

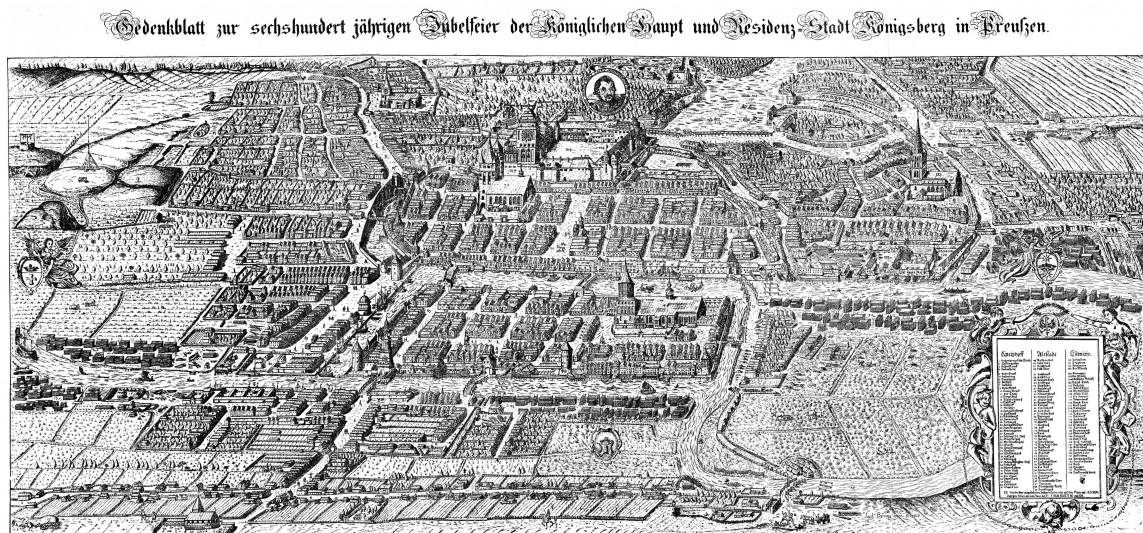
Capítulo 1

Introducción a la teoría de grafos

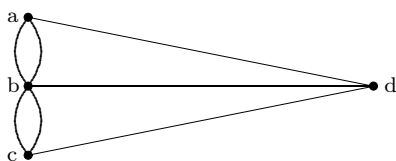
1.1. Generalidades sobre grafos

En esta sección vamos a comenzar el estudio de la teoría de Grafos. El inicio de esta teoría tuvo lugar en 1736, en un artículo de Leonhard Euler. El trabajo surgió de un problema conocido como el *problema de los puentes de Königsberg*.

Durante el Siglo XVIII, la ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental estaba dividida en cuatro zonas por el río Pregel. Había siete puentes que comunicaban estas regiones, tal y como se muestra en la figura. Los habitantes de la ciudad hacían paseos dominicales tratando de encontrar una forma de caminar por la ciudad, cruzando cada puente una sola vez, y regresando al lugar de partida.



Para resolver este problema, Euler representó las cuatro zonas como cuatro puntos, y los puentes como aristas que unen los puntos, tal y como se muestra en la figura.



Más adelante veremos cómo resolver el problema.

Por ahora nos quedamos con la representación que hizo Euler. En ella intervienen cuatro puntos (a los que denominaremos vértices), a saber, a, b, c, d y siete aristas o lados que conectan algunos de los vértices. Esto da pie a la siguiente definición de grafo.

Definición 1. Un grafo G es un par (V, E) , donde V y E son conjuntos, junto con una aplicación

$$\gamma_G : E \rightarrow \{\{u, v\} : u, v \in V\}.$$

Al conjunto V se le llama conjunto de vértices; al conjunto E conjunto de lados o aristas, y a la aplicación γ_G (o simplemente γ) aplicación de incidencia.

Ejemplo 1.1.1. En el caso de los puentes de Königsberg, el grafo correspondiente tiene como conjunto de vértices al conjunto $V = \{a, b, c, d\}$, como conjunto de lados el conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ y la aplicación de incidencia es la dada por:

$$\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2) = \{a, b\}; \gamma_G(e_3) = \gamma_G(e_4) = \{b, c\}; \gamma_G(e_5) = \{a, d\} \quad \gamma_G(e_6) = \{b, d\}; \gamma_G(e_7) = \{c, d\}.$$

Si e_1 y e_2 son dos lados tales que $\gamma_G(e_1) = \gamma_G(e_2)$, se dice que son *lados paralelos*.

Un lado tal que $\gamma_G(e) = \{v\}$ se dice *un lazo*.

Algunos autores, al definir un grafo, no incluyen la posibilidad de que tenga lados paralelos ni lazos. En tal caso, lo que aquí hemos definido como un grafo lo denominan como *multigrafo*.

Definición 2. Un grafo dirigido u orientado es un par (V, E) , donde V y E son conjuntos, junto con dos aplicaciones $s, t : E \rightarrow V$.

Al conjunto V se le llama conjunto de vértices, al conjunto E conjunto de lados, y a las aplicaciones s y t aplicaciones dominio y codominio ("source" y "target").

Definición 3. Sea $G = (V, E)$ un grafo con aplicación de incidencia γ_G . Un subgrafo de G es un nuevo grafo $G' = (V', E')$ donde $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ y se verifica que $\gamma_{G'}(e) = \gamma_G(e)$ para cualquier $e \in E'$.

Si $G' = (V', E')$ es un subgrafo de un grafo $G = (V, E)$, se dice que es un subgrafo completo si dado $e \in E$ tal que $\gamma_G(e) \subseteq V'$, se verifica que $e \in E'$. Dicho de otra forma, si tiene todos los lados que tenía G y que unen vértices de V' .

Observación:

Un subgrafo completo está completamente determinado por el conjunto de vértices. Así, para determinar un subgrafo de un grafo G en ocasiones explicitaremos únicamente el conjunto de vértices de dicho subgrafo, sobreentendiendo que se trata del subgrafo completo con dicho conjunto de vértices.

Definición 4. Sea G un grafo. Un camino de longitud n es una sucesión de lados $e_1 e_2 \cdots e_n$, junto con una sucesión de vértices $v_0 v_1 \cdots v_n$ tales que $\gamma_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$.

En tal caso se dice que el camino $e_1 e_2 \cdots e_n$ es un camino del vértice v_0 al vértice v_n .

Se considera un camino de longitud cero de v a v a aquel cuya sucesión de vértices es v y cuya sucesión de lados es vacía.

Si estamos en un grafo sin lazos ni lados paralelos, cada lado está determinado por los vértices que une. En tal caso, para dar un camino daremos únicamente la sucesión de vértices.

Nótese que si $e_1 e_2 \cdots e_n$ es un camino de u a v , entonces $e_n e_{n-1} \cdots e_2 e_1$ es un camino de v a u .

Un camino en el que no aparecen lados repetidos se llama *recorrido*.

Un recorrido en el que no hay vértices repetidos (salvo eventualmente el primero y el último) se llama *camino simple*.

Un camino en el que coinciden el primer y el último vértice se llama *camino cerrado*.

Un recorrido que es a la vez camino cerrado se llama *circuito*.

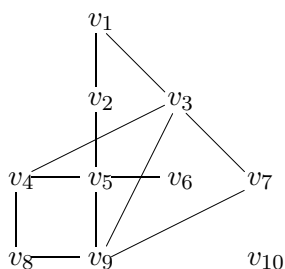
Un circuito que a su vez es camino simple es un *ciclo*.

La siguiente tabla puede ayudar a aclarar estas definiciones.

Vértices repetidos	Aristas repetidas	Abierto	Nombre
		No	Camino
	No	No	Camino cerrado
	No	No	Recorrido
No	No	No	Circuito
No	No	No	Camino simple
No	No	No	Ciclo

Por tanto, en un circuito puede haber o puede no haber vértices repetidos. Sin embargo, no puede haber aristas repetidas. Se tiene entonces, por ejemplo, que todo ciclo es un circuito, es un camino cerrado y es un camino.

Ejemplo 1.1.2. Consideramos el siguiente grafo:



La sucesión $v_7v_3v_9v_5v_4v_8v_9v_3$ es un camino de longitud 7 que une v_7 con v_6 . No es recorrido, pues el lado que une v_3 con v_9 aparece dos veces en el camino.

La sucesión $v_1v_3v_9v_8v_4v_3v_7$ es un camino de longitud 6 que une v_1 con v_7 . Es un recorrido, pues ningún lado se repite. Sin embargo, el camino pasa dos veces por el vértice v_3 . No es por tanto un camino simple.

$v_3v_4v_8v_9$ es un camino simple de longitud 3.

La sucesión $v_1v_3v_7v_9v_3v_4v_5v_2v_1$ es un camino cerrado de longitud 8. Es además un circuito, pues ningún lado se encuentra repetido. No es un ciclo, ya que el vértice v_3 se repite.

Un ejemplo de ciclo podría ser $v_1v_2v_5v_9v_7v_3v_1$.

Proposición 1.1.1. Sea G un grafo. Supongamos que existe un camino de u a v . Entonces existe un camino simple de u a v .

Demostración: Supongamos que el camino es $u = v_1v_2 \cdots v_n = v$. Si el camino no es simple, debe haber dos vértices repetidos. Sean estos v_i y v_j , con $i < j$. En tal caso, se tiene que $v_1 \cdots v_iv_{j+1} \cdots v_n$ es un camino de u a v . Si este camino no fuera simple, repetiríamos el proceso, hasta llegar a un camino simple. ■

Proposición 1.1.2. Sea G un grafo, y sean u y v dos vértices distintos. Supongamos que tenemos dos caminos simples distintos de u a v . Entonces existe un ciclo en G .

Ejemplo 1.1.3. En el Ejemplo 1.1.2 teníamos un camino de longitud 6 que unía el vértice v_1 con el vértice v_7 ($v_1v_3v_9v_8v_4v_3v_7$). Este camino no es simple, pues el vértice v_3 está repetido. Eliminamos los vértices que se encuentran entre las dos apariciones de v_3 y obtenemos el camino $v_1v_3v_7$, que es un camino simple que une v_1 con v_7 .

Por otra parte, tenemos dos caminos simples que unen v_3 con v_8 , como son $v_3v_4v_8$ y $v_3v_9v_8$. A partir de estos dos caminos podemos obtener el ciclo $v_3v_4v_8v_9v_3$, recorriendo en primer lugar uno de los caminos que une v_3 con v_8 , y recorriendo a continuación el otro en sentido contrario.

Nótese que si partimos de los caminos simple $v_3v_4v_8$ y $v_3v_1v_2v_5v_4v_8$ y repetimos lo hecho en el párrafo precedente obtenemos el camino cerrado $v_3v_4v_8v_4v_5v_2v_1v_3$ que no es un ciclo, pues el vértice v_4 está repetido (o el lado v_4v_8). Sin embargo, la existencia de los dos caminos simples sí nos da la existencia de un ciclo, a saber, $v_3v_4v_5v_2v_1v_3$.

A la luz de estos dos ejemplos se deja como ejercicio demostrar la proposición 1.1.2.

Definición 5. Sea G un grafo. Se dice que G es conexo, si dados u y v dos vértices de G existe al menos un camino de u a v .

En general, si G es un grafo, podemos definir en el conjunto de vértices la relación:

$$uRv \text{ si existe un camino de } u \text{ a } v.$$

Esta relación es de equivalencia, pues:

Es reflexiva ya que todo vértice está unido con él mismo por un camino de longitud cero.

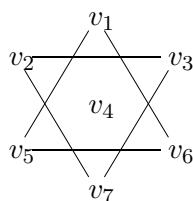
Es simétrica pues si $e_1e_2 \cdots e_n$ es un camino de u a v entonces $e_n e_{n-1} \cdots e_1$ es un camino de v a u .

Es transitiva pues si $e_1e_2 \cdots e_n$ es un camino de u a v y $e'_1e'_2 \cdots e'_m$ es un camino de v a w , entonces $e_1e_2 \cdots e_n e'_1e'_2 \cdots e'_m$ es un camino de u a w .

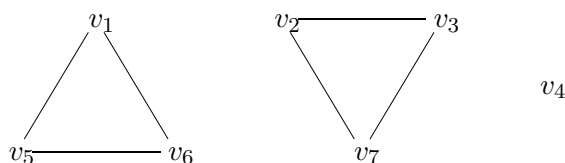
Se tiene entonces que un grafo es conexo si el conjunto cociente por la relación que acabamos de definir tiene un solo elemento.

A partir de esta relación, podemos considerar, para cada clase de equivalencia, el subgrafo (completo) determinado por los vértices de dicha clase de equivalencia. Cada uno de estos grafos es lo que se denomina una *componente conexa* de G .

Ejemplo 1.1.4. Consideramos el siguiente grafo:



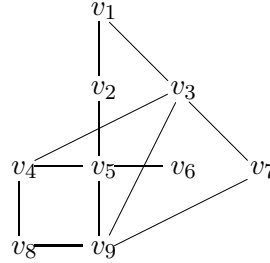
tiene tres componentes conexas. Éstas son



A partir de los caminos podemos definir la distancia en un grafo.

Definición 6. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, y $v, w \in V$. Se define la distancia de v a w como el mínimo de las longitudes de los caminos que empiezan en v y terminan en w . Denotaremos a este número como $d(v, w)$.

Ejemplo 1.1.5. Sea el grafo



Este grafo podemos ver que es conexo. En este caso se tiene que $d(v_4, v_6) = 2$, pues tenemos el camino $v_4v_5v_6$ que une los vértices v_4 y v_6 , tiene longitud 2, y no hay otro de longitud menos (de haberlo debería tener longitud 1, lo que significaría que habría un lado uniendo los vértices v_4 y v_6).

La distancia de v_8 a v_6 vale 3. Tenemos dos caminos de longitud 3 que unen estos vértices, que son $v_8v_4v_5v_6$ y $v_8v_9v_5v_6$. Tenemos otros caminos que unen estos vértices pero son de longitudes más grandes. Por ejemplo, $v_8v_4v_3v_9v_5v_6$ (de longitud 5), o $v_8v_9v_7v_3v_1v_2v_5v_6$.

Es inmediato comprobar que si G es un grafo conexo y u, v, w son vértices de G se tiene que:

- $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si, y sólo si, $u = v$.
- $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (desigualdad triangular).

En los grafos que estamos estudiando todos los lados son tratados iguales. Pero imaginemos que tenemos un grafo en el que los vértices representan ciudades y los lados son carreteras, y estamos interesados en el tiempo necesario para ir de un punto a otro, o la distancia que hay entre dos ciudades. En tal caso, a cada uno de los lados del grafo habría que asignarle un número que nos de una medida de la magnitud que queremos estudiar. Surge así lo que se conoce como un grafo ponderado.

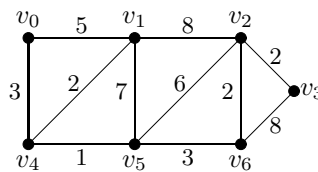
Definición 7. Un grafo ponderado es un grafo $G = (V, E)$ junto con una aplicación $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si e es un lado del grafo, al número $p(e)$ se le conoce como peso del lado e .

Cuando dibujemos un grafo ponderado, indicaremos junto a cada lado cuál es su peso.

Ejemplo 1.1.6.

Consideramos el siguiente grafo ponderado:



En este caso, la aplicación $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ viene dada por:

$$\begin{array}{llllll} p(v_0v_1) = 5 & p(v_1v_2) = 8 & p(v_2v_3) = 2 & p(v_3v_6) = 8 & p(v_5v_6) = 3 & p(v_4v_5) = 1 \\ p(v_0v_4) = 3 & p(v_1v_4) = 2 & p(v_1v_5) = 7 & p(v_2v_5) = 6 & p(v_2v_6) = 2 & \end{array}$$

Si G es un grafo ponderado y $e_1 e_2 \cdots e_n$ es un camino que une v_0 con v_n , se define la longitud del camino como la suma de los pesos de los lados que forman parte del camino.

Por ejemplo, en el grafo anterior, tomamos el camino $v_0 v_1 v_5 v_2$. La longitud de este camino es 18, ya que $p(v_0 v_1) + p(v_1 v_5) + p(v_5 v_2) = 5 + 7 + 6 = 18$.

La distancia entre dos vértices u y v se define de forma análoga a como se hizo en la definición 6: el mínimo de las longitudes de los caminos que empiezan en u y terminan en v .

Vamos a continuación a describir el algoritmo de Dijkstra, que dado un grafo ponderado y un vértice del grafo calcula el camino de longitud mínima de este vértice al resto de vértices

Algoritmo de Dijkstra.

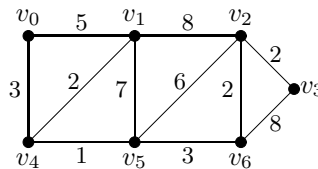
Supongamos que tenemos un grafo ponderado G con n vértices y sea v un vértice de G . El algoritmo consta de n iteraciones.

Al inicio de cada iteración hay una serie de vértices marcados con un número y un vértice.

En cada iteración:

- Se elige el vértice marcado con el número más pequeño. Supongamos que este vértice es u , y que su marca es (m_0, v_0) . La marca de este vértice ya no se modifica en el resto.
- Se actualizan las marcas de todos los vértices adyacentes al vértice u y que no hayan sido elegidos previamente. Sea w uno de estos vértices. La actualización se realiza como sigue:
 - Se calcula la suma de m_0 y el peso lado uw . Sea m el valor de esta suma (es decir, $m = m_0 + p(uw)$).
 - Si el vértice w no esté marcado, en esta iteración queda con la marca (m, u) .
 - Si el vértice w esté marcado, y su marca es (m_1, v_1) , se calcula el mínimo de m y m_1 . Si el mínimo es m_1 se queda con la marca que tenía, mientras que si es m se le cambia la marca por (m, u) .
- Una vez que se acaban las n iteraciones, todos los vértices están marcados. La marca de cada vértice nos dice cuál es la distancia de este vértice al vértice v y el penúltimo vértice del camino que une v con este vértice (el último es el propio vértice)
- Para iniciar el algoritmo se marca el vértice v con $(0, v)$.

Ejemplo 1.1.7. Tomamos el grafo del ejemplo anterior



Elegimos el vértice v_0 . Vamos a calcular el camino más corto de v_0 al resto de vértices.

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	$(0, v_0)$						
v_1	•						
v_2	•						
v_3	•						
v_4	•						
v_5	•						
v_6	•						

Puesto que sólo está marcado v_0 este es el vértice que elegimos en esta iteración. Por tanto, señalamos con \checkmark toda la fila, para indicar que ya v_0 no se va a modificar.

Los vértices adyacentes a v_0 son v_1 y v_4 . Al no estar ninguno marcado, en la celda correspondiente colocamos el peso del lado v_0v_i y el vértice v_0 .

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	$(0, \mathbf{v_0})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_1	\bullet	$(5, v_0)$					
v_2	\bullet	\bullet					
v_3	\bullet	\bullet					
v_4	\bullet	$(3, v_0)$					
v_5	\bullet	\bullet					
v_6	\bullet	\bullet					

Elegimos ahora el vértice v_4 (pues $3 < 5$). Vértices adyacentes a v_4 son v_1 y v_5 (v_0 no cuenta pues ya lo hemos elegido en una iteración anterior).

En relación a v_5 , y puesto que el peso del lado v_4v_5 vale 1, lo marcamos con $(3 + 1, v_4)$.

En relación a v_1 , y puesto que el peso del lado v_4v_1 vale 2, tenemos que elegir entre $(5, v_0)$ y $(5, v_4)$.

En este caso, cualquiera de las dos elecciones es válida.

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	$(0, \mathbf{v_0})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_1	\bullet	$(5, v_0)$	$(5, v_4)$				
v_2	\bullet	\bullet	\bullet				
v_3	\bullet	\bullet	\bullet				
v_4	\bullet	$(\mathbf{3}, \mathbf{v_0})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_5	\bullet	\bullet	$(4, v_4)$				
v_6	\bullet	\bullet	\bullet				

Ahora elegimos el vértice v_5 . Son adyacentes a v_5 los vértices v_1 , v_2 y v_6 .

El peso de v_5v_1 es 7. Tenemos que elegir entre $(7 + 4, v_5)$ y $(5, v_4)$. Nos quedamos con esta última.

El peso de v_5v_2 es 6. Marcamos v_2 con $(6 + 4, v_5)$.

El peso de v_5v_6 es 3. Marcamos v_6 con $(3 + 4, v_5)$.

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	$(0, \mathbf{v_0})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_1	\bullet	$(5, v_0)$	$(5, v_4)$	$(5, v_4)$			
v_2	\bullet	\bullet	\bullet	$(10, v_5)$			
v_3	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet			
v_4	\bullet	$(\mathbf{3}, \mathbf{v_0})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_5	\bullet	\bullet	$(\mathbf{4}, \mathbf{v_4})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_6	\bullet	\bullet	\bullet	$(7, v_5)$			

Elegimos el vértice v_1 . El único vértice adyacente a v_1 y que no ha sido elegido es v_2 . Y como el lado v_1v_2 tiene peso 8 hemos de elegir entre $(8 + 5, v_1)$ y $(10, v_5)$. Nos quedamos con esta última.

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	$(0, \mathbf{v_0})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_1	\bullet	$(5, v_0)$	$(5, v_4)$	$(\mathbf{5}, \mathbf{v_4})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_2	\bullet	\bullet	\bullet	$(10, v_5)$	$(10, v_5)$		
v_3	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet		
v_4	\bullet	$(\mathbf{3}, \mathbf{v_0})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_5	\bullet	\bullet	$(\mathbf{4}, \mathbf{v_4})$	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\checkmark
v_6	\bullet	\bullet	\bullet	$(7, v_5)$	$(7, v_5)$		

Elegimos v_6 . Tanto v_2 como v_3 son adyacentes a v_6 .

Puesto que el peso de v_2v_6 vale 2, para marcar v_2 hemos de elegir entre $(10, v_5)$ y $(2 + 7, v_6)$. Elegimos esta última.

Y v_3 lo marcamos con $(8 + 7, v_6)$.

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	(0, v_0)	✓	✓	✓	✓	✓	✓
v_1	•	(5, v_0)	(5, v_4)	(5, v_4)	✓	✓	✓
v_2	•	•	•	(10, v_5)	(10, v_5)	(9, v_6)	
v_3	•	•	•	•	•	(15, v_6)	
v_4	•	(3, v_0)	✓	✓	✓	✓	✓
v_5	•	•	(4, v_4)	✓	✓	✓	✓
v_6	•	•	•	(7, v_5)	(7, v_5)	✓	✓

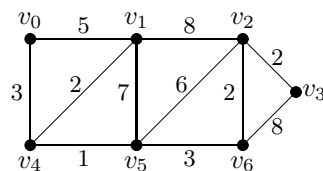
Ahora elegimos v_2 . Y puesto que el lado v_2v_3 nos queda elegir como marca para v_3 la mejor entre $(15, v_6)$ y $(2 + 9, v_2)$.

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	(0, v_0)	✓	✓	✓	✓	✓	✓
v_1	•	(5, v_0)	(5, v_4)	(5, v_4)	✓	✓	✓
v_2	•	•	•	(10, v_5)	(10, v_5)	(9, v_6)	✓
v_3	•	•	•	•	•	(15, v_6)	(11, v_2)
v_4	•	(3, v_0)	✓	✓	✓	✓	✓
v_5	•	•	(4, v_4)	✓	✓	✓	✓
v_6	•	•	•	(7, v_5)	(7, v_5)	✓	✓

Y por último elegimos el vértice v_3 .

	Iter. 0	Iter. 1	Iter. 2	Iter. 3	Iter. 4	Iter. 5	Iter. 6
v_0	(0, v_0)	✓	✓	✓	✓	✓	✓
v_1	•	(5, v_0)	(5, v_4)	(5, v_4)	✓	✓	✓
v_2	•	•	•	(10, v_5)	(10, v_5)	(9, v_6)	✓
v_3	•	•	•	•	•	(15, v_6)	(11, v_2)
v_4	•	(3, v_0)	✓	✓	✓	✓	✓
v_5	•	•	(4, v_4)	✓	✓	✓	✓
v_6	•	•	•	(7, v_5)	(7, v_5)	✓	✓

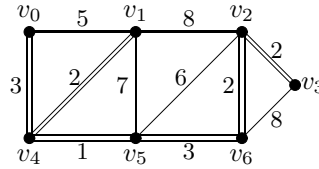
Y con esto ya hemos terminado el algoritmo. De la última tabla lo único que nos interesa es lo que está en negrita.



v_0	(0, v_0)
v_1	(5, v_4)
v_2	(9, v_6)
v_3	(11, v_2)
v_4	(3, v_0)
v_5	(4, v_4)
v_6	(7, v_5)

Lo que nos dice, por ejemplo, que el camino más corto que une v_0 con v_6 tiene longitud 7 y pasa justo antes por v_5 . El camino más corto que llega a v_5 y viene desde v_4 . Y el camino más corto hasta v_4 viene desde v_0 . Por tanto, el camino más corto hasta v_6 es $v_0v_4v_5v_6$.

Indicamos en el siguiente diagrama los caminos más cortos desde v_0 :



1.2. Representación matricial de grafos

En esta sección vamos a ver cómo podemos representar los grafos finitos mediante matrices. A partir de estas matrices podremos obtener propiedades sobre los grafos.

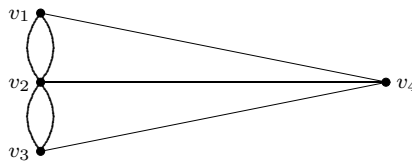
Definición 8. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Se define su matriz de adyacencia como la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ cuyo coeficiente (i, j) es igual al número de lados e que unen v_i con v_j (es decir, que verifican que $f(e) = \{v_i, v_j\}$).

Observaciones:

1. La matriz de adyacencia de un grafo es una matriz simétrica, pues cada lado que une v_i con v_j une también v_j con v_i .
2. Si tomáramos otra ordenación de los vértices, la matriz de adyacencia es diferente. Por tanto, un grafo puede tener varias matrices de adyacencia. En general, si A y C son dos matrices de adyacencia de un mismo grafo, entonces existe una matriz de permutación P tal que $P^{-1}CP = A$ (una matriz de permutación es una matriz que tiene en cada fila y en cada columna un coeficiente que vale "uno" y el resto toman el valor "cero". Es una matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad realizando intercambio de filas y/o columnas).
3. La existencia de lados paralelos se traduce en la matriz de adyacencia en la existencia de coeficientes mayores que 1. De la misma forma, la existencia de lazos se traduce en que algún elemento de la diagonal principal de la matriz de adyacencia es distinto de cero.
4. Si tenemos un grafo dirigido, también podemos definir su matriz de adyacencia. En este caso, el coeficiente a_{ij} es el número de lados que verifican que $s(e) = v_i$ y $t(e) = v_j$. En este caso, la matriz no tiene por qué ser simétrica.
5. La matriz de adyacencia de un grafo determina a éste. Además, toda matriz cuadrada con coeficientes en \mathbb{N} es la matriz de adyacencia de un grafo (dirigido o no) finito. Podríamos entonces definir un grafo a partir de matrices cuadradas con coeficientes en \mathbb{N} .

Ejemplo 1.2.1.

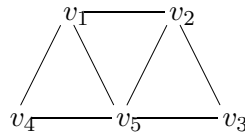
1. Consideramos el grafo que representaba el problema de los puentes de Königsberg:



Entonces su matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sea ahora el grafo



Su matriz de adyacencia es:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente resultado nos muestra la importancia de las matrices de adyacencia.

Proposición 1.2.1. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y sea A su matriz de adyacencia. Entonces el coeficiente (i, j) de la matriz A^n es igual al número de caminos de longitud n que unen v_i con v_j .

Demostración: Hagamos la demostración por inducción. Para $n = 1$ el resultado no es más que la definición de la matriz de adyacencia.

Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$ y demostrémoslo para n .

Sea entonces $B = A^{n-1}$ y $C = A^n$. Queremos probar que c_{ij} es el número de caminos de longitud n que unen v_i con v_j . Es claro que $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$.

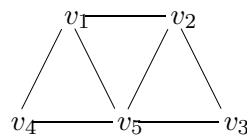
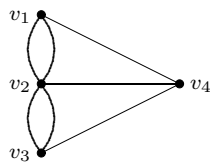
Todos los caminos de longitud n entre v_i y v_j se obtienen añadiendo a un camino de longitud $n - 1$ entre v_i y un vértice v el vértice v_j ; y esto podremos hacerlo únicamente cuando tengamos un lado que incide en los vértices v y v_j . Por tanto, para contar los caminos de longitud n entre v_i y v_j necesitamos, para cada vértice $v_k : k = 1, 2, \dots, n$ contar los caminos de longitud $n - 1$ entre v_i y v_k , y por cada uno de estos, contar los lados (caminos de longitud 1) hay entre v_k y v_j . Luego, realizar la suma de los resultados obtenidos para cada k . Es decir, estamos diciendo que el número de caminos de longitud n entre v_i y v_j es:

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj} = c_{ij}$$

como queríamos.

Nótese que este razonamiento vale tanto si el grafo G es dirigido como si no lo es. ■

Ejemplo 1.2.2. Tomamos los dos grafos del ejemplo anterior, y calculamos algunas potencias de sus matrices de adyacencia:



$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 22 & 4 & 11 \\ 22 & 8 & 22 & 11 \\ 4 & 14 & 4 & 7 \\ 11 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

El elemento $(3,4)$ de la matriz A^2 vale 2. Eso significa que hay dos caminos de longitud 2 que unen v_3 con v_4 . Estos caminos son $v_3 v_2 v_4$, donde de v_3 a v_2 podemos ir por cualquiera de los dos lados que hay.

El elemento $(2,4)$ de la matriz B^2 vale 2, luego hay dos caminos de longitud 2 que unen v_2 con v_4 . Estos son $v_2 v_1 v_4$ y $v_2 v_5 v_4$.

El elemento $(2,3)$ de la matriz B^3 vale 5, lo que nos dice que hay 5 caminos de longitud 3 que unen v_2 con v_3 . Los cinco caminos son:

$$v_2 v_5 v_2 v_3; \quad v_2 v_1 v_2 v_3; \quad v_2 v_3 v_2 v_3; \quad v_2 v_3 v_5 v_3; \quad v_2 v_1 v_5 v_3.$$

El elemento $(3,3)$ de la matriz B^2 vale 2. Por tanto, hay dos caminos de longitud 2 que unen v_3 consigo mismo. Notemos que al no haber en este grafo lados paralelos este número coincide con el grado del vértice v_3 (ver definición 12 para el concepto de grado). Los dos caminos son $v_3 v_5 v_3$ y $v_3 v_2 v_3$.

Definición 9. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y cuyo conjunto de lados es $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Se define la matriz de incidencia del grafo G como una matriz $n \times m$ que tiene en la posición (i, j) un 1 si $v_i \in \gamma_G(e_j)$ y 0 en otro caso.

Observación:

1. Si tomamos otra ordenación de los vértices y/o lados, la matriz de incidencia puede ser diferente. En este caso, dos matrices de incidencia corresponden al mismo grafo si se puede pasar de una a otra mediante operaciones elementales por filas y/o columnas Tipo I (intercambio de filas y/o columnas).
2. El que un grafo tenga lados paralelos se traduce en que tenga dos columnas iguales en la matriz de incidencia, mientras que los lazos se traducen en filas con un único coeficiente "uno".
3. Si el grafo es dirigido, se puede definir también la matriz de incidencia. En este caso, el coeficiente (i, j) puede también tomar el valor -1 (si el lado e_j parte del vértice v_i). En tal caso, el grafo no podría tener lazos.

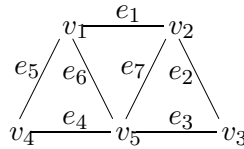
Ejemplo 1.2.3. La matriz de incidencia del grafo que representa los puentes de Konisberg es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde se ha tenido en cuenta la ordenación de los lados dada en el ejemplo 1.1.1, mientras que la matriz de incidencia del otro grafo visto en los ejemplos precedentes es

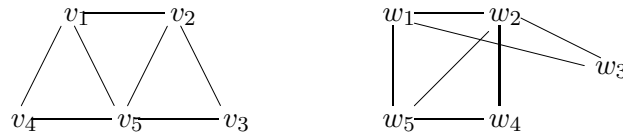
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde se ha considerado la siguiente numeración de los lados:



1.3. Isomorfismo de grafos

Consideremos los siguientes grafos

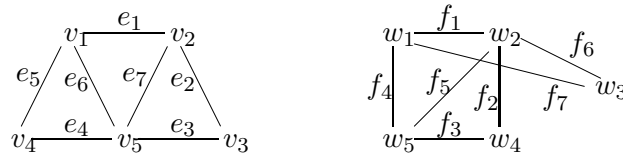


En una primera observación apreciamos dos grafos diferentes. Sin embargo, si profundizamos algo más encontramos muchas semejanzas entre ellos. Por ejemplo, ambos tienen igual número de vértices e igual número de lados. Existe un vértice en cada uno de ellos (v_5 en el primero y w_2 en el segundo) que está unidos al resto de vértices.

Siguiendo en esta línea, vemos que podemos renombrar los vértices del segundo grafo $w_1 \mapsto v'_1$, $w_2 \mapsto v'_5$, $w_3 \mapsto v'_4$, $w_4 \mapsto v'_3$ y $w_5 \mapsto v'_2$, y tenemos que por cada lado que une dos vértices v_i y v_j en el primer grafo tenemos un lado que une los vértices v'_i y v'_j en el segundo.

Se tiene entonces que ambos grafos podemos considerarlos iguales. Lo único que los diferencia es el nombre que le hemos dado a los vértices (y a los lados) y la forma en que los hemos representado. Pero todo lo que digamos sobre un grafo es válido para el otro.

Para precisar un poco más lo que hemos hecho, vamos a ponerle nombre a los lados:



Entonces, lo que tenemos son dos biyecciones $h_V : V_G \rightarrow V_{G'}$ y $h_E : E_G \rightarrow E_{G'}$, que en este caso serían:

h_V	h_E
$v_1 \mapsto w_1$	$e_1 \mapsto f_4$
$v_2 \mapsto w_5$	$e_2 \mapsto f_3$
$v_3 \mapsto w_4$	$e_3 \mapsto f_2$
$v_4 \mapsto w_3$	$e_4 \mapsto f_6$
$v_5 \mapsto w_2$	$e_5 \mapsto f_7$
	$e_6 \mapsto f_1$
	$e_7 \mapsto f_5$

verificando que si $\gamma_G(e) = \{u, v\}$ entonces $\gamma_{G'}(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(v)\}$.

Nótese que en este caso, la aplicación h_V determina totalmente a la aplicación h_E .

Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 10. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos con aplicaciones de incidencia γ_G y $\gamma_{G'}$. Se dice que G y G' son isomorfos si existen dos biyecciones $h_V : V \rightarrow V'$ y $h_E : E \rightarrow E'$ tales que para cada lado $e \in E$ se verifica que $\gamma_{G'}(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(v)\}$ donde $\{u, v\} = \gamma_G(e)$.

En tal caso, diremos que las aplicaciones h_V y h_E forman un isomorfismo de G a G' .

Observación:

1. Si los grafos no tienen lados paralelos, entonces la aplicación h_V determina de forma única a la aplicación h_E . De ahí que, normalmente, para dar un isomorfismo de grafos se dé únicamente como actúa sobre los vértices.
2. Si $h = (h_V, h_E)$ es un isomorfismo de G a G' entonces $((h_V)^{-1}, (h_E)^{-1})$ es un isomorfismo de G' a G .
3. Si tenemos las matrices de adyacencia de dos grafos, el que sean isomorfos se traduce en algo que ya hemos comentado antes. En que exista una matriz de permutación P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea igual a C , donde A y C son las matrices de adyacencia de los dos grafos. (ver observación 2 tras la definición 8 para recordar lo que es una matriz de permutación).

Ejemplo 1.3.1. Tomamos los grafos con los que hemos empezado esta sección:



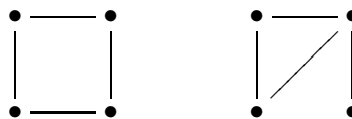
Las matrices de adyacencia de estos grafos son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En tal caso,

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot A \cdot P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

En general, no es fácil determinar cuando dos grafos son isomorfos o no lo son. Claramente, si dos grafos son isomorfos deben tener igual número de vértices e igual número de lados. Sin embargo, esto no es suficiente, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.



pues ambos tiene cuatro vértices y cuatro lados, y sin embargo no son isomorfos (¿por qué?).

Vemos que tenemos dos números asociados a cada grafo (número de vértices y número de lados) que deben coincidir para que los grafos sean isomorfos. Es lo que se llama *invariante por isomorfismo*. Obviamente, la coincidencia de estos números no implica que los grafos sean isomorfos.

Definición 11. Una propiedad se dice invariante por isomorfismo si dados dos grafos isomorfos G y G' , uno satisface la propiedad si, y sólo si, la satisface el otro.

Definición 12. Sea G un grafo y v un vértice de G . Se define el grado de v , y lo denotaremos como $gr(v)$, como el número de lados (no lazos) de G que son incidentes en v más 2 veces el número de lazos incidentes en v .

Denotaremos por $D_k(G)$ como el número de vértices de V que tienen grado igual a k . A partir de esto, podemos construir la sucesión

$$D_0(G), D_1(G), D_2(G), \dots, D_k(G), \dots$$

que llamaremos sucesión de grados.

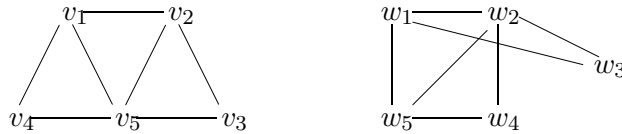
Nótese que si G es un grafo con n vértices v_1, v_2, \dots, v_n y l lados entonces

$$gr(v_1) + gr(v_2) + \dots + gr(v_n) = 2l,$$

pues al contar todos los lados que inciden en todos los vértices (el miembro de la izquierda) estamos contando cada lado 2 veces (por cada uno de los vértices en los que incide)

Ejemplo 1.3.2.

1. Dados los grafos



para el primero se tiene que $gr(v_3) = gr(v_4) = 2$, $gr(v_1) = gr(v_2) = 3$, $gr(v_5) = 4$. Por tanto, $D_0(G) = D_1(G) = 0$, $D_2(G) = 2$, $D_3(G) = 2$, $D_4(G) = 1$. La sucesión de grados es entonces:

$$0, 0, 2, 2, 1, 0, 0, \dots$$

Para el otro grafo se tiene que $gr(w_3) = gr(w_4) = 2$, $gr(w_1) = gr(w_5) = 3$, $gr(w_2) = 4$. La sucesión de grados resulta ser la misma que en el grafo anterior.

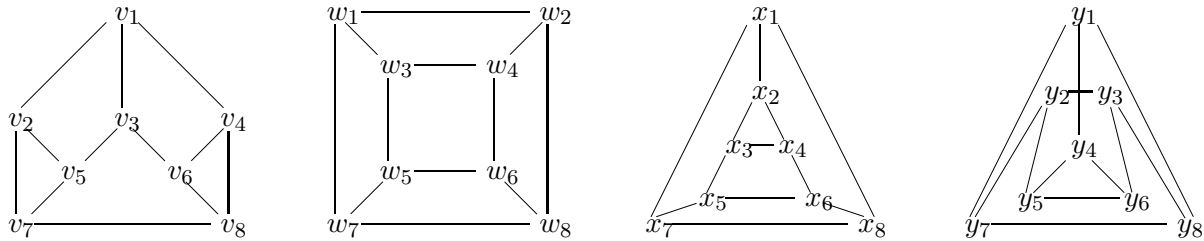
2. Las sucesiones de grados de los grafos



son respectivamente $0, 0, 4, 0, 0, \dots$ y $0, 1, 2, 1, 0, \dots$

Es fácil comprobar que si $(h_V, h_E) : G \rightarrow G'$ es un isomorfismo de grafos y $v \in V$ entonces $gr(v) = gr(h_V(v))$, de donde deducimos que las sucesiones de grados de dos grafos isomorfos son iguales. El recíproco no es cierto, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.3. Consideramos los siguientes grafos:



En los cuatro grafos la sucesión de grados es la misma, pues todos los vértices tienen grado 3 (es decir, la sucesión de grados es en los cuatro casos $0, 0, 0, 8, 0, \dots$). Sin embargo, el primero, tercero y cuarto son isomorfos y los isomorfismos vienen dados por

$$\begin{aligned}
 v_1 &\mapsto x_5 \mapsto y_2 \\
 v_2 &\mapsto x_7 \mapsto y_7 \\
 v_3 &\mapsto x_6 \mapsto y_3 \\
 v_4 &\mapsto x_3 \mapsto y_5 \\
 v_5 &\mapsto x_8 \mapsto y_8 \\
 v_6 &\mapsto x_4 \mapsto y_6 \\
 v_7 &\mapsto x_1 \mapsto y_1 \\
 v_8 &\mapsto x_2 \mapsto y_4
 \end{aligned}$$

mientras que el segundo no es isomorfo a ninguno de los otros tres, ya que en este segundo no hay ciclos de longitud 3, mientras que en los otros sí los hay ($v_2v_5v_7v_2$ por ejemplo).

Los cuatro grafos que intervienen en este ejemplo tienen una peculiaridad, y es que todos los vértices tienen el mismo grado. Estos grafos reciben el nombre de *grafos regulares* de grado n (si n es el grado común de todos los vértices). En el ejemplo precedente, los cuatro grafos son grafos regulares de grado 3.

Definición 13. Sea G un grafo (sin lazos ni lados paralelos). Se dice que G es regular si todos los vértices de G tienen el mismo grado.

1.4. Algunas familias de grafos.

En esta sección vamos a definir algunas familias de grafos. De esta forma, tendremos una gran variedad de ejemplos de grafos.

■ Grafo completo K_n .

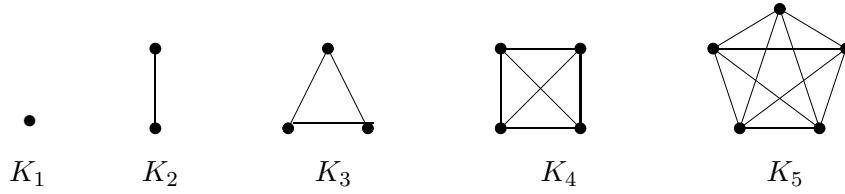
Estos son los grafos en los que cada vértice está unido mediante un lado a todos los demás vértices que forman el grafo.

Definición 14. Se llama grafo completo de n vértices al grafo (con n vértices) que no tiene lazos ni lados paralelos, y dados dos vértices hay un lado que los une. Dicho de otra forma, su matriz de adyacencia toma el valor "cero" en todos los elementos de la diagonal y el valor "uno" en el resto.

Dicho grafo se suele denotar como K_n .

Ejemplo 1.4.1.

Veamos cuales son los cinco primeros grafos completos:



El número de vértices del grafo K_n es n . Si l es el número de lados, y los vértices son v_1, v_2, \dots, v_n entonces tenemos que:

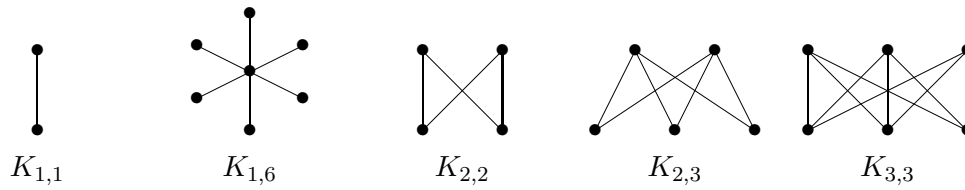
$$2l = gr(v_1) + gr(v_2) + \dots + gr(v_n) = (n-1) + (n-1) + \dots + (n-1) = n \cdot (n-1) \implies l = \frac{n(n-1)}{2}$$

■ Grafo bipartido completo $K_{m,n}$.

Aunque los grafos bipartidos los estudiaremos en una sección posterior vamos a definir esta familia de grafos.

Definición 15. Sean m, n dos números naturales distintos de cero. Definimos el grafo $K_{m,n}$ como el grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ y que para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ hay un lado que une los vértices v_i con w_j . Además, no hay más lados aparte de estos.

Ejemplo 1.4.2.



El número de vértices de $K_{m,n}$ es $m + n$.

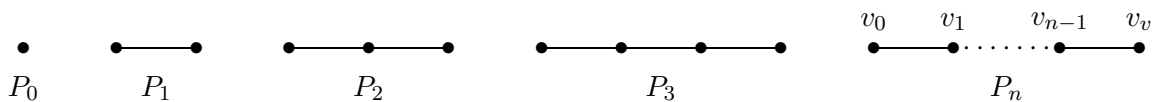
Para calcular el número de lados tenemos en cuenta que $gr(v_i) = n$ y que $gr(w_j) = m$. En tal caso:

$$2l = gr(v_1) + \dots + gr(v_m) + gr(w_1) + \dots + gr(w_n) = n + \dots + n + m + \dots + m = n \cdot m + m \cdot n \implies l = m \cdot n$$

■ Grafo camino P_n .

Definición 16. Sea $n \geq 0$. Se define el grafo P_n como el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y para cada $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ hay un lado que une v_i con v_{i+1} .

Ejemplo 1.4.3.

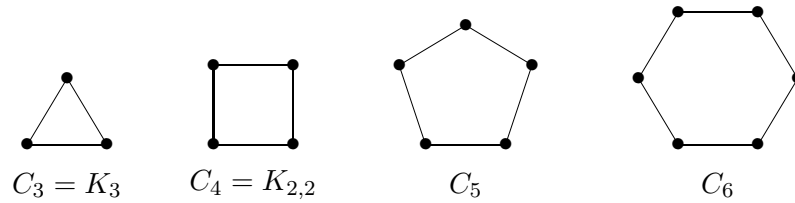


Vemos como P_n tiene $n + 1$ vértices y n lados.

■ Grafo ciclo C_n .

Definición 17. Sea $n \geq 3$. Se define el grafo C_n como el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ hay un lado que une v_i con v_{i+1} . Además hay un lado que une v_1 con v_n .

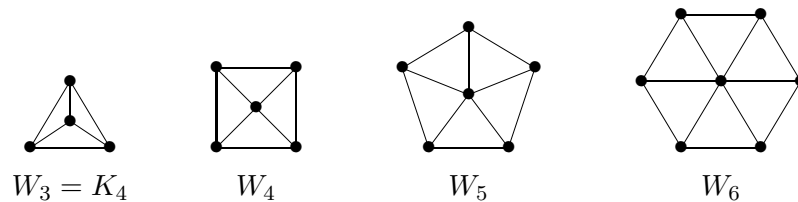
Ejemplo 1.4.4.



Como vemos, tanto el número de vértices como de lados es n .

■ Grafo rueda W_n .

Definición 18. Sea $n \geq 3$. Se define el grafo W_n como el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ hay un lado que une v_i con v_{i+1} . Además hay un lado que une v_1 con v_n y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ hay un lado que une v_0 con v_i .

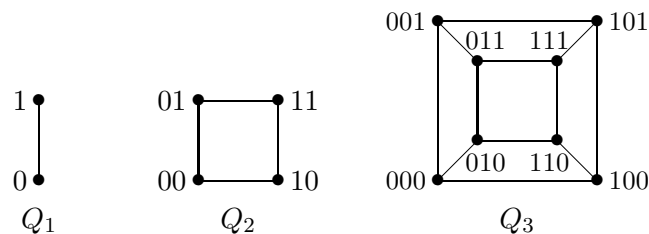


El número de vértices de W_n es $n + 1$ y el número de lados es $2n$.

■ Grafo cubo Q_n .

Definición 19. Sea $n \geq 1$. Definimos el grafo Q_n como el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{(x_1 x_2 \dots x_n) : x_i \in \{0, 1\}\}$ (es decir, el conjunto de vértices es el conjunto de cadenas de n bits) y dos vértices $(x_1 x_2 \dots x_n)$ e $(y_1 y_2 \dots y_n)$ están unidos por un lado si se diferencian únicamente en un bit.

Ejemplo 1.4.5.



1.5. Sucesiones gráficas.

Sea G un grafo sin lazos ni lados paralelos, cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Para cada i entre 1 y n , sea $d_i = gr(v_i)$. Tenemos de esta forma una secuencia d_1, d_2, \dots, d_n , que se corresponde con los grados de los vértices del grafo G .

Nos planteamos si dada una lista de n números naturales d_1, d_2, \dots, d_n , existe algún grafo (sin lazos ni lados paralelos) con n vértices tal que los grados de esos vértices sean estos números naturales. Y en caso de que exista, cómo podríamos dar un grafo con tales características.

Antes de responder a estas cuestiones, vamos a introducir un poco de nomenclatura.

Definición 20. Sean $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{N}$. Decimos que la sucesión d_1, d_2, \dots, d_n es una sucesión gráfica si existe un grafo G sin lazos ni lados paralelos, con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y tal que $d_i = \text{gr}(v_i)$.

Si d_1, d_2, \dots, d_n es una sucesión gráfica, y G es un grafo con n vértices cuyos grados son los términos de la sucesión, diremos que G es una realización de la sucesión d_1, d_2, \dots, d_n .

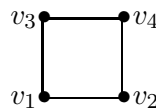
Ejemplo 1.5.1.

1. La sucesión de n términos $0, 0, \dots, 0$ es una sucesión gráfica. Podemos considerar un grafo cuyo conjunto de vértices tiene n elementos, y cuyo conjunto de lados es el conjunto vacío.
2. La sucesión $1, 1, 1, 1, 1, 1$ es una sucesión gráfica. Podemos verlo con el siguiente grafo.



En general, cualquier sucesión con un número par de unos es una sucesión gráfica.

3. La sucesión $2, 2, 2, 2$ es una sucesión gráfica. El siguiente grafo es una realización de dicha sucesión.



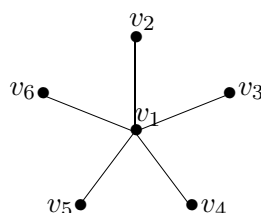
4. La sucesión $4, 3, 3, 2, 2, 1$ no es una sucesión gráfica. Si esos fueran los grados de los vértices de un grafo, tendríamos que la suma de los grados de los vértices valdría 15, y eso es imposible, pues sabemos que esa suma es igual al doble del número de lados (lo que supondría que el grafo tiene siete lados y medio).
5. La sucesión $5, 4, 3, 2, 2$ no es una sucesión gráfica. De serlo, tendríamos un grafo (sin lazos ni lados paralelos) con cinco vértices, y un vértice de grado 5. Pero el grado de un vértice no puede ser mayor que 4, pues como mucho, un vértice puede estar unido a los cuatro restantes.

Los dos últimos ejemplos nos dan dos condiciones necesarias para que una sucesión sea gráfica. Por una parte, la suma de los elementos de la sucesión debe ser un número par, y por otra, cualquier elemento de la sucesión debe ser menor que el número de términos.

Sin embargo, estas dos condiciones no son suficientes. Por ejemplo, consideramos la sucesión $5, 4, 4, 2, 2, 1$. Vamos a ver que no es una sucesión gráfica.

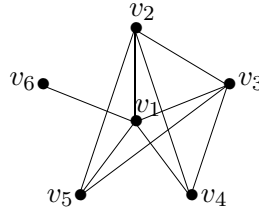
Vemos que la suma de los términos de la sucesión es 18, que es un número par. Además, hay seis términos y el mayor de ellos vale 5. Por tanto, las dos condiciones que hemos visto son satisfechas por esta sucesión.

Supongamos que hubiera un grafo con seis vértices cuyos grados fueran los elementos de la sucesión. Sean estos vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Hay uno de los vértices cuyo grado es cinco, luego este vértice debe estar unido a los cinco restantes. Suponemos que dicho vértice es v_1 . Es decir, tendríamos:



También tiene que haber un vértice de grado 1. Supongamos que es, por ejemplo, v_6 . Este vértice está unido a v_1 , luego ya no puede unirse a ninguno más.

Por último, tenemos dos vértices de grado 4. Por ejemplo, v_2 y v_3 . Entonces, estos deben unirse a 3 vértices más. Como no pueden unirse a v_6 , las únicas posibilidades son, que v_2 esté unido a v_3 , v_4 y v_5 y que v_3 esté unido a v_2 , v_4 y v_5 . Tenemos entonces:



Y vemos que los vértices v_4 y v_5 tienen grado 3, cuando deberían tener grado 2.

De esta forma hemos visto que la sucesión 5, 4, 4, 2, 2, 1 no es gráfica. Pero esta forma de ir probando a ver si encontramos o no un grafo con las condiciones requeridas parece no ser muy práctica.

Lo que vamos a hacer es dar un método más preciso para determinar si una sucesión dada es una sucesión gráfica. Para esto, necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.1 (Havel-Hakimi). *Sea d_1, d_2, \dots, d_n una sucesión de números naturales. Supongamos que están ordenados en orden decreciente, es decir, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ y que $d_1 < n$.*

Entonces esta sucesión es gráfica si, y sólo si, lo es la sucesión $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$.

Observación:

La condición $d_1 < n$ lo que nos dice es que no puede haber un vértice cuyo grado sea mayor o igual al número de vértices. Sabemos que si esto no se da, la sucesión no es gráfica, luego esto no supone ninguna restricción.

Podríamos comprobar en un principio si la suma $d_1 + \dots + d_n$ es un número par, pues sabemos que si esa suma es impar la sucesión no es gráfica. Pero no es necesario realizar esa comprobación, pues en el proceso que vamos a dar, detectaremos esa circunstancia.

Demostración:

Demostremos en primer lugar que si existe un grafo G tal que los grados de sus vértices son los elementos de la sucesión $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$, entonces existe un grafo G' tal que los grados de sus vértices son d_1, d_2, \dots, d_n .

Sea G un tal grafo, y supongamos que el conjunto de vértices de G es $\{v_1, v_2, \dots, v_{d_1}, v_{d_1+1}, \dots, v_{n-1}\}$, y que

$$gr(v_i) = \begin{cases} d_{i+1} - 1 & \text{si } 1 \leq i \leq d_1 \\ d_{i+1} & \text{si } d_1 < i \leq n-1 \end{cases}$$

es decir,

$$gr(v_1) = d_2 - 1; \quad gr(v_2) = d_3 - 1; \quad \dots \quad gr(v_{d_1}) = d_{d_1+1} - 1; \quad gr(v_{d_1+1}) = d_{d_1+2}; \quad \dots \quad gr(v_{n-1}) = d_n$$

Formamos entonces el grafo G' añadiendo un nuevo vértice v_0 y los lados $v_0v_1, v_0v_2, \dots, v_0v_{d_1}$ al grafo G .

Entonces:

$gr(v_0) = d_1$, pues v_0 está unido a los vértices v_1, v_2, \dots, v_{d_1} .

El grado de los vértices v_1, v_2, \dots, v_{d_1} ha aumentado en uno, pues cada uno de ellos se ha unido al vértice v_0 . Por tanto, $gr(v_1) = d_2$, $gr(v_2) = d_3$, \dots , $gr(v_{d_1}) = d_{d_1+1}$.

El grado de los vértices $v_{d_1+1}, \dots, v_{n-1}$ no ha variado.

Por tanto, tenemos:

Vértice	v_0	v_1	\cdots	v_{d_1}	v_{d_1+1}	\cdots	v_{n-1}
Grado	d_1	d_2	\cdots	d_{d_1+1}	d_{d_1+2}	\cdots	d_n

Es decir, hemos encontrado un grafo para el que los grados de sus vértices son los términos de la sucesión d_1, d_2, \dots, d_n .

Recíprocamente, supongamos que tenemos un grafo G con conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $gr(v_i) = d_i$.

Esto significa que el vértice v_1 está unido a d_1 vértices. Vamos a analizar en primer lugar el caso en que estos vértices son $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$.

Entonces, si eliminamos del grafo G el vértice v_1 y todos los lados que inciden en v_1 , obtenemos un nuevo grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_2, \dots, v_n\}$, y en el que el grado de los vértices v_2, \dots, v_{d_1+1} ha disminuido en uno (pues se ha eliminado el lado que lo une a v_1), y el grado de los vértices restantes se mantiene igual. Por tanto, hemos construido un grafo G' , con $n-1$ vértices, y cuyos grados son $d_2-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$.

Nos situamos ahora en el caso de que el conjunto de vértices a los que está unido el vértice v_1 no es el conjunto $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$. En este caso, no podemos repetir el razonamiento que acabamos de hacer.

Lo que vamos a hacer es transformar el grafo G en otro grafo con los mismos vértices, con los mismos grados de cada vértice, pero que los vértices a los que está unido el grafo v_1 sean los vértices v_2, \dots, v_{d_1+1} .

Puesto que el conjunto de vértices a los que está unido v_1 no es el conjunto $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$, debe haber algún vértice de ese conjunto al que no está unido v_1 , y debe haber algún vértice del conjunto $\{v_{d_1+2}, \dots, v_n\}$ al que sí esté unido v_1 .

Sean estos vértices v_i y v_j respectivamente. Tenemos:

- Un vértice v_i , con $2 \leq i \leq d_1+1$ que no está unido por un lado al vértice v_1 (no existe el lado $\{v_1, v_i\}$).
- Un vértice v_j , con $d_1+2 \leq j \leq n$ que está unido al vértice v_1 (tenemos el lado $\{v_1, v_j\}$).
- El grado de v_i es mayor o igual que el grado de v_j .

Por lo que acabamos de decir, debe haber un vértice v que esté unido a v_i pero que no esté unido a v_j (de no ser así, es decir, si todo vértice al que está unido v_i estuviera unido también a v_j , y puesto que además v_j está unido a v_1 , el grado de v_j sería mayor que el de v_i).

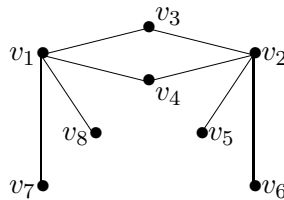
Tenemos entonces en nuestro grafo G los lados $\{v_1, v_j\}$ y $\{v_i, v\}$, mientras que no están los lados $\{v_1, v_i\}$ ni $\{v_j, v\}$.

Eliminamos estos dos lados ($\{v_1, v_j\}$ y $\{v_i, v\}$) del grafo G , y le añadimos los lados $\{v_1, v_i\}$ $\{v_j, v\}$. De esta forma, conseguimos un nuevo grafo G' con los mismos vértices que el grafo G , estos vértices tienen los mismos grados que en el grafo G , y ahora, el vértice v_1 está unido en G' a todos los vértices del conjunto $\{v_2, \dots, v_{d_1+1}\}$ que estaban unidos en el grafo G a v_1 , y además está unido al vértice v_i (que está en ese mismo conjunto).

Esto que hemos hecho lo repetimos mientras queden vértices del conjunto $\{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}$ que no están unidos a v_1 . Cuando esto ya no ocurra, procedemos a eliminar el vértice v_1 y todos los lados que inciden en él.

■

Ejemplo 1.5.2. *Vamos a ilustrar con un ejemplo el razonamiento que hemos seguido en la demostración anterior. Partimos del grafo G*



Y vemos que $gr(v_1) = gr(v_2) = 4$, $gr(v_3) = gr(v_4) = 2$, $gr(v_5) = gr(v_6) = gr(v_7) = gr(v_8) = 1$. Por tanto, la sucesión $4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ es una sucesión gráfica.

Vamos a dar un grafo con siete vértices, cuyos grados serán $3, 1, 1, 0, 1, 1, 1$.

Vemos en primer lugar que el vértice v_1 está unido a los vértices v_3, v_4, v_7 y v_8 . Transformamos este grafo en otro con el mismo conjunto de vértices, y los mismos grados, pero de forma que los vértices adyacentes a v_1 sean v_2, v_3, v_4 y v_5 .

De los vértices adyacentes a v_1 sólo hay dos del conjunto $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Tomamos un vértice de este conjunto que no esté unido por un lado a v_1 (por ejemplo, tomamos v_2), y un vértice que no esté en ese conjunto y que sea adyacente a v_1 , por ejemplo v_7 (es decir, siguiendo la notación que hemos usado en la demostración, $i = 2$ y $j = 7$).

Buscamos un vértice v que sea adyacente a v_2 y no lo sea a v_7 . Por ejemplo, $v = v_5$.

Eliminamos los lados $\{v_1, v_7\}$ y $\{v_2, v_5\}$, y añadimos $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_5, v_7\}$. En el dibujo siguiente representamos los lados que eliminamos con línea discontinua, y los lados que añadimos con trazo doble.



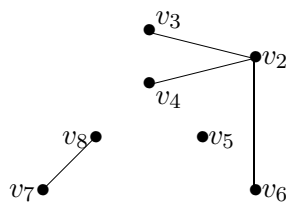
Y ahora tenemos un grafo con los mismos vértices que el de partida, cada vértice tiene el mismo grado, pero el vértice v_1 está unido a tres vértices del conjunto $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Concretamente, a v_2 , v_3 y v_4 . Y está unido a un vértice de fuera de ese conjunto (v_8). Como el vértice que falta del conjunto $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ tiene el mismo grado que el vértice v_8 ahora no sería necesario realizar ningún cambio (sólo intercambiar los vértices v_8 y v_5). Pero vamos a proceder tal y como hemos dicho en la demostración.

Entonces, eliminamos los lados $\{v_1, v_8\}$ y $\{v_5, v_7\}$, y añadimos dos lados nuevos, a saber, $\{v_1, v_5\}$ y $\{v_7, v_8\}$.



Y así hemos conseguido un grafo con el mismo conjunto de vértices que el vértice G , cada vértice tiene el mismo grado que en el grafo G , pero ahora, el vértice v_1 está unido a los vértices v_2, v_3, v_4 y v_5 .

Si ahora suprimimos del grafo G el vértice v_1 , y todos los lados que inciden en v_1 nos queda el grafo



Y obtenemos un grafo con un vértice menos, y los grados de los vértices son 3, 1, 1, 0, 1, 1, 1

Basándonos en el teorema, podemos determinar fácilmente si una sucesión es o no gráfica.

Para esto, partimos de una sucesión d_1, d_2, \dots, d_n . Si sus elementos no están ordenados, los ordenamos de mayor a menor, así que supondremos que se tiene que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.

A partir de esta sucesión formamos la sucesión $d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$. Esta sucesión se obtiene en dos etapas: En primer lugar, eliminamos el primer término. En segundo lugar, a los d_1 términos siguientes le restamos 1.

Si la respuesta a si esta sucesión es o no gráfica la conocemos, entonces sabremos si d_1, \dots, d_n es gráfica. Caso de no conocerla, repetimos el proceso para esta nueva sucesión.

Como en cada paso vamos disminuyendo, tanto el tamaño de la sucesión como el valor de sus términos, en un número finito de pasos terminaremos.

Ejemplo 1.5.3.

1. Consideramos la sucesión $2, 2, 2, 2$, que sabemos que es gráfica. Vamos a comprobarlo usando el método aquí descrito.

Como están ordenados los elementos, formamos la nueva sucesión eliminando el primer 2, y restando 1 a los dos términos siguientes. Tenemos entonces la sucesión $(2-1), (2-1), 2$, es decir, $1, 1, 2$. Esta es la nueva sucesión que tenemos que estudiar si es gráfica.

La ordenamos (nos queda $2, 1, 1$). Eliminamos el primer término (tenemos así $1, 1$) y a los dos términos siguientes, le restamos uno (y llegamos a la sucesión $0, 0$).

Esta sucesión sabemos que es gráfica, como ya hemos visto anteriormente.

2. Tomamos ahora la sucesión $5, 4, 4, 2, 2, 1$, que sabemos que no es gráfica. Vamos a comprobarlo usando el método que acabamos de describir.

5	4	4	2	2	1	Eliminamos el 5 y restamos uno a los 5 términos siguientes.
	3	3	1	1	0	Eliminamos el 3 y restamos uno a los 3 términos siguientes.
		2	0	0	0	Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes.
			-1	-1	0	

Y hemos llegado a una sucesión que no es gráfica, pues no puede haber vértices con grado igual a -1. Por tanto, la sucesión de partida no puede ser gráfica.

3. Sea ahora la sucesión $4, 3, 3, 2, 2, 1$, que sabemos que no es gráfica pues la suma de sus términos es un número impar. Vamos a comprobarlo ahora basándonos en el teorema 1.5.1.

4	3	3	2	2	1	Eliminamos el 4 y restamos uno a los 4 términos siguientes.
	2	2	1	1	1	Eliminamos el 2 y restamos uno a los 2 términos siguientes.
		1	0	1	1	Reordenamos.
		1	1	1	0	Eliminamos el primer 1 y restamos uno al siguiente término.
			0	1	0	Reordenamos.
			1	0	0	Eliminamos el 1 y restamos uno al siguiente término.
				-1	0	

Y vemos cómo nos ha vuelto a aparecer un -1.

Consideramos la sucesión $4, 4, 3, 2, 2, 2, 1$. Nos planteamos si es o no una sucesión gráfica.

4	4	3	2	2	2	1	Eliminamos el 4 y restamos uno a los 4 términos siguientes.
	3	2	1	1	2	1	Reordenamos.
	3	2	2	1	1	1	Eliminamos el 3 y restamos uno a los 3 términos siguientes.
		1	1	0	1	1	Reordenamos.
		1	1	1	1	0	Eliminamos el 1 y restamos uno al término siguiente.
			0	1	1	0	Reordenamos.
			1	1	0	0	Eliminamos el 1 y restamos uno al siguiente término.
				0	0	0	

Y al llegar a una sucesión de ceros, deducimos que la sucesión de partida es una sucesión gráfica.

Supongamos que tenemos una sucesión, a la que le hemos aplicado el proceso anterior, y hemos llegado a una sucesión de ceros. Sabemos por tanto que la sucesión es gráfica. Nos planteamos encontrar un grafo de forma que los grados de sus vértices sean los términos de la sucesión.

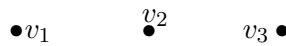
La idea es ir recorriendo las distintas sucesiones que nos han ido apareciendo al revés, y en cada paso ir construyendo un grafo en el que se materialice la sucesión correspondiente.

Para esto, en cada paso, lo que hacemos es añadir un vértice que lo uniremos a tantos vértices como nos indica su grado.

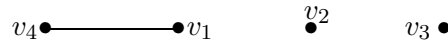
Esta forma de construir el grafo se denomina *algoritmo de reconstrucción*.

Ejemplo 1.5.4. Tenemos la sucesión 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, que sabemos que es gráfica pues lo hemos visto en el ejemplo precedente, ya que hemos llegado a la sucesión 0, 0, 0.

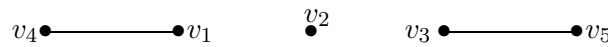
Comenzamos con la sucesión 0, 0, 0, y formamos un grafo con tres vértices y cuyos grados sean estos, es decir, un grafo sin lados.



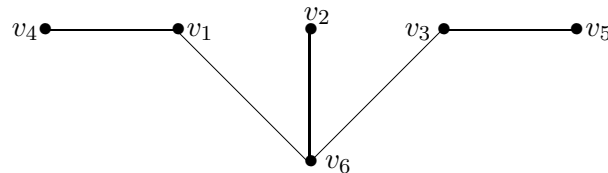
Ahora pasamos a la sucesión 1, 1, 0, 0. Para esto, añadimos un vértice de grado 1, y lo unimos a uno de los que tenía grado cero (que pasa de grado cero a grado uno), por ejemplo, a v_1 .



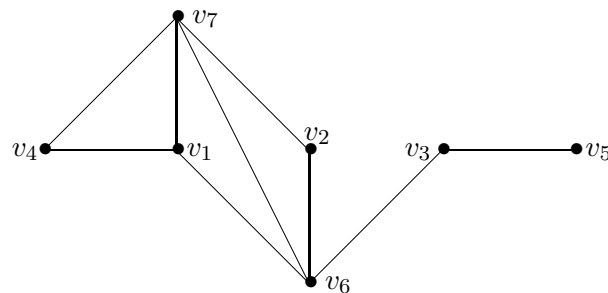
La siguiente sucesión es 1, 1, 1, 1, 0, que proviene de **0**, 1, 1, 0 (donde hemos marcado en negrita el término de la sucesión que aumenta en uno). Por tanto, hemos de añadir un vértice nuevo (v_5) de grado uno, y unirlo a uno de grado cero (por ejemplo, a v_3).



De esta sucesión reordenada (**1**, **1**, **0**, 1, 1) pasamos a 3, 2, 2, 1, 1, 1. Por tanto, hemos de añadir un vértice (v_6), de grado 3, y unirlo a tres vértices de grados 1, 1 y 0 respectivamente. Tomamos entonces, por ejemplo, v_1 , v_3 y v_2 .



Y por último, llegamos a la sucesión 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, que proviene de **3**, **2**, **1**, **1**, 2, 1 añadiendo un 4, y sumando 1 a los términos que están en negrita. Por tanto, añadimos un vértice (v_7), de grado 4, y que estará unido a un vértice de grado 3 (v_6), uno de grado 2 (por ejemplo, v_1) y dos vértices de grado 1 (por ejemplo, v_4 y v_2).



Y de esta forma, ya hemos encontrado un grafo con 7 vértices, y cuyos grados son 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1.

1.6. Grafos de Euler

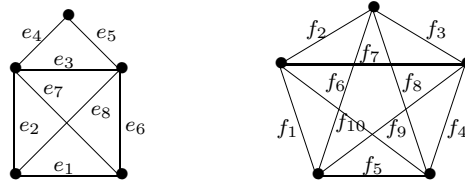
Definición 21. Sea G un grafo conexo. Un camino de Euler es un recorrido en el que aparecen todos los lados.

Un circuito de Euler es un camino de Euler que es cerrado.

Un grafo con un circuito de Euler es un grafo de Euler.

Ejemplo 1.6.1.

Consideramos los grafos



La sucesión $e_2e_4e_5e_8e_1e_7e_3e_6$ es un camino de Euler en el primer grafo, mientras que la sucesión $f_1f_2f_3f_4f_5f_6f_8f_{10}f_7f_9$ es un circuito de Euler en el segundo.

Proposición 1.6.1. Sea G un grafo. Entonces si G tiene un circuito de Euler, el grado de cada vértice es par, mientras que si G tiene un camino de Euler, G tiene exactamente dos vértices de grado impar (exactamente los vértices donde empieza y termina el camino).

Demostración:

Sea G un grafo en el que tenemos un circuito de Euler. Supongamos que queremos ver cuál es el grado de un vértice v , es decir, vamos a contar cuantos lados inciden en dicho vértice. Para esto, tomamos el circuito de Euler, y lo recorremos empezando en un vértice que no sea el que estamos considerando. Conforme lo recorremos vamos contando los lados que son incidentes en v . Ahora bien, cada vez que pasemos por v nos encontramos con dos lados incidentes en él, por el que llegamos a v y por el que salimos de v . Por tanto, el número total de lados incidentes en v será el doble del número de veces que el circuito pase por el vértice v .

Si lo que tenemos es un camino de Euler que empieza en u y termina en v , añadimos al grafo un lado que une los vértices u y v . Tenemos entonces, con este nuevo lado, un circuito de Euler en el nuevo grafo. El grado de cada vértice es entonces par.

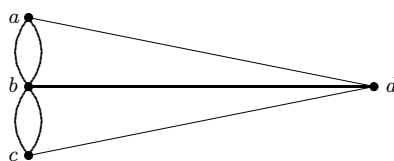
Al eliminar el lado que hemos añadido, el grado de todos los vértices se mantiene igual, salvo el de los vértices u y v que disminuye en 1. Por tanto, estos dos vértices tendrán grado impar, y el resto tendrán grado par. ■

Ejemplo 1.6.2.

1. En el primer grafo del ejemplo anterior, tenemos que hay dos vértices de grado 3, un vértice de grado 2 y dos vértices de grado 4. Podemos ver cómo el camino de Euler que teníamos empezaba en uno de los vértices de grado tres y terminaba en el otro.

En el segundo grafo del ejemplo se tiene que todos los vértices tienen grado 4.

2. Si consideramos el grafo que representaba el problema de los puentes de Königsberg



vemos que a , c y d tiene grado 3, mientras que b tiene grado 5. Como todos los vértices tienen grado impar, deducimos que no existe ningún circuito de Euler. Por tanto, el problema de los puentes de Königsberg no tiene solución.

Hemos visto una condición necesaria para que un grafo tenga un circuito o un camino de Euler. Veamos a continuación que esta condición es también suficiente.

Teorema 1.6.1. *Sea G un grafo conexo. Entonces G es un grafo de Euler si, y sólo si, el grado de cada vértice es par.*

Antes de pasar a la demostración del teorema, veamos el siguiente lema.

Lema 1.6.1. *Sea G un grafo (con un número finito de vértices) en el que cada vértice tiene grado mayor que 1. Entonces G contiene un circuito (y por tanto un ciclo).*

Demostración: Elegimos un vértice cualquiera $v = v_0$. Puesto que el grado de v es mayor que 1, tomamos un lado que incida en v_0 . Sea éste e_0 , y v_1 el otro vértice sobre el que incide e_0 . Podría darse el caso de que $v_0 = v_1$, en cuyo caso ya tendríamos el recorrido.

Puesto que v_1 tiene grado mayor que 1, debe haber otro lado incidente con v_1 . Sea éste e_1 , y v_2 el otro vértice sobre el que incide. Tenemos entonces el camino dado por la sucesión de vértices $v_0v_1v_2$ y la sucesión de lados e_0e_1 .

Continuamos el proceso ahora con v_2 hasta que se repita algún vértice (sin repetir ningún lado). En cuanto esto ocurra, ya habremos encontrado el circuito que buscábamos. ■

Demostración:(Teorema 1.6.1)

Haremos la demostración por inducción sobre el número de lados.

El primer caso es para grafos con un solo lado. Si el grafo es conexo, tiene un solo lado, y el grado del único vértice es par, la única posibilidad es que el grafo sea



en cuyo caso, el circuito de Euler es el camino vv .

Supongamos ahora que tenemos un grafo conexo, con n lados, y en el que el grado de cada vértice es par, y supongamos también que el resultado es cierto para cualquier grafo conexo con menor número de lados.

Por el lema precedente, puesto que el grado de cada vértice es mayor o igual que 2 deducimos que existe en G un circuito c .

Eliminamos de G todos los lados que intervienen en el circuito, y nos queda un grafo en el que todos los vértices tienen grado par (pues de cada vértice se han eliminado un número par de lados que inciden en él). El grafo resultante no tiene que ser conexo, pero cada una de sus componentes conexas sí lo es. Además, cada componente conexa debe tener al menos un vértice por el que se pasa en el circuito c .

Para cada una de ellas que tenga al menos un lado, tenemos un circuito de Euler. Sean estos circuitos c_1, c_2, \dots, c_r . Para cada uno de estos circuitos c_i , tenemos un vértice v_i que también está en el circuito c .

Recorremos entonces el circuito c . En cuanto lleguemos a algún vértice v_i , insertamos el circuito c_i , y continuamos con el circuito c . De esta forma, al cerrar el circuito c habremos recorrido todos los lados del grafo G una sola vez, es decir, tendremos un circuito de Euler. ■

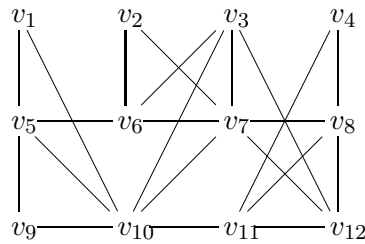
Corolario 1.6.1. *Sea G un grafo conexo. Entonces G tiene un camino de Euler si, y sólo si, G tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

Demostración: La demostración es sencilla. Si G tiene un camino de Euler ya hemos visto que tiene exactamente dos vértices de grado impar (proposición 1.6.1).

Supongamos entonces que G es un grafo conexo con dos vértices de grado impar. Sean estos u y v . Añadimos a G un lado e que une u con v . El grafo resultante tiene todos los vértices de grado par. Tomamos un circuito de Euler que empiece en el lado e . Si eliminamos este lado, lo que tenemos es un camino de Euler en el grafo G . ■

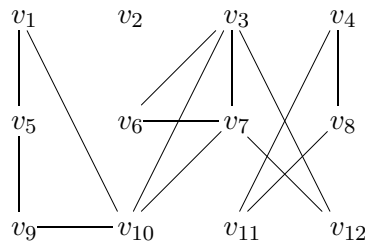
Ejemplo 1.6.3.

Consideramos el siguiente grafo

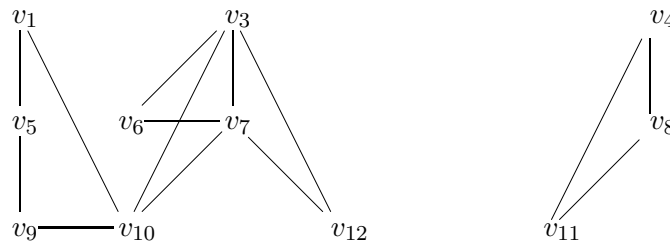


en el que vemos que los vértices v_1, v_2, v_4 y v_9 tienen grado 2; los vértices $v_3, v_5, v_6, v_8, v_{11}$ y v_{12} tienen grado 4, mientras que los vértices v_7 y v_{10} tienen grado 6. Como todos los vértices tienen grado par, sabemos que existe un circuito de Euler. Vamos a encontrarlo.

Para esto, buscamos un circuito cualquiera, por ejemplo, $v_2v_6v_5v_{10}v_{11}v_{12}v_8v_7v_2$, y eliminamos los lados que intervienen en este circuito. Nos queda entonces el grafo



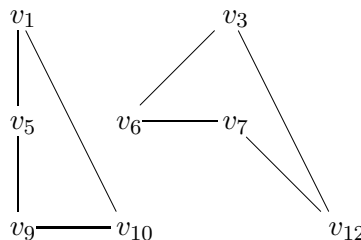
que tiene (aparte del vértice v_2) dos componentes conexas que son las siguientes:



de los cuales hemos de encontrar un circuito de Euler. En el segundo grafo, este circuito sería $v_4v_8v_{11}v_4$.

Vamos a encontrarlo en el primero. Para ello, hacemos como hicimos al principio.

Buscamos un circuito en dicho grafo, que podría ser $v_3v_7v_{10}v_3$; eliminamos los lados que intervienen, y nos queda entonces el grafo



que tiene dos componentes conexas. Para cada una de ellas es fácil encontrar un circuito de Euler. El circuito de la primera componente es $v_1v_5v_9v_{10}v_1$, mientras que el de la segunda es $v_3v_6v_7v_{12}v_3$.

Un vértice común entre los circuitos $v_3v_7v_{10}v_3$ y $v_1v_5v_9v_{10}v_1$ es v_{10} , mientras que un vértice común entre los circuitos $v_3v_7v_{10}v_3$ y $v_3v_6v_7v_{12}v_3$ podría ser v_3 (o v_7).

Recorremos entonces el circuito $v_3v_7v_{10}v_3$, y al llegar a los vértices que hemos elegido insertamos los circuitos de cada una de las componentes conexas.

$$v_3 \underbrace{v_6v_7v_{12}v_3}_{\text{circuit}} v_7v_{10} \underbrace{v_1v_5v_9v_{10}v_1}_{\text{circuit}} v_3$$

Volvemos ya al grafo de partida. En él elegimos un circuito $(v_2v_6v_5v_{10}v_{11}v_{12}v_8v_7v_2)$, que al eliminarlo dividía al grafo en dos componentes conexas. De cada una de éstas tomamos ahora un vértice común con el circuito. Sean éstos v_6 y v_{11} . Recorremos el circuito elegido, y al llegar a estos vértices insertamos los circuitos de Euler para cada una de las componentes. Tenemos entonces:

$$v_2v_6 \underbrace{v_7v_{12}v_3v_7v_{10}v_1v_5v_9v_{10}v_3v_6}_{v_5v_{10}v_{11}} \underbrace{v_4v_8v_{11}}_{v_{12}v_8v_7v_2}$$

que es un circuito de Euler para el grafo del que partíamos.

A continuación veremos un algoritmo que calcula, dado un grafo del que sabemos que tiene un camino o circuito de Euler, un tal camino.

Algoritmo de Fleury

Como entrada, tenemos un grafo G . Como salida, dos sucesiones S_V y S_E , que son las sucesiones de vértices y lados del camino buscado.

1. Si todos los vértices son de grado par, elegimos un vértice cualquiera v . Si G tiene dos vértices de grado impar elegimos uno de estos vértices.
2. Hacemos $S_V = v$ y $S_E = []$.
3. Si G tiene sólo a v , devuelve S_V y S_E , y termina.
4. Si hay un único lado e que incida en v , llamamos w al otro vértice donde incida el lado e ; quitamos de G el vértice v y el lado e y vamos al paso 6.
5. Si hay más de un lado e que incida en v , elegimos uno de estos de forma que al quitarlo el grafo G siga siendo conexo. Llamamos e a dicho lado y w al otro vértice en el que incide e .
6. Añadimos w al final de S_V y e al final de S_E .
7. Cambiamos v por w y volvemos al paso 3.

1.7. Grafos de Hamilton

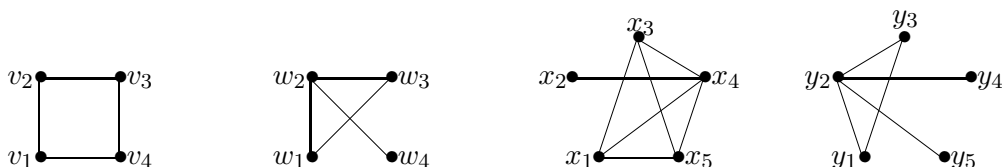
En la sección anterior estudiamos cuándo en un grafo podíamos encontrar un camino que recorriera todos los lados una sola vez. En esta, pretendemos estudiar como recorrer todos los vértices una sola vez.

Definición 22. Sea G un grafo. Un camino de Hamilton es un camino que recorre todos los vértices una sola vez.

Un circuito de Hamilton es un camino cerrado que recorre todos los vértices una sola vez (salvo los extremos).

Un grafo con un circuito de Hamilton se denomina grafo de Hamilton o grafo hamiltoniano.

Ejemplo 1.7.1. Consideramos los siguientes grafos:



Entonces, el primer grafo es un grafo de Hamilton. Un circuito de Hamilton es $v_1v_2v_3v_4v_1$. Obviamente, al tener un circuito de Hamilton, podemos encontrar también un camino de Hamilton ($v_1v_2v_3v_4$).

En el segundo grafo tenemos un camino de Hamilton ($w_1w_3w_2w_4$). Podemos ver como no existe ningún circuito de Hamilton, pues debería tener al menos dos lados incidentes en w_4 (el lado entrante y el lado saliente).

El mismo razonamiento sirve para ver que en el tercer grafo no es hamiltoniano. En este también podemos encontrar caminos de Hamilton. Por ejemplo $x_1x_3x_5x_4x_2$.

Por último, en el último grafo no hay caminos de Hamilton. Fácilmente, podemos ver que de haberlo debería empezar en y_4 y terminar en y_5 (o al revés). En ese caso, el camino debería empezar y_4y_2 , y debería terminar y_2y_5 , luego el vértice y_2 aparecería repetido.

Nótese que en los grafos segundo y cuarto existen caminos de Euler, mientras que en el tercero no. Por tanto, no existe ninguna relación entre tener caminos de Hamilton y caminos de Euler.

Observaciones:

Puesto que a la hora de buscar un camino o circuito de Hamilton no podemos pasar dos veces por un mismo vértice, no es posible que el camino contenga dos lados paralelos, ni que contenga lazos. Supondremos por tanto en esta sección que todos los grafos que intervienen no tienen ni lazos ni lados paralelos.

Hemos visto en el ejemplo anterior, que si hay un vértice de grado 1, entonces el grafo no es de Hamilton.

Por otra parte, si un grafo con n vértices es de Hamilton, en el circuito de Hamilton intervienen n lados. Por tanto, un grafo de Hamilton con n vértices tiene al menos n lados.

Intuitivamente, cuantos más lados tenga un grafo con un número de vértices fijado, más fácil será poder encontrar un circuito de Hamilton. Veremos a continuación que si tenemos el número suficiente de lados, entonces tenemos garantizada la existencia de circuitos de Hamilton.

Teorema 1.7.1. Sea G un grafo con n vértices.

1. Si el número de lados es mayor o igual que $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$, entonces el grafo es hamiltoniano.
2. Si $n \geq 3$ y para cada par de vértices no adyacentes se verifica que $gr(v) + gr(w) \geq n$, entonces G es un grafo de Hamilton.

Demostración:

Hagamos en primer lugar la demostración de la segunda parte. Probemos que si G no es un grafo de Hamilton, hay al menos dos vértices no adyacentes tales que la suma de sus grados es menor que n .

Supongamos entonces que G es un grafo que no es de Hamilton. Añadimos un lado al grafo. Si sigue sin ser de Hamilton, volvemos a añadir un lado, y así sucesivamente, hasta que encontremos un grafo de Hamilton. Sea $ab = v_1v_2$ el último lado que hemos añadido. El grafo obtenido es un grafo de Hamilton, y el ciclo de Hamilton debe contener al lado ab . Sea entonces dicho ciclo $abv_3v_4 \cdots v_na$.

Llamemos H al grafo que hemos obtenido justo antes de añadir el lado ab .

Para cada i entre 3 y n , vamos a ver que no pueden estar simultáneamente los lados av_{i-1} y bv_i en el grafo H .

Si $i = 3$, entonces $av_{i-1} = av_2 = ab$, que no está en H .

Si $i \geq 4$, en caso de que estuvieran ambos lados, podríamos construir el circuito de Hamilton

$$bv_iv_{i+1} \cdots v_n av_{i-1} v_{i-2} \cdots v_3 b$$

que no contiene al lado ab , lo cual no es posible, pues el grafo H no es de Hamilton.

Tenemos entonces que en el grafo H , se verifica que $gr(a) + gr(b) < n$, y como G es un subgrafo de H , entonces en G se verifica la misma propiedad. Hemos encontrado entonces dos vértices no adyacentes tales que la suma de sus grados es menor que n , como queríamos.

Demostremos ahora la primera parte.

Sean u y v dos vértices no adyacentes. Vamos a probar que $gr(u) + gr(v) \geq n$.

Sea $G' = (V', E')$ el subgrafo completo (ver definición 3) de G formado por todos los vértices de G salvo u y v . Este grafo es un subgrafo de K_{n-2} , por tanto el número de lados de G' es menor o igual que $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Por otra parte, $|E| = |E'| + gr(u) + gr(v)$ (pues el lado uv no está en E), luego

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 \leq |E| = |E'| + gr(u) + gr(v) \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2} + gr(u) + gr(v)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} gr(u) + gr(v) &\geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} \\ &= \frac{(n-2)[n-1-(n-3)]+4}{2} \\ &= \frac{(n-2)(n-1-n+3)+4}{2} \\ &= \frac{(n-2)2+4}{2} \\ &= \frac{2n-4+4}{2} = n \end{aligned}$$

■

Sabemos que si el número de lados de un grafo de n vértices es menor que n no es un grafo hamiltoniano. Si el número de lados está comprendido entre n y $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$, en principio no podemos asegurar nada.

Ejemplo 1.7.2.

1. Dado n un número natural mayor o igual que 2. Construimos el grafo K_{n-1} . El número de lados de este grafo es $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Tomamos un vértice más y lo unimos a un lado cualquiera de K_{n-1} . El grafo resultante no es de Hamilton, pues hay un vértice de grado 1. Tenemos entonces un grafo con n vértices, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$ lados, y que no es hamiltoniano.

Por tanto, la mejor cota sobre el número de lados para asegurar que un grafo es de Hamilton es la dada en el teorema.

2. El grafo C_n tiene n vértices y n lados. Y este es un grafo de Hamilton.
3. Sea G un grafo regular de grado 4 y 8 vértices. Dicho grafo tiene un total de 16 lados. Para 8 vértices, la cota para el número de lados es $\frac{7 \cdot 6}{2} + 2 = 23$.

Sin embargo, en tal caso podemos ver que la suma de los grados de cualquier pareja de vértices es 8. Por tanto, podemos asegurar que dicho grafo es hamiltoniano.

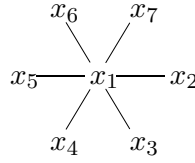
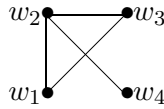
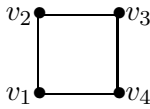
1.8. Grafos bipartidos

Definición 23. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que G es bipartido si podemos descomponer V en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 de forma que todo lado incide en un vértice de V_1 y en un vértice de V_2 .

Para cada $m, n \geq 1$ tenemos el grafo $K_{m,n}$ que es un grafo bipartido.

Ejemplo 1.8.1.

1. Consideramos los siguientes grafos



Entonces el primer y el tercer grafos son bipartidos.

En el primero, se tiene que $V_1 = \{v_1, v_3\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4\}$. Además, podemos ver que cualquier para cualquier pareja formada por un vértice de V_1 y un vértice de V_2 hay un lado y sólo uno que los une. Por tanto, es un grafo bipartido completo. Dado que V_1 y V_2 tienen dos elementos, dicho grafo es $K_{2,2}$.

En el tercero tenemos $V_1 = \{x_1\}$ y $V_2 = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Vemos también que este es un grafo bipartido completo, es decir, este grafo es $K_{1,6}$.

El segundo grafo no es bipartido. Para comprobarlo, supongamos que tenemos una división del conjunto de vértices de la forma $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = V_1 \cup V_2$. Entonces w_1 pertenecerá a uno de los dos conjuntos. Supongamos que a V_1 . En tal caso, se tiene que $w_2 \in V_2$ (pues w_1 y w_2 están unidos por un lado) y $w_3 \in V_2$ (por el mismo motivo). Tenemos entonces dos vértices en el mismo subconjunto de la partición, y unidos por un lado.

El siguiente teorema nos da una caracterización de los grafos bipartidos.

Teorema 1.8.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces G es bipartido si, y sólo si, G no contiene ciclos de longitud impar.

Antes de demostrar el teorema veamos el siguiente lema, cuya demostración se deja como ejercicio.

Lema 1.8.1. Sea G un grafo bipartido con partición del conjunto de vértices $V = V_1 \cup V_2$. Supongamos que $v_1 v_2 \cdots v_m$ es un camino en G y que $v_1 \in V_1$. Entonces $\{v_1, v_3, v_5, \dots\} \subseteq V_1$ y $\{v_2, v_4, \dots\} \subseteq V_2$.

Demostración: (Teorema)

Veamos en primer lugar que si G contiene ciclos de longitud impar entonces G no es bipartido.

Supongamos que $v_1 v_2 \cdots v_{m-1} v_m v_1$ es un ciclo de longitud impar, es decir, $m = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Si G fuera bipartido, tendríamos que $v_1, v_3, \dots, v_{2k+1}$ están en el mismo subconjunto de la partición, mientras que $v_2, v_4, \dots, v_{2m}, v_1$ están en el otro subconjunto de la partición.

Encontramos entonces un vértice (v_1) que está simultáneamente en los dos subconjuntos, lo cual no es posible.

Hagamos la demostración del recíproco. Es decir, supongamos que el grafo no tiene ciclos de longitud impar, y veamos que entonces G es bipartido.

Vamos a hacer la demostración en el caso de que el grafo sea conexo. Caso de no serlo, se deja como ejercicio adaptar la demostración.

Sean u y v dos vértices de G . Definimos el número $d(u, v)$ como la menor longitud posible de los caminos que unen u con v . Claramente, si $d(u, v) = r$ entonces existe un camino simple que une u con v .

Elegimos un vértice $v_0 \in V$, y definimos los conjuntos:

$$V_1 = \{v \in V : d(v_0, v) \text{ es par}\}, \quad V_2 = \{v \in V : d(v_0, v) \text{ es impar}\}.$$

Es claro que $V = V_1 \cup V_2$ y que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Veamos que cualquier lado de G une un vértice de V_1 con un vértice de V_2 .

Sea e un lado incidente con los vértices w y w' , y sean $r = d(v_0, w)$ y $s = d(v_0, w')$. Entonces pueden darse tres posibilidades:

- $r = s + 1$. En tal caso, uno es par y el otro es impar. Por tanto, el lado considerado une un vértice de V_1 con un vértice de V_2 .
- $s = r + 1$. Vale lo mismo a lo dicho en el caso anterior.
- $r = s$. Vamos a ver que esta situación no puede darse, pues de ser así tendríamos un ciclo de longitud impar.

Para comprobarlo, tomamos los dos caminos simples de longitud r

$$v_0 v_1 v_2 \cdots v_r = w; \quad v_0 v'_1 \cdots v'_r = w'.$$

Y a partir de ellos vamos a buscar un ciclo de longitud impar.

En principio, pueden ahora darse también dos situaciones:

1. $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\} = \emptyset$.

Y aquí tenemos un ciclo $v_0 v_1 \cdots v_r v'_r v'_{r-1} \cdots v'_1 v_0$ de longitud $2r + 1$, que tiene longitud impar.

2. $\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\} \neq \emptyset$.

La idea aquí es la misma, sólo que para obtener un ciclo hemos de eliminar los vértices repetidos.

En primer lugar, veamos que si $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\}$ entonces $v_i = v'_i$. Esto es cierto pues si $v_i = v'_j$ con $j \neq i$ entonces, bien $j < i$ o bien $i < j$. En el primer caso tenemos que $v_0 v'_1 \cdots v'_j v_{i+1} \cdots v_r$ es un camino que une v_0 con $v_r = w$ de longitud menor que r , lo cual no es posible. En el segundo se razona de la misma forma.

Tomamos ahora el mayor i tal que $v_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \cap \{v'_1 v'_2, \dots, v'_r\}$. En tal caso, podemos tomar el ciclo $v_i v_{i+1} \cdots v_r v'_r v'_{r-1} \cdots v'_i = v_i$, que tiene longitud $2(r - i) + 1$, es decir, un número impar.

■

Proposición 1.8.1. Sea G un grafo bipartido con partición V_1 y V_2 . Supongamos que $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$. Entonces:

Si G tiene un camino de Hamilton, entonces $|n - m| \leq 1$.

Si G es un grafo de Hamilton, entonces $n = m$.

Si G es completo y $|n - m| \leq 1$, entonces G tiene un camino de Hamilton.

Si G es completo y $n = m$, entonces G es un grafo de Hamilton.

La demostración se deja como ejercicio.

1.9. Grafos planos

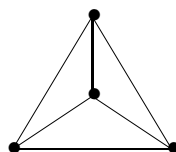
En esta sección vamos a estudiar los grafos que pueden ser representados en el plano.

Definición 24. Sea G un grafo. Una representación de G se dice plana si los vértices y los lados se encuentran todos en un plano, y las líneas que representan dos lados distintos no se cortan.

Un grafo se dice plano si admite una representación plana.

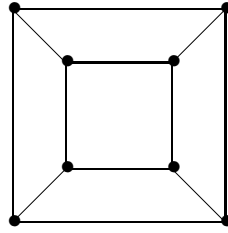
Ejemplo 1.9.1.

1. El grafo K_4 es plano, pues admite una representación plana.



2. Cualquier poliedro tiene asociado un grafo. Los vértices son los vértices del poliedro, y los lados sus aristas. Este grafo es siempre plano.

Por ejemplo, el grafo correspondiente al tetraedro es K_4 . El grafo correspondiente al cubo es Q_3 .



Una representación plana de un grafo divide al plano en que se encuentra en varias regiones, que denominaremos *caras*.

Teorema 1.9.1 (Característica de Euler). Sea G un grafo plano y conexo. Llamemos v al número de vértices, l al número de lados y c al número de caras de una representación plana. Entonces $v - l + c = 2$.

En general, si G es un grafo plano, y χ es el número de componentes conexas entonces $v - l + c = 1 + \chi$.

Demostración: Hagamos la demostración por inducción en el número de lados.

Para grafos (conexos) con un único lado el resultado es cierto, pues únicamente hay dos posibilidades, que son



y en el primer caso $v = 1$, $l = 1$ y $c = 2$, mientras que en el segundo $v = 2$, $l = 1$ y $c = 1$. Fácilmente se ve como en ambos casos se da la igualdad.

Supongamos que el resultado es cierto para todos los grafos planos, conexos y con n lados, y sea G un grafo plano, conexo con $n + 1$ lados. Sean v , l y c el número de vértices, lados y caras respectivamente de G .

Pueden ocurrir dos cosas:

- Que G contenga un ciclo.

En tal caso, sea G' el grafo que resulta de quitar de G un lado que formaba parte de un ciclo. Entonces G' sigue siendo conexo. Llamemos v' , l' y c' al número de vértices, lados y caras de este nuevo grafo. Se tiene que $v' = v$ (no hemos eliminado ningún vértice); $l' = l - 1 = n$ (hemos eliminado un lado) y $c' = c - 1$ (al quitar un lado de un ciclo, las dos caras que separaba ese lado se convierten en una).

Por tanto, se tiene que

$$v - l + c = v' - (l' + 1) + (c' + 1) = v' - l' - 1 + c' + 1 = v' - l' + c' = 2$$

pues, por hipótesis de inducción, para dicho grafo sí era cierta la tesis del teorema.

- Que G no contenga ningún ciclo.

En este caso, por el lema 1.6.1 G debe tener algún vértice de grado 1.

Sea G' el grafo que resulta de eliminar este vértice y el lado que en él incide. Para el grafo resultante se tiene que $v' = v - 1$, $l' = l - 1$ y $c' = c$ (pues el lado eliminado no separaba ninguna región).

Razonando igual que antes se tiene que $v - l + c = 2$.

La demostración del caso general (no conexo) se deja como ejercicio. ■

Corolario 1.9.1. En un poliedro, si v es el número de vértices; l es el número de aristas y c es el número de caras entonces $v - l + c = 2$.

Ejemplo 1.9.2.

1. En la representación plana que hicimos de K_4 se tienen un total de 4 caras. Como en K_4 se verifica que $v = 4$ y $l = 6$ entonces $v - l + c = 4 - 6 + 4 = 2$.
2. El cubo tiene 8 vértices, 12 aristas y 6 caras. Obviamente se ve que $v - l + c = 2$.
3. Vamos a demostrar aquí que sólo existen 5 sólidos regulares. Es decir, poliedros en donde todas las caras son polígonos regulares iguales y en todos los vértices incide el mismo número de lados. Supongamos que tenemos un poliedro regular, y sea G el grafo asociado a dicho poliedro. Sabemos que se verifica que

$$v - l + c = 2$$

Sabemos además que este grafo es regular de grado r (r es el número de aristas que inciden en cada vértice) y que $r \geq 3$. Por tanto, se verifica que

$$rv = 2l.$$

Por otra parte, todas las caras son polígonos regulares de n lados. Si contamos el número de caras, y lo multiplicamos por n estamos contando el número de aristas dos veces, pues cada arista es arista común de dos caras. Por tanto, se tiene también que

$$nc = 2l.$$

Sustituyendo en la expresión $v - l + c = 2$ obtenemos que

$$\frac{2l}{r} - l + \frac{2l}{n} = 2 \implies \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l}$$

Sabemos que $r \geq 3$ y $n \geq 3$ (pues el polígono regular más simple es el triángulo). Si tanto n como r fueran simultáneamente mayores que 3, es decir, $n \geq 4$ y $r \geq 4$ tendríamos que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{4}$, luego

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{l} = \frac{1}{r} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \implies \frac{1}{l} \leq 0,$$

lo cual es imposible.

Por tanto, tenemos dos posibilidades:

- $n = 3$. Las caras del sólido son triángulos.

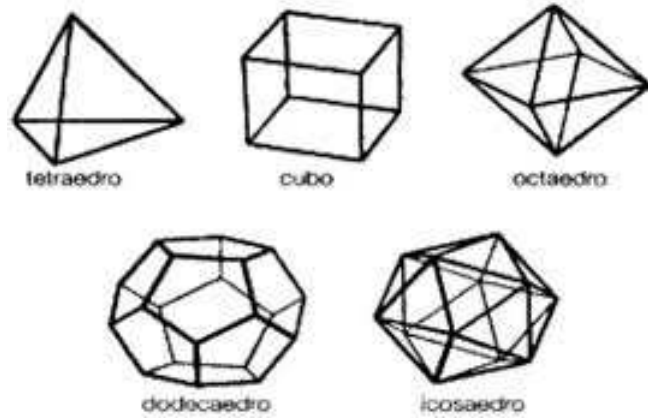
En este caso tenemos

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l} \implies \frac{1}{l} = \frac{1}{r} - \frac{1}{6} \implies l = \frac{6r}{6-r}.$$

Por tanto, $r < 6$, lo que nos da sólo tres posibilidades para r .

- a) $r = 3$. Entonces $l = \frac{6 \cdot 3}{6-3} = 6$. Puesto que $nc = 2l$ deducimos que $c = 4$, y dado que $rv = 2l$ también tenemos que $v = 4$. El sólido regular resulta ser el tetraedro.
 - b) $r = 4$. Aquí $l = \frac{24}{2} = 12$, y de aquí deducimos que $c = 8$ y $v = 6$. El sólido regular es el octaedro.
 - c) $r = 5$. Ahora, $l = 30$, y por tanto $c = 20$ y $v = 12$. El sólido es el icosaedro.
- $r = 3$. Razonando igual que antes, pero intercambiando el papel de r y n tenemos tres posibilidades para n .
 - a) $n = 3$. Este caso ya lo hemos analizado. Es el tetraedro.
 - b) $n = 4$. Ahora las caras son cuadrados. Ahora $l = 12$, lo que implica que $c = 6$ y $v = 8$. Estamos hablando del cubo.

c) $n = 5$. Las caras son pentágonos. Aquí $l = 30$, de donde $c = 12$ y $v = 20$. El sólido es en este caso el dodecaedro.



Corolario 1.9.2. Sea G un grafo plano, conexo, sin lazos ni lados paralelos y sin vértices de grado 1. Entonces $3c \leq 2l$ y $l \leq 3v - 6$.

Demostración. Vamos a llamar grado de una cara al número de lados que delimitan dicha cara, o mejor dicho, al número de aristas que son frontera de la cara.

Es claro que al no tener lazos ni lados paralelos ni vértices de grado 1, el grado de cualquier cara es mayor o igual que 3 (al no haber vértices de grado 1 todo lado forma parte de un ciclo, que no puede tener longitud 1, pues sería un lazo, ni longitud 2 pues tendríamos dos lados paralelos). La suma de los grados de todas las caras será entonces mayor o igual que $3c$.

Por otra parte, al sumar los grados de todas las caras estamos contando dos veces el número de lados, pues cada lado es frontera común de dos caras. Tenemos entonces que $3c \leq 2l$.

La otra desigualdad es consecuencia del Teorema 1.9.1, pues

$$2 = v - l + c \leq v - l + \frac{2l}{3} = v - \frac{l}{3} \implies 6 \leq 3v - l \implies l \leq 3v - 6.$$

■

En la demostración del corolario se han utilizado dos hechos: que toda cara tiene al menos tres lados que son frontera y el Teorema 1.9.1. Si de un grafo pudiéramos asegurar que cada cara tiene al menos r lados que son frontera, entonces las dos desigualdades se transformarían en

$$rc \leq 2l, \quad (r - 2)l \leq r(v - 2).$$

Ejemplo 1.9.3. Vamos a comprobar que los grafos K_5 y $K_{3,3}$ no son planos.

En el grafo K_5 tenemos que $v = 5$. De ser plano, se tendría que $l \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$. Sabemos, sin embargo que $l = 10$. Por tanto, K_5 no puede ser plano.

Si utilizamos la misma expresión para $K_{3,3}$, y puesto que $v = 6$, obtendríamos que $l \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$, lo cual no supone contradicción alguna, ya que $K_{3,3}$ tiene 9 lados.

Sin embargo, por ser $K_{3,3}$ bipartido, no tiene ciclos de longitud impar, luego no puede haber caras que estén delimitadas por 3 lados. Como mínimo, hay cuatro lados fronterizos con cada cara. En este caso, tenemos que si fuera plano se verificaría que

$$(4 - 2)l \leq 4(6 - 2) \implies 2l \leq 16$$

que sabemos que no es cierto.

Deducimos por tanto que $K_{3,3}$ no es plano.

Vamos a continuaicón a dar un teorema que viene a decirnos que, esencialmente, los únicos grafos no planos son los vistos en este ejemplo, es decir, K_5 y $K_{3,3}$. Antes, hemos de introducir las contracciones en grafos.

Una *contracción simple* de G es el resultado de indentificar en G dos vértices adyacentes.

Más precisamente:

Definición 25. Sea $G = (V, E)$ un grafo (sin lazos ni lados paralelos). Sean v y w dos vértices adyacentes y sea e el lado que los une. La *contracción simple* de G a través de e es el grafo siguiente:

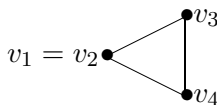
- El conjunto de vértices es $V \setminus \{w\}$ (es decir, eliminamos el vértice w).
- Para formar el conjunto de lados, eliminamos el lado e . Y cada lado que una el vértice w con cualquier otro vértice u lo sustituimos por un lado que una u con v (siempre y cuando ese lado no exista en el grafo G).

Una *contracción* de G es una cadena de contracciones simples.

Ejemplo 1.9.4. Consideramos los grafos



Si en el primer grafo identificamos los vértices v_1 y v_2 obtenemos el grafo



luego dicho grafo es una contracción del "cuadrado".

En el segundo grafo vamos a realizar una contracción simple identificando los vértices w_1 y w_2 , y otra identificando w_2 y w_4 . Los grafos que obtenemos son

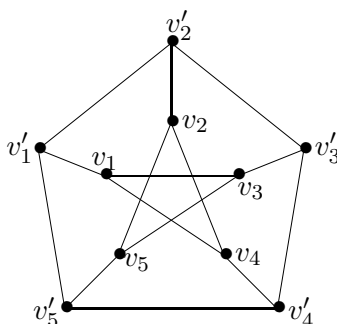


Es muy intuitivo ver que cualquier contracción de un grafo plano sigue siendo un grafo plano.

Estamos ya en condiciones de dar el siguiente teorema.

Teorema 1.9.2 (Kuratowski). Sea G un grafo. Entonces G es plano si, y sólo si, ningún subgrafo suyo puede contraerse a K_5 ni a $K_{3,3}$.

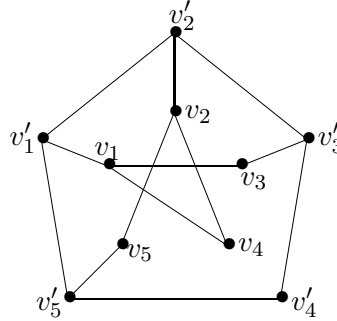
Ejemplo 1.9.5. Consideramos el siguiente grafo G :



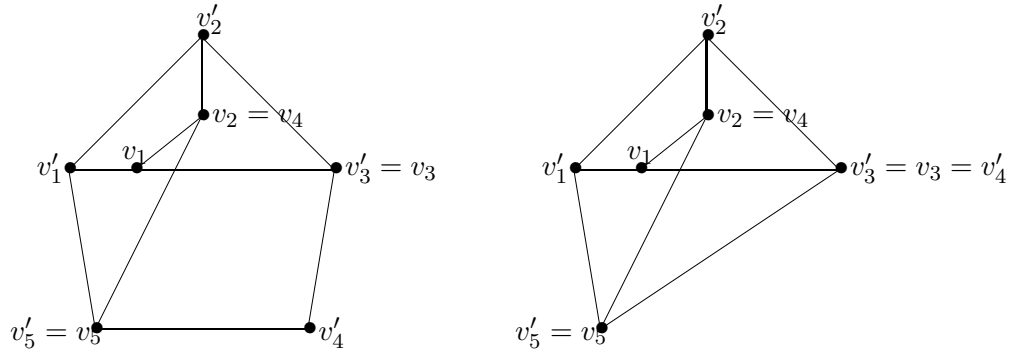
Entonces, si identificamos cada vértice v_i con v'_i (es decir, realizamos cinco contracciones) obtenemos el grafo K_5 , que sabemos que no es plano. Deducimos por tanto que este grafo no es plano.

También podemos ver que este grafo no es plano como sigue:

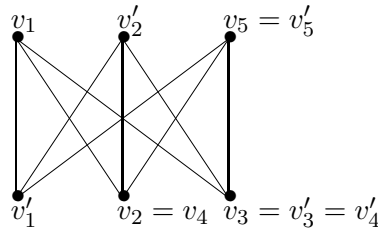
Tomamos el subgrafo de G con los mismos vértices, y del que se eliminan los lados que unen v_3 con v_5 , y v_4 con v'_4 . El grafo que obtenemos es



Identificamos los vértices v_2 con v_4 , v_3 con v'_3 y v_5 con v'_5 , y a continuación v'_4 con $v_3 = v'_3$. El grafo resultante es:



que podemos representar como



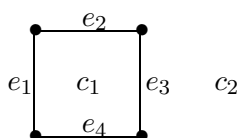
Es decir, hemos encontrado un subgrafo de G que puede contraerse hasta $K_{3,3}$.

La representación que hemos obtenido de $K_{3,3}$ (no esta última) puede servirnos para comprobar que si en $K_{3,3}$ se suprime algún lado, el grafo resultante es plano (basta suprimir el lado v_2v_5 o el lado v_1v_3).

Por último, para acabar esta sección introducimos el concepto de grafo dual.

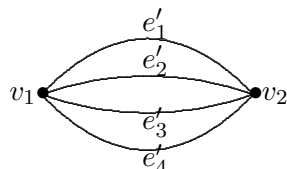
Definición 26. Sea G un grafo plano. Supongamos que tenemos una representación plana con caras c_1, c_2, \dots, c_r . Definimos el grafo dual para la representación dada como el grafo cuyo conjunto de vértices es igual al conjunto de caras (o tiene un vértice v'_i para cada cara c_i), y cuyo conjunto de lados coincide (o es biyectivo) con el conjunto de lados de G . En el grafo dual, un lado une dos vértices si en la representación plana de G dicho lado es frontera común de las dos caras.

Ejemplo 1.9.6. Consideramos el grafo



que divide al plano en dos regiones c_1 y c_2 . El grafo dual, tendrá entonces dos vértices v_1 y v_2 (uno por cada cara), y cuatro lados (uno por cada lado de G). Puesto que cada lado tiene frontera común con c_1 y c_2 , cada lado del dual unirá los vértices v_1 y v_2 .

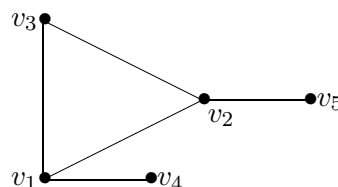
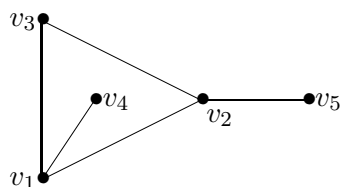
El grafo dual es entonces:



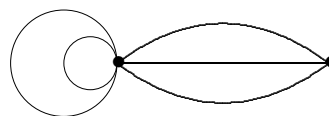
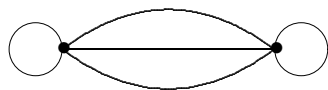
Podemos ver que si hacemos el dual de este grafo obtenemos el grafo inicial.

Cuando hablamos de dual de un grafo, hacemos referencia a su representación plana. Esto es así porque el dual de un grafo depende de la representación plana que tomemos, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.9.7. Vamos a considerar dos representaciones planas de un mismo grafo, y vamos a hallar el dual para cada una de las representaciones. El grafo tiene 5 vértices (v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5) y 5 lados, de los que damos los dos vértices que unen ($v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3$ y v_2v_5). He aquí dos representaciones planas del mismo grafo:

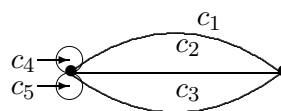
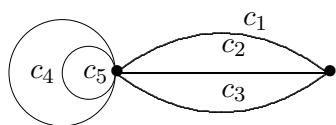


Calculamos el dual de cada una de las dos representaciones. Vemos que en ambos casos tenemos dos caras, lo que da lugar a 2 vértices en el grafo dual. Los grafos duales son entonces:

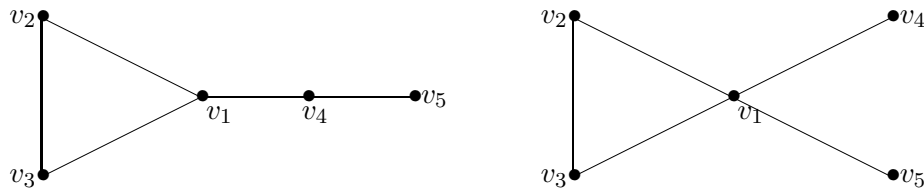


que podemos ver que no son isomorfos. Mientras el primer grafo tiene dos vértices de grado 5, el segundo tiene un vértice de grado 7 y uno de grado 3.

Del segundo grafo que hemos obtenido, podemos hacer varias representaciones planas. Por ejemplo,



y cada una de ellas tiene un dual diferente. En estos casos serían:



que no son isomorfos entre sí, ni isomorfos al grafo original (basta estudiar en cada caso la sucesión de grados).

Si quisiéramos obtener el grafo inicial, deberíamos tomar otra representación, aquella en la que uno de los lazos estaría "dentro" de la región c_2 .

1.10. Coloración de grafos

Definición 27. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Una coloración G es una aplicación $f : V \rightarrow C$, donde C es un conjunto, de tal forma que para cualquier $e \in E$, si $\gamma_G(e) = \{v, w\}$ con $v \neq w$ entonces $f(v) \neq f(w)$.

Cuando el conjunto C sea un conjunto de colores, la aplicación f lo que hace es asignar un color a cada vértice de G , de forma que dos vértices adyacentes no tienen el mismo color.

Se llama número cromático de G , y lo representaremos como $\chi(G)$ al cardinal del menor conjunto C para el que existe una coloración de G .

Ejemplo 1.10.1.

1. El grafo $\bullet \text{---} \bullet$ necesita al menos dos colores para colorearlo, ya que los dos vértices no pueden ser coloreados con el mismo color al ser adyacentes. Su número cromático es por tanto 2.
2. En general, el número cromático del grafo K_n es n , pues todos los vértices deben tener colores distintos, ya que dos vértices cualesquiera son adyacentes.
3. Una definición alternativa de grafo bipartido es la de un grafo cuyo número cromático es 2, pues se tiene que un grafo es bipartido si, y sólo si, su número cromático vale 2.

Si el grafo es bipartido, con partición $V = V_1 \cup V_2$, entonces podemos colorear todos los vértices de V_1 de un color, y todos los vértices de V_2 de otro color. Es claro entonces que dos vértices adyacentes tienen distinta coloración.

4. Si G_1 es un subgrafo de G_2 , entonces $\chi(G_1) \leq \chi(G_2)$.
5. Si un grafo es plano, su número cromático es menor o igual que 4. Éste es un problema que se planteó por primera vez a mitad del siglo XIX, cuando se intentaba colorear los condados de un mapa de Inglaterra de forma que dos condados con frontera común tuvieran distinto color. El problema estuvo abierto durante más de un siglo, hasta que en 1976, Appel y Haken probaron el resultado basándose en un complicado análisis computacional.

El recíproco de este resultado no es cierto. $K_{3,3}$ tiene número cromático igual a 2, y sin embargo no es plano.

En general, determinar el número cromático de un grafo es complicado. Para ello, vamos a valernos del polinomio cromático.

Definición 28. Sea G un grafo y $x \in \mathbb{N}$. Vamos a denotar por $p(G, x)$ al número de coloraciones distintas, con x colores, que tiene el grafo G .

Ejemplo 1.10.2.

1. Si G es un grafo que tiene al menos un lado (que no es lazo) entonces $p(G, 1) = 0$.
2. Si queremos colorear el grafo K_2 y disponemos de x colores, entonces para uno de los vértices podemos elegir cualquiera de los x colores, mientras que para el otro podemos elegir entre los $x - 1$ restantes. El principio del producto nos dice entonces que $p(K_2, x) = x(x - 1)$.
3. En general, se tiene que $p(K_n, x) = x(x - 1) \cdots (x - n + 1)$. De aquí se deduce que si $m \leq n$, $p(K_n, m) = 0$, mientras que $p(K_n, n) = n!$. Por tanto, el número cromático de K_n es n .
4. Si G es un grafo cuyas componentes conexas son G_1, G_2, \dots, G_m . Entonces el polinomio cromático de G vale $p(G, x) = p(G_1, x) \cdot p(G_2, x) \cdots p(G_m, x)$.

Por tanto, nos limitaremos a estudiar las coloraciones de los grafos conexos.

5. El polinomio cromático del grafo P_n es $p(P_n, x) = x(x - 1)^n$.

Supongamos que el conjunto de vértices de P_n es $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ y el conjunto de sus lados son $\{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$.

Entonces, para elegir una coloración de G con x colores, podemos elegir el que queramos para v_0 , y para el resto de los vértices tenemos $x - 1$ posibilidades (todas menos la que hayamos elegido para v_{i-1}). El principio del producto nos dice que $p(P_n, x) = x(x - 1)^n$.

Antes de ver cómo calcular el polinomio cromático de un grafo, realizamos la siguiente construcción.

Dado un grafo G , tomamos un lado e (que no sea un lazo) que una los vértices u y v . Entonces el grafo G_e es el grafo con los mismos vértices que G , pero al que se le ha quitado el lado e , y el grafo G'_e es el grafo que resulta de identificar en G_e los vértices u y v , es decir, lo que en su momento (ver definición 25) llamamos la contracción simple del grafo G a través del lado e .

Teorema 1.10.1. Sea G un grafo, y u y v dos vértices adyacentes. Sea e el lado que los une. Entonces $p(G_e, x) = p(G, x) + p(G'_e, x)$.

Demostración: Vamos a descomponer el conjunto de las posibles coloraciones de G_e con x colores en dos subconjuntos, los cuales los identificaremos con las coloraciones de G y las de G'_e respectivamente (con x colores). Esto, junto con el principio de la suma, nos dará la relación que buscamos.

Puesto que en G_e los vértices u y v no son adyacentes, una coloración de G_e puede tener en los vértices u y v del mismo color o de distinto color.

Si tienen distinto color, lo que tenemos es una coloración del grafo G (obviamente, toda coloración de G es una coloración de G_e). Por tanto, las coloraciones en las que u y v tienen distinto color pueden identificarse con las coloraciones de G .

Si u y v tienen el mismo color, entonces lo que tenemos es una coloración de G'_e . Recíprocamente, cualquier coloración de G'_e nos da lugar a una coloración de G_e en la que u y v tienen el mismo color. ■

Esta expresión podemos verla como $p(G, x) = p(G_e, x) - p(G'_e, x)$, lo cual nos permite reducir el cálculo del polinomio cromático de un grafo al cálculo de polinomios cromáticos de grafos más pequeños (con menos lados o con menos vértices). Veamos algún ejemplo.

Ejemplo 1.10.3. Para simplificar la notación, vamos a representar el polinomio cromático de un grafo encerrando el grafo entre corchetes.

1. Vamos a calcular el polinomio cromático de un ciclo de longitud 4.

$$\begin{aligned}
 \boxed{\square_e} &= \boxed{\square} - \boxed{\triangle} = x(x - 1)^3 - x(x - 1)(x - 2) \\
 &= x(x - 1)[x^2 - 2x + 1 - x + 2] \\
 &= x(x - 1)(x^2 - 3x + 3).
 \end{aligned}$$

2. Vamos a calcular otro polinomio cromático.

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 5 aristas} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 4 aristas} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 3 aristas} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 4 aristas} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 1 vértice} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 3 aristas} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 3 aristas} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 4 aristas} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 1 vértice} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Grafo con 4 vértices y 3 aristas} \end{array} \right] \\
 &= x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot x - 2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) = x(x-1)(x-2)^2(x-3).
 \end{aligned}$$

1.11. Árboles

1.11.1. Caracterización de los árboles.

Comenzamos en esta sección el estudio de un tipo especial de grafos, los llamados árboles. Éstos fueron estudiados por vez primera por Kirchhoff, en 1847, en su trabajo de redes eléctricas. Sin embargo, estas estructuras son hoy día muy importantes en el estudio de las estructuras de datos, las ordenaciones, etc.

Definición 29. Un árbol es un grafo conexo que no tiene ciclos.

Un grafo que no tenga ciclos se denomina bosque (podría no ser conexo).

Dado un grafo conexo, un subgrafo suyo se dice árbol generador si tiene todos los vértices y es un árbol.

Nótese que un árbol no puede tener lazos ni lados paralelos.

Un primer resultado sobre árboles, muy intuitivo, es el siguiente:

Lema 1.11.1. Sea G un grafo conexo que contiene un ciclo. Entonces, si quitamos uno de los lados del ciclo el grafo sigue siendo conexo.

Proposición 1.11.1. Todo árbol es un grafo plano.

Demostración: Usando el teorema de Kuratowski el resultado es trivial, pues al no tener ciclos no puede tener ningún subgrafo que pueda contraerse hasta K_5 o $K_{3,3}$. No obstante, puede darse también una demostración sin hacer uso de este teorema, por inducción.

En realidad, lo que vamos a probar es que *todo grafo con n lados y que no tenga ciclos es un grafo plano*, y esto lo haremos por inducción en n .

Para $n = 0$ el resultado es trivialmente cierto, pues al no haber lados no pueden cruzarse.

Supuesto el resultado cierto para n lo demostramos para $n + 1$.

Si tenemos un grafo sin ciclos con $n + 1$ lados, le quitamos un lado y nos resulta un grafo plano (pues no tiene ciclos y tiene n lados). Al no tener ciclos no divide al plano en regiones, por lo que dos puntos cualesquiera pueden unirse por una línea. Por tanto, el lado que añadimos podemos dibujarlo sin que corte a ninguno de los ya existentes. ■

Corolario 1.11.1. Sea G un grafo conexo con n vértices. Entonces G es un árbol si, y sólo si, G tiene $n - 1$ lados.

Demostración: Supongamos que G es un árbol. Entonces es un grafo plano, y el número de regiones en que se divide el plano es 1. Por el teorema 1.9.1 se tiene que $n - l + 1 = 2$, lo que implica que $l = n - 1$.

Recíprocamente, supongamos que tenemos un grafo conexo con n vértices y $n - 1$ lados. Si no fuera un árbol es porque tiene un ciclo. Le quitamos un lado del ciclo y el grafo sigue siendo conexo. Y así hasta que el grafo no tenga ciclos. Entonces tendremos un árbol con n vértices y menos de $n - 1$ lados, lo cual acabamos de ver que no es posible. ■

El siguiente teorema nos da una caracterización de los árboles.

Teorema 1.11.1. *Sea G un grafo con n vértices, sin lados paralelos ni lazos. Entonces son equivalentes:*

1. G es un árbol.
2. Dos vértices cualesquiera están unidos por un único camino simple.
3. G es conexo, pero si le quitamos un lado deja de serlo.
4. G no tiene ciclos, pero si le añadimos un lado tendrá algún ciclo.
5. G tiene $n - 1$ lados.

Es decir, los árboles son los menores grafos conexos, o los mayores grafos sin ciclos.

Nótese también que para las caracterizaciones segunda, tercera y cuarta no es necesario suponer que el grafo no tiene lazos ni lados paralelos, pues se deduce de ellas.

Antes de demostrar el teorema enunciamos el siguiente lema, cuyo enunciado es bastante intuitivo:

Demostración:(Teorema 1.11.1) La equivalencia entre 1 y 5 ya la hemos visto. Vamos a ver que los enunciados 1,2,3,4 son equivalentes.

1 \implies 2

Supongamos que G es un árbol. Entonces es conexo, luego dados dos vértices cualesquiera hay un camino que los une. Por la proposición 1.1.1, hay un camino simple entre ambos vértices. Si hubiera más de uno, entonces el grafo contendría un ciclo (ver proposición 1.1.2), y esto no es posible, pues G es un árbol.

2 \implies 3

Puesto que dados dos vértices cualesquiera hay un camino (simple) que los une, el grafo es conexo.

Eliminamos del grafo G un lado cualquiera. Supongamos que este lado une los vértices u y v . Entonces, en el grafo resultante (que llamaremos G') no hay ningún camino que una u y v .

Esto es así porque de haber un camino que uniera u y v tendríamos un camino simple que uniría u con v en G' , lo que nos daría dos caminos simples que unen u con v en G : el que hemos encontrado en G' y el camino de longitud 1 uv . Pero por hipótesis, entre dos vértices había un único camino simple.

Por tanto, al eliminar un lado cualquiera el grafo resultante no es conexo, como queríamos.

3 \implies 4

Supongamos que G tuviera un ciclo. Entonces, por el lema 1.11.1, podríamos quitarle un lado a G y el grafo seguiría siendo conexo. Por tanto, G no tiene ciclos.

Le añadimos a G un lado. Por ejemplo, el lado uv . Entonces, entre los vértices u y v hay al menos dos caminos simples. Uno, el camino uv , y otro, que podemos tomar en el grafo G por ser éste conexo.

Al haber dos caminos simples entre dos vértices, el grafo resultante contiene un ciclo (proposición 1.1.2).

4 \implies 1

Hay que demostrar que G es conexo, en cuyo caso será un árbol (por no contener ciclos).

Pero si G no fuera conexo, habría dos vértices u y v que no están unidos por ningún camino. Podríamos entonces añadir a G el lado uv , y el grafo no contendría ningún ciclo, en contra de nuestra hipótesis.

Por tanto, el grafo G es conexo.

■

1.11.2. Árboles generadores.

Un concepto importante en relación a los árboles y que ya hemos dado en la definición 29 es el de *árbol generador*. Dado un grafo $G = (V, E)$ un árbol generador es un subgrafo de G , que contiene todos los vértices, y que es un árbol.

Es fácil ver que todo grafo conexo tiene un árbol generador. Y es fácil, a partir de un grafo conexo obtener un árbol generador. Por ejemplo, si a todos los lados le damos peso uno y aplicamos el algoritmo de Dijkstra obtenemos un árbol generador.

O también, si G es un grafo conexo, podemos proceder como sigue:

- Comprobamos si G tiene ciclos.
 - Si no tiene ciclos, ya tenemos un árbol generador.
 - Si tiene ciclos, eliminamos un lado de ese ciclo y volvemos al principio.
- Al terminar este proceso, tendremos un árbol generador.

Otra forma de obtenerlo podría ser:

En primer lugar ordenamos todos los lados del grafo e_1, e_2, \dots, e_n .

Comenzamos con el grafo $G_0 = (V, E_0)$, donde $E_0 = \emptyset$

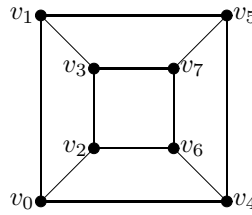
Supuesto construido el grafo $G_i = (V, E_i)$ pasamos al grafo $G_{i+1} = (V, E_{i+1})$. Si al añadir e_{i+1} al grafo G_i el grafo resultante tiene algún ciclo, entonces $G_{i+1} = G_i$. Si no, entonces $G_{i+1} = (V, E_i \cup \{e_{i+1}\})$ (es decir, le añadimos el lado e_{i+1} al grafo G_i).

El grafo G_n es un árbol generador.

Vamos a ver algún ejemplo.

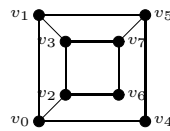
Ejemplo 1.11.1.

Partimos del grafo Q_3

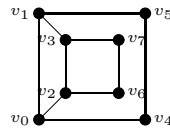


1. Comenzamos por el primer método descrito.

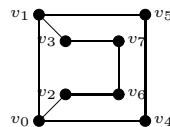
Puesto que tenemos el ciclo $v_0v_2v_6v_4v_0$ eliminamos un lado del ciclo (por ejemplo v_6v_4 . El grafo que nos queda es



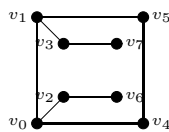
del ciclo $v_0v_2v_6v_7v_5v_4v_0$ suprimimos el lado v_7v_5 .



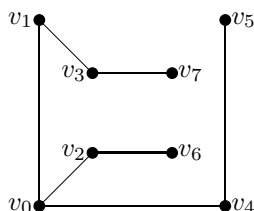
del ciclo $v_0v_1v_3v_2v_0$ suprimimos el lado v_3v_2 :



del ciclo $v_0v_2v_6v_7v_3v_1v_0$ quitamos el lado v_6v_7 :



y por último, del ciclo $v_0v_1v_5v_4$ eliminamos el lado v_1v_5 :

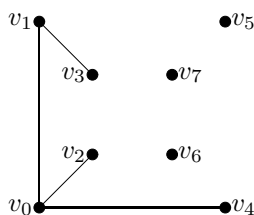


y ya tenemos un árbol.

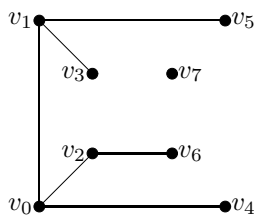
2. Para obtener un árbol generador por el segundo método descrito damos una ordenación de los lados. Por ejemplo:

v_0v_1 ; v_0v_2 ; v_1v_3 ; v_0v_4 ; v_2v_3 ; v_1v_5 ; v_2v_6 ; v_4v_5 ; v_3v_7 ; v_4v_6 ; v_5v_7 ; v_6v_7

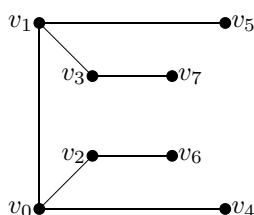
Vamos añadiendo los lados siguiendo el orden v_0v_1 , v_0v_2 , v_1v_3 y v_0v_4 (ninguno forma un ciclo).



El lado v_2v_3 cerraría un ciclo, luego lo descartamos. Añadimos v_1v_5 y v_2v_6 . El lado v_4v_5 cerraría un ciclo.



pero v_3v_7 no cierra ningún ciclo, por lo que lo añadimos. Y con este lado ya tenemos un árbol generador.

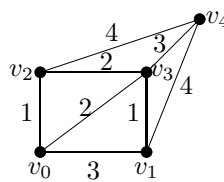


Por supuesto que otra ordenación de los lados daría lugar a otro árbol generador diferente.

Un problema algo más complicado es encontrar el árbol generador de peso mínimo. Para eso, hemos de partir de un grafo ponderado (es decir, un grafo en el que cada lado tiene un peso). Este problema fue estudiado inicialmente por Boruvka, quien publicó una primera solución en 1928. Más adelante, en 1930, Jarník diseñó otro algoritmo para resolver el problema conceptualmente más simple. Este algoritmo ha pasado a la historia como el *algoritmo de Prim*, pues en 1957, Robert Prim realizó también un diseño de este algoritmo. Nosotros estudiaremos aquí el *algoritmo de Kruskal* (publicado en 1956) y el *algoritmo de Jarník-Prim*.

El algoritmo de Kruskal es en realidad el último método que hemos descrito para calcular un árbol generador, pero donde partimos, no de una ordenación arbitraria de los lados, sino de una ordenación en orden creciente según sus pesos.

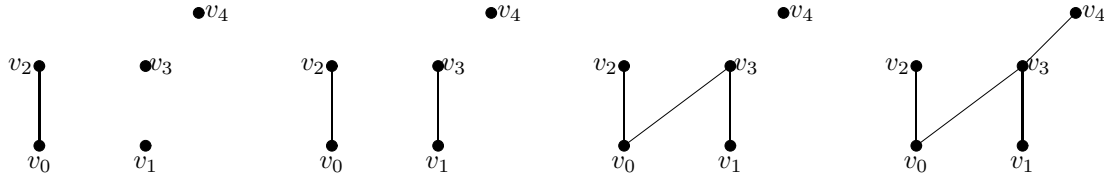
Por ejemplo, imaginemos que tenemos el grafo ponderado siguiente:



y vamos a encontrar un árbol generador minimal. Para esto, ordenamos los lados en orden creciente de su peso:

$$v_0v_2; v_1v_3; v_0v_3; v_2v_3; v_0v_1; v_3v_4; v_1v_4; v_2v_4$$

Y ahora comenzamos a construir el árbol:

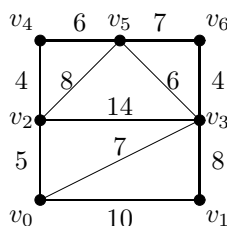


donde en primer lugar hemos añadido el lado v_0v_2 , a continuación el lado v_1v_3 . Después el lado v_0v_3 . El lado v_2v_3 , que es el siguiente de la lista, no lo añadimos, ya que cierra un ciclo $v_0v_2v_3v_0$. Lo mismo ocurre con el lado v_0v_1 , luego tampoco lo añadimos. Finalmente, el que sí podemos añadir es v_3v_4 . Y con esto ya tenemos un árbol generador.

En cuanto al algoritmo de Jarník-Prim, la idea es, dado un grafo conexo $G = (V, E)$ partir de un conjunto formado por un vértice $V_0 = \{v_0\}$ y a partir de ahí ir construyendo una sucesión de conjuntos de vértices V_1, V_2, \dots, V_n , y de conjuntos de lados E_1, E_2, \dots, E_n , donde cada par (V_i, E_i) constituye un árbol y $V_n = V$.

Construido el árbol $G_i = (V_i, E_i)$ se va a formar un árbol $G_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1})$ añadiendo un vértice y un lado. Para esto, se toman todos los vértices de $V \setminus V_i$ que son adyacentes a algún vértice de V_i , y los lados que unen estos vértices con alguno del conjunto V_i . De todos ellos elegimos el de peso mínimo (sea este e_{i+1}), y ese lo añadimos al conjunto E_i para formar E_{i+1} . Al conjunto V_i le añadimos el vértice en que es incidente el lado e_{i+1} y que no pertenece a V_i .

Vamos a tomar el siguiente grafo ponderado:

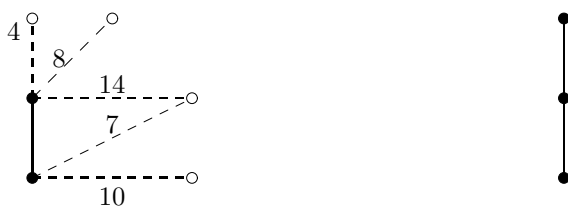


Y vamos a calcular un árbol generador minimal siguiendo el algoritmo de Jarník-Prim. Para esto, comenzamos con el vértice v_0 (podemos elegir cualquier otro).

Dibujamos este vértice y señalamos los lados incidentes en él. Elegimos el de peso menor, que es v_0v_2 .



Repetimos lo mismo. Dibujamos el grafo que tenemos y señalamos los lados que inciden en alguno de sus vértices. Y volvemos a elegir de todos ellos el de menor peso, que en esta ocasión es v_2v_4 .



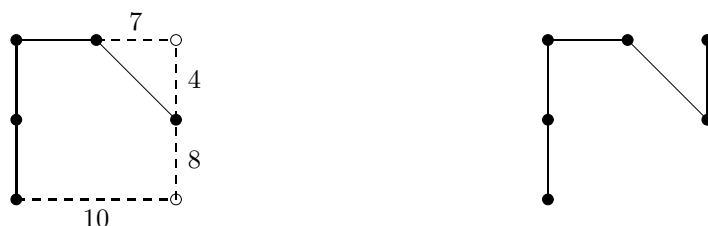
Señalamos nuevamente los lados incidentes en el árbol que tenemos y seleccionamos el de menor peso, que es v_4v_5 .



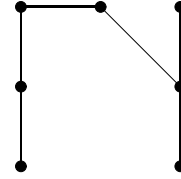
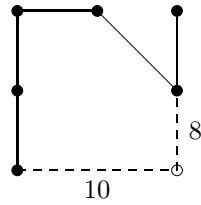
Repetimos. Notemos que ahora no señalamos el lado v_2v_5 , pues sus dos vértices están en el árbol que ya hemos obtenido. Hemos de señalar los lados que tienen un vértice en uno de los del árbol y el otro fuera de él. De entre todos estos, seleccionamos el lado v_5v_3 por ser el de menos peso.



De los lados que señalamos en esta ocasión seleccionamos el lado v_3v_6 .



Y ya, por último de los dos lados posibles v_0v_1 y v_1v_3 elegimos el segundo que tiene peso 8 (mientras que el primero tiene peso igual a 10).



Y este último es el árbol generador de peso mínimo.

1.11.3. Árboles con raíz.

El árbol es una estructura muy útil a la hora de representar información. Por ejemplo, cuando estudiamos la lógica proposicional o la lógica de predicados, y desglosábamos una fórmula lo que obteníamos tenía estructura de árbol en el que colocábamos en cada vértice, bien una conectiva, bien un cuantificador, bien una fórmula atómica. Otro ejemplo de estructura de árbol la tenemos en la organización en directorios o carpetas de la información de un sistema informático.

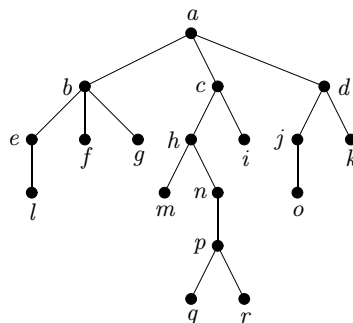
En ambos casos esta información se encuentra jerarquizada en niveles, partiendo de un nodo destacado denominado raíz. Esto da lugar al concepto de árbol con raíz. Un árbol con raíz no es más que un árbol en el que se ha destacado un vértice. Si G es un árbol en el que hemos destacado como raíz al vértice v_0 , hablaremos del árbol (G, v_0) . Introducimos alguna nomenclatura estándar para árboles con raíz:

Sea (G, v_0) un árbol con raíz.

1. La profundidad de un vértice v es la longitud del único camino simple que une v con la raíz. En tal caso, la profundidad de la raíz vale 0.
2. La profundidad del árbol es el máximo de las profundidades de sus vértices.
3. Un vértice v se dice que es una hoja si no es la raíz y su grado es igual a 1.
4. Un vértice v se dice que es hijo de w si el único camino simple que une v con la raíz es $vw \cdots v_0$. Notemos que en tal caso, la altura de v es una unidad mayor que la altura de w .
5. Un vértice w se dice que es padre de v si v es hijo de w .
6. Un vértice w es descendiente de un vértice v si v está en el único camino simple que une w con la raíz.
7. La altura de un vértice es la profundidad del subárbol formado por el vértice y sus descendientes.

Ejemplo 1.11.2.

1. Consideramos el siguiente árbol con raíz (G, a) :



Entonces:

Son hojas los vértices $f, g, i, k, l, m, o, q, r$.

El vértice b tiene tres hijos: e, f, g . Notemos que la altura de b vale 1 y la de sus hijos vale 2.

El padre del vértice n es el vértice h .

Los vértices b, c, d tienen profundidad 1. Los vértices l, m, n, o tienen profundidad 3.

Los vértices q, r tienen profundidad 5, y son los que tienen más altura en todo el árbol. Por tanto, la profundidad del árbol es 5.

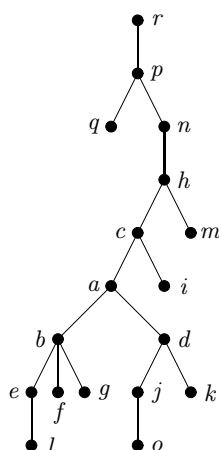
Los vértices h, m, n, p, q, r son los descendientes del vértice h .

Las hojas tienen altura 0.

El vértice b tiene altura 2, el vértice c tiene altura 4 y el vértice d tiene altura 2.

La altura de la raíz es igual a la profundidad del árbol.

2. Consideramos el mismo árbol, pero tomamos como raíz el vértice r . En tal caso, el grafo podríamos pintarlo como sigue:



Las hojas son ahora los vértices f, g, i, k, l, m, o, q . El vértice r no es hoja.

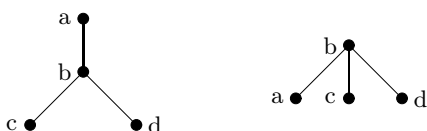
La profundidad es ahora 8, que es la distancia que hay desde los vértices l y p hasta la raíz (r).

Antes h era el padre de n . Ahora es un hijo (de hecho, el único hijo).

Ahora, el vértice p tiene dos hijos: q y n . Antes también tenía dos hijos, pero eran q y r .

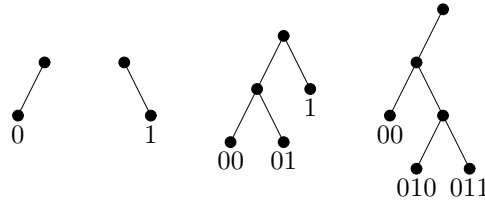
El vértice a tiene ahora padre, que es c . Antes, al ser el vértice raíz no tenía padre.

Un árbol con raíz se dice m -ario si cada nodo tiene a lo sumo m hijos. Los dos árboles del ejemplo anterior son árboles 3-arios (o árboles ternarios). El que un árbol sea m -ario depende tanto del árbol como de la raíz. Así, vamos a considerar un árbol con 4 vértices, a, b, c y d , y según la raíz que tomemos el árbol será binario (2-ario) o ternario.



Algoritmo de Huffman

Vamos a fijarnos en árboles binarios. Y puesto que cada nodo tiene a lo sumo dos hijos, vamos a distinguir si estos hijos van hacia la derecha o a la izquierda. De esta forma, si representamos a la izquierda como 0 y a la derecha como 1, entonces cada hoja está determinada por una sucesión de bits (basta recorrer el árbol desde la raíz hasta la hoja). Veamos algunos ejemplos:



Notemos que si tenemos una lista de cadenas de bits, con la condición de que ninguna lista sea el inicio de ninguna otra, entonces podemos construir un árbol binario cuyas hojas están codificadas con los elementos de la lista.

Los árboles binarios se emplean en la codificación de los símbolos de un alfabeto.

Por ejemplo, imaginemos que tenemos un alfabeto con cuatro símbolos $\{A, B, C, D\}$ y queremos codificar cada uno de los símbolos del alfabeto mediante una cadena de bits. Una posible codificación sería

$$A \rightarrow 00; \quad B \rightarrow 01; \quad C \rightarrow 10; \quad D \rightarrow 11$$

De esta forma, si recibiéramos la cadena 00101101101010110011000100110, sabemos que se correspondería con el mensaje:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 00 & 10 & 11 & 01 & 10 & 10 & 10 & 11 & 01 & 10 & 01 & 10 & 00 & 10 & 01 & 10 \\ A & C & D & B & C & C & C & D & B & C & B & C & A & C & B & C \end{array}$$

Pero si vemos el mensaje, podemos apreciar que el C es el símbolo que más aparece, mientras que el A y el D son los que menos. Entonces, si empleáramos una codificación en la que para el símbolo C empleáramos menos bits (aunque eso suponga emplear más para los símbolos A y D) podríamos enviar el mismo mensaje con una cadena más corta. Por ejemplo, si probamos con:

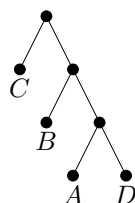
$$A \rightarrow 010; \quad B \rightarrow 01; \quad C \rightarrow 0; \quad D \rightarrow 011$$

el mensaje anterior sería codificado como 0100011010000110100100100010.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} A & C & D & B & C & C & C & D & B & C & B & C & A & C & B & C \\ 010 & 0 & 011 & 01 & 0 & 0 & 0 & 011 & 01 & 0 & 01 & 0 & 010 & 0 & 01 & 0 \end{array}$$

Pero vemos que esta codificación es ambigua, pues el inicio no sabemos si se corresponde con el símbolo A o con los símbolos BC .

Para evitar esto, construimos un árbol binario y en las hojas situamos los símbolos del alfabeto:



Lo que nos da la codificación:

$$A \rightarrow 110; \quad B \rightarrow 10; \quad C \rightarrow 0; \quad D \rightarrow 111$$

Y de esta forma el mensaje anterior quedaría 1100111100001111001001100100. Vemos que han sido necesarios 28 bits (no los 32 de la primera codificación) y no hay ambigüedad en el mensaje.

En este caso hemos podido encontrar manualmente la codificación pues se trata de un número reducido de símbolos. Pero cuando el número de símbolos es mayor, habría que buscar otra forma de resolverlo.

Una forma es mediante el algoritmo de Huffman. Este algoritmo proporciona una codificación de unos símbolos de forma que se obtenga el mensaje con la menor longitud posible.

Este algoritmo, dada una secuencia de símbolos, construye un árbol binario en cuyas hojas se encuentran los símbolos que aparecen en la secuencia. A partir del árbol binario hemos visto cómo se define la codificación.

Los pasos a seguir para el algoritmo son los siguientes:

1. Se ordenan los símbolos en orden creciente (o decreciente) de su frecuencia de aparición, y se le asigna a cada uno de ellos un nodo con peso la frecuencia en que aparece (o cualquier cantidad proporcional a ésta).
2. A partir de los nodos de menor peso se crea un nodo padre con peso la suma de los pesos de ambos.
3. Se vuelven a ordenar los nodos de forma creciente y se repite el paso dos hasta que quede sólo un nodo (cuyo peso será la suma de los pesos de cada uno de los nodos iniciales).
4. Una vez construido el árbol, a cada símbolo se le asigna una cadena de bits, recorriendo el árbol desde la raíz hasta el nodo en que se encuentra el símbolo.

Ejemplo 1.11.3.

1. Consideramos la secuencia de símbolos *ACDBCCCDDBCBCACBC*. Vamos a utilizar el algoritmo de Huffman para encontrar una codificación óptima.

- Calculamos la frecuencia de aparición de cada símbolo:

$$A : 2 \quad B : 4 \quad C : 8 \quad D : 2$$

- Ordenamos las frecuencias de menor a mayor:

$$\begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ A & D & B & C \end{array}$$

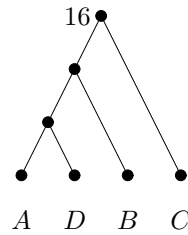
- Elegimos las dos frecuencias más pequeñas y a partir de ellas formamos un nodo padre.

$$\begin{array}{cccc} & \bullet & & \\ & 4 & & \\ & \swarrow \quad \searrow & & \\ \bullet & & \bullet & \\ A & & D & \end{array} \quad \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ 4 & 8 \\ B & C \end{array}$$

- Puesto que están ordenadas de menor a mayor, repetimos el proceso. Tomamos las dos más pequeñas y formamos un nuevo nodo.

$$\begin{array}{cccc} & & \bullet & \\ & & 8 & \\ & & \swarrow \quad \searrow & \\ \bullet & & \bullet & \\ A & & D & \end{array} \quad \begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ 8 & 8 \\ B & C \end{array}$$

- Y por último, unimos los dos nodos que tenemos:



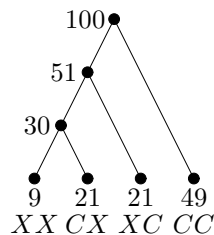
■ Una vez finalizado el árbol elegimos la codificación:

$$A \rightarrow 000; \quad D \rightarrow 001; \quad B \rightarrow 01; \quad C \rightarrow 1$$

2. Imaginemos que tiramos una moneda 200 veces y queremos anotar los resultados. En este caso, usaremos, por ejemplo, 0 si nos sale cara y 1 si nos sale cruz. Al final, los resultados darán lugar a una cadena de 200 bits.

Supongamos que la moneda está trucada, y que la probabilidad de que salga cara es 0'7 y de que salga cruz es 0'3. Si aplicáramos el algoritmo de Huffman para buscar una codificación óptima el resultado sería el mismo que el anterior, por lo que necesitaremos 200 bits para representar toda la información.

Para mejorar esto, vamos a agrupar los resultados de 2 en 2. De esta forma, codificaríamos las tiradas CC, CX, XC y XX. La probabilidad de obtener CC es $(0'7)^2 = 0'49$, la probabilidad de obtener CX y XC es $0'7 \cdot 0'3 = 0'21$ y la probabilidad de obtener XX es 0'09. En este caso, después de aplicar el algoritmo de Huffman nos queda el siguiente árbol:



Con lo que nos quedaría la codificación

$$XX \rightarrow 000; \quad CX \rightarrow 001; \quad XC \rightarrow 01; \quad CC \rightarrow 1$$

Aunque a priori no sabemos los resultados que vamos a obtener tras las 200 tiradas, de acuerdo con las probabilidades que hemos dado, la longitud esperada para representar las 200 tiradas es $9 \cdot 3 + 21 \cdot 3 + 21 \cdot 2 + 49 \cdot 1 = 181$. Es decir, para cada tirada necesitaríamos una media de 0'905 bits.

Si en lugar de agrupar los resultados de 2 en 2 lo hubiéramos hecho de 4 en 4, el algoritmo de Huffman nos daría la siguiente codificación:

$XXXX \rightarrow 0000000$	$XXXC \rightarrow 0000001$	$XXCX \rightarrow 000001$	$XXCC \rightarrow 00001$
$XCXX \rightarrow 001000$	$XCXC \rightarrow 00010$	$XCCX \rightarrow 00011$	$XCCC \rightarrow 100$
$CXXX \rightarrow 001001$	$CXXC \rightarrow 00101$	$CXCX \rightarrow 00110$	$CXCC \rightarrow 101$
$CCXX \rightarrow 00111$	$CCXC \rightarrow 110$	$CCCX \rightarrow 111$	$CCCC \rightarrow 01$

Y vemos que la sucesión de 4 caras se codifica con 2 bits, si aparecen 3 caras (de cuatro resultados) se codifica con 3 bits, si aparecen 2 caras (de 4 tiradas) se codifica con 5 bits, si aparece una cara (y tres cruces) se codifica con 6 bits (salvo la sucesión XXXC) y si aparecen las cuatro cruces, se codifica con 7 bits.

En este caso, el número medio de bits para codificar una tirada es 0'8918. El valor ideal esperado según la teoría de la información es de 0'8813.

Este algoritmo que acabamos de estudiar se emplea para la compresión de ficheros. Puesto que una vez que se realiza la compresión, en el fichero hay que anotar como se ha hecho la codificación, si la compresión no reduce mucho el tamaño del fichero puede ocurrir que el fichero comprimido sea mayor que el fichero sin comprimir.

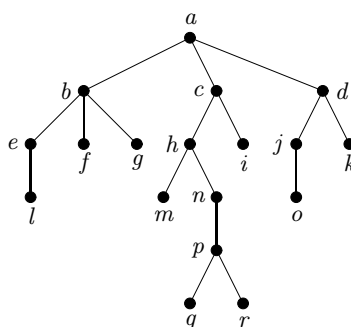
Recorridos en árboles

Un problema que se plantea en el diseño de algoritmos con árboles es cómo recorrer sus nodos. Vamos a analizar en lo que sigue distintos criterios para visitar estos nodos en un árbol con raíz. Para esto, recordemos que la profundidad de un nodo es la distancia del nodo a la raíz, y su altura es la profundidad del subárbol que lo tiene como raíz.

Para poder dar un recorrido de los nodos, hemos de dar previamente una ordenación de los nodos de igual profundidad. Hablaremos entonces del rango de un vértice. Lo más sencillo es asignar un valor numérico que vaya en orden creciente según nos desplazamos de izquierda a derecha (en el caso de que tengamos una representación gráfica del árbol).

Vamos a ver algún ejemplo.

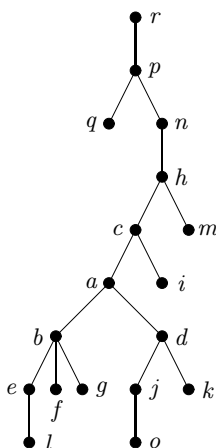
Ejemplo 1.11.4. Dado el árbol con raíz



En la siguiente tabla indicamos la profundidad, altura y rango de cada vértice:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>
<i>Profundidad</i>	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	5	5
<i>Altura</i>	5	2	4	2	1	0	0	3	0	1	0	0	0	2	0	1	0	0
<i>Rango</i>	1	1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	1	1	2

Si ahora consideramos el mismo árbol, pero con distinta raíz



La tabla con la profundidad, altura y rango de cada vértice es:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>
<i>Profundidad</i>	5	6	4	6	7	7	7	3	5	7	7	8	4	2	8	1	2	0
<i>Altura</i>	3	2	4	2	1	0	0	5	0	1	0	0	0	6	0	7	0	8
<i>Rango</i>	1	1	1	2	1	2	3	1	2	4	5	1	2	2	2	1	1	1

Vamos a explicar cuatro métodos de exploración de un árbol: *preorden* (preorder), *postorden* (post-order), *de arriba hacia abajo* (top down) y *de abajo hacia arriba* (bottom up).

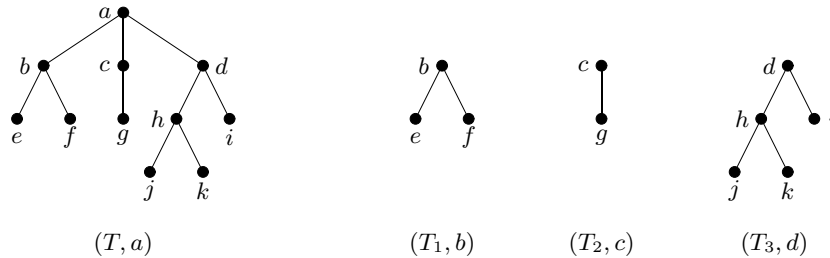
Recorrido preorden.

En primer lugar se recorre la raíz. A continuación se recorren (en preorden) los subárboles que tienen como raíz a los hijos en orden creciente del rango.

Supongamos que tenemos un árbol T que tiene como raíz r . Sus hijos son h_1, h_2, \dots, h_m , y cada uno de ellos es la raíz de un subárbol T_1, T_2, \dots, T_m . Entonces:

$$\text{Preorden}(T, r) = [r, \text{Preorden}(T_1, h_1), \text{Preorden}(T_2, h_2), \dots, \text{Preorden}(T_m, h_m)]$$

Por ejemplo, tenemos el siguiente árbol (T, a) en el que la raíz tiene tres hijos: b, c, d .



Tenemos entonces que

$$\text{Preorden}(T, a) = [a, \text{Preorden}(T_1, b), \text{Preorden}(T_2, c), \text{Preorden}(T_3, d)]$$

Y $\text{Preorden}(T_1, b) = [b, e, f]$, $\text{Preorden}(T_2, c) = [c, g]$, $\text{Preorden}(T_3, d) = [d, h, j, k, i]$.

Por tanto, el recorrido en preorden del árbol (T, a) es $[a, b, e, f, c, g, d, h, j, k, i]$.

Recorrido postorden.

Aquí se recorren en primer lugar los árboles cuyas raíces son los nodos de profundidad 1 (en postorden), en orden creciente del rango, y a continuación la raíz.

Si consideramos un árbol (T, r) , al igual que en el caso anterior, tenemos:

$$\text{Postorden}(T, r) = [\text{Postorden}(T_1, h_1), \text{Postorden}(T_2, h_2), \dots, \text{Postorden}(T_m, h_m), r]$$

Con el mismo ejemplo que acabamos de hacer, tendríamos:

$$\text{Postorden}(T, a) = [\text{Postorden}(T_1, b), \text{Postorden}(T_2, c), \text{Postorden}(T_3, d), a]$$

Y $\text{Postorden}(T_1, b) = [e, f, b]$, $\text{Postorden}(T_2, c) = [g, c]$, $\text{Postorden}(T_3, d) = [j, k, h, i, d]$.

Por tanto, el recorrido en postorden del árbol (T, a) es $[e, f, b, g, c, j, k, h, i, d, a]$.

Recorrido de arriba hacia abajo.

Se recorren los nodos en orden creciente de profundidad (por tanto, comenzamos por la raíz), y dentro de los nodos de igual profundidad se recorren en orden creciente de rango.

Tal y como estamos representando los árboles es el más sencillo, pues se recorren en el orden habitual de lectura (de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo).

Para el árbol (T, a) con el que estamos trabajando, este recorrido sería $[a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k]$.

Recorrido de abajo hacia arriba.

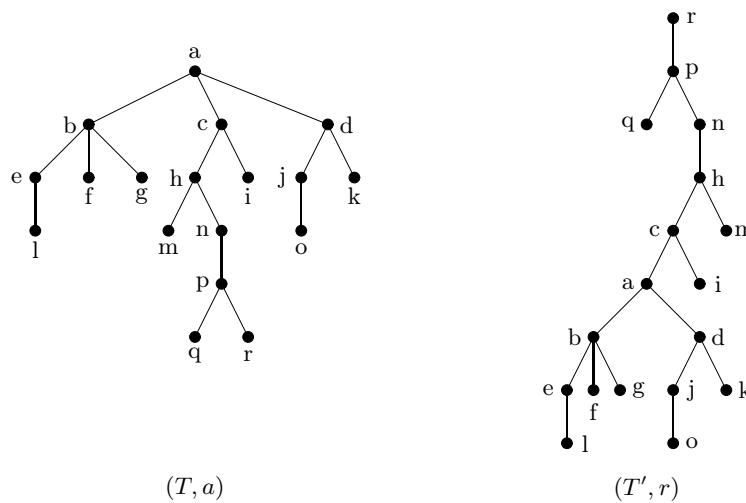
Se recorren los nodos en orden creciente de altura (es decir, primero se recorren las hojas). Dentro de la misma altura, en orden creciente de profundidad (se comienza por las hojas que están más cerca de la raíz). Dentro de una misma altura y profundidad, en orden creciente de rango.

En el árbol (T, a) comenzamos por las hojas (altura 0). Éstas son e, f, g, j, k, i . De entre las hojas tienen profundidad 2 e, f, g, i y profundidad 3 j, k . Por tanto, el orden en que recorreremos las hojas es e, f, g, i, j, k .

Pasamos a los nodos de altura 1. Estos son b, c, h . Primero recorreremos b, c (que tienen profundidad 1) y después h (con profundidad 2).

Con altura 2 únicamente tenemos al nodo d y con altura 3 la raíz. Por tanto, el recorrido *de abajo hacia arriba* de este árbol es $[e, f, g, j, k, i, b, c, h, d, a]$.

Por último, retomamos los dos árboles con raíz del principio de la sección y vamos a recorrerlos de las cuatro formas que hemos visto aquí:



(T, a)	Preorden	$a \ b \ e \ l \ f \ g \ c \ h \ m \ n \ p \ q \ r \ i \ d \ j \ o \ k$
	Postorden	$l \ e \ f \ g \ b \ m \ q \ r \ p \ n \ h \ i \ c \ o \ j \ k \ d \ a$
	Arriba-abajo	$a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h \ i \ j \ k \ l \ m \ n \ o \ p \ q \ r$
	Abajo-arriba	$f \ g \ i \ k \ l \ m \ o \ q \ r \ e \ j \ p \ b \ d \ n \ h \ c \ a$
(T', r)	Preorden	$r \ p \ q \ n \ h \ c \ a \ b \ e \ l \ f \ g \ d \ j \ o \ k \ i \ m$
	Postorden	$q \ l \ e \ f \ g \ b \ o \ j \ k \ d \ a \ i \ c \ m \ h \ n \ p \ r$
	Arriba-abajo	$r \ p \ q \ n \ h \ c \ m \ a \ j \ b \ d \ e \ f \ g \ j \ k \ l \ o$
	Abajo-arriba	$q \ m \ i \ f \ g \ k \ l \ o \ e \ j \ b \ d \ a \ c \ h \ n \ p \ r$