TEMA 4

Formas normales. Unificación y resolución (básica)

Ejercicio 1. *Para las siguientes fórmulas calcula una forma normal prenexa, una forma normal de Skolem y una forma normal clausulada.*

1. $\forall x S(x) \to \exists z \forall y R(z, y)$
2. $\forall x(R(x, y) \land \neg\forall y R(x, y))$
3. $\forall x[R(x, y) \to \forall y S(x)] \to [\exists y S(y) \to \forall z R(y, z)]$
4. $\exists x[R(x, y) \lor \neg\forall y S(x)] \to [\neg\exists y S(y) \land \forall y S(y)]$
5. $\exists x R(x, y) \lor [S(x) \land \neg\exists z R(a, z)]$
6. $\exists x[S(x) \to R(x, y)] \to [\exists y A(y) \to \forall z B(y, z)]$
7. $\forall x R(x, y) \land [\neg S(z) \lor \neg\forall z R(x, z)]$
8. $\exists x[R(x) \to \neg\exists y T(x, y)] \land \neg\exists z[\forall u P(u, z) \to \forall v Q(v, z)]$
9. $\forall x[P(x) \to (Q(x) \lor \neg R(x))] \land \exists y Q(y)$
10. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall y P(y) \to \forall z Q(z))$
11. $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$
12. $\forall x \forall y[\exists z(P(x, z) \land P(y, z)) \to \exists u Q(x, y, u)]$
13. $\forall x[P(x) \land \forall y(\neg Q(x, y) \to \forall z R(a, x, y))]$
14. $\forall x \forall y[\exists z P(z) \land \exists u(Q(x, u) \to \exists v Q(y, v))]$
15. $\exists x \forall y(\forall x \forall y R(a, x) \to \neg\forall z((\neg R(z, y)) \to \forall x S(g(x), z)))$
16. $\exists x R(x, f(x)) \to \exists y \forall x R(y, x)$
17. $\neg\exists x(P(x) \land C(x))$
18. $\forall x(P(x) \to \neg V(x))$
19. $\exists x[P(x) \land E(x) \land \forall y(S(x, y) \land P(y))]$
20. $\forall x[(E(x) \land \neg V(x)) \to \exists y(S(x, y) \land C(y))]$
21. $\forall x(\exists x(R(x) \lor \forall y S(y, x)) \to \forall y(S(y, x) \lor \forall x R(y)))$
22. $\forall z\,(\exists y(\forall x R(a, x) \land \forall y R(y, a) \land Q(y)) \to (R(z, a) \lor \exists z Q(z)))$
23. $\forall x(R(x) \lor \neg\exists x(P(x) \to \forall y Q(f(y), x)) \to \exists z(Q(z, a) \lor \forall y(P(f(y)) \to Q(x, z))))$
24. $\forall x[Q(x) \to R(x, f(x))] \to \exists y[Q(y) \land R(y, f(y))]$

Ejercicio 2. *Dada la fórmula* $\alpha = \forall x\big(\neg P(x) \lor \forall y R(y, a) \to \exists z(P(f(z)) \land \forall x \neg R(x, z))\big)$ *indica cuál de las siguientes fórmulas es una forma prenexa para* α.

1. $\forall x \exists y \forall u \exists z((P(x) \land \neg R(y, a)) \lor (P(f(z)) \land \neg R(u, z)))$
2. $\exists y \forall x \forall z(\neg P(x) \lor R(y, a) \to P(f(y)) \land \neg R(z, y))$

3. $\exists y \forall z(\exists x \neg P(x) \vee R(y,a) \to P(f(y)) \wedge \neg R(z,y))$
4. $\forall x \exists y \exists z((P(x) \wedge \neg R(y,a)) \vee (P(f(z)) \wedge \neg R(x,z)))$
5. $\forall x \exists y \exists z \forall u((P(x) \wedge \neg R(y,a)) \vee (P(f(z)) \wedge \neg R(u,z)))$

Ejercicio 3. *Para las siguientes parejas de cláusulas intenta obtener como resolvente la cláusula vacía y cuando sea posible describe la sustitución que puede usarse en cada caso:*

1. $\{Q(x,y), \neg Q(y,x)\}$
2. $\{Q(f(x),y), \neg Q(z,f(y))\}$
3. $\{Q(x,x), \neg Q(x,z)\}$
4. $\{Q(f(x),x), \neg Q(y,f(y))\}$
5. $\{Q(x,g(x)), \neg Q(y,f(y))\}$
6. $\{Q(x,f(x)), \neg Q(a,x)\}$
7. $\{Q(x,f(x), \neg Q(y,a)\}$
8. $\{Q(x,b), \neg Q(a,f(y))\}$
9. $\{Q(x,y), \neg Q(y,f(y))\}$
10. $\{Q(f(x),x), \neg Q(f(a),b)\}$
11. $\{Q(b,y), \neg Q(y,a)\}$
12. $\{Q(x,y) \vee Q(x,f(x)), \neg Q(x,y)\}$
13. $\{Q(x,x) \vee Q(y,f(y)), \neg Q(b,y)\}$
14. $\{Q(x,f(a)) \vee Q(f(b),y), \neg Q(x,f(y)) \vee \neg Q(f(x),y)\}$
15. $\{Q(x,f(a)) \vee Q(f(b),y), \neg Q(x,f(y)) \vee \neg Q(f(y),x)\}$
16. $\{Q(x,f(a)) \vee Q(f(b),y), \neg Q(x,f(z)) \vee \neg Q(f(y),x)\}$
17. $\{Q(x,f(a)) \vee Q(f(b),y), \neg Q(x,f(y)) \vee \neg Q(f(z),t)\}$

Ejercicio 4. *Para los siguientes conjuntos de cláusulas intenta determinar, usando resolución, si son o no insatisfacibles.*

1. $$\{\neg P(x) \vee Q(f(x)), P(a), \neg P(x) \vee \neg Q(x)\}$$
2. $$\{\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z), \neg R(x,y) \vee R(y,x), R(x,a), \neg R(x,x)\}$$
3. $$\{\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z), R(x,x), R(a,b), \neg R(b,a),\}$$
4. $$\{\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z), \neg R(x,y) \vee R(y,x), \neg R(x,x)\}$$
5. $$\{\neg E(x,y) \vee \neg E(x,z) \vee E(z,y), \neg E(x,y) \vee E(y,x), E(a,b), E(b,c), \neg E(a,c)\}$$

6.
$$\{A(j), \neg M(y) \vee P(j,y), \neg P(x,z), M(a), C(a)\}$$

7.
$$\{R(a), D(y) \vee S(a,y), \neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x,y), \neg D(f(x)), Q(f(x))\}$$

8.
$$\{BC(x) \vee BV(x), PH(a,b), \neg BV(c), P(b), \neg P(y) \vee \neg PH(x,y) \vee \neg BV(x), \neg BC(x)\}$$

9.
$$\{B, V, \neg VE \vee S(j), \neg V \vee \neg B \vee S(j), M(a), M(j), \neg M(x) \vee \neg S(x) \vee R(x), \neg R(j)\}$$

10.
$$\{\neg C \vee CC(a), \neg CC(x) \vee M(x), \neg D(x) \vee M(x), \neg M(x) \vee \neg D(x) \vee \neg CC(x), C, \neg M(x) \vee D(x)\}$$

11.
$$\{\neg M(x) \vee \neg D(x) \vee \neg CC(x,y) \vee \neg C(y), C(b), D(x) \vee \neg M(x), \neg D(x) \vee M(x),$$
$$\neg C(y) \vee CC(f(y),y), \neg C(y) \vee \neg CC(x,y) \vee M(x)\}$$

12.
$$\{C(x) \vee F(x), \neg A(x) \vee \neg CU(x), \neg B(x) \vee L(x), \neg C(x) \vee \neg E(x), \neg L(x) \vee CU(x), \neg F(x) \vee B(x), A(a), E(a)\}$$

13.
$$\{PA(x) \vee I(x), \neg M(x) \vee P(x), \neg A(x) \vee AI(x), \neg T(x) \vee \neg P(x), \neg I(x) \vee C(x), \neg PA(x) \vee M(x),$$
$$\neg AI(x) \vee \neg C(x), A(a), T(a)\}$$

14.
$$\{T(x, g(a), z, f(y)) \vee \neg P(a) \vee S(z,y) \vee \neg R(f(z)), Q(x, g(y)) \vee \neg P(g(x)),$$
$$\neg R(f(f(a))) \vee \neg S(f(a), f(a)) \vee \neg P(g(a)), R(f(x)), \neg Q(u, g(x)) \vee P(g(x)),$$
$$\neg P(x) \vee S(y,z) \vee \neg T(a, g(x), y, f(z)) \vee \neg Q(f(b), z), P(x)\}$$

15.
$$\{\neg S(f(x), g(a)) \vee R(f(a), x);\ S(f(y), y) \vee P(y);\ \neg P(g(a)) \vee P(z);\ \neg R(u,v) \vee P(v)\}$$

16.
$$\{\neg S(f(x_1), g(a)) \vee R(f(a), x_1); S(f(x_2), x_2) \vee P(x_2); \neg P(g(a)) \vee \neg P(x_3); \neg R(x_4, x_5) \vee P(x_5)\}$$

17.
$$\{\neg EI(x) \vee LR(x) \vee A(x, f(x));\ \neg EI(x) \vee LR(x) \vee M(f(x));\ MI(a);\ EI(a); \neg A(a,y) \vee MI(y);\ \neg MI(x) \vee \neg LR(x);\ \neg MI(x) \vee \neg M(x)\}$$

Ejercicio 5. *Comprueba si a partir de las siguientes premisas:*

- *Ningún mamífero tiene sangre fría.*
- *Los peces tienen sangre fría.*
- *Los peces viven en el agua y nadan.*
- *Algunos mamíferos viven en el agua y nadan.*
- *Las ballenas tienen sangre caliente.*

Puede deducirse que las ballenas son mamíferos.

Ejercicio 6. *Estudia si*

$$\forall x[\exists y(P(x,y) \wedge Q(y)) \to \exists y(R(y) \wedge S(x,y))]$$

implica semánticamente

$$\forall x \neg R(x) \to \exists x \forall y(P(x,y) \to \neg Q(y))$$

Ejercicio 7. *Di razonadamente si son unificables o no las siguientes parejas de fórmulas y, caso de serlo, da un unificador de máxima generalidad:*

1. $\langle R\big(f(h(z),u), g(h(a)), z\big), R\big(f(u,y), g(y), a\big)\rangle$,
2. $\langle R\big(f(a,y), g(x), z\big), R\big(f(y,u), z, a\big)\rangle$,

Ejercicio 8. *Demuestra haciendo uso de la técnica de resolución lineal-input, que la sentencia:*

$$\exists x(M(x) \wedge \neg D(x))$$

es consecuencia lógica de las hipótesis:

1. $\forall y(\neg C(y) \to \exists x A(x,y))$,
2. $\forall x[\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y)) \to M(x)]$,
3. $\forall x(D(x) \to M(x))$,
4. $\forall x[(M(x) \wedge D(x)) \to \neg \exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$,
5. $\exists x \neg C(x)$.

Ejercicio 9. *Dadas las siguientes parejas de fórmulas* α *y* β*, indica cuáles de las implicaciones* $\alpha \vDash \beta$ *son ciertas:*

a) $\alpha = \forall x P(x) \vee \forall x Q(x,a)$; $\beta = \forall x(P(x) \vee Q(x,a))$.

b) $\alpha = \forall x(Q(x,x) \to P(b))$; $\beta = \forall x Q(x,x) \to P(b)$.

c) $\alpha = \exists y \forall x(P(x) \to Q(y,a))$; $\beta = \forall x \exists y(P(x) \to Q(y,a))$.

d) $\alpha = \forall x \exists y(P(x) \to Q(x,y))$; $\beta = \forall x(P(x) \to Q(x,f(x)))$.