, $\frac{n^2}{log(n)}$

    Demostrar las respuestas.

12. Demostrar que:

    - $log(n) \in O(\sqrt{n})$ pero $\sqrt{n} \notin O(log(n))$

1.- El tiempo de ejecucion de un algoritmo A esta descrito por la recurrencia

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

otro algoritmo B tiene un tiempo de ejecucion dado por,

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

¿cual es el mayor valor de la constante a que hace a B asintoticamente mas rapido que A?

2.- Resolver las siguientes recurrencias

a) $T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$	$n \geq 2$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
b) $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$	$n \geq 2$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
c) $T(n) = 5T(n-1) + 8T(n-2) + 4T(n-3)$	$n \geq 3$, $T(0) = 0$, $T(1) = 1$
d) $T(n) = 2T(n-1) + 1$	$n \geq 1$, $T(0) = 0$
e) $T(n) = 2T(n-1) + n$	$n \geq 1$, $T(0) = 0$
f) $T(n) = 2T(n-1) + n + 2^n$	$n \geq 1$, $T(0) = 0$
g) $T(n) = 4T(n/2) + n$	$n > 2$, $T(1) = 1$, $T(2) = 6$
h) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$	$n > 1$, considerar $c_i > 0$ $\forall i$.
i) $T(n) = 2T(n/2) + n \cdot \log(n)$	$n > 1$, considerar $c_i > 0$ $\forall i$
j) $T(n) = 3T(n/2) + cn$	$n > 1$, considerar c constante y $c_i > 0$ $\forall i$
k) $T(n) = 2T(n/2) + \log(n)$	$n \geq 2$, $T(1) = 1$
l) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log(n)$	$n \geq 4$, $T(2) = 1$
m) $T(n) = 5T(n/2) + (n\log(n))^2$	$n \geq 2$, $T(1) = 1$
n) $T(n) = T(n/2) \cdot T^2(n/4)$	$n \geq 4$, $T(1) = 1$, $T(2) = 4$
o) $T(n) = n \cdot T^2(n/2)$	$n > 2$, $T(1) = 6$, $T(2) = 72$
p) $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n$	$n \geq 4$, considerar $c_i > 0$ $\forall i$
q) $T(n) = 2T(n-1) + 3^n$	$n \geq 1$, considerar $c_i > 0$ $\forall i$