TEMA 4

Formas normales. Unificación y resolución (complementaria)

Ejercicio 1. *Indica si cada una de las siguientes fórmulas está en forma prenexa, de Skolem y/o clausulada.*

		P	*S*	*C*
1.	$\forall x \exists y P(x,y) \to \neg R(a)$			
2.	$\forall y Q(y, g(b)) \wedge \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(f(x,z), y))$			
3.	$\forall x \forall y (P(x,y) \wedge (\neg R(y,y) \vee (P(y,x) \wedge \neg Q(x))))$			
4.	$P(x) \to \neg Q(x,a)$			
5.	$\forall x (P(x) \vee \neg R(x,a)) \wedge \forall x \forall y (P(f(x,y)) \vee Q(a) \vee \neg R(g(a), b))$			

Ejercicio 2. *Cada una de las fórmulas siguientes transfórmala, si es posible, en forma normal prenexa, forma de Skolem y forma clausulada. La forma prenexa debe ser con el menor número posible de cuantificadores.*

1. $\forall x (P(x) \to \exists y R(y))$

2. $\forall x \forall y (\exists z P(z) \wedge \exists u (Q(x,u) \to \exists v Q(y,v)))$

3. $\exists x (\neg \exists y P(y) \to \exists z (Q(z) \to R(x)))$

4. $\forall x P(x) \to Q(x,b) \vee \exists y Q(y,y)$.

5. $\forall x \neg P(f(x)) \vee \exists x R(g(a,x))$.

6. $P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x, g(a,x))$.

7. $\exists x \exists y (P(g(x,a)) \to \forall y Q(y,x)) \wedge Q(y,x)$.

8. $\neg \exists x \neg P(x) \wedge (\forall y Q(a,b) \vee \exists y P(y))$.

Ejercicio 3. *Para cada una de las siguientes parejas de conjuntos de fórmulas, indica si las del segundo podrían ser las cláusulas resultantes de hacer la forma clausulada del primero:*

1. $X = \{\forall x \exists y (P(x) \to R(x,y));\ \neg \forall x Q(x,b);\ \forall x (P(x) \leftrightarrow \neg Q(x,a))\}$
$Y = \{\neg P(x) \vee R(x, f(x));\ \neg Q(a,b);\ \neg P(x) \vee \neg Q(x,a);\ P(x) \vee Q(x,a)\}$

2. $X = \{\exists x \forall y (\neg Q(x,b) \to R(y, f(x)));\ \forall x \neg R(f(x), x);\ \neg \exists x \forall y (Q(x,b) \wedge \neg R(b,y))\}$
$Y = \{Q(a,b) \vee R(y, f(a));\ \neg R(f(y), y);\ \neg Q(x,b) \vee R(b, g(x))\}$

3. $X = \{\forall x \exists y (P(x) \to \neg Q(y,b));\ \exists x \forall y \exists z (\neg R(x, f(y)) \wedge Q(b,z));\ \forall x \exists y R(f(x), y)\}$
$Y = \{\neg P(x) \vee \neg Q(a,b);\ \neg R(c, f(y));\ Q(b, g(y));\ R(f(x), h(x))\}$

4. $X = \{\neg Q(f(a), a);\ \exists x P(x) \to P(a);\ \forall x P(x) \wedge \neg Q(a,x)\}$
$Y = \{\neg Q(f(a), a);\ \neg P(b) \vee P(a);\ P(x);\ \neg Q(a,x)\}$

5. $X = \{\forall x (P(x) \vee \neg Q(y,a));\ \forall x \exists y Q(y,x);\ \exists x \forall z (Q(x) \vee R(z))\}$
$Y = \{P(x) \vee \neg Q(y,a);\ Q(f(x), x);\ Q(b) \vee R(z)\}$

Ejercicio 4. *Dadas las premisas:*

- *Todo coleóptero es insecto.*
- *Todo insecto es animal.*

Demuestra que no puede deducirse que existe un animal que es insecto, pero sí puede deducirse que si existe un coleóptero, entonces existe un animal que es insecto.

Ejercicio 5. *A partir de las premisas siguientes:*

1. *Los oficiales de aduana buscan a cualquiera que entre en este país y no sea VIP.*
2. *Algún traficante de droga entra en este país y sólo es buscado por ser traficante de droga.*
3. *Ningún traficante de droga es un VIP.*

Concluye que alguno de los oficiales de aduana es traficante de drogas.

Ejercicio 6. *Paradoja del barbero*
En un pueblo, hay un barbero que afeita a aquellas peronas que no se afeitan a sí mismos.
Formaliza en un lenguaje de primer orden el enunciado anterior y comprueba que es contradictorio.

Ejercicio 7. *Dada* $\alpha = \forall x \exists y \forall z \exists t \forall u \exists v P(x, y, z, t, u, v)$ *y* $\beta = \exists x \forall y \exists z \forall t \exists u \exists v P(u, x, y, z, t, v)$*, comprueba que* $\alpha \to \beta$ *es universalmente válida, pero que* $\beta \to \alpha$ *no lo es.*

Ejercicio 8. *Comprueba que cada uno de los siguientes conjuntos de cláusulas*

1. $\{Q(a); \neg R(a, y); \neg Q(x) \vee R(x, f(x))\}$
2. $\{\neg Q(a, y); \neg S(x) \vee Q(x, f(x)); S(a)\}$
3. $\{P(a); \neg S(a, x); \neg P(y) \vee S(y, f(y))\}$
4. $\{P(x), \neg P(x) \vee Q(x, a), \neg Q(y, a)\}$
5. $\{P(x, a, g(x, b)), \neg P(f(y), z, g(f(a), b))\}$

es insatisfacible.

Ejercicio 9. *Prueba que el conjunto formado por las siguientes cláusulas es insatisfacible:*

1. $T(x, g(a), z, f(u)) \vee \neg P(g(a)) \vee S(y, z) \vee \neg R(f(y))$,
2. $Q(x, f(y)) \vee \neg P(g(x))$,
3. $\neg R(f(f(a))) \vee \neg S(f(a), f(a)) \vee \neg P(g(x))$,
4. $R(f(x))$,
5. $\neg Q(g(b), f(x)) \vee P(g(a))$,
6. $\neg P(x) \vee S(y, z) \vee \neg T(a, x, y, f(z)) \vee \neg Q(g(b), z)$,
7. $P(g(x))$.

Ejercicio 10. *Da una refutación lineal del conjunto de las siguientes cláusulas:*

- $\neg R(x, f(w), z) \vee \neg Q(a, z)$
- $\neg P(y, f(g(b)))$
- $\neg Q(a, x) \vee \neg T(g(z), a)$
- $Q(x, z) \vee P(a, z)$
- $T(y, a) \vee R(g(y), f(y), f(g(z)))$
- $Q(x, z) \vee \neg T(g(a), y)$

Ejercicio 11. *Comprueba que*

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \to L(x, y))), \\ \forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg L(x, y))) \end{array} \right\} \models \forall x(D(x) \to \neg Q(x))$$

Ejercicio 12. *Dado el conjunto de fórmulas*

$$\Gamma = \{\forall x(P(x) \to \exists y(R(y) \wedge Q(x, y))); \ \exists x P(x); \ \neg \exists x \exists y Q(x, y)\}$$

1. *Calcula su forma clausulada.*
2. *Prueba que es insatisfacible.*
3. *Concluye que*

$$\{\forall x(P(x) \to \exists y(R(y) \land Q(x,y)));\ \exists x P(x)\} \models \exists x \exists y Q(x,y)\}$$

Ejercicio 13. *Señala cuál o cuáles de los siguientes grupos de literales son unificables:*

a) $\{Q(x, f(y));\ Q(f(z), f(a))\}$.

b) $\{P(x, g(x, a), f(y));\ P(x, g(g(f(y), b), y), f(a));\ \}$.

c) $\{Q(x, g(x, y));\ Q(y, z);\ Q(z, g(x, a))\}$.

d) $\{R(f(x), g(f(z), y), g(a, f(f(x))));\ R(y, g(f(a), f(f(b))), g(z, f(y)))\}$.

Ejercicio 14. *Sea* α *la sustitución* $(x|f(g(a, f(b)));\ y|f(b);\ z|g(f(b), x))$. *Entonces:*

1. α *no puede ser el unificador principal de ninguna pareja de literales.*
2. $\alpha = (x|f(g(a, f(b)))) \circ (y|f(b)) \circ (z|g(f(b), x))$.
3. *Si* $\beta = (z|b) \circ (x|f(y))$ *entonces* $\alpha \circ \beta$ *es un unificador principal de* $P(x, g(z), f(z))$ *y* $P(f(y), g(b), y)$.
4. α *es un unificador de* $Q(x, h(a, y))$ *y* $Q(f(g(a, y)), h(a, f(b)))$.
5. $\alpha = (y|f(b)) \circ (z|g(y, x)) \circ (x|f(g(a, y)))$.

Ejercicio 15. *Da, si es posible, un ejemplo de:*

1. *Una refutación lineal-input de un conjunto de cláusulas que no es de Horn.*
2. *Dos cláusulas que tengan más de tres resolventes.*
3. *Dos literales que tengan exactamente dos unificadores principales.*
4. *Un conjunto de Horn insatisfacible que tenga una rama infinita del árbol de deducciones lineales-input con raíz la cláusula negativa.*
5. *Un conjunto de cláusulas que sea insatisfacible pero que no haya ninguna deducción lineal-input de la cláusula vacía.*

Ejercicio 16. *Demuestra que*

$$\{\exists x P(x) \to \forall y P(y);\ \forall x(P(x) \lor Q(x))\} \models \exists x \neg Q(x) \to \forall y P(y)$$

Ejercicio 17. *(Junio 2011)*
Obtén una forma clausulada para la fórmula siguiente:

$$\exists y \forall x(\forall x Q(x, f(y) \lor \neg P(y)) \to \neg \exists y(Q(a, x) \land P(f(y))))$$

Ejercicio 18. *(Junio 2011) Sea* Γ *el conjunto de cláusulas siguiente:*

$$\Gamma = \{R(x, a) \lor P(x) \lor P(y),\ \neg R(b, x) \lor Q(x, f(y)),\ \neg P(z) \lor \neg P(x),\ \neg Q(z, f(z))\}$$

donde como es usual x, y, z *son símbolos de variable y* a, b *son símbolos de constante.*
Estudia si Γ *es satisfacible o insatisfacible.*

Ejercicio 19. *Considera las siguientes fórmulas:*

- $\varphi_1 = \forall x((P(x) \land \exists y(Q(y, x) \land S(y))) \to U(x))$.
- $\varphi_2 = \forall x(P(x) \land V(x) \to S(x))$.
- $\varphi_3 = \forall x(P(x) \land \neg V(x) \to \neg R(x))$.

- $\varphi_4 = \forall x(\exists y(Q(y,x) \wedge P(y)) \to P(x))$.
- $\varphi_5 = P(a) \wedge Q(a,b)$.
- $\psi = \exists x(\neg R(x) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge U(y)))$.

Demuestra que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\} \models \phi$.

Ejercicio 20. *(Junio 2011) Dada la siguiente argumentación:*

- *Si un dragón tiene un hijo que sabe volar entonces es feliz.*
- *Los dragones verdes saben volar.*
- *Los dragones que no son verdes son rojos.*
- *Quien tiene un hijo dragón es dragón.*
- *Pepe es un dragón y su padre es Manolo.*

Comprueba si es cierta la conclusión: existe alguien que o es rojo o es hijo de alguien que es feliz.

Ejercicio 21. *(Septiembre 2011)*
Calcula dos unificadores σ_1 *y* σ_2 *para el conjunto de literales*

$$\Gamma = \{P(f(x), y),\ P(z, g(z, t, v)),\ P(f(t), g(f(a), t, v))\}$$

de modo que σ_1 *sea de máxima generalidad pero* σ_2 *no lo sea.*

Ejercicio 22. *(Septiembre 2011) Calcula todos los tipos de resolventes posibles para las cláusulas siguientes:*

$$C_1 = P(x, f(y)) \vee Q(z, a) \vee P(a, z), \qquad C_2 = \neg P(z, y) \vee \neg Q(b, z) \vee P(x, f(y)).$$

¿Existe alguna cláusula (no vacía) C_3 *tal que el conjunto* $\{C_1, C_2, C_3\}$ *sea insatisfacible?*

Ejercicio 23. *(Septiembre 2011) Considera las siguientes fórmulas:*

- $\varphi_1 = \exists x(Q(x) \wedge \forall y(P(y) \to R(x,y)))$,
- $\varphi_2 = \forall x(Q(x) \to \exists y(P(y) \wedge S8x, y))$,
- $\varphi_3 = \forall x(\exists y(S(x,y) \wedge R(x,y)) \to T(x))$,
- $\psi = \exists x(T(x) \wedge Q(x))$.

Demuestra que $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\} \models \phi$.

Ejercicio 24. *(Julio 2012)*
Consideramos las siguientes fórmula:

- $\alpha_1 = \exists y \forall x(Q(x,y) \to R(x))$.
- $\alpha_2 = \exists x \neg P(x,x) \to \forall x \forall y Q(x,y)$.
- $\alpha_3 = \forall x \forall y(P(x,y) \to Q(f(x),y))$.
- $\alpha_4 = \forall x(R(f(x)) \to P(x,a))$.
- $\beta = \exists x(P(a,x) \wedge Q(f(x),x))$.

Demuestra (por refutación) que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$.
¿Es posible encontrar una deducción lineal-input de la cláusula vacía? Razona la respuesta.

Ejercicio 25. *(Septiembre 2012)*
Dadas las siguientes cláusulas:

$\alpha_1 = P(x) \vee \neg Q(a,x)$.
$\alpha_2 = T(x) \vee \neg P(x)$.
$\alpha_3 = Q(x, f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x)$.

$\alpha_4 = S(f(f(a)))$.

$\alpha_5 = P(a)$.

$\alpha_6 = \neg T(f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x)$.

$\alpha_7 = S(x) \vee \neg S(f(x))$.

$\alpha_8 = R(x) \vee \neg P(x)$.

Comprueba que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ *es un conjunto de Horn y que es insatisfacible.*

Ejercicio 26. *(Mayo 2014)*
De entre las siguientes fórmulas señala las que sean universalmente válidas.

1. $\forall x[Q(x) \vee \neg Q(x)]$
2. $\exists x Q(x) \wedge \exists x \neg Q(x)$
3. $\forall x Q(x) \rightarrow \neg \forall x \neg Q(x)$
4. $\exists x Q(x) \rightarrow \exists x \neg Q(x)$

Ejercicio 27. *(Mayo 2014)*
Sean $\alpha = \forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(x,y))$ *y* $\beta = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x, g(x)))$. *Entonces:*

1. $\alpha \vDash \beta$.
2. $\beta \vDash \alpha$.
3. $\alpha \rightarrow \beta$ *es satisfacible y refutable.*
4. $\neg\beta \vDash \neg\alpha$.

Ejercicio 28. *(Mayo 2014) Señala las consecuencias lógicas que sean ciertas.*

1. $\{\forall x P(x)\} \vDash \exists y P(y)$.
2. $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(a)\} \vDash Q(a) \vee \neg P(b)$.
3. $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(a)\} \vDash \exists x Q(x) \wedge \neg P(b)$.
4. $\{Q(a) \rightarrow \forall x P(x)\} \vDash \forall x Q(x) \rightarrow P(b)$.

Ejercicio 29. *(Mayo 2014) Dada la fórmula*

$$\exists y \forall x R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$$

¿Cuáles de las siguientes son lógicamente equivalentes con ella?

1. $\forall y \exists x(\neg R(x,y) \vee P(x,y))$
2. $\forall y \forall z \exists x(\neg R(x,y) \vee P(x,z))$
3. $\forall y \exists x \exists z(\neg R(x,y) \vee P(z,y))$
4. $\forall y \forall z(\neg R(f(y,z),y) \vee P(g(y,z),z))$

Ejercicio 30. *(Mayo 2016) Determina si el conjunto de cláusulas*

$$\{T(x,y) \vee S(z, g(a)), \neg S(a, g(z)) \vee \neg S(y,z), \neg T(y,x)\}$$

es satisfacible o insatisfacible.

Ejercicio 31. *(Junio 2016) Comprueba que la fórmula* $\exists x(B(x) \wedge \neg C(x))$ *es consecuencia lógica de*

$$\{\forall x(\exists y(P(x,y) \wedge R(x,y)) \rightarrow B(x));\ \exists x(\neg C(x) \wedge \forall y(\neg Q(y) \rightarrow R(x,y)));\ \forall x(\forall y(Q(y) \vee \neg P(x,y)) \rightarrow C(x))\}$$