Capítulo 3

Lenguajes de Primer Orden

3.1. Sintaxis del lenguaje

3.1.1. Introducción

En el capítulo anterior introdujimos el lenguaje proposicional y estudiamos en este lenguaje lo que significa hacer un razonamiento correcto mediante el concepto de implicación semántica. Esto permitía trasladar ciertos razonamientos elementales al lenguaje de la lógica. Ahora bien, tomemos el siguiente ejemplo de deducción.

Supongamos que establecemos que *todos los hombres son mortales* y que *Sócrates es un hombre.* En tal caso, podemos obtener como conclusión que *Sócrates es mortal.*

Este razonamiento es lo que se conoce como *silogismo*, y fue formulado por primera vez por Aristóteles.

Esta deducción no tiene cabida dentro de la lógica proposicional. Los enunciados *Sócrates es un hombre* y *Sócrates es mortal* son enunciados simples, que en la lógica proposicional vendrían representados como dos fórmulas atómicas, y por tanto sin ninguna relación entre ellas. Pero en nuestro caso, una parte de ambos enunciados (el sujeto) es común, lo cual juega un papel decisivo en la deducción que acabamos de hacer.

Lo que nos haría falta es poder separar de un enunciado simple (como *Sócrates es un hombre* las partes que lo constituyen, es decir, el sujeto (*Sócrates*) y el predicado (*ser hombre*). Y estas partes poder combinarlas para formar nuevos enunciados.

Necesitamos entonces ampliar la lógica proposicional de forma que se puedan extraer las partes que intervienen en una proposición básica y combinarlas entre ellas.

Por tanto, en nuestro nuevo lenguaje las proposiciones atómicas ya no serán objetos indivisibles, sino que estarán constituidas por un sujeto y un predicado. Los objetos que puedan ser sujeto de alguna fórmula atómica se denominarán *términos.*

Y tendremos entonces un lenguaje constituido por una serie de objetos (términos) sobre los que podremos hacer afirmaciones (predicados)

Como ejemplo, vamos a fijar un predicado, digamos *ser mortal*, y supongamos que tenemos un conjunto con posibles sujetos (podría ser el conjunto de todas las personas). En tal caso, podemos construir oraciones como:

Sócrates es mortal.

Aurora es mortal.

Todos los hombres son mortales.

Algunos hombres son mortales.

El padre de Sócrates es mortal.

El padre de la madre de Aurora es mortal.

Los sujetos de estas oraciones los podemos clasificar en tres tipos:

- En los dos primeros ejemplos, el sujeto es un objeto totalmente determinado por un identificador propio (en este caso su nombre) del conjunto inicial de posibles sujetos.
- En los dos ejemplos siguientes, el sujeto sería un objeto genérico que no está determinado (todos los hombres, algunos hombres)
- En los dos últimos ejemplos, el sujeto también es un objeto totalmente determinado, pero no propiamente, sino haciendo referencia a otro objeto que sí se ha identificado propiamente.

Podríamos hacer otro enunciado de la forma *todos los padres son mortales* que no entraría en los tipos anteriores, pero puede ser considerado una combinación de los tipos segundo y tercero.

En un lenguaje de primer orden distinguiremos estos tipos de sujetos y emplearemos distintos tipos de símbolos para intentar representarlos.

Para el primer tipo usaremos lo que denominaremos *símbolos de constante*, para el segundo nos harán falta otros símbolos que llamaremos *símbolos de variable* y para los últimos emplearemos *símbolos de función.*

Una vez vistos los distintos tipos de sujetos, vamos a cambiar el predicado. Podríamos decir, por ejemplo, en lugar de *Sócrates es mortal* cualquiera de los siguientes enunciados. Todos ellos tienen en común el sujeto.

Sócrates es alto.

Sócrates es inteligente.

Sócrates es trabajador.

Sócrates es jugador de fútbol.

Y todos estos predicados podemos combinarlos con los sujetos que hemos utilizado antes (podríamos formular enunciados como *Aurora es inteligente*, *Todos los hombres son trabajadores*, *algunos hombres son jugadores de fútbol*, *el padre de Aurora es inteligente*, etc.).

También se pueden formar enunciados como *Aurora es más alta que Sócrates* o *el padre de Aurora es amigo de Sócrates.*

Para representar en nuestro lenguaje los predicados usaremos otros símbolos diferentes que llamaremos *símbolos de predicado* o *símbolos de relación.*

3.1.2. Descripción de un lenguaje de primer orden.

Con estas ideas pasamos a describir qué es un lenguaje de primer orden. Comenzamos definiendo los símbolos que aparecen en el lenguaje.

Definición 20. *Un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ es una 4-upla de conjuntos* $(\mathcal{C},\ \mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \mathcal{R})$.

A los elementos de $\mathcal{C}$ se les llama símbolos de constante.

A los elementos de $\mathcal{V}$ se les llama símbolos de variable.

A los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama símbolos de función.

A los elementos de $\mathcal{R}$ se les llama símbolos de relación *o* símbolos de predicado. *Este conjunto no puede ser el conjunto vacío.*

Cada elemento de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ tiene asociado un número natural, que se denomina aridad *o* ariedad *(es decir, tenemos dos aplicaciones $\mathcal{F} \to \mathbb{N}$ y $\mathcal{R} \to \mathbb{N}$).*

Además, un lenguaje de primer orden incluye dos conjuntos más de símbolos, que son:

El conjunto $\{\vee,\ \wedge,\ \to,\ \leftrightarrow,\ \neg\}$, cuyos elementos se denominan conectivas.

El conjunto $\{\forall,\ \exists\}$, cuyos elementos se denominan cuantificadores. *El cuantificador $\forall$ es el cuantificador universal mientras que $\exists$ es el cuantificador existencial.*

Observación:

1. Algunos autores incluyen como símbolos del lenguaje los paréntesis, pues son símbolos que se emplean al escribir las fórmulas del lenguaje. Nosotros hemos optado por no considerarlos símbolos propios del lenguaje, sino símbolos auxiliares para facilitar la lectura. También podemos considerar la *coma* como un símbolo auxiliar.
2. Normalmente, no especificaremos el conjunto de símbolos de variable. Entenderemos que dicho conjunto es un conjunto con la cantidad suficiente de elementos para expresar y manipular las fórmulas con las que estemos trabajando. Emplearemos normalmente las últimas letras (minúsculas) del abecedario.
3. De acuerdo con la observación precedente, para dar un lenguaje tendremos que especificar cuáles son los símbolos de constante, de función y de relación. Cuando demos estos dos últimos, si fuera necesario llevarán un superíndice que indica la aridad.
4. Para los símbolos de constante emplearemos habitualmente las primeras letras minúsculas del alfabeto, con subíndices si fuera necesario. Las letras f, g, etc. para los símbolos de función.
5. Para los símbolos de predicado normalmente usaremos letras mayúsculas.
6. No obstante, si queremos dar un lenguaje de primer orden para hablar en un determinado contexto, podemos cambiar estas notaciones y emplear símbolos que nos sugieran lo que van a representar (por ejemplo, si estamos hablando de personas, un símbolo de constante puede ser *socrates*, un símbolo de función *padre* y un símbolo de predicado *Ser_ mortal*).
7. Un símbolo de función o de predicado cuya aridad sea 1 diremos que es unario o monario. Si tiene aridad 2 diremos que es binario. Si tiene aridad 3, diremos que es ternario. Cuando su aridad sea n diremos que es n-ario.
8. Los símbolos de constante pueden ser considerados como símbolos de función 0-arios (también llamados nularios).

A partir de estas observaciones, para describir un lenguaje de primer orden diremos algo así como:

> Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden cuyos símbolos de constante son a, b, c, cuyos símbolos de función son f^1, g^2, h^1 y cuyos símbolos de predicado son P^2, Q^3, R^1, S^2.
>
> En tal caso, estamos diciendo que
>
> $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$;
>
> $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, f y h son unarios y g es binario;
>
> $\mathcal{R} = \{P, Q, R, S\}$. R es monario, P y S son binarios y Q es ternario.

Hasta ahora, únicamente tenemos los símbolos que vamos a usar para escribir en nuestro lenguaje. Una fórmula en nuestro lenguaje será una sucesión de estos símbolos junto con las conectivas y cuantificadores (y paréntesis y comas). Pero no toda sucesión de tales símbolos será una fórmula, sino que seguirán una serie de reglas.

Vamos a dar ahora las reglas para, a partir de estos símbolos, formar los distintos elementos del lenguaje. Comenzamos definiendo los términos, que tal y como dijimos en la introducción van a ser los objetos de nuestro lenguaje sobre los cuales haremos afirmaciones.

Definición 21. *Sea $\mathcal{L} = (\mathcal{C},\ \mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \mathcal{R})$ un lenguaje de primer orden. Definimos el conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ o simplemente $\mathcal{T}$ como sigue:*

- *$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$. Es decir, todos los símbolos de constante son elementos de $\mathcal{T}$.*
- *$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$.*
- *Si f es un símbolo de función n-ario, y $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathcal{T}$ entonces $f(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathcal{T}$.*

- *Todo objeto que no se haya construido siguiendo las reglas anteriores no pertenece a* $\mathcal{T}$.

A los elementos de $\mathcal{T}$ *se les llama* términos *del lenguaje* $\mathcal{L}$.

Las reglas primera y segunda nos dicen que los símbolos de constante y de variable son términos. La regla tercera nos dice cómo construir nuevos términos a partir de términos ya construidos. Por último, la regla cuarta nos dice que esta es la única forma de obtener nuevos términos.

Ejemplo 3.1.1. *Sea* $\mathcal{L}$ *el lenguaje de primer orden cuyos símbolos de constante son* a, b, c*; sus símbolos de función son* f^1*,* g^2 *y* h^1*; sus símbolos de predicado son* P^2*,* Q^3*,* R^1*,* S^2*. Entonces son términos:*

$a,\ b,\ x,\ f(b),\ g(a,x),\ h(f(a)),\ g(g(x,y),h(c)),\ f(g(g(x,y),h(c))),\ h(h(h(h(h(h(a)))))),\ g(a,a).$

No son términos:

$f(a,a),\ f(g),\ g(x),\ h(d),\ h(g(a,b),x).$

Explicamos a continuación el porqué no son términos:

- $f(a,a)$ *no es término pues la aridad de* f *es 1, luego solo puede aplicarse a un término (y no a dos, como en este caso).*
- $f(g)$ *no es término pues no lo es* g*, ya que* g *es símbolo de función.*
- $g(x)$ *no es término pues* g *es un símbolo de función binario, y no 1-ario.*
- $h(d)$ *no es término pues* d *no es un elemento del lenguaje.*
- $h(g(a,b),x)$ *no es término pues* h *no es un símbolo de función binario.*

Notemos cómo los símbolos de predicado no intervienen a la hora de formar los términos.

Una vez definidos los términos podemos dar lo que son las fórmulas atómicas.

Definición 22. *Sea* $\mathcal{L} = (\mathcal{C},\ \mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \mathcal{R})$ *un lenguaje de primer orden cuyo conjunto de términos es* $\mathcal{T}$*. Definimos el conjunto de fórmulas atómicas del lenguaje* $\mathcal{L}$ *como el conjunto*

$$\left\{ P(t_1,t_2,\cdots,t_n) : \begin{array}{l} P \text{ es un símbolo de predicado } n-\text{ario}, \\ t_1,t_2,\cdots,t_n \in \mathcal{T} \end{array} \right\}$$

Ejemplo 3.1.2.

Sea $\mathcal{L}$ *el lenguaje del ejemplo 3.1.1. Son fórmulas atómicas de este lenguaje:*

$P(a,x);\ R(h(b));\ Q(h(f(a)),g(a,x),h(c));\ S(g(g(a,a),x),f(c));$
$P(f(h(f(h(c)))),g(f(x),h(f(a))));\ P(g(x,y),g(a,a)).$

No son fórmulas atómicas:

$P(g(a,x));\ R(f(g));\ Q(a,g(x),h(d));\ Q(R(a),g(a,b),f(x)).$

La razón de que no sean fórmulas atómicas es:

- *En el caso de* $P(g(a,x))$ *porque* P *es un símbolo de predicado binario, y en este caso está aplicado a solo un término.*
- *En el caso de* $R(f(g))$ *porque* $f(g)$ *no es un término, como vimos en el ejemplo anterior.*
- *En el caso de* $Q(a,g(x),h(d))$ *porque* $h(d)$ *no es un término.*
- *En el caso de* $Q(R(a),g(a,b),f(x))$ *porque* $R(a)$ *no es un término, sino una fórmula atómica.*

Con este último ejemplo vemos que en el argumento de un símbolo de predicado **nunca** *puede haber otro símbolo de predicado.*

Ahora nos encontramos en el mismo punto que estábamos en un lenguaje proposicional cuando fijábamos el conjunto de fórmulas atómicas. A partir de ahí definimos las fórmulas del lenguaje.

Definición 23. *Sea* $\mathcal{L}$ *un lenguaje de primer orden. Definimos las fórmulas del lenguaje* $\mathcal{L}$ *como sigue:*

- *Toda fórmula atómica es una fórmula.*
- *Si α y β son fórmulas, también lo son $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\neg\alpha$.*
- *Si α es una fórmula y x es un símbolo de variable, entonces son fórmulas $\forall x\alpha$ y $\exists x\alpha$.*
- *Todo lo que no se haya construido siguiendo las reglas anteriores no es una fórmula.*

Ejemplo 3.1.3.

Consideramos el lenguaje del ejemplo 3.1.1. Son fórmulas de este lenguaje:

$P(f(a), g(a, x)) \wedge \neg Q(a, b, h(b))$.

$S(g(g(a, a), x), f(x)) \to \forall x P(a, x)$.

$\exists y(R(g(a, y)) \to (P(g(a, b), x) \wedge \neg\forall x Q(x, x, x)))$.

Y no son fórmulas de este lenguaje:

$R(f(c))\neg \wedge Q(a, b, h(d))$.

$\forall a Q(a, g(x, b), h(d)) \to \forall x P(x, f(y))$.

$\forall x Q(R(x), g(x, a), h(f(c))) \wedge \exists y S(f(a), g(a, x))$.

$R(\forall x P(x, a))$.

$R(x) \to f(x)$.

1. A la hora de escribir las fórmulas vamos a seguir las mismas reglas de prioridad que teníamos en el lenguaje proposicional. La conectiva $\neg$ tiene prioridad sobre las restantes. Las conectivas $\vee$ y $\wedge$ tienen prioridad sobre $\to$ y $\leftrightarrow$.
2. Los cuantificadores tienen prioridad sobre todas las conectivas. Así una expresión de la forma $\forall x\alpha \vee \beta$ significa lo mismo que $(\forall x\alpha) \vee \beta$, y diferente de $\forall x(\alpha \vee \beta)$. Esto vale lo mismo para el resto de conectivas binarias ($\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$) y para el otro cuantificador ($\exists$). Con la conectiva $\neg$ no hay lugar a la confusión, pues la fórmula $\forall x\neg\alpha$ tiene una única lectura, al igual que $\neg\forall x\alpha$, $\exists x\neg\alpha$ y $\neg\exists x\alpha$.
3. En el lenguaje proposicional las fórmulas se obtenían a partir de la fórmulas atómicas y las conectivas siguiendo unas reglas que nos permitían obtener nuevas fórmulas. El conjunto de las fórmulas atómicas era un conjunto prefijado. En un lenguaje de primer orden, como hemos podido ver, la situación es algo más compleja. Las fórmulas atómicas ya no son un conjunto prefijado, sino que se obtienen a partir del conjunto de símbolos de predicado y los términos, y éstos a su vez se obtienen mediante una combinación adecuada de símbolos de constante, de variable y de función.

   Las mismas reglas que teníamos en el lenguaje proposicional para formar las fórmulas a partir de las fórmulas atómicas y las conectivas nos valen ahora. Y añadimos dos más por la existencia de los cuantificadores.

   Esta situación podemos esquematizarla como sigue:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Simb. constante}\\ \bullet\ \text{Simb. variable}\\ \bullet\ \text{Simb. función}\end{array}\right\}\ \text{Términos}\\ \qquad\bullet\ \text{Simb. predicado}\end{array}\right\}\ \text{Fórmulas atómicas}\\ \bullet\ \text{Conectivas}\\ \bullet\ \text{Cuantificadores}\end{array}\right\}\ \text{Fórmulas}$$

   mientras que en el lenguaje proposicional el esquema sería:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Fórmulas atómicas}\\ \bullet\ \text{Conectivas}\end{array}\right\}\ \text{Fórmulas}$$

4. Vemos entonces que una fórmula en un lenguaje proposicional es una sucesión de símbolos. Estos símbolos están divididos en 6 grupos (símbolos de constante, de variable, de función, de relación, conectivas y cuantificadores) más unos símbolos auxiliares (los paréntesis). Pero no toda sucesión de estos símbolos constituye una fórmula, sino que están sujetos a determinadas reglas sintácticas que hemos dado en las definiciones 21, 22 y 23.

   Sin embargo, cuando tenemos una sucesión de símbolos no siempre es fácil saber si se ha construido siguiendo las reglas adecuadas. Para ayudar a ver esto, es conveniente desmenuzar la posible fórmula en sus componentes más simples (lo que podríamos llamar hacer un análisis sintáctico de la fórmula).

Definición 24. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y sea α una fórmula del lenguaje. Definimos el conjunto de las subfórmulas de α como sigue:*

- $Sub(\alpha) = \{\alpha\}$ *si α es una fórmula atómica.*
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1)$ *si* $\alpha = \neg\alpha_1$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1)$ *si* $\alpha = \forall x\alpha_1$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1)$ *si* $\alpha = \exists x\alpha_1$.

Compara esta definición con la definición 10.

Al igual que con la lógica proposicional, para ayudarnos a ver las subfórmulas de una fórmula α podemos construir el árbol de formación o el árbol de desglose de la fórmula α. Este árbol, recordemos, tenía en la raíz la fórmula α y las hojas eran las fórmulas atómicas que aparecían en la construcción de α. Los distintos nodos del árbol constituían las subfórmulas de α.

Ejemplo 3.1.4.

Sea $\alpha = \exists y(R(g(a,y)) \to (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x)))$ una fórmula construida en el lenguaje de primer orden del ejemplo 3.1.1. Vamos a hacer su desglose en subfórmulas.

- $\exists y(R(g(a,y)) \to (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x)))$
  - $R(g(a,y)) \to (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x))$
    - $R(g(a,y))$
    - $P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x)$
      - $P(g(a,b),x)$
      - $\neg\forall xQ(x,x,x)$
        - $\forall xQ(x,x,x)$
          - $Q(x,x,x)$

Si recorremos el árbol de abajo hacia arriba vemos el proceso de construcción de la fórmula α a partir de las subfórmulas atómicas.

Supongamos que tenemos la fórmula $\forall x P(x, y)$. En ella intervienen dos símbolos de variable, x e y. Las apariciones de estos símbolos son diferentes. Mientras la variable x está afectada por un cuantificador ($\forall x$), la variable y no aparece influenciada por ningún cuantificador. Esta distinción en las ocurrencias de las variables juega un papel muy importante en lo que sigue. Por tal motivo, vamos a formalizar esta idea.

Definición 25. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden. Supongamos que tenemos una subfórmula de la forma $Cx\beta$ donde C es un cuantificador (universal o existencial). Se define el* radio de acción *de este cuantificador como la subfórmula β.*

Aunque hemos definido el radio de acción de un cuantificador C, nos referiremos a él como el radio de acción de Cx.

Ejemplo 3.1.5.

1. *En la fórmula $\alpha = \exists y(R(g(a, y)) \to (P(g(a, b), x) \wedge \neg\forall x Q(x, x, x)))$ aparecen dos cuantificadores. El radio de acción de $\exists y$ es $R(g(a, y)) \to (P(g(a, b), x) \wedge \neg\forall x Q(x, x, x))$, mientras que el radio de acción de $\forall x$ es $Q(x, x, x)$.*
2. *Sea ahora $\beta = \forall z(\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$*

   El radio de acción de $\forall z$ es $\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$.

   El radio de acción de $\forall x$ es $P(x, g(z, b))$.

   El radio de acción de $\exists y$ es $Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))$

Definición 26. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden, y supongamos que tenemos una aparición de una variable x en dicha fórmula. Diremos que dicha aparición es* ligada *si está en el radio de acción de un cuantificador $\forall x$ o $\exists x$. En caso contrario diremos que dicha aparición es* libre.

Nota:

1. Una variable puede tener varias apariciones en una fórmula, y en unas ser libre y en otras ligadas. Por tanto, al hablar de libre o ligada tenemos que referirnos a una ocurrencia concreta de una variable, no a la variable en sí.
2. La ocurrencia $\forall x$ o $\exists x$ de la variable x se considera ligada.

Ejemplo 3.1.6.

1. *Consideramos nuevamente la fórmula $\exists y(R(g(a, y)) \to (P(g(a, b), x) \wedge \neg\forall x Q(x, x, x)))$.*

   Esta fórmula tiene dos ocurrencias de la variable y, que señalamos en negrita:

   $$\exists \mathbf{y}(R(g(a, \mathbf{y})) \to (P(g(a, b), x) \wedge \neg\forall x Q(x, x, x))).$$

   Ambas apariciones son ligadas. La primera por estar pegada al cuantificador $\exists$ y la segunda porque está en el radio de acción de $\exists y$.

   Tiene también cinco apariciones de la variable x: $\exists y(R(g(a, y)) \to (P(g(a, b), \mathbf{x}) \wedge \neg\forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x})))$. De estas cinco apariciones la primera es libre (aunque esté dentro del radio de acción de $\exists y$), mientras que las 4 restantes son ligadas.
2. *Sea ahora $\forall z(\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$. Señalamos todas las ocurrencias ligadas:*

   $$\forall \mathbf{z}(\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}, g(\mathbf{z}, b)) \to \exists \mathbf{y}(Q(f(x), g(f(\mathbf{y}), \mathbf{y}), \mathbf{z}) \wedge R(g(\mathbf{y}, \mathbf{z}))))$$

   y todas las ocurrencias libres:

   $$\forall z(\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(\mathbf{x}), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$$

   Vemos como la variable x tiene algunas apariciones ligadas (la primera y la segunda), y una aparición libre (la tercera).

Definición 27. *Sea α una fórmula de un lenguaje proposicional. Decimos que α es una* sentencia *si en α no hay ninguna ocurrencia libre de ninguna variable (o lo que es lo mismo, todas las apariciones de variables en α son ligadas).*

Ejemplo 3.1.7.

1. *La fórmula $\forall z(\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$ no es una sentencia. Hemos visto que tiene una aparición libre de la variable x.*

2. *La fórmula $\forall z \forall x(P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$ sí es una sentencia. En este caso, el radio de acción de $\forall x$ es $P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$, luego todas las ocurrencias de x son ligadas. Las de las otras variables son también ligadas.*

3. *La fórmula $\forall z \forall x(P(x, g(z, b)) \to \exists y Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$ no es una sentencia. En este ejemplo, la última ocurrencia de la variable y es libre (el radio de acción de $\exists y$ es $Q(f(x), g(f(y), y), z)$.*

4. *Una fórmula en la que no aparezcan variables es una sentencia.*

En este ejemplo vemos la importancia que tienen los paréntesis en una fórmula y la dificultad que puede suponer analizar la estructura de una fórmula. Vamos a hacer el árbol de formación de las tres fórmulas que hemos visto en este ejemplo.

$$\forall z(\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$$

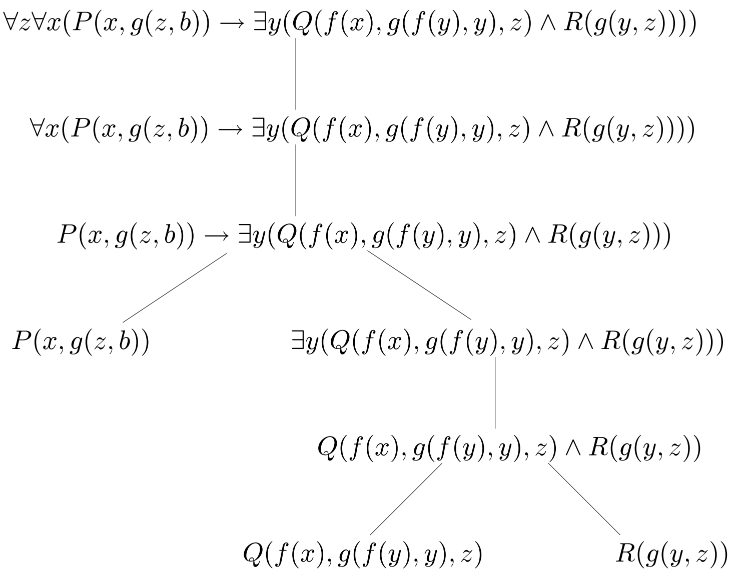
$$\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

$$\forall x P(x, g(z, b)) \qquad \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

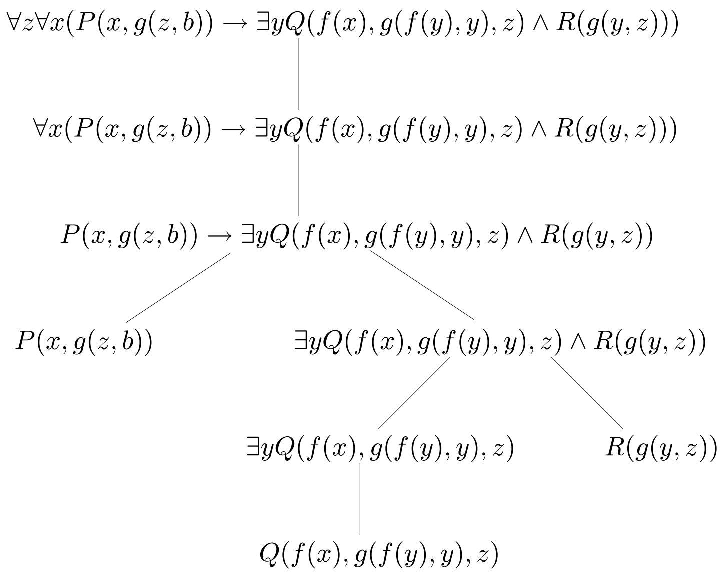
$$P(x, g(z, b)) \qquad Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))$$

$$Q(f(x), g(f(y), y), z) \qquad R(g(y, z))$$

Vemos que el radio de acción de $\forall x$ es $P(x, g(z, b))$ (tenemos que fijarnos en los dos nodos de la izquierda).



Aquí podemos ver como todas las apariciones de las variables son ligadas.



Y aquí vemos que el radio de acción de $\exists y$ es $Q(f(x),g(f(y),y),z)$, y por tanto $R(g(y,z))$ queda fuera.

3.2. Semántica de un lenguaje de primer orden.

Hasta ahora hemos visto cómo construir las fórmulas de un lenguaje de primer orden a partir de una serie de símbolos. Una vez construida una fórmula hemos analizado dicha fórmula en función de su estructura. Así hemos definido las subfórmulas de la fórmula, y hemos clasificado la aparición de las variables dependiendo de su posición en la fórmula.

Ahora vamos a tratar de darle significado a cada una de las fórmulas que forman parte de un lenguaje de primer orden. Para eso, tendremos que asignarle un significado a cada una de las componentes de la fórmula. Para esto vamos a valernos de los conceptos de *estructura* y *valoración*.

3.2.1. Estructuras.

Definición 28. *Sea $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ un lenguaje de primer orden. Una estructura (o una $\mathcal{L}$ estructura) $\mathcal{E}$ consiste en:*

- *Un conjunto D distinto del vacío, denominado* dominio *o* universo.
- *Para cada símbolo de constante $a \in \mathcal{C}$, un elemento $a^{\mathcal{E}} \in D$ (es decir, lo que tenemos es una aplicación $\mathcal{C} \to D$).*
- *Para cada símbolo de función n-ario f, una aplicación $f^{\mathcal{E}} : D^n \to D$.*
- *Para cada símbolo de predicado n-ario P, una aplicación $P^{\mathcal{E}} : D^n \to \mathbb{Z}_2$.*

Observación:

1. Dar una estructura es entonces elegir los elementos sobre los que queremos que las fórmulas digan algo (números, matrices, polinomios, personas, etc.), y una vez hecho esto, asignar un significado a los símbolos de constante, de función y de relación. Hablaremos entonces de asignación de constantes, de funciones y de predicados. Las variables en principio no juegan ningún papel en una estructura.
2. Si tenemos una estructura $\mathcal{E}$, y a es un símbolo de constante, para no complicar mucho la notación escribiremos, si no hay lugar a la confusión, a en lugar de $a^{\mathcal{E}}$. Así, por ejemplo, en una estructura en la que el dominio es $\mathbb{N}$ (números naturales), y al símbolo de constante a le asignamos el valor 1, escribiremos $a = 1$ en lugar de $a^{\mathcal{E}} = 1$.
3. La misma observación anterior vale para los símbolos de función y los símbolos de predicado.
4. Si f es un símbolo de función 0-ario, asignarle un significado a f sería dar una aplicación $f : D^0 \to D$. Puesto que D^0 tiene un único elemento, entonces para dar la aplicación únicamente hay que elegir un elemento de D. Por tanto, asignarle un significado a un símbolo de función 0-ario es similar a asignarle un significado a un símbolo de constante.
5. Si P es un símbolo de predicado 0-ario, entonces asignarle un significado a P significa elegir un valor de verdad (0 ó 1) para el predicado P. Esto es lo mismo que hacíamos cuando asignábamos un valor de verdad a una fórmula atómica en un lenguaje proposicional.
6. Si en nuestro lenguaje todos los símbolos de predicado son 0-arios, entonces en las fórmulas del lenguaje únicamente habrá símbolos de predicado y conectivas (no tienen cabida aquí los símbolos de constante, de variable y de función). En tal caso, lo que tenemos es un lenguaje proposicional.

   Dicho de otra forma, la lógica de predicados incluye como caso particular a la lógica proposicional. Concretamente como aquella en la que todos los símbolos de predicado son 0-arios.

Ejemplo 3.2.1.

1. *Consideramos un lenguaje de primer orden cuyos símbolos de constante son s y a; los símbolos de función son p^1 y m^1 y los símbolos de predicado son M^1, In^1, T^1 y A^2.*

   Sea $\mathcal{E}$ la estructura siguiente:

   - *El dominio es el conjunto de todas las personas.*
   - *s = Sócrates y a = Aurora (notemos que habría que haber escrito $s^{\mathcal{E}}$ = Sócrates e igual para a. Pero como acabamos de comentar, lo escribiremos tal y como hemos dicho para simplificar la escritura).*
   - *$p(x)$ = el padre de x y $m(x)$ = la madre de x.*

$$M(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es mortal.} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \qquad In(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es inteligente.} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es trabajador.} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \qquad A(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es más alto que } y. \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aunque aún faltan por precisar algunos conceptos, con esta estructura tendríamos:

La fórmula $M(s)$ *significaría* Sócrates es mortal.

La fórmula $M(a)$ *significaría* Aurora es mortal.

La fórmula $M(p(s))$ *significaría* el padre de Sócrates es mortal.

La fórmula $M(p(m(a)))$ *significaría* el padre de la madre de Aurora es mortal (es decir, el abuelo materno de Aurora es mortal).

La fórmula $A(a, s)$ *significaría* Aurora es más alta que Sócrates.

La fórmula $In(p(a))$ *significaría* el padre de Aurora es inteligente.

2. *Sea ahora el lenguaje* $\mathcal{L}$ *en el que* $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$ *y* $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$. *Sea* $\mathcal{E}_1$ *la estructura siguiente:*

   - *Dominio:* $D = \mathbb{N}$.
   - *Asignación de constantes:* $a = 0$, $b = 1$.
   - *Asignación de funciones:* $s(x) = x + 1$, $m(x, y) = x \cdot y$.
   - *Asignación de predicados:*

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es par.} \\ 0 & \textit{si } x \textit{ es impar.} \end{cases} \qquad Pr(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es primo.} \\ 0 & \textit{si } x \textit{ no es primo.} \end{cases}$$

$$M(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x > y. \\ 0 & \textit{si } x \leq y. \end{cases} \qquad Eq(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x = y. \\ 0 & \textit{si } x \neq y. \end{cases}$$

   Con esta estructura, tendríamos:

   La fórmula $P(b)$ *significaría* uno es un número par.

   La fórmula $M(b, a)$ *significaría* uno es mayor que cero.

   La fórmula $Pr(s(b))$ *significaría* dos es un número primo.

   La fórmula $Eq(m(a, b), a)$ *significaría* uno por cero es igual a cero.

3. *Con el mismo lenguaje de este último ejemplo, consideramos la estructura* $\mathcal{E}_2$ *siguiente:*

   - *Dominio:* $D = \mathbb{Z}_4$.
   - *Asignación de constantes:* $a = 0$, $b = 3$.
   - *Asignación de funciones:* $s(x) = 2x + 1$, $m(x, y) = x \cdot y$.
   - *Asignación de predicados:*

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x^2 = 0. \\ 0 & \textit{si } x^2 \neq 0. \end{cases} \qquad Pr(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x^2 = x. \\ 0 & \textit{si } x^2 \neq x. \end{cases}$$

$$M(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x^2 + y = 1. \\ 0 & \textit{si } x^2 + y \neq 1. \end{cases} \qquad Eq(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x = y. \\ 0 & \textit{si } x \neq y. \end{cases}$$

Observación:

La forma en que hemos asignado los predicados en estos dos últimos ejemplos puede resultar un poco engorrosa. Por tal motivo, emplearemos frecuentemente otras notaciones.

1. Una sería escribir $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv$ [Condición], donde en lugar de [Condición] escribiremos la condición que deben cumplir $x_1, x_2, \cdots, x_n$ para que $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ valga 1.
   Así, en la estructura $\mathcal{E}_1$ podríamos haber definido los predicados:
   $$P(x) \equiv x \text{ es par.} \quad Pr(x) \equiv x \text{ es primo.} \quad M(x,y) \equiv x > y. \quad Eq(x,y) \equiv x = y$$
   Y en la estructura $\mathcal{E}_2$:
   $$P(x) \equiv x^2 = 0. \quad Pr(x) \equiv x^2 = x. \quad M(x,y) \equiv x^2 + y = 1. \quad Eq(x,y) \equiv x = y$$
2. Otra sería escribir $P =$ [Conjunto], donde en lugar de [Conjunto] iría el conjunto
   $$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D^n : P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1\}.$$
   Esto, cuando podamos enumerar los elementos.
   Por ejemplo, en el caso de la estructura $\mathcal{E}_2$ podríamos haber definido los predicados como:
   $$\begin{array}{ll} P = \{0, 2\}; & M = \{(0,1),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,0)\}; \\ Pr = \{0, 1\}; & Eq = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}. \end{array}$$
   Para el caso de la estructura $\mathcal{E}_1$ esto sería un poco más complicado, ya que los conjuntos de los que estamos hablando son infinitos. Aún así se podría decir:
   $P = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$ si con eso entendemos que nos referimos a todos los números pares.
   $Pr = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots\}$ si con eso entendemos que nos referimos al conjunto de los números primos.
   $Eq = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3), \cdots\}$ si con eso entendemos que nos referimos a todas las parejas de la forma (x, y) con $x = y$.
   Un poco más complicado es describir así el predicado M.
3. En cualquier caso, lo que hace falta es que quede claro cuando el predicado vale 1 y cuando el predicado vale 0. Por ejemplo, la asignación del predicado P en la estructura $\mathcal{E}_1$ podríamos haberla hecho también así: $P(x) = x + 1 \text{ mód } 2$.

Definición 29. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y $\mathcal{E}$ una estructura. Una* valoración *es una aplicación $v : \mathcal{V} \to D$.*

Una vez asignado un valor del dominio a cada una de las variables, podemos extenderlo a todos los términos del lenguaje.

Definición 30. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, sea $\mathcal{E}$ una estructura y v una valoración. Entonces v se extiende a una aplicación (que seguiremos llamando v)*
$$v : \mathcal{T} \to D$$
como sigue:

- *Si $a \in \mathcal{C}$ entonces $v(a) = a$ (para ser más precisos, habría que decir $v(a) = a^{\mathcal{E}}$).*
- *Si $x \in \mathcal{V}$ entonces $v(x)$ ya está definido.*
- *Si f es un símbolo de función n-ario y $t_1, t_2, \cdots, t_n$ son términos para los que tenemos definido v entonces $v(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$ (o más precisamente, $v(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f^{\mathcal{E}}(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$).*

El elemento $v(t)$ diremos que es el valor del término t.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2.2.

1. *Consideramos el lenguaje de primer orden dado por* $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$ *y* $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$. *Supongamos que* $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$.

   Sea la estructura $\mathcal{E}_1$ *que vimos en el ejemplo 3.2.1, y la valoración* $v : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$ *dada por* $v(x) = 2$, $v(y) = 5$, $v(z) = 1$. *Vamos a tomar algunos términos y calcular su imagen por la aplicación* v.

   - $t = s(a)$. $v(t) = s(v(a)) = s(0) = 1$. *Para abreviar podemos escribir* $s(a) = s(0) = 1$.
   - $t = m(s(a), x)$. $v(t) = m(v(s(a)), v(x)) = m(1, 2) = 2$. *Para abreviar podemos escribir* $m(s(a), x) = m(1, 2) = 2$.
   - $t = s(y)$. $v(t) = s(v(y)) = s(5) = 6$. *Para abreviar podemos escribir* $s(y) = s(5) = 6$.
   - $t = m(m(s(a), x), s(y))$. $v(t) = m(v(m(s(a), x)), v(s(y))) = m(2, 6) = 12$. *Para abreviar, escribiremos* $m(m(s(a), x), s(y)) = m(2, 6) = 12$.
   - *Sea* $t = m(s(s(b)), m(s(x), m(b, m(x, y))))$. *Vamos a calcular* $v(t)$.
   $$\begin{aligned} m(s(s(b)), m(s(x), m(b, m(x, y)))) &= m(s(s(1)), m(s(2), m(1, m(2, 5)))) \\ &= m(s(2), m(3, m(1, 10))) \\ &= m(3, m(3, 10)) \\ &= m(3, 30) = 90 \end{aligned}$$
   Es decir, $v(t) = 90$.

2. *Con el mismo lenguaje, la estructura* $\mathcal{E}_2$ *y la valoración dada por* $v(x) = 3$, $v(y) = 1$, $v(z) = 2$ *vamos a calcular el valor de los mismos términos.*

   - $s(a) = s(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.
   - $m(s(a), x) = m(1, 3) = 1 \cdot 3 = 3$.
   - $s(y) = s(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
   - $m(m(s(a), x), s(y)) = m(3, 3) = 3 \cdot 3 = 1$.
   - $$\begin{aligned} m(s(s(b)), m(s(x), m(b, m(x, y)))) &= m(s(s(3)), m(s(3), m(3, m(3, 1)))) \\ &= m(s(3), m(3, m(3, 3))) \\ &= m(3, m(3, 1)) \\ &= m(3, 3) = 1. \end{aligned}$$

3. *Dado el lenguaje de primer orden definido por* $\mathcal{C} = \{a, c\}$, $\mathcal{V} = \{x\}$, $\mathcal{F} = \{f^1, g^2\}$, $\mathcal{R} = \{R^1, Q^2\}$, *consideramos la estructura siguiente:*

   Dominio $D = \mathbb{Z}_3$.

   Constantes $a = 0$, $c = 2$.

   Funciones $f(x) = x + 1$, $g(x, y) = x + y$.

   Predicados $R = \{0\}$, $Q = \{(0, 1),\ (1, 2),\ (2, 0)\}$.

   Consideramos la valoración $x \mapsto 0$. *Entonces:*

   - $v(x) = 0$.
   - $v(a) = 0$.
   - $v(c) = 2$.
   - $v(f(x)) = f(v(x)) = f(0) = 1$.
   - $v(f(c)) = f(v(c)) = f(2) = 0$.
   - $v(g(a, f(x))) = g(v(a), v(f(x))) = g(0, 1) = 1$.

- $v(f(g(a,f(x)))) = f(v(g(a,f(x)))) = f(1) = 2.$
- $v(g(a,c)) = g(v(a),v(c)) = g(0,2) = 2.$
- $v(g(g(a,c),f(g(a,f(x))))) = g(v(g(a,c)),v(f(g(a,f(x))))) = g(2,2) = 1.$
- $v(g(f(c),f(x)) = g(v(f(c)),v(f(x)) = g(0,1) = 1.$
- $$\begin{aligned} v(g(f(f(x)),g(f(a),g(a,f(c))))) &= f(f(x)) + g(f(a),g(a,f(c))) \\ &= f(f(0)) + g(f(0),g(0,f(2))) \\ &= f(0+1) + (f(0) + g(0,f(2))) \\ &= (1+1) + (1 + (0 + f(2))) \\ &= 2 + (1 + (0+0)) = 0. \end{aligned}$$

Definición 31. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Una interpretación I es un par $(\mathcal{E},v)$, donde $\mathcal{E}$ es una estructura y v es una valoración.*

Vamos a ver cómo una interpretación determina un valor de verdad para cada fórmula del lenguaje. Si $I = (\mathcal{E},v)$ es una valoración y α es una fórmula, denotaremos por $I^v_{\mathcal{E}}(\alpha)$ al valor de verdad de la fórmula α por la interpretación I. Cuando no sea necesario, suprimiremos el subíndice y/o el superíndice.

Definición 32. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $I = (\mathcal{E},v)$ una interpretación y $\alpha = P(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ una fórmula atómica. Definimos el valor de verdad de α bajo la interpretación I como*

$$I(\alpha) = P(v(t_1),v(t_2),\cdots,v(t_n))$$

Notemos que la definición es coherente, pues definida una valoración, para cada término t tenemos definido el valor $v(t)$, que es un elemento del dominio. Por eso, $(v(t_1),v(t_2),\cdots,v(t_n)) \in D^n$, luego $P(v(t_1),v(t_2),\cdots,v(t_n)) \in \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.2.3.

1. *Sea $\mathcal{L} = (\{a,b\},\ \{x,y,z\},\ \{s^1,m^2\},\ \{P^1,Pr^1,M^2,Eq^2\})$ un lenguaje de primer orden, sea $\mathcal{E}_1$ la estructura definida en el ejemplo 3.2.1 y v la valoración dada por $v(x) = 3$, $v(y) = 5$, $v(z) = 11$.*
   - *$I(P(a)) = 1$, pues $a = 0$ y 0 es un número par.*
   - *$I(Pr(s(b))) = 1$, pues $v(s(b)) = 2$ y 2 es un número primo.*
   - *$I(M(m(x,s(b)),s(s(y)))) = 0$ pues $v(m(x,s(b))) = 6$, $v(s(s(y))) = 7$ y 6 no es mayor que 7.*
   - *$I(Eq(s(z),m(x,s(x)))) = 1$, pues $v(s(z)) = 12$, $v(m(x,s(x))) = 12$ y $12 = 12$.*

2. *Consideramos el mismo lenguaje, pero la estructura $\mathcal{E}_2$ y la valoración $v(x) = 2$, $v(y) = 1$, $v(z) = 0$. En tal caso:*
   - *$I(P(a)) = 1$, pues $a = 0$ y $0^2 = 0$.*
   - *$I(Pr(s(b))) = 0$, pues $v(s(b)) = 2\cdot 3 + 1 = 3$ y $3^3 \neq 3$.*
   - *$I(M(m(x,s(b)),s(s(y)))) = 0$ pues $v(m(x,s(b))) = 2\cdot 3 = 2$, $v(s(s(y))) = 3$ y $2^2 + 3 \neq 1$.*
   - *$I(Eq(s(z),m(x,s(x)))) = 0$, pues $v(s(z)) = 1$, $v(m(x,s(x))) = 2\cdot 1 = 2$ y $1 \neq 2$.*

Una vez definido el valor de verdad de una fórmula atómica, vamos a extenderlo a cualquier fórmula. Para eso, necesitamos antes ver como modificar el valor de una valoración en una variable.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $\mathcal{E}$ una estructura y $v : \mathcal{V} \to D$ una valoración. Para cada variable x y cada elemento $e \in D$ definimos una nueva valoración $v_{x|e} : \mathcal{V} \to D$ como:

$$v_{x|e}(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \neq x \\ e & \text{si } y = x \end{cases}$$

Es decir, $v_{x|e}$ actúa igual que v sobre todas las variables salvo eventualmente x.

Ejemplo 3.2.4. *Consideramos un lenguaje de primer orden con 3 símbolos de variable x, y, z, y consideramos una estructura en la que $D = \mathbb{Z}$. Sea v la valoración $x \mapsto -2$, $y \mapsto 1$, $z \mapsto 5$.*

A continuación damos explícitamente las valoraciones $v_{x|2}$, $v_{x|5}$, $v_{y|-1}$, $v_{z|3}$ y $v_{z|5}$.

$v_{x\|2}$	$v_{x\|5}$	$v_{y\|-1}$	$v_{z\|3}$	$v_{z\|5}$
$x \mapsto 2$	$x \mapsto 5$	$x \mapsto -2$	$x \mapsto -2$	$x \mapsto -2$
$y \mapsto 1$	$y \mapsto 1$	$y \mapsto -1$	$y \mapsto 1$	$y \mapsto 1$
$z \mapsto 5$	$z \mapsto 5$	$z \mapsto 5$	$z \mapsto 3$	$z \mapsto 5$

Nótese que $v_{z|5} = v$. En general, se tiene que $v_{x|e} = v$ cuando $v(x) = e$.

Con esto podemos definir el valor de verdad de cualquier fórmula:

Definición 33. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $I = (\mathcal{E}, v)$ una interpretación, con D el dominio. Sean α y β dos fórmulas de $\mathcal{L}$. Entonces:*

$I^v(\alpha \vee \beta) = I^v(\alpha) + I^v(\beta) + I^v(\alpha) \cdot I^v(\beta)$.

$I^v(\alpha \wedge \beta) = I^v(\alpha) \cdot I^v(\beta)$.

$I^v(\alpha \to \beta) = 1 + I^v(\alpha) + I^v(\alpha) \cdot I^v(\beta)$.

$I^v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 + I^v(\alpha) + I^v(\beta)$.

$I^v(\neg\alpha) = 1 + I^v(\alpha)$.

$$I^v(\forall x\alpha) = \begin{cases} 1 & \textit{si para cualquier elemento } e \in D \textit{ se tiene que } I^{v_{x|e}}(\alpha) = 1 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

$$I^v(\exists x\alpha) = \begin{cases} 1 & \textit{si hay algún elemento } e \in D \textit{ para el que } I^{v_{x|e}}(\alpha) = 1 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2.5.

1. *Consideramos nuevamente el lenguaje $\mathcal{L}$ en el que $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$ y $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$, y la estructura $\mathcal{E}_1$, que recordamos ahora.*

   - *Dominio: $D = \mathbb{N}$.*
   - *Asignación de constantes: $a = 0$, $b = 1$.*
   - *Asignación de funciones: $s(x) = x + 1$, $m(x, y) = x \cdot y$.*
   - *Asignación de predicados:* $P(x) \equiv x$ *es par*; $Pr(x) \equiv x$ *es primo*; $M(x, y) \equiv x > y$; $Eq(x, y) \equiv x = y$.

   Y consideramos la valoración $v(x) = 8$, $v(y) = 5$.

   Tomamos diferentes fórmulas y calculamos su valor de verdad.

   a) $\alpha_1 = \forall x P(m(x, s(x)))$.
   Llamemos α a la fórmula $P(m(x, s(x)))$. De acuerdo con la definición 33 tenemos que calcular

   $$I^{v_{x|0}}(\alpha),\; I^{v_{x|1}}(\alpha),\; I^{v_{x|2}}(\alpha),\; I^{v_{x|3}}(\alpha),\; I^{v_{x|4}}(\alpha), I^{v_{x|5}}(\alpha), \cdots$$

   y comprobar si vale siempre 1 (en cuyo caso $I^v(\forall x\alpha) = 1$), o si hay algún caso para el que valga cero (en cuyo caso $I^v(\forall x\alpha) = 0$).

   $I^{v_{x|0}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(0, s(0))) = P(m(0, 1)) = P(0) = 1$, *ya que* 0 *es par.*
   $I^{v_{x|1}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(1, s(1))) = P(m(1, 2)) = P(2) = 1$, *ya que* 2 *es par.*
   $I^{v_{x|2}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(2, s(2))) = P(m(2, 3)) = P(6) = 1$, *ya que* 6 *es par.*
   $I^{v_{x|3}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(3, s(3))) = P(m(3, 4)) = P(12) = 1$, *ya que* 12 *es par.*

Y podemos ver que sea cual sea el número natural n se tiene que $I^{v_{x|n}}(P(m(x,s(x))) = 1$, pues $I^{v_{x|n}}(P(m(x,s(x)))) = P(m(n,s(n))) = P(n\cdot(n+1)) = 1$, ya que $n\cdot(n+1)$ es siempre un número par.
Por tanto, se tiene que

$$I^v(\forall x P(m(x,s(x)))) = 1$$

También podíamos haber traducido la fórmula $\forall x P(m(x,s(x)))$, que en este caso viene a decir $\forall x\ x(x+1)$ es par, lo cual es cierto sea quien sea $x \in D = \mathbb{N}$.
Notemos como a la hora de interpretar esta fórmula, la valoración v no ha jugado ningún papel.

b) $\alpha_2 = \exists x(P(x)\wedge Pr(x))$.
Para interpretar esta fórmula, tomamos $\alpha = P(x)\wedge Pr(x)$, y procedemos igual que antes.
  $I^{v_{x|0}}(P(x)\wedge Pr(x)) = P(0)\wedge Pr(0) = 0$, *ya que 0 no es un número primo.*
  $I^{v_{x|1}}(P(x)\wedge Pr(x)) = P(1)\wedge Pr(1) = 0$, *ya que 1 es un número impar (y no es un número primo).*
  $I^{v_{x|2}}(P(x)\wedge Pr(x)) = P(2)\wedge Pr(2) = 1$, *ya que 2 es un número par y un número primo.*
Luego ya no necesitamos continuar. Hay un elemento del dominio (el 2) tal que $I^{v_{x|2}}(\alpha) = 1$.
Por tanto,

$$I^v(\exists x(P(x)\wedge Pr(x))) = 1$$

En este ejemplo, la fórmula α_2 se podría haber traducido como que existe x que es par y primo, *que sabemos que es cierto.*

c) $\alpha_3 = \exists x P(x)\wedge Pr(x)$.
Aquí se tiene que $I^v(Pr(x)) = 0$, pues $I^v(Pr(x)) = Pr(v(x)) = Pr(8) = 0$, pues 8 no es un número primo. Independientemente de lo que valga $I^v(\exists x P(x))$ (que vale 1), se tiene que

$$I^v(\exists x P(x)\wedge Pr(x)) = 0$$

Notemos que en este caso, la valoración v sí ha jugado un papel decisivo en el valor de verdad de la fórmula. De hecho, con la valoración $v'(x) = 7$, $v'(y) = 5$, tendriamos que $I^{v'}(\alpha_3) = 1$.

d) $\alpha_4 = \forall x(P(x)\wedge Pr(x)\to Eq(x,s(b)))$.
Esta fórmula dice que si x es un número par y primo entonces $x = 2$, que sabemos que es cierto. Por tanto, se tiene que $I^v(\alpha_4) = 1$.
Vamos a comprobarlo fijándonos en la definición 33. Sea $\alpha = P(x)\wedge Pr(x)\to Eq(x,s(b))$.
  $I^{v_{x|0}}(P(x)\wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|0}}(\alpha) = 1$.
  $I^{v_{x|1}}(P(x)\wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|1}}(\alpha) = 1$.
  $I^{v_{x|2}}(P(x)\wedge Pr(x)) = 1$ *y* $I^{v_{x|2}}(Eq(x,s(b))) = 1$, *luego* $I^{v_{x|2}}(\alpha) = 1$.
  $I^{v_{x|3}}(P(x)\wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|3}}(\alpha) = 1$.
  $I^{v_{x|4}}(P(x)\wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|4}}(\alpha) = 1$.
Y vemos que para cualquier $n \geq 3$ se tiene que $I^{v_{x|n}}(P(x)\wedge Pr(x)) = 0$, luego $I^{v_{x|n}}(\alpha) = 1$.
Concluimos entonces que

$$I^v(\forall x(P(x)\wedge Pr(x)\to Eq(x,s(b)))) = 1$$

Estos cálculos podríamos haberlos desarrollado en la siguiente tabla:

x	$P(x)$	$Pr(x)$	$P(x)\wedge Pr(x)$	$Eq(x,s(b))$	$P(x)\wedge Pr(x)\to Eq(x,s(b))$	$\forall x(P(x)\wedge Pr(x)\to Eq(x,s(b)))$
0	1	0	0	0	1	
1	0	0	0	0	1	
2	1	1	1	1	1	
3	0	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$*$	$*$	0	0	1	

e) $\alpha_5 = \forall x(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b)))$.
Si aquí hacemos una tabla similar al ejemplo anterior, tendríamos:

x	$P(x)$	$Pr(x)$	$P(x) \wedge Pr(x)$	$M(x,s(b))$	$P(x) \wedge Pr(x) \to M(s,s(b))$	$\forall x(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x,s(b)))$
0	1	0	0	0	1	
1	0	0	0	0	1	0
2	1	1	1	0	0	

Al haber obtenido que $I^{v_{x|2}}(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b))) = 0$ *entonces*

$$I^v(\forall x(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b))) = 0$$

No necesitamos seguir calculando $I^{v_{x|3}}(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b)))$, $I^{v_{x|4}}(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b)))$, *etc.*

2. *Sea ahora el lenguaje de primer orden definido por* $\mathcal{C} = \{a, c\}$, $\mathcal{V} = \{x\}$, $\mathcal{F} = \{f^1, g^2\}$, $\mathcal{R} = \{R^1, Q^2\}$, *la estructura siguiente (ver ejemplo 3.2.2):*

Dominio $D = \mathbb{Z}_3$.

Constantes $a = 0$, $c = 2$.

Funciones $f(x) = x + 1$, $g(x, y) = x + y$.

Predicados $R = \{0\}$, $Q = \{(0, 1),\ (1, 2),\ (2, 0)\}$,

y la valoración $x \mapsto 0$. *Vamos a interpretar las siguientes fórmulas:*

a) $\forall x Q(x, f(x))$,
b) $\forall x Q(x, c)$
c) $\exists x Q(x, f(c))$,
d) $\exists x Q(x, f(f(x)))$,
e) $\exists x(R(x) \to \neg R(x))$,
f) $\exists x R(x) \to \neg R(x)$.

a) *Hacemos una tabla con las interpretaciones de* $Q(x, f(x))$ *para las distintas valoraciones de la variable* x. *En este caso, al tener el dominio 3 elementos, podemos calcularlas todas.*

$v(x)$	$f(x)$	$Q(x, f(x))$	$\forall x Q(x, f(x))$
0	1	1	
1	2	1	1
2	0	1	

Así que $I(\forall x Q(x, f(x))) = 1$
Volvemos a notar que puesto que todas las apariciones de las variables son ligadas, la valoración inicial no ha jugado ningún papel en el valor de verdad de la fórmula.

b) *Igual que en el caso anterior escribimos la tabla:*

$v(x)$	$Q(x, c)$	$\forall x Q(x, c)$
0	0	
1	1	0
2	0	

Es decir, $I(\forall x Q(x, c)) = 0$.

c) *También ahora necesitamos todas las valoraciones de la variable x.*

$v(x)$	$Q(x,f(c))$	$\exists xQ(x,f(c))$
0	0	
1	0	1
2	1	

Por tanto $I(\exists xQ(x,f(c)))=1$

d) *La tabla es:*

$v(x)$	$f(f(x))$	$Q(x,f(f(x)))$	$\exists xQ(x,f(f(x)))$
0	2	0	
1	0	0	0
2	1	0	

Luego $I(\exists xQ(x,f(f(x)))=0$.

e) *En este caso la tabla es:*

$v(x)$	$R(x)$	$\neg R(x)$	$R(x)\to\neg R(x)$	$\exists x(R(x)\to\neg R(x))$
0	1	0	0	
1	0	1	1	1
2	0	1	1	

Así que $I(\exists x(R(x)\to\neg R(x)))=1$

f) *Ahora la tabla es*

$v(x)$	$R(x)$	$\exists xR(x)$	$\neg R(x)$	$\exists xR(x)\to\neg R(x)$
0	1			
1	0	1	0	0
2	0			

Y tenemos entonces que $I(\exists xR(x)\to\neg R(x))=0$. En la columna correspondiente a $\neg R(x)$ hemos tomado como valor de x el cero, pues es la valoración que teníamos inicialmente. Esto lo hacemos así pues esta aparición de la variable x es libre. Por tanto, el valor de verdad de la fórmula depende, no solo de la estructura sino también de la valoración. Para otra valoración (por ejemplo, $v(x)=1$), tendríamos que $I(\exists xR(x)\to\neg R(x))=1$.

Observación:

De ahora en adelante, en muchas ocasiones en que queramos dar algún ejemplo y necesitemos un lenguaje de primer orden, no especificaremos los elementos del lenguaje, sino que daremos las fórmulas que necesitemos´y supondremos que en nuestro lenguaje tenemos todos los símbolos que aparecen en las fórmulas. La escritura de las fórmulas debe ser coherente. Así, si aparece varias veces un símbolo de función o de predicado, en todas las ocasiones debe tener la misma aridad.

Por ejemplo, si decimos:

> Sea $\alpha=\forall x(Q(x,f(a))\to\exists y(P(y)\wedge Q(f(x),y)))$ una fórmula de un lenguaje de primer orden, entenderemos que estamos hablando de un lenguaje de primer orden en el que entre los símbolos de constante está a (puede que algunos más), entre los símbolos de función está f (y que es un símbolo 1-ario) y entre los símbolos de predicado está P (1-ario) y Q (binario).

Hemos visto en estos ejemplos como a la hora de interpretar una fórmula, si tenemos una ocurrencia ligada de una variable, el valor de verdad de la fórmula no depende de la valoración que escojamos, sino solo de la estructura. Por el contrario, para las apariciones libres sí hay que tener en cuenta la valoración. Este hecho queda reflejado en el siguiente lema:

Lema 3.2.1 (Lema de coincidencia). *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden, y sea $\mathcal{E}$ una estructura. Supongamos que el conjunto de variables que tienen alguna ocurrencia libre en α es $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. Sean v_1, v_2 dos valoraciones tales que*

$$v_1(x_i) = v_2(x_i) \quad \textit{para } i = 1, 2, \cdots, m.$$

Entonces $I^{v_1}(\alpha) = I^{v_2}(\alpha)$.

Es decir, a la hora de interpretar una fórmula, no importa como actúe la valoración sobre las variables ligadas. Sólo tiene relevancia sobre las variables libres.

Como consecuencia, si la fórmula es una sentencia, es decir, no hay ninguna ocurrencia libre de ninguna variable, entonces la interpretación de la fórmula depende únicamente de la estructura. No depende de la valoración que tomemos.

3.2.2. Clasificación semántica de las fórmulas.

Al igual que en el lenguaje proposicional, vamos a dar una clasificación de las fórmulas atendiendo a sus posibles interpretaciones. Comenzamos definiendo lo que se entiende por un *modelo* para una fórmula.

Definición 34. *Dada una fórmula α en un lenguaje de primer orden y una interpretación $I^v = (\mathcal{E}, v)$, se dice que es un* modelo *para α si $I^v(\alpha) = 1$.*

Ejemplo 3.2.6.
Sea $\alpha = \forall x P(m(x, s(x)))$. La estructura $\mathcal{E}_1$, con cualquier valoración, es un modelo para α, como vimos en el ejemplo 3.2.5. Sin embargo, $\mathcal{E}_2$ no es un modelo para α, como vimos también en ese ejemplo.

Definición 35. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden, y sea $\mathcal{E}$ una estructura.*

1. *Se dice que α es* válida *en $\mathcal{E}$ si para cualquier valoración v se tiene que $I^v(\alpha) = 1$.*
2. *Se dice que α es* satisfacible *en $\mathcal{E}$ si hay una valoración v tal que $I^v(\alpha) = 1$.*
3. *Se dice que α es* refutable *en $\mathcal{E}$ si existe una valoración v tal que $I^v(\alpha) = 0$.*
4. *Se dice que α es* no válida *en $\mathcal{E}$ si para cualquier valoración v se tiene que $I^v(\alpha) = 0$.*

Observación:

Si α es una sentencia y $\mathcal{E}$ es una estructura, puesto que el valor de verdad de α no depende de la valoración, si es satisfacible en $\mathcal{E}$ entonces es válida en $\mathcal{E}$ y si es refutable en $\mathcal{E}$ entonces es no válida en $\mathcal{E}$.

Ejemplo 3.2.7.
Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden $(\{b\},\ \{x, y\},\ \{f, g\},\ \{P, Q, R\})$. Sea la estructura siguiente:

Dominio $D = \mathbb{Z}_5$.

Constantes $b = 2$.

Funciones $f(x) = x^2 + 1$, $g(x, y) = x \cdot y$.

Predicados $P(x) \equiv x^4 = 1$, $Q(x, y) \equiv x^2 + y = 0$, $R(x, y) \equiv x = y$.

Vamos a tomar varias fórmulas, y estudiar si son válidas, satisfacibles, refutables o no válidas en $\mathcal{E}$.

1. $\alpha_1 = \forall x(P(x) \to \exists y R(b, g(x,y)))$. *Esta fórmula es una sentencia. Por tanto, o es válida en* $\mathcal{E}$ *o es no válida en* $\mathcal{E}$.

   Llamamos α *a la fórmula* $P(x) \to \exists y R(b, g(x,y))$ *y la interpretamos para los diferentes valores de* x.

   - $x = 0$. *En tal caso* $I(\alpha) = 1$, *ya que* $I(P(x)) = P(0) = 0$.
   - $x = 1$. *Si tomamos* $y = 2$ *tenemos que* $I(R(b, g(x,y))) = R(2, g(1,2)) = R(2,2) = 1$. *Por tanto* $I(\exists y R(b, g(x,y))) = 1$, *luego* $I(\alpha) = 1$.
   - $x = 2$. *Ahora podemos tomar* $y = 1$ *y razonar igual que antes. También* $I(\alpha) = 1$.
   - $x = 3$. *En este caso, tomamos* $y = 4$ *y con eso comprobamos que* $I(\alpha) = 1$.
   - $x = 4$. *También aquí* $I(\alpha) = 1$, *pues para* $y = 3$ *la fórmula* $R(b, g(x,y))$ *es verdadera.*

   Con esto tenemos que $I(\alpha_1) = 1$. *Por tanto* α_1 *es válida en* $\mathcal{E}$.

2. $\alpha_2 = \exists x \forall y(Q(x,b) \vee P(g(x, f(y))))$. *También esta fórmula es una sentencia.*

   Sea ahora $\beta = \forall y(Q(x,b) \vee P(g(x, f(y))))$. *Vamos a hacer una tabla con las distintas valoraciones, para calcular el valor de verdad de* α_2.

$v(x)$	$Q(x,b)$	$v(y)$	$f(y)$	$g(x,f(y))$	$P(g(x,f(y)))$	$Q(x,b) \vee P(g(x,f(y))) = \alpha$	$\forall y\alpha = \beta$	$\exists x\beta = \alpha_2$
		0	1	0	0	0		
		1	2	0	0	0		
0	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	0	0	0		
		0	1	1	1	1		
		1	2	2	1	1		
1	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	2	1	1		
		0	1	2	1	1		
		1	2	4	1	1		
2	0	2	0	0	0	0	0	0
		3	0	0	0	0		
		4	2	4	1	1		
		0	1	3	1	1		
		1	2	1	1	1		
3	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	1	1	1		
		0	1	4	1	1		
		1	2	3	1	1		
4	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	3	1	1		

   Luego α_2 *es una fórmula no válida en* $\mathcal{E}$.

3. $\alpha_3 = \forall x(Q(x,y) \to \neg R(x,b))$. *Esta fórmula no es una sentencia. La variable* y *aparece libre en la fórmula. Por tanto, debemos ver como se interpreta la fórmula dependiendo de los valores de* y.

   Tomamos una valoración para la que $y = 0$. *La fórmula nos dice que si* $x^2 = 0$ *entonces* $x \neq 2$, *lo cual es cierto. Con esto vemos que la fórmula es satisfacible en* $\mathcal{E}$.

   Tomamos ahora una valoración para la que $y = 1$. *En este caso, la fórmula dice que si* $x^2 + 1 = 0$ *entonces* $x \neq 2$. *Pero eso no es verdad, pues* $2^2 + 1 = 0$. *La fórmula es refutable en* $\mathcal{E}$.

   De hecho, se tiene que para una valoración v:

$$I^{v_{y|0}}(\alpha_3) = I^{v_{y|2}}(\alpha_3) = I^{v_{y|3}}(\alpha_3) = I^{v_{y|4}}(\alpha_3) = 1; \qquad I^{v_{y|1}}(\alpha_3) = 0$$

Como hay al menos una valoración para la que la fórmula se interpreta como verdadera, y una para la que la fórmula se interpreta como falsa, la fórmula α_3 es satisfacible y refutable en $\mathcal{E}$.

4. $\alpha_4 = R(x, f(b)) \vee P(x)$.

   Aquí hay también que ver que ocurre con las distintas valoraciones.

$v(x)$	$R(x, f(b))$	$P(x)$	$R(x, f(b)) \vee P(x)$
0	1	0	1
1	0	1	1
2	0	1	1
3	0	1	1
4	0	1	1

   Como para todas las posibles valoraciones se tiene que $I(\alpha_4) = 1$, la fórmula es válida en $\mathcal{E}$.

Definición 36. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden.*

1. *Se dice que α es* universalmente válida *si para cualquier estructura $\mathcal{E}$ α es válida en $\mathcal{E}$ (es decir, para cualquier interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ se tiene que $I(\alpha) = 1$).*

2. *Se dice que α es* satisfacible *si hay alguna estructura en la que sea satisfacible (es decir, existe una interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ para la que $I(\alpha) = 1$).*

3. *Se dice que α es* refutable *si hay alguna estructura en la que sea refutable (es decir, existe una interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ para la que $I(\alpha) = 0$).*

4. *Se dice que α es* contradicción *si para cualquier estructura $\mathcal{E}$ es no válida (es decir, para cualquier interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ se tiene que $I(\alpha) = 0$).*

Ejemplo 3.2.8.

1. *Vamos a ver que $\exists x(P(x) \to P(a))$ es universalmente válida.*

   En primer lugar, notemos que esta fórmula es una sentencia.

   Supongamos que tenemos una estructura $\mathcal{E}$ cuyo dominio es D y una valoración cualquiera v. En esa estructura, al símbolo de constante a se le habrá asignado un elemento del conjunto D (que llamaremos también a).

   Entonces $I^{v_{x|a}}(P(x) \to P(a)) = I(P(a) \to P(a)) = 1$, independiente de que $P(a)$ se interprete como cierta o como falsa. Luego se tiene que

$$I^v(\exists x(P(x) \to P(a))) = 1$$

   Podríamos intentar construir una tabla para calcular el valor de verdad de la fórmula.

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\exists x(P(x) \to P(a))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a	$I(P(a))$	$I(P(a))$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

   y observamos que en la fila correspondiente al valor del dominio que toma la constante a obtenemos que ambos miembros de la implicación tienen el mismo valor de verdad (puede que sea 0 o 1), por lo que la implicación es verdadera.

   Esta fila hace que el valor de verdad de $\exists x(P(x) \to P(a))$ sea 1.

2. $\forall x(P(x) \to P(a))$ *es satisfacible y refutable. Para probarlo vamos a dar dos estructuras. En una se interpretará como cierta y en la otra como falsa.*

   a) *En la primera estructura,* $D = \mathbb{N}$, $a = 3$ *y* $P(x) \equiv x$ *es par.*

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\forall x(P(x) \to P(a))$
0	1	0	0	
1	0	0	1	0
2	1	0	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

   La primera fila ya nos dice que la interpretación de la fórmula $\forall x(P(x) \to P(a))$ *es cero.*

   b) *Ahora la estructura es* $D = \mathbb{Z}_3$, $a = 2$, $P(x) \equiv x^2 = 1$.

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\forall x(P(x) \to P(a))$
0	0	1	1	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	

   Con estas dos estructuras vemos que la fórmula $\forall x(P(x) \to P(a))$ *es satisfacible y refutable.*

3. $\forall x(P(x) \to \neg P(a))$ *es también satisfacible y refutable. Y puede probarse usando las mismas interpretaciones que en la fórmula anterior, aunque los resultados están intercambiados.*

4. $\exists x(P(x) \to \neg P(a))$

   Si tomamos las dos estructuras anteriores, en ambos casos la fórmula se interpreta como verdadera (compruébalo). Con esto sabemos que la fórmula es satisfacible. Pero, ¿es también refutable? o, por el contrario es universalmente válida.

   Vamos a intentar buscar una estructura donde la fórmula se interprete como falsa. Para eso, necesitamos que sea cual sea el elemento d *del dominio, la fórmula* $P(d) \to \neg P(a)$ *sea falsa, lo que significa que* $I(P(d)) = 1$ *e* $I(\neg P(a)) = 0$*. Esto nos dice que hay que elegir un predicado que sea cierto para todos los elementos del dominio.*

   Tomamos entonces la siguiente estructura: $D = \mathbb{Z}_2$, $a = 1$, $P(x) = 1$ *(o* $P(x) \equiv x^2 = x$*). En tal caso, tenemos:*

x	$P(x)$	$\neg P(a)$	$P(x) \to \neg P(a)$	$\exists x(P(x) \to \neg P(a)$
0	1	0	0	
1	1	0	0	0

5. $\forall x \neg(P(x) \to P(a))$ *es contradicción.*

   Al igual que en el primer caso, si v *es una valoración, entonces* $I^{v_{x|a}}(P(x) \to P(a)) = 1$*, luego* $I^{v_{x|a}}(\neg(P(x) \to P(a))) = 0$*. De aquí concluimos que*

$$I^v(\forall x \neg(P(x) \to P(a))) = 0$$

   Sea cual sea la interpretación I*.*

6. $\exists x \neg(P(x) \to P(a))$ *es satisfacible y refutable. Puedes tomar las estructuras que han aparecido en este ejemplo para comprobarlo.*

Ejercicio 3.2.1. *Prueba que:*

1. $\exists x P(x) \to P(a)$ *es satisfacible y refutable.*

2. $\forall x P(x) \to P(a)$ *es universalmente válida.*

3. $\forall x P(x) \to \neg P(a)$ *es satisfacible y refutable.*

4. $\exists x P(x) \to \neg P(a)$ *es satisfacible y refutable.*

5. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ *es satisfacible y refutable.*

6. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ *es universalmente válida.*

Definición 37. *Sea* $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ *un conjunto de fórmulas. Se dice que* Γ *es satisfacible si existe una interpretación* $I = (\mathcal{E}, v)$ *tal que* $I^v(\gamma_1) = I^v(\gamma_2) = \cdots = I^v(\gamma_n) = 1$ *(es decir, existe un modelo para todas las fórmulas de* Γ*).*

Un conjunto que no es satisfacible se dice insatisfacible.

Ejemplo 3.2.9.

1. *Sea* $\Gamma = \{\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \exists x R(x,x),\ \exists x \neg R(x,x)\}$.

   Vamos a comprobar que Γ *es satisfacible. Para eso, tomamos la siguiente estructura:*

   Dominio $D = \mathbb{N}$.
   Predicados $P(x) \equiv x$ *es impar,* $Q(x) = 1$, $R(x,y) \equiv x \cdot y$ *es impar.*

   Y vamos a ver que en esta estructura todas las fórmulas de Γ *se interpretan como verdaderas:*

   - $\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x))$.
     Interpretamos la fórmula $\exists y R(x,y) \to P(x)$ *para los distintos valores de* x.
     - *Si* x *es par. En ese caso,* $I(R(x,y)) = 0$ *para cualquier* y, *ya que* $x \cdot y$ *es un número par (al serlo* x*). Por tanto,* $I(\exists y R(x,y)) = 0$, *luego* $I(\exists y R(x,y) \to P(x)) = 1$.
     - *Si* x *es impar. Ahora* $I(\exists y R(x,y)) = 1$ *(podemos tomar* $y = 1$*). Pero también* $I(P(x)) = 1$. *Luego* $I(\exists y R(x,y) \to P(x)) = 1$.

     Por tanto, se tiene que $I(\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x))) = 1$.
   - $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
     Al ser $I(Q(x)) = 1$ *para cualquier valor de* x, *entonces* $I(P(x) \to Q(x)) = 1$ *para cualquier valor de* x, *luego* $I(\forall x(P(x) \to Q(x))) = 1$.
   - $\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$.
     Si tomamos $x = 0$, *entonces, para cualquier* y, $I(R(x,y)) = 0$, *luego* $I(\neg R(x,y)) = 1$. *Por tanto,* $I(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)) = 1$. *Es decir, hay un valor de* x *que hace cierta la fórmula* $Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)$. *Eso significa que* $I(\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))) = 1$.
   - $\exists x R(x,x)$.
     Puesto que $1 \cdot 1$ *es impar, entonces* $I(\exists x R(x,x)) = 1$.
   - $\exists x \neg R(x,x)$.
     Ahora tomamos $x = 2$. *Al ser* $2 \cdot 2$ *un número par, tenemos que* $I(\exists x \neg R(x,x)) = 1$.

2. *El conjunto*

   $$\Gamma = \{\neg\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \neg\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \neg\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \neg\exists x R(x,x),\ \neg\exists x \neg R(x,x)\}$$

   es insatisfacible.

   El motivo es que las dos últimas fórmulas no pueden ser verdaderas a la vez. Si la cuarta es verdadera, es decir, no existe x *tal que* $I(R(x,x)) = 1$, *entonces tiene que existir un elemento* x *tal que* $I(\neg(R(x,x))) = 1$. *Por tanto,* $I(\neg\exists x \neg R(x,x)) = 0$, *es decir, la quinta fórmula se interpreta como falsa.*

En este ejemplo hemos tomado un conjunto $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$ que es satisfacible, y el conjunto $\Gamma' = \{\neg\gamma_1, \neg\gamma_2, \neg\gamma_3, \neg\gamma_4, \neg\gamma_5\}$ es insatisfacible. Esto no tiene porqué ser así.

Por ejemplo, el conjunto $\{\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \exists x R(x,x)\}$ es satisfacible (acabamos de ver una estructura donde todas las fórmulas son ciertas).

El conjunto $\{\neg\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \neg\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \neg\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \neg\exists x R(x,x)\}$ es también satisfacible. La siguiente es una estructura donde todas las fórmulas son verdaderas.

Dominio $D = \mathbb{N}$.

Predicados $P(x) \equiv x$ es impar, $Q(x) \equiv x$ es primo, $R(x,y) \equiv x < y$.

Se deja como ejercicio comprobar esto último.

Observación:

Con lo que hemos visto hasta ahora no es fácil comprobar que un conjunto de fórmulas es insatisfacible. Más adelante estudiaremos técnicas para comprobar que un conjunto de fórmulas es insatisfacible.

3.3. Implicación semántica.

Al igual que en el tema de lógica proposicional, el concepto de implicación semántica es el que nos va a decir cuando una deducción es correcta dentro de un lenguaje de primer orden.

Definición 38. *Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden y sea α una fórmula del mismo lenguaje. Decimos que α es consecuencia lógica de Γ si para cualquier interpretación en la que todas las proposiciones fórmulas de Γ sean verdaderas se tiene que la fórmula α es también cierta.*
En tal caso, escribiremos:

$$\Gamma \vDash \alpha$$

y leeremos

$$\alpha \text{ es consecuencia lógica de } \Gamma$$

o también

$$\Gamma \text{ implica semánticamente } \alpha.$$

Observación:

Si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ y $\Gamma \vDash \alpha$, escribiremos $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \vDash \alpha$.

Pero ahora, para ver si $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \vDash \alpha$ no podremos hacer como en el caso de la lógica proposicional de tomar todas las interpretaciones en las que las premisas sean ciertas y ver que ocurre con la conclusión, ya que el conjunto de tales interpretaciones puede ser infinito.

Lo que sí es cierto es que si encontramos una interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ tal que $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = \cdots = I(\gamma_n) = 1$ e $I(\alpha) = 0$, entonces no es cierto que $\Gamma \vDash \alpha$.

Cuando el conjunto Γ sea vacío, la expresión $\Gamma \vDash \alpha$ significa que α es universalmente válida. En tal caso, escribiremos $\vDash \alpha$.

Ejemplo 3.3.1.

1. *Vamos a ver que $\{\forall x P(x)\} \vDash P(a)$.*

   Esto parece claro, pues si el predicado P es cierto para todos los valores de x, en particular debe ser cierto para $x = a$.

   Si quisiéramos hacer una tabla en la que $\forall x P(x)$ fuera cierto, esta tabla sería

x	$P(x)$	$\forall x P(x)$
$\vdots$	1	
a	1	1
$\vdots$	1	

Y puesto que todos los elementos de la columna $P(x)$ tienen que valer 1, entonces aquel que esté en la fila del elemento a vale 1, lo que significa que $I(P(a)) = 1$.

2. *Ahora vamos a comprobar que $\exists x P(x) \not\models P(a)$. Para esto, vamos a dar una estructura en la que $\exists x P(x)$ se interprete como cierta, pero $P(a)$ no. Esta estructura podría ser:*

   Dominio $D = \mathbb{N}$.
   Constantes $a = 1$.
   Predicados $P(x) \equiv x$ *es par.*

   Es claro que $I(\exists x P(x)) = 1$, ya que en el dominio $\mathbb{N}$ podemos encontrar un elemento (por ejemplo, el 2), para el que el predicado P es cierto. Sin embargo, $I(P(a)) = P(1) = 0$.

3. *Al comienzo del capítulo estuvimos viendo un ejemplo de razonamiento. De las afirmaciones* todos los hombres son mortales *y* Sócrates es un hombre *deducíamos que* Sócrates es mortal.

   Vamos a formular este razonamiento en un lenguaje de primer orden, aunque la solución la daremos más adelante.

   Sea el lenguaje de primer orden $\mathcal{L} = (\{s\},\ \{x\},\ \emptyset,\ \{H^1, M^1\})$, y consideramos la estructura:

   Dominio *Seres vivos.*

   Constantes $s =$ *Sócrates.*

   Predicados $H(x) \equiv x$ *es hombre.* $M(x) \equiv x$ *es mortal.*

   Entonces podemos traducir a este lenguaje estos enunciados:

   Todos los hombres son mortales. Se diría $\forall x(H(x) \to M(x))$.
   Sócrates es hombre. Se diría $H(s)$.
   Sócrates es mortal. Se diría $M(s)$.

   En tal caso, lo que habría que comprobar es si $\{\forall x(H(x) \to M(x)),\ H(s)\} \models M(s)$.

   Más adelante comprobaremos que esta implicación semántica es cierta.

   También podría haberse tomado como dominio el conjunto de todos los hombres, en cuyo caso, este silogismo se traduciría como $\forall x M(x) \models M(s)$, que ya hemos visto que es cierto.

Teorema 3.3.1. . *Sea Γ un conjunto de fórmulas y α otra fórmula. Son equivalentes:*

1. $\Gamma \models \alpha$
2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *es insatisfacible.*

Compara este teorema con el teorema 2.4.1. La demostración es análoga a la que se hizo en su momento.

El teorema 2.4.2 también tiene su versión a la lógica de predicados.

Teorema 3.3.2 (Teorema de la Deducción)**.**
Sea Γ un conjunto de fórmulas (que podría ser vacío) de un lenguaje de primer orden, y α, β, otras dos fórmulas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\Gamma \models \alpha \to \beta$
2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$

La demostración es igual a la que se hizo en el caso de la lógica proposicional.

Ejemplo 3.3.2.
Vamos a comprobar que $\forall x P(x) \to P(a)$ es universalmente válida. Esto es lo mismo que demostrar que

$$\models \forall x P(x) \to P(a)$$

y por el teorema de la deducción, esto se traduce en

$$\forall x P(x) \models P(a),$$

algo que hemos hecho en el ejemplo 3.3.1.

Al igual que en el tema anterior, el problema fundamental de la lógica de predicados es estudiar cuando, dado un conjunto de fórmulas Γ y una fórmula α se tiene que $\Gamma \models \alpha$. Entonces vimos que podíamos resolverlo mediante tablas de verdad o planteando ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$. Estas dos técnicas para resolver este problema no pueden trasladarse a la lógica de predicados, así que tenemos que intentar otros métodos. Conocemos, para la lógica proposicional el algoritmo de Davis-Putnam y el método de resolución. Ambos nos servían para demostrar que un conjunto de fórmulas era insatisfacible, lo que, junto con el teorema 2.4.1 nos permitía responder a la pregunta de si $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \not\models \alpha$. Ahora, con el teorema 3.3.1, también podemos transformar un problema de implicación semántica en un problema de estudiar si un conjunto de fórmulas es o no insatisfacible. Pero para poder aplicar estos dos métodos necesitábamos, dada una fórmula, transformarla en otra que tuviera una forma determinada (lo que en su momento llamamos la forma clausular). Estas transformaciones se conseguían a partir de unas equivalencias lógicas básicas.

Ahora vamos a necesitar algo parecido. Por tanto, en lo que sigue, vamos a extender las reglas que teníamos de equivalencias lógicas a fórmulas en las que intervienen cuantificadores.

3.4. Equivalencia lógica.

El concepto de equivalencia lógica en lenguajes de primer orden es similar al que se dio en lógica proposicional (ver definición 14).

Definición 39. *Sean α, β dos fórmulas de un lenguaje de primer orden. Se dice que son lógicamente equivalentes si para cualquier interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ se tiene que $I(\alpha) = I(\beta)$.*

Si α y β son lógicamente equivalenes, escribiremos $\alpha \equiv \beta$.

Es fácil comprobar que dadas dos fórmulas α y β, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. α y β son lógicamente equivalentes.
2. $\alpha \leftrightarrow \beta$ es universalmente válida.
3. $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \alpha$ son universalmente válidas.
4. $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$.

Observación:
También en lenguajes de primer orden podemos sustituir fórmulas por otras que sean lógicamente equivalentes en el siguiente sentido. Si β_1 es lógicamente equivalente a β_2, y α es una fórmula para la que β_1 es una subfórmula, entonces la fórmula que resulta de sustituir en α la fórmula β_1 por β_2 es lógicamente equivalente a α. En otras palabras, si en una fórmula sustituimos una subfórmula por otra lógicamente equivalente, el resultado es una fórmula lógicamente equivalente.

A la hora de transformar una fórmula en otra lógicamente equivalente a ella, nos vale el cuadro 2.3 que vimos en el tema anterior y que recordamos ahora. En este cuadro, α, β y γ representan fórmulas cualesquiera de un lenguaje de primer orden.

Estas equivalencias son también válidas en la lógica de predicados. Pero necesitamos ampliar la tabla con nuevas equivalencias en las que intervengan los cuantificadores. El objetivo será transformar una fórmula en otra que tenga todos los cuantificadores al principio, y cuyo radio de acción sea toda la fórmula que tiene a la derecha.