TEMA 2

Lógica proposicional (básica)

Ejercicio 1. Dada la siguiente fórmula:

$$\alpha = (a \vee b \to \neg c \wedge d) \to (\neg a \wedge c \to \neg d \vee \neg(\neg c \to b))$$

indica cuál o cuáles de las siguientes fórmulas son subfórmulas de α:

a) $(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge d)$.

b) $\neg c \to b$.

c) $\neg a \wedge c \to \neg d$.

d) $b \to \neg c$.

e) $\neg c \wedge d$.

Ejercicio 2. Para las fórmulas siguientes y cada una de las interpretaciones de las proposiciones atómicas, extiende la interpretación a la fórmula bien formada.

Fórmulas:

1. $((a \to b) \to a) \to a$
2. $\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
3. $(\neg a \to \neg b) \to \neg(a \to b)$

Interpretaciones:

a) $I(a) = 1,\ I(b) = 0$

b) $I(a) = 0,\ I(b) = 1$

c) $I(a) = 1,\ I(b) = 1$

Ejercicio 3 (Abril 2016)**.** Señala para cuál o cuáles de las siguientes fórmulas se obtiene que el valor de una interpretación es $1 + I(a)I(b) + I(a)I(b)I(c)$

1. $a \wedge b \to c$
2. $a \wedge c \to b$
3. $a \wedge b \wedge c$
4. $a \to \neg b \vee c$

Ejercicio 4. Estudia si las siguientes equivalencias son ciertas o no. Justifica la respuesta.

1. $a \to b \equiv \neg a \to \neg b$
2. $a \leftrightarrow b \equiv \neg a \leftrightarrow \neg b$.

3. $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$.
4. $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \wedge (b \to c)$.
5. $a \to (b \vee c) \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$.
6. $a \to (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to c$

Ejercicio 5. Demuestra que:

1. $\models (\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) \to \beta$ Modus ponens
2. $\models ((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$ Modus tollens
3. $\models (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$
4. $\models ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ Ley de Peirce
5. $\models (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ Ley de Clavius
6. $\models (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
$\models (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ Leyes de silogismo
7. $\models (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ Ley de conmutación de premisas
8. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.
9. $\models \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
$\models \alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ Leyes de Duns Suite

Ejercicio 6. Para las fórmulas:

1. $p \to (q \to r)$
2. $(\neg p \wedge \neg q) \to (\neg r \wedge s)$
3. $p \leftrightarrow q$
4. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
5. $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow r)$
6. $p \wedge q \wedge r$

Encuentra, si es posible, fórmulas equivalentes a ellas en las que se usen solamente las conectivas

a) $\{\neg, \wedge\}$

b) $\{\neg, \vee\}$

c) $\{\neg, \to\}$

d) $\{\vee, \wedge\}$

Ejercicio 7. Estudia si el siguiente conjunto de proposiciones es satisfacible o insatisfacible:

$$\Gamma = \{\gamma \to (\alpha \vee \beta), \beta \to (\gamma \to \alpha), \delta \wedge \neg(\gamma \to \alpha)\}$$

Ejercicio 8. Sean α, β, γ y δ cuatro fórmulas de un lenguaje proposicional, y supongamos que $\{\alpha, \beta, \gamma\} \models \delta$. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1. $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ es satisfacible
2. $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\delta$ es una contradicción.
3. $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \vee \delta$ es una tautología.
4. $((\alpha \vee \beta) \to \gamma) \to \delta$ es una tautología.
5. $\{\alpha, \gamma\} \vDash \neg\delta \to \neg\beta$.
6. $\{\alpha, \beta, \gamma, \neg\delta\}$ es insatisfacible.
7. $\{\alpha \wedge \gamma, \neg\delta \wedge \beta\}$ es insatisfacible.
8. $\{\alpha, \beta, \delta\} \vDash \gamma$.
9. $\{\alpha, \beta, \neg\delta\} \vDash \neg\gamma$.
10. $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \to \delta$ es una tautología.
11. $\{\neg\alpha, \neg\beta, \neg\gamma, \delta\}$ es satisfacible.
12. $\neg\delta \vDash \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma$.
13. $\{\alpha, \beta, \gamma\} \vDash \delta \wedge \beta$.

Ejercicio 9. Usa los distintos tipos de técnicas estudiadas (cálculo de interpretaciones en $\mathbb{Z}_2$, resolución, algoritmo de Davis-Putnam) para determinar si son o no tautologías las siguientes fórmulas:

1. $(q \to p \vee r) \to \big((p \to q) \to (p \to [(r \to q) \to r])\big)$
2. $(\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$
3. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
4. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
5. $(\beta \to \gamma) \to (\neg(\alpha \to \gamma) \to \neg(\alpha \to \beta))$
6. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$
7. $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
8. $\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$
9. $(\neg a \to \neg b) \to \neg(a \to b)$
10. $(p \to q) \to [(\neg p \to q) \to q]$

Ejercicio 10. Estudia si las siguientes afirmaciones son ciertas o no. Caso de no serlo, encuentra una asignación para las proposiciones atómicas que lo demuestre.

1. $\{a \to b,\ a \to \neg b\} \vDash \neg a$
2. $\{a \to b,\ a \vee b\} \vDash b$.
3. $\{a \to \neg b,\ a \wedge b\} \vDash c$.
4. $\{a \vee b,\ \neg a \vee \neg b\} \vDash a \leftrightarrow \neg b$.
5. $\{a \leftrightarrow \neg b,\ a \to c\} \vDash b \vee c$.

6. $\{(a \wedge b) \leftrightarrow c,\ \neg c\} \vDash \neg a \wedge \neg b$.
7. $\{\neg(a \wedge b \wedge c),\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\} \vDash a \rightarrow \neg b$.
8. $\{b \rightarrow (c \vee a),\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)\} \vDash b \leftrightarrow (c \vee d)$.
9. $\{(a \wedge b) \rightarrow c,\ c \rightarrow (a \vee d)\} \vDash b \rightarrow (\neg a \rightarrow c)$.
10. $\{(a \vee c) \rightarrow \neg a,\ c \rightarrow \neg a,\ b \rightarrow \neg a\} \vDash \neg a$.
11. $\{(a \wedge b) \rightarrow c,\ c \rightarrow d,\ b \wedge \neg d\} \vDash \neg a$.
12. $\{(a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow d),\ \neg a \rightarrow a,\ \neg c \rightarrow c\} \vDash b \vee d$.
13. $\{a \rightarrow (b \vee c),\ c \rightarrow d,\ \neg b \vee d\} \vDash \neg(a \wedge \neg d)$.
14. $\{(b \rightarrow a) \wedge b,\ c \rightarrow d,\ b \rightarrow c\} \vDash a \vee d$.
15. $\{(a \wedge b) \rightarrow c,\ (\neg a \wedge \neg b) \rightarrow d,\ a \leftrightarrow b\} \vDash c \vee d$.
16. $\{a \rightarrow (b \vee c),\ d \vee \neg c,\ b \vee d\} \vDash a \rightarrow d$.
17. $\{(\neg b \wedge \neg c) \rightarrow \neg a,\ a \rightarrow b,\ a \leftrightarrow c\} \vDash b \vee c$.
18. $\{a \rightarrow (a \rightarrow b),\ (b \vee c) \rightarrow a,\ c \rightarrow (a \vee b)\} \vDash b$.
19. $\{(a \wedge \neg b) \rightarrow \neg c,\ (\neg a \wedge b) \rightarrow d,\ \neg a \vee \neg b,\ e \rightarrow (a \wedge \neg d)\} \vDash \neg e$.
20. $\{c \rightarrow d,\ a \vee b,\ \neg(\neg a \rightarrow d),\ \neg a \rightarrow b\} \vDash b \wedge \neg c$.

Ejercicio 11 (Septiembre 2011)**.** Nos encontramos en la isla donde sus habitantes se dividen en dos grupos. Los que dicen siempre la verdad (veraces) y los que siempre mienten (mentirosos). Estamos con dos habitantes de dicha isla, Andrés y Begoña.

Andrés dice: Yo soy mentiroso si Begoña no lo es.

Begoña replica: Andrés es mentiroso si yo lo soy.

¿Qué conclusión sobre Andrés y Begoña podemos extraer de aquí?