TEMAS 1 y 2

Álgebras de Boole y Lógica proposicional

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función dada por

$$f(x, y, z, t) = (y \uparrow z) \uparrow (\bar{t} \uparrow \bar{x}) + (x \oplus y) + (z \downarrow \bar{t})$$

1. Calcula la forma normal conjuntiva de f.
2. Calcula una expresión óptima de f como suma de productos de literales.
3. Comprueba que hay más de una expresión óptima en los términos expresados en el apartado anterior (es decir, como suma de productos de literales) y calcula 4 de ellas.

Ejercicio 2. Sea a un número mayor que uno que en binario se escribe con n cifras $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1x_0)_2$. Diseña un circuito combinacional con n entradas y n salidas que devuelva la expresión binaria del número $a-2$.

Una **puerta umbral** (*threshold function* en inglés) de n variables es una función booleana definida como

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \geq F \\ 0 & \text{si } p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n < F \end{cases}$$

donde $p_1, p_2, \cdots, p_n, F \in \mathbb{R}$.
El número F se llama *valor* de la puerta umbral, mientras que los parámetros $p_1, p_2, \cdots, p_n$ se les llama *pesos*.
Una función booleana se dice que es una *función umbral* si está representada mediante una puerta umbral.

Ejercicio 3.

1. Calcula una expresión booleana para una puerta umbral valor $\frac{1}{2}$ y pesos $-1, 1, 2$.
2. Demuestra que la función $f(x, y) = x \oplus y$ no es una función umbral.
3. Dadas las siguientes funciones booleanas, estudia si son o no funciones umbrales, y en caso afirmativo calcula un posible valor y posibles pesos.
   a) $f(x) = \bar{x}$.
   b) $f(x, y) = x \uparrow y$.
   c) $f(x, y, z) = x + y\,z$.
   d) $f(x, y, z, t) = x\,y + z\,t$.
   e) $f(x, y, z, t) = x + y\,z + t$.

Ejercicio 4. Estudia cuál de las siguientes fórmulas es tautología, contingente o contradicción. Emplea para cada una un método diferente.

1. $(\neg\alpha \to \beta \vee \delta) \vee (\neg\beta \wedge \neg\delta \to \gamma) \to (\neg\gamma \to \delta \vee \alpha \vee \beta)$.
2. $\neg((\alpha \wedge \beta) \to \neg\gamma \wedge \neg\delta) \wedge (\gamma \vee \delta \to \neg\alpha) \wedge (\neg\beta \to \neg\alpha)$.
3. $((\neg\beta \to \alpha \wedge \delta) \vee (\neg\beta \to \gamma)) \to ((\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\delta) \to \gamma)$.

Ejercicio 5. Nos encontramos en la isla donde hay dos grupos de personas: los que dicen siempre la verdad y los que siempre mienten. Queremos averiguar tres cosas: si hay oro en la isla, si ha estado en la isla el entrenador del Granada CF, y si han tenido buena cosecha de trigo.

Los habitantes de la isla conocen la respuesta a nuestras tres preguntas, pero la respuesta que nos dan no siempre nos aclara lo que queremos saber.

Preguntamos a tres nativos, cuyos nombres son (o eso creemos) Armando, Eugenia e Ismael, y las respuestas que nos dan son:

- Armando: Hay oro y buena cosecha de trigo.
- Eugenia: Si hay oro, no hay buena cosecha.
- Ismael: Hay buena cosecha o no estuvo aquí el entrenador del Granada CF.

Después de pensar un rato no llegamos a ninguna conclusión, por lo que les pedimos más información. Entonces, Eugenia nos dice si estuvo aquí el entrenador del Granada CF hay oro, a lo que añade Armando *pero no estuvo aquí.*

¿Podrías responder a las tres cuestiones que traíamos?

Ejercicio 6. Estudia si la fórmula $(\neg b \wedge \neg c \to a \vee d) \to (\neg a \wedge \neg b \leftrightarrow c \vee d)$ es consecuencia lógica del conjunto

$$\Gamma = \{(\neg b \wedge c) \vee (d \wedge e) \to \neg a,\ (b \wedge c \to d) \wedge (d \wedge a \to e),\ \neg(b \wedge \neg(d \to a))\}$$