Alumno:____ DNI:_______________ Grupo: ____

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(12/06/2014)

Ejercicio 1. *(1.5 puntos)*

Sean a y b dos números naturales menores que cuatro cuyas representaciones binarias son $(xy)_2$ *y* $(zt)_2$ *respectivamente.*

Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ *la función booleana definida por*

$$f(x,y,z,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentra una expresión booleana como suma de productos lo más simplificada posible para representar la función f, y una expresión booleana como producto de sumas para la función $\overline{f}$.

Ejercicio 2. *(1.5 puntos)*

Estudia si:

$$\{(\neg a \to b) \wedge (c \to d),\ a \to c,\ (\neg b \wedge \neg c) \to d,\ b \to a,\ d \wedge \neg c \to a,\ a \to d\} \vDash a \wedge c \wedge d$$

Ejercicio 3. *(1.5 puntos)*

Demuestra:

1. *que la fórmula* $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$ *es satisfacible y refutable;*
2. *que la fórmula* $\forall x R(x) \wedge \exists y Q(y) \leftrightarrow \exists y \forall x [R(x) \wedge Q(y)]$ *es universalmente válida.*

Ejercicio 4. *(2 puntos)*

Considera las siguientes fórmulas:

- $\alpha_1 = \exists x \exists y S(x,y) \to \forall x R(x,x)$.
- $\alpha_2 = \forall x (R(a,x) \to S(f(x),x))$.
- $\alpha_3 = \forall x (R(x,a) \vee Q(f(x)))$.
- $\alpha_4 = \exists y \forall x (Q(x) \to S(x,y))$.
- $\beta = \exists x (\exists y S(f(x),y) \wedge R(x,x))$.

Demuestra que

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\} \vDash \beta$$

Del conjunto de cláusulas que has obtenido, ¿es posible dar una deducción lineal-input de la cláusula vacía? Razona la respuesta.

Ejercicio 5. *(2 puntos)*

Sea x_n *la sucesión definida como:*

$$\begin{aligned} &x_0 = 1 \\ &x_1 = 3 \\ &x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^{n-1}\ (n \geq 2) \end{aligned}$$

1. *Calcula los cinco primeros términos de la sucesión.*
2. *Calcula una expresión no recurrente para el término general* x_n.
3. *Comprueba que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $2^n \leq x_n$.
4. *Demuestra por inducción que* $x_n \leq 3^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6. *(1.5 puntos)*

Sea $G = K_{20}$. Calcula el número mínimo de lados que hay que suprimir en G para que:

1. *nos quede un grafo de Euler.*
2. *nos quede un grafo que no sea conexo.*
3. *nos quede un grafo que no tenga ciclos.*
4. *nos quede un grafo cuyo número cromático sea 2.*