Capítulo 2

Práctica 4.
Retículos y álgebras de Boole.

Para poder realizar esta práctica, es necesario cargar el paquete *pr4.mac*. Para cargarlo, hay que ir al Menú *Archivo*, y ahí elegir la opción *Cargar paquete.*

2.1. Retículos.

Dado un retículo L y un subconjunto no vacío S de L, se dice que S es un *subretículo* de L si para cualesquiera $s_1, s_2 \in S$ se verifica que $s_1 \vee s_2 \in S$ y $s_1 \wedge s_2 \in S$.

En el retículo $(\mathbb{Z}^+, |)$ comprobamos si los subconjuntos siguientes son subretículos:

```
(%ixx) A:{1,2,3,4,6};
(%ixx) esSubretDiv(A);
(%ixx) B:{1,2,3,4,9,12,18,36};
(%ixx) esSubretDiv(B);
(%ixx) C:{262144,1048576,33554432,1073741824};
(%ixx) esSubretDiv(C);
```

De manera similar, en el retículo $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ comprobamos si los subconjuntos siguientes son subretículos:

```
(%ixx) A:{{1,2,3},{1,2,3,4},{1,2,3,5},{1,2,3,4,6},{1,2,3,4,5,6}};
(%ixx) esSubretCon(A);
(%ixx) B:powerset({0,1,2,3,4});
(%ixx) esSubretCon(B);
(%ixx) C:{{},{1},{1,2},{1,2,3,5},{1,2,3,4},{1,2,3,4,5,6},{1,2,3,4,5,7},{1,2,3,4,5,6,7}};
(%ixx) esSubretCon(C);
(%ixx) D:setdifference(powerset({0,1,2,3,4}),{{}});
(%ixx) esSubretCon(D);
```

Dos retículos $(L_1, \vee, \wedge)$ y $(L_2, \vee, \wedge)$ se dice que son *isomorfos* si existe alguna aplicación biyectiva $f : L_1 \to L_2$ verificando que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ para cualesquiera $a, b \in L_1$. En el caso de retículos finitos, el que sean isomorfos significa que sus diagramas de Hasse se pueden dibujar de la misma forma, salvo obviamente los nombres de los elementos.

Recordemos que la función *Hasse(n)* de la *Práctica 3* nos permitía "dibujar" el diagrama de Hasse del retículo de divisores $D(n)$. Esta función también ha sido incluída en el paquete *pr4.mac*.

Ejercicio:

1. Dibuje el diagrama de Hasse del retículo de divisores para

$$n = 24,\ 30,\ 56,\ 70,\ 105,\ 189,\ 250,\ 3993.$$

2. Dados dos enteros positivos n y m, ¿qué condición debe de cumplirse para que los retículos de divisores correspondientes sean isomorfos? Quizá los siguientes comandos le permitan responder más fácilmente a esta pregunta:

```
(%ixx) lista:[24,30,56,70,105,189,250,3993];
(%ixx) factor(lista);
```

3. Escriba una función en *Maxima* que se aplique a dos enteros positivos n y m, y que devuelva *true* si los retículos $D(n)$ y $D(m)$ son isomorfos, y devuelva *false* en caso contrario.

Un retículo L se dice *acotado* si existe el máximo y el mínimo de L. En tal caso ambos elementos se suelen denotar por $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$, respectivamente. Obviamente todo retículo finito es acotado, aunque existen retículos acotados que no son finitos, como por ejemplo $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

En un retículo acotado L, se dice que un elemento $a \in L$ es *complementado* si existe al menos un elemento $b \in L$, denominado *complemento* de a, tal que $a \vee b = \mathbf{1}$ y $a \wedge b = \mathbf{0}$.

A continuación vamos a estudiar los elementos complementados en los retículos $D(n)$. Se sabe que en tales retículos, si un elemento d posee algún complemento, entonces dicho complemento es el único que existe para d. Para ello usaremos el comando *complementados*(n) que nos devuelve todos los elementos complementados en $D(n)$. Para cada $n = 6, 12, 24, 30, 36, 37$, ejecute la secuencia de comandos siguiente:

```
(%ixx) divisors(n);
(%ixx) complementados(n);
(%ixx) factor(n);
```

Ejercicio: En vista de los resultados obtenidos, ¿cuándo podemos decir que un elemento $d \in D(n)$ es complementado? Y en tal caso, ¿cuál será su complemento?

Un retículo L se dice que es *distributivo*, si verifica las leyes distributivas:

$$\forall a, b, c \in L, \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Los retículos $(\mathbb{Z}^+, |)$ y $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, para cualquier conjunto X, son distributivos. En particular también son distributivos los retículos de dividores $D(n)$.

Es una propiedad conocida que *los elementos complementados de un retículo acotado y distributivo forman un subretículo.* Constatamos dicha propiedad para algunos retículos de divisores $D(n)$.

```
(%ixx) esSubretDiv(complementados(36));
(%ixx) esSubretDiv(complementados(37));
(%ixx) esSubretDiv(complementados(144));
```

Si tenemos un subretículo S de $D(n)$ y un elemento $a \in S$, podemos saber si a es complementado (en S) mediante la orden *complemento*(a, S). Veamos ésto con un ejemplo.

```
(%ixx) S:{9,18,27,36,54,108};
(%ixx) esSubretDiv(S);
```

Nótese que ahora $\mathbf{0} = 9$ y $\mathbf{1} = 108$.

```
(%ixx) complemento(27,S);
(%ixx) complemento(36,S);
```

La explicación del resultado obtenido es la siguiente: $27 \vee 36 = \mathbf{1}$, es decir, $mcm(27, 36) = 108$, y $27 \wedge 36 = \mathbf{0}$, es decir, $mcd(27, 36) = 9$. ¿Podría explicar la respuesta del siguiente comando?

```
(%ixx) complemento(54,S);
```

2.2. Álgebras de Boole.

La orden $esAB(n)$ devuelve *true* si y sólo si $D(n)$ es álgebra de Boole.

```
(%ixx) lista:makelist(i,i,2,30);
(%ixx) X:subset(setify(lista),esAB);
(%ixx) factor(listify(X));
```

Vemos en estos ejemplos que $D(n)$ es álgebra de Boole cuando n factoriza como producto de primos distintos. Esta propiedad es cierta para todo $n \geq 2$.

Dos álgebras de Boole A_1 y A_2 se dice que son *isomorfas* si existe alguna aplicación biyectiva $f : A_1 \to A_2$ verificando que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ y $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$ para cualesquiera $a, b \in L_1$. En el caso de álgebras de Boole finitas, el que sean isomorfas significa que sus diagramas de Hasse se pueden dibujar de la misma forma, salvo obviamente los nombres de los elementos.

Vamos a dibujar los diagramas de Hasse de las primeras álgebras de Boole finitas, omitiendo los nombres de los elementos. Para ello ejecutamos:

```
(%ixx) draw_graph(cube_graph(1));
(%ixx) draw_graph(cube_graph(2));
(%ixx) draw_graph(cube_graph(3));
(%ixx) draw_graph(cube_graph(4));
(%ixx) draw_graph(cube_graph(5));
```

Nótese que los valores numéricos que hemos escrito en los comandos anteriores representan el número de *átomos* del álgebra de Boole en cada caso.

A continuación definimos una relación de equivalencia en el conjunto de números enteros

$$A = \{k \in \mathbb{Z}^+ : 2 \leq k \leq 2000 \ \text{ y } D(k) \text{ es álgebra de Boole}\},$$

de forma que $n, m \in A$ serán equivalentes si y sólo $D(n)$ y $D(m)$ son álgebras de Boole isomorfas.

```
(%ixx) A:subset(setify(makelist(i,i,2,2000)),esAB);
(%ixx) f(x,y):=is(length(ifactors(x))=length(ifactors(y)));
(%ixx) ConjCociente:equiv_classes(A,f);
```

El número de clases de equivalencia lo obtenemos con:

```
(%ixx) cardinality(ConjCociente);
```

Los cardinales de las distintas clases de equivalencia son:

```
(%ixx) makelist(cardinality(listify(ConjCociente)[i]),i,1,cardinality(ConjCociente));
```

Ejercicio: Calcule un número natural n tal que $D(n)$ sea un álgebra de Boole de 10 átomos.

En un álgebra de Boole sabemos que todo elemento distinto de $\mathbf{0}$ se escribe como supremo de átomos y todo elemento distinto de $\mathbf{1}$ se escribe como ínfimo de coátomos (es decir, complementos de átomos).

El comando *atomos(n)* nos permite obtener los átomos de $D(n)$, supuesto que es álgebra de Boole.

```
(%ixx) atomos(2);
(%ixx) atomos(6);
(%ixx) atomos(30);
(%ixx) atomos(892392217);
```

Si $D(n)$ es álgebra de Boole y $d \in D(n)$, con $d \neq \mathbf{0}$, este mismo comando nos permite obtener el conjunto de átomos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq D(n)$ tal que $d = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$.

```
(%ixx) elementp(2013,divisors(183183));
(%ixx) atomos(2013);
(%ixx) supremo(%);
(%ixx) atomos(183183);
(%ixx) supremo(%);
```

Si $D(n)$ es álgebra de Boole y $d \in D(n)$, con $d \neq \mathbf{1}$, podemos obtener el conjunto de coátomos $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\} \subseteq D(n)$ tal que $d = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_r$ mediante el comando *coatomos*(d, n):

```
(%ixx) coatomos(2013,183183);
(%ixx) infimo(%);
(%ixx) coatomos(1,183183);
(%ixx) infimo(%);
```