Solución de los Problemas de la Segunda Relación

Ecuaciones Recurrentes

2.h) Demostrar: $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1}), \forall k \in \aleph$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \leq n \cdot n^k = n^{k+1}$$

$$Sean \left.\begin{matrix} n_0 = 1 \\ c = 1 \end{matrix}\right\} \forall n \geq n_0, \sum_{i=1}^{n} i^n \leq c \cdot n^{k+1}$$

$$Luego \sum_{i=1}^{n} i^k \in O(n^{k+1})$$

2.h) Demostrar: $\sum_{i=1}^{n} i^k \in \Theta(n^{k+1}), \forall k \in \aleph$

Por inducción sobre n

$n = 1 \quad \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k = 1 = 1^{k+1} = n^{k+1} \Rightarrow$ *se cumple*

Supongamos que es cierto para n $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^k \in \Omega(n^{k+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \,/\, \forall n \geq n_0, \sum_{i=1}^{n} i^k \geq c \cdot n^{k+1}$

$¿n+1?$

$\sum_{i=1}^{n+1} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^k + (n+1)^k \underset{hip.}{\geq} c \cdot n^{k+1} + (n+1)^k \geq c \cdot n^{k+1}.$ *Con lo que* $\sum_{i=1}^{n+1} i^k \in \Omega(n^{k+1})$

2.j) $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Theta(\log_2 n)$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in O(\log_2 n)$$

Por inducción :

$$n = 2 \quad \sum_{i=1}^{n} i^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2 \cdot 1 = 2 \cdot \log_2 2$$

$$Sup.\ para\ n \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, c > 0 \ / \ \forall n \geq n_0, \sum_{i=1}^{n} i^{-1} \leq c \cdot \log n$$

$¿n+1?$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} i^{-1} + \frac{1}{n+1} \underset{hip.}{\leq} c \cdot \log n + \frac{1}{n+1} \leq c \cdot \log n + \log n = (c+1) \cdot \log n$$

$$Luego \sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in O(\log n)$$

2.j) $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Theta(\log_2 n)$

$\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Omega(\log_2 n)$
Por inducción: $n=2 \quad \sum_{i=1}^{n} i^{-1} = \frac{3}{2} \geq 1 = \log_2 2$ $Sup.\ para\ n \Rightarrow \exists n_0 \in \aleph, d > 0 \,/\, \forall n \geq n_0, \sum_{i=1}^{n} i^{-1} \geq d \cdot \log n$ ¿$n+1$? $\sum_{i=1}^{n+1} i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} i^{-1} + \frac{1}{n+1} \underset{hip.}{\geq} d \cdot \log n + \frac{1}{n+1} \geq d \cdot \log n$ *Luego* $\sum_{i=1}^{n} i^{-1} \in \Omega(\log n)$

El tiempo de ejecución de un algoritmo A está descrito por la recurrencia

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

Otro algoritmo B tiene un tiempo de ejecución dado por

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

¿Cuál es el mayor valor de la constante a que hace a B asintóticamente mas rápido que A?

Resolvemos primero ambas recurrencias:

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

Realizamos el cambio $n = 2^k$ y nos queda:

$$T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + 4^k$$

$$t_k = 7t_{k-1} + 4^k$$

$$t_k - 7t_{k-1} = 4^k$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$(x-7)(x-4)$$

$$t_k = C_1 7^k + C_2 4^k$$

Y finalmente

$$t_n = C_1 7^{\log n} + C_2 n^2 = C_1 n^{\log 7} + C_2 n^2$$

Pasamos ahora a la resolución de la segunda recurrencia:

$$T'(n) = aT'(n/4) + n^2$$

Realizamos el cambio $n = 4^k$ y nos queda:

$$T'(4^k) = aT'(4^{k-1}) + 16^k$$

$$t'_k = at'_{k-1} + 16^k$$

$$t'_k - at'_{k-1} = 16^k$$

Por lo tanto la ecuación característica es:

$$(x-a)(x-16)$$

$$t'_k = C_1 a^k + C_2 16^k$$

$$t'_n = C_1 a^{\log n} + C_2 n^2 = C_1 n^{\log a} + C_2 n^2$$

Si comparamos ambas ecuaciones podemos observar que su eficiencia sólo varia en el logaritmo al que está elevado n. Si los igualamos obtendremos el valor de a donde ambas eficiencias son iguales.

Este es el valor que buscamos:

$$\log_2 7 = \log_4 a$$

$$\frac{\log 7}{\log 2} = \frac{\log a}{\log 4} \qquad \log a = \frac{\log 7 \cdot \log 4}{\log 2} = 1.69 \qquad a = 49$$

- **Resolver la recurrencia**

T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2),

con las condiciones iniciales

$$n \geq 2, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$$

- **T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2),** $n \geq 2, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$

$$t_n = 3t_{n-1} + 4t_{n-2}$$

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$$

Calculamos la ecuación característica

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1)$$

$$t_n = C_1 4^n + C_2(-1)^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$$t_0 = C_1 4^0 + C_2(-1)^0 = C_1 + C_2 = 0$$

$$t_1 = C_1 4^1 + C_2(-1)^1 = 4C_1 - C_2 = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$C_1 = 1/5 \qquad C_2 = -1/5$$

$$t_n = \frac{4^n}{5} - \frac{(-1)^n}{5}$$

T(n) = T(n-1) + T(n-2) $\quad n \geq 2, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$

$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$

Calculamos el polinomio característico

$x^2 - x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$t_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$t_0 = C_1 + C_2 = 0$

$t_1 = C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3)$

$n \geq 3, \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1$

$t_n = 5t_{n-1} - 8\, t_{n-2} + 4t_{n-3}$

$t_n - 5t_{n-1} + 8t_{n-2} - 4t_{n-2} = 0$

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

Sacamos las raíces y determinamos el polinomio característico:

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 2$

$(x - 1)(x - 2)^2$

Por lo tanto:

$t_n = C_1 1^n + C_2 2^n + C_3 n 2^n$

T(n) = 2T(n-1) + 1 $\quad n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$$t_n = 2t_{n-1} + 1$$

$$t_n - 2t_{n-1} = 1$$

Calculamos la ecuación característica

$$(x - 2)(x - 1)$$

$$t_n = C_1 2^n + C_2 1^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$$t_0 = C_1 + C_2 = 0$$

Sabemos que:

T(1) = 2T(0) + 1, como T(0) = 0, T(1) = 1

$$t_1 = C_1 2^1 + C_2 1^1 = 2C_1 + C_2 = 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$C_1 = 1 \qquad\qquad C_2 = -1$$

$$t_1 = 2^n - 1^n$$

T(n) = 2T(n-1) + n $n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$
$$t_n - 2t_{n-1} = n$$

Calculamos la ecuación característica

$$(x - 2)(x - 1)^2$$
$$t_n = C_1 2^n + C_2 1^n + C_3 n 1^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$$t_0 = C_1 + C_2 = 0$$

Sabemos que:

T(1) = 2T(0) + 1, como T(0) = 0, T(1) = 1

T(2) = 2T(1) + 2, como T(1) = 1, T(2) = 4

$$t_1 = C_1 2^1 + C_2 1^1 + C_3 1^1 = 1$$
$$t_2 = C_1 2^2 + C_2 1^2 + C_3 2 \cdot 1^2 = 4$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$C_1 = 2$ $C_2 = -2$ $C_3 = -1$

$$t_n = 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 1^n - n 1^n$$

T(n) = 2T(n-1) + n + 2^n $\quad n \geq 1, \quad T(0) = 0$

$$t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$$
$$t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n$$

Calculamos la ecuación característica

$$(x - 2)(x - 1)^2(x – 2) = (x - 1)^2(x - 2)^2$$
$$t_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 1^n + C_4 n 1^n$$

A continuación calculamos las constantes:

$$t_0 = C_1 + C_3 = 0$$

Sabemos que:

T(1)=2T(0) + 1 + 2^1, como T(0) = 0, T(1) = 1

T(2)=2T(1) + 2 + 2^2, como T(1) = 1, T(2) = 12

T(3)=2T(2) + 3 + 2^3, como T(2) = 12, T(3) = 35

$$t_1 = C_1 2 + C_2 2 + C_3 + C_4 = 1$$
$$t_2 = C_1 2^2 + C_2 2 \cdot 2^2 + C_3 1 + C_4 2 \cdot 1 = 12$$
$$t_3 = C_1 2^3 + C_2 3 \cdot 2^3 + C_1 1 + C_3 3 \cdot 1$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$C_1 = 2$ $\quad C_2 = 1$ $\quad C_3 = -2$ $\quad C_4 = -1$

$$t_n = 2 \cdot 2^n + n2^n – 2 \cdot 1^n - n1^n$$

- Resolver la recurrencia

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

con las condiciones iniciales

$n \geq 2, \quad T(0) = 1, \; T(2) = 6$

T(n) = 4T(n/2) + n $n > 2, \quad T(1) = 1 \quad T(2) = 6$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$$

$$t_k - 4t_{k-1} = 2^k$$

La ecuación característica es:

$$(x-4)(x-2)$$

$$t_k = C_1 4^k + C_2 2^k$$

$$t_n = C_1 n^2 + C_2 n$$

$$t_1 = C_1 + C_2 = 1$$

$$t_2 = 4C_1 + 2C_2 = 6$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$C_1 = 2$ $\qquad$ $C_2 = -1$

Por lo tanto

$t_n = 2n^2 - n$ para n potencia de 2

$\mathbf{T(n) = 4T(n/2) + n^2}$ $\quad n > 1, \quad considerar\ C_i \succ 0\ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 4^k$$

$$t_k - 4t_{k-1} = 4^k$$

La ecuación característica es:

$$(x-4)(x-4)$$

$$t_k = C_1 4^k + C_2 k 4^k$$

$t_n = C_1 n^2 + C_2 n^2 \log(n)$ para n potencia de 2

T(n) = 2T(n/2) + nlog(n) $n > 1, \quad consider ar\ C_i \succ 0\ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k \log(2^k)$$

$$t_k - 2t_{k-1} = k2^k$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)(x-2)^2$$

$$t_k = C_1 2^k + C_2 k 2^k + C_3 k^2 2^k$$

$t_n = C_1 n + C_2 n\log(n) + C_3 n\log^2 n$ (n potencia de 2)

$T(n) = 3T(n/2) + cn$ $n > 1, \quad considerar\ c\ constante\ y\ C_i \succ 0\ \forall i$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + 2^k c$$

$$t_k - 3t_{k-1} = c2^k$$

La ecuación característica es:

$$(x-3)(x-2)$$

$$t_k = C_1 3^k + C_2 2^k$$

$t_n = C_1 3^{\log n} + C_2 n = C_1 n^{\log 3} + C_2 n$ (n potencia de 2)

T(n) = 2T(n/2) + log(n) $n > 2, \quad T(1) = 1$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + \log(2^k)$$

$$t_k - 2t_{k-1} = k$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)(x-1)^2$$

$$t_k = C_1 2^k + C_2 1^k + C_3 k 1^k$$

$t_n = C_1 n + C_2 + C_3 \log n$ (para n potencia de 2)

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log(n) \qquad n \geq 4, \quad T(2) = 1$$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k/2}) + k$$

$$t_k = 2t_{k/2} + k$$

A continuación realizamos otro cambio:

$$k = 2^i$$

$$t_i = 2t_{i-1} + 2^i$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)^2$$

$$t_i = C_1 2^i + C_2 i 2^i$$

$$t_k = C_1 k + C_2 k \log(k)$$

$$t_n = C_1 \log(n) + C_2 \log(n) \log^2(n)$$

$T(n) = 5T(n/2) + (n\log(n))^2$ $n > 2, \quad T(1) = 1$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 5T(2^{k-1}) + (2^k \log(2^k))^2$$

$$T(2^k) = 5T(2^{k-1}) + k^2 4^k \log^2(2)$$

$$t_k – 5t_{k-1} = k^2 4^k \log^2(2)$$

La ecuación característica es:

$$(x-5)(x-4)^3$$

$$t_k = C_1 5^k + C_2 4^k + C_3 k 4^k + C_4 k^2 4^k$$

$$t_n = C_1 n^{\log 5} + C_2 n^2 + C_3 n^2 \log(n) + C_4 n^2 \log^2(n)$$

para n potencia de 2

$T(n) = T(n/2)T^2(n/4)$ $\quad n \geq 4, \quad T(1) = 1 \quad T(2) = 4$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1})\, T^2(2^{k-2})$$

$$t_k = t_{k-1} \cdot t^2_{k-2}$$

Realizamos tambien el siguiente cambio:

$$u_i = \log(t_k)$$

$$\log(t_k) = \log(t_{k-1}) + 2\log(t_{k-2})$$

$$u_i = u_{i-1} + 2u_{i-2}$$

$$u_i - u_{i-1} - 2u_{i-2} = 0$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)(x+1)$$

$$u_i = C_1 2^i + C_2(-1)^i$$

$$t_k = 2^{u_i} = 2^{C_1 2^k + C_2 (-1)^k} \qquad t_n = 2^{C_1 n + C_2 (-1)^{\log(n)}}$$ n potencia de 2

T(n) = nT²(n/2) $n > 2, \quad T(1) = 6 \quad T(2) = 72$

Realizamos el cambio $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2^k T^2(2^{k-1}),\ t_k = 2^k \cdot t^2_{k-1}$$

Realizamos tambien el siguiente cambio:

$$u_i = \log(t_k)$$

$$\log(t_k) = \log(2^k) + 2\log(t_{k-1})$$

$$u_i = k + 2u_{i-1},\ u_i - 2u_{i-1} = k$$

La ecuación característica es:

$$(x-2)(x-1)^2$$

$$u_i = C_1 2^i + C_2 1^i + C_3 i \cdot 1^i$$

$$t_k = 2^{u_i} = 2^{C_1 2^k + C_2 + kC_3} \quad t_n = 2^{C_1 n + C_2 + C_3 \log(n)}$$ n potencia de 2

$\mathbf{T(n) = \sqrt{n}\,T(\sqrt{n}) + n}$

$n \geq 4, \quad considerar\ c_i > 0 \forall i$

Si dividimos por n nos queda

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T\left(\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}} + 1$$

tomamos f(x) = T(x)/x. Entonces: $f(n) = f(\sqrt{n}) + 1$

Si hacemos $n = 2^{k,}$ nos queda $f(2^k) = f(2^{k/2}) + 1$, y

$$t_k = t_{k/2} + 1$$

A continuación realizamos otro cambio: $k = 2^i$

$$t_i = t_{i-1} + 1$$

La ecuación característica es: $(x-1)^2$

$$t_i = C_1 1^i + C_2 i 1^i$$

$$t_k = C_1 + C_2 \log(k)$$

$$f_n = C_1 + C_2 \log^2(n) = t_n/n$$

$$t_n = C_1 n + C_2 n \log^2(n)$$

T(n) = 2T(n-1) + 3^n $n \geq 1, \quad considerar\ c_i > 0\ \forall i$

$$t_n = 2t_{n-1} + 3^n$$

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

Calculamos la ecuación característica

$$(x - 2)(x - 3)$$

$$t_n = C_1 2^n + C_2 3^n$$