EXAMEN DE LMD

25 de junio de 2015

APELLIDOS, NOMBRE: ....

DNI: .... GRUPO:

1. *a*) Determina un número natural n sabiendo que el conjunto $\mathrm{D}(n)$ de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales, y que 105 y 42 son dos coátomos. Obtén además todos los elementos $x \in \mathrm{D}(n)$ tales que $\overline{105} \vee x = 42$.

   b) Representa la función booleana
   $$f(x,y,z,t) = \overline{x}yz\overline{t} + yz\overline{t} + x \cdot (z \oplus t) + \overline{\overline{x} + y + z} + yzt,$$
   como suma de mintérminos, y halla una expresión mínima como suma de productos de literales.

2. Clasifica la proposición lógica siguiente:
   $$\Big(\big(t \vee p\big) \wedge \neg q \to r\Big) \wedge \Big(\neg r \wedge \big(p \vee t\big)\Big) \to q \vee s.$$

3. *a*) Sea α la siguiente fórmula:
   $$\alpha = \forall y\Big(P(a,y) \to \forall y \exists x P(x,y)\Big)$$
   Calcula el valor de verdad de α en cada una de las estructuras siguientes:
   - Estructura $\mathcal{E}_1$.
     - Dominio: $\mathbb{N}$.
     - Asignación de constantes: $a = 0$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y = x + 1$.
   - Estructura $\mathcal{E}_2$.
     - Dominio: $\mathbb{Z}_9$.
     - Asignación de constantes: $a = 0$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y = x + 1$.

   b) Traduce a un lenguaje de primer orden la frase

   "*Todo grupo de la asignatura LMD tiene más de un alumno*"

   usando los símbolos de predicado G^1, A^1, E^2, P^2 con los significados siguientes:

$G(x)$	:	x es un grupo de la asignatura LMD;
$A(x)$	:	x es un alumno;
$E(x,y)$	:	el objeto x es igual al objeto y;
$P(x,y)$	:	x pertenece a y.

4. Consideramos las fórmulas siguientes de un lenguaje de primer orden:
   $$\alpha_1 = \forall x\Big(\exists y Q(y,x) \to \neg P(x)\Big),$$
   $$\alpha_2 = \forall x\Big(Q(x, f(x)) \wedge \forall y Q(y, g(y))\Big),$$
   $$\alpha_3 = \forall x\Big(P(x) \to P(f(x)) \vee P(g(x))\Big),$$
   $$\beta = \forall x \neg P(x).$$
   Estudia si β es o no consecuencia lógica del conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

5. Sea la sucesión de números enteros definida para $n \geq 0$ mediante la recurrencia

$$\begin{cases} x_0 = 4, \ x_1 = 14, \\ x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 2^n \quad \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

   a) Basándose en la recurrencia anterior, demuestra por inducción que para cualquier $n \geq 0$, x_n es un número par.

   b) Encuentra una expresión no recurrente para el término x_n.

6. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y cuya matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) ¿Hay algún camino o circuito de Euler en G? Si la respuesta es afirmativa, muestra uno.

   b) ¿Hay algún ciclo de Hamilton en G? Si la respuesta es afirmativa, muestra uno.

   c) ¿Es G un grafo plano? Si la respuesta es afirmativa, obtén una representación plana de G.

   d) Calcula el número cromático de G. ¿Es G un grafo bipartido?