ALEM

Relación de ejercicios del Tema 4

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, con coeficientes en $\mathbb{R}$, calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

2. Calcule todos los elementos a pertenecientes a $\mathbb{Z}_{23}$ para los cuales las matrices siguientes conmutan:
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 22 \\ 18 & a+3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 18 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{23}).$$

3. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que
$$\left.\begin{array}{rcl} A + B & = & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A - B & = & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\}.$$
Entonces $A \cdot B$ es igual a:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ pertenecientes a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ¿se verifica que $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$?

5. Sean A y B dos matrices pertenecientes a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que
$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Calcule la matriz $A^2 - B^2$.

6. Calcule todas las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tales que:
$$\left.\begin{array}{rcl} 5A + 2B^t & = & \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \\ 2A^t - 3B & = & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\right\}.$$

7. Demuestre las siguientes afirmaciones:
   a) Para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, las matrices $A + A^t$ y $A \cdot A^t$ son simétricas.
   b) Para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matriz $A - A^t$ es antisimétrica. (Recuerde que una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es antisimétrica, cuando $B^t = -B$.)

8. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y ambas son simétricas, pruebe que $A \cdot B$ es una matriz simétrica si, y sólo si, $A \cdot B = B \cdot A$.

9. Demuestre que toda matriz perteneciente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se puede expresar, y de manera única, como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Aplique lo que acaba de probar a la matriz siguiente:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

10. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ y $A^2 = (0)$, ¿podemos asegurar que $A = (0)$?

11. La traza de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la suma de todos los elementos que aparecen en la diagonal principal de A, es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces
$$\operatorname{tr}(A) = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}.$$
Si $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, demuestre las siguientes propiedades:
a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
b) $\operatorname{tr}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \operatorname{tr}(A)$
c) $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$

12. Calcule el rango de la matriz siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. Calcule el rango de la matriz siguiente con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

14. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. El rango de A es igual a:

a) 2 b) 4 c) 1 d) 3

15. El rango de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$
es

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

16. Estudie el rango de las siguientes matrices sobre $\mathbb{Z}_7$ según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & a+2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & a+3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & a+3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & a+3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & a+1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & a+5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2a+2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & a+2 & 4 \end{pmatrix}.$$

17. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}),$$

calcule la forma normal de Hermite por filas y el rango de A.

18. La forma normal de Hermite por filas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_7)$, es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. Resuelva los sistemas siguientes sobre $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +y & +3z & = & 1 \\ 2x & -y & +3z & = & -1 \\ -x & +5y & +2z & = & 1 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{rcr} x+2y+3z+4t & = & -1 \\ 2x+3y+4z+t & = & 1 \\ 3x+4y+z+2t & = & -1 \\ 4x+y+2z+3t & = & 1 \end{array}\right\}.$$

20. Acerca del sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & a \end{array}\right.$$

podemos afirmar que:

a) Independientemente del valor de a, es compatible determinado.
b) Independientemente del valor de a, es compatible indeterminado.
c) Es siempre incompatible.
d) La compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a.

21. Acerca del sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+ay+(a-1)z & = & a \\ x+ay+az+2at & = & a \end{array}\right.$$

podemos afirmar que:

a) Independientemente del valor de a, es compatible determinado.
b) Independientemente del valor de a, es compatible indeterminado.
c) Es siempre incompatible.
d) La compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a.

22. El sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay+3az & = & a+3 \\ ay+2az & = & a+1 \end{array}\right\}$$

a) es compatible determinado independientemente de a,
b) es compatible indeterminado independientemente de a,
c) es incompatible independientemente de a,
d) su compatibilidad depende de a.

23. Discuta el sistema dado sobre $\mathbb{R}$, siendo a una constante:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & 2z & = & a^2 \\ 2x & - & y & + & az & = & a^3 \end{array}\right.$$

24. Sea el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 6x & + & 5y & + & 3z & + & 6t & = & 1 \\ 2x & + & 6y & + & 4z & + & 6t & = & 1 \\ 3x & + & 5y & & & + & 2t & = & 3 \end{array}\right.$$

a) La solución es

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 6\lambda \\ y & = & 4 & + & 2\lambda \\ z & = & & & \lambda \\ t & = & 4 & & \end{array}\right.$$

b) La solución es

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 4\lambda \\ y & = & 2 & + & 5\lambda \\ z & = & 3 & + & 6\lambda \\ t & = & & & \lambda \end{array}\right.$$

c) La solución es

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 6 \\ z & = & 1 \\ t & = & 4 \end{array}\right.$$

d) No tiene solución.

25. Dado el sistema con parámetros a y b pertenecientes a $\mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & - & y & + & z & = & b \\ x & + & ay & + & z & = & 121 \\ x & + & ay & + & 2z & = & 3b \end{array}\right.$$

se verifica que:
a) si $3b > a^2$, entonces el sistema es incompatible.
b) el sistema es siempre compatible indeterminado.
c) si $121^3 < a \cdot b < 121^4$, entonces el sistema es incompatible.
d) el sistema es siempre compatible determinado.

26. Discuta y resuelva el sistema siguiente según los valores de a, primero sobre $\mathbb{Z}_3$ y a continuación sobre $\mathbb{Z}_5$. En los casos de compatibilidad, indique el número de soluciones

del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+y+z+t & = & a \\ x+ay+z+t & = & a \\ x+y+az+t & = & a \\ x+y+z+at & = & a \end{array}\right\}$$

27. Discuta y resuelva el sistema siguiente sobre $\mathbb{R}$ según los valores de a y b:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ ax & + & by & + & z & = & a \\ x & + & aby & + & z & = & b \end{array}\right\}.$$

28. Dado el sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & 2 \\ (a-1)x & + & 2ay & = & 3-a \\ (a+1)x & & & = & a+1 \end{array}\right.$$

se verifica que:
a) Es compatible determinado, independientemente del valor de a.
b) La compatibilidad ó incompatibilidad depende del valor de a.
c) Es siempre compatible, aunque depende del valor de a que sea compatible determinado ó indeterminado.
d) Es incompatible, independientemente del valor de a.

29. Si A es una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{R}$ y verifica que $A^2-5\cdot A+6\cdot I_2=(0)$, razone que A es una matriz regular.

30. Dadas las matrices siguientes con coeficientes en $\mathbb{R}$, calcule mediante operaciones elementales de fila, la inversa de cada una de ellas:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En vista de los resultados obtenidos, ¿puede proponer una fórmula general?

31. Mediante operaciones elementales de fila, compruebe que la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_{11}),$$

es regular y obtenga su inversa.

32. Si A es una matriz regular con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, justifique la igualdad

$$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t.$$

33. Calcule todas las matrices $A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que

$$A^2=\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad A^3=\begin{pmatrix} 23 & 30 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

34. Calcule todas las matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que $A \cdot B \cdot C = D$, siendo
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Repita el mismo ejercicio considerando ahora
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

35. Calcule todas las matrices cuadradas X e Y de orden 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ tales que:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} X & + & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X & + & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

36. Calcule el determinante de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_7)$$

37. Sin desarrollar los determinantes, demuestre que:
$$\begin{vmatrix} a & d & 2a-3d \\ b & e & 2b-3e \\ c & f & 2c-3f \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

38. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $\det(A) = a$, ¿cuál es el valor de $\det(5 \cdot A)$? ¿y el valor de $\det(-A^2)$? A continuación repita el mismo ejercicio suponiendo que $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

39. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es antisimétrica y n es impar, demuestre que $|A| = 0$.

40. Dados los números reales a, b, c y d, calcule los siguientes determinantes:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$
¿Cómo se pueden generalizar los resultados obtenidos?

41. Demuestre que
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = ((a+b)^2 - (c+d)^2)((a-b)^2 - (c-d)^2).$$

42. El determinante de la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

vale

a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

43. Sea la matriz $A = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$. El determinante de A vale:

a) $(a-b)^4$ b) $(a^2-b^2)^2$ c) a^4-b^4 d) 0

44. Calcule los siguientes determinantes sobre $\mathbb{R}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

45. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{vmatrix} = -(-2)^{n-2}(n-1).$$

46. Compruebe que la matriz siguiente sobre $\mathbb{R}$ es regular y calcule su inversa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

47. Para cada entero positivo n, sean $A_n, B_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donde $A_n = (a_{i,j})$ y $B_n = (b_{i,j})$ son tales que $a_{i,j} = i+j-1$ y $b_{i,j} = (i+j-1)^2$. Obtenga en función de n el rango y el determinante de A_n y de B_n.

48. Si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ y $\det(A) = 5/16$, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz adjunta de A?

49. Sea $a \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz adjunta $\overline{A}$ de A es

$$(a) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

50. Compruebe que cada uno de los sistemas siguientes sobre $\mathbb{R}$ es de Cramer y calcule sus soluciones aplicando la fórmula de Cramer:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x-y+z & = & 0 \\ x+y-z & = & 2 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{rcr} x+y-z & = & -1 \\ 2x+y-3z & = & 1 \\ x-2y-2z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

51. En cada uno de los apartados siguientes, encuentre un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$ cuyas soluciones son las indicadas:

a)

$$\left\{\begin{array}{ccrcr} x & = & 1 & + & 4\lambda \\ y & = & -2 & - & \lambda \\ z & = & 3 & + & 2\lambda \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcr} x & = & 4 & + & \lambda & + & \mu \\ y & = & -1 & + & \lambda & - & 7\mu \\ z & = & 1 & + & 2\lambda & - & 2\mu \\ t & = & 5 & + & 6\lambda & + & 3\mu \end{array}\right.$$

52. Supongamos ahora un sistema de ecuaciones lineales en las indeterminadas x, y, z, t y con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ que tiene como solución:

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcr} x & = & 4 & + & 3\lambda & + & 4\mu \\ y & = & & & 2\lambda & + & 6\mu \\ z & = & 1 & + & 5\lambda & + & 2\mu \\ t & = & & & 6\lambda & + & 3\mu \end{array}\right.$$

con λ, μ variando en $\mathbb{Z}_7$. Calcule el número de soluciones de dicho sistema. ¿Cuál es la respuesta si las soluciones vienen dadas por las expresiones siguientes?

$$\left\{\begin{array}{ccrcrcr} x & = & 4 & + & 3\lambda & + & 2\mu \\ y & = & & & 2\lambda & + & 6\mu \\ z & = & 1 & + & 5\lambda & + & \mu \\ t & = & & & 6\lambda & + & 4\mu \end{array}\right.$$