ALEM

Relación de ejercicios del Tema 3

1. Exprese el número $(1021)_3$ en base 5.
2. Exprese el número 781 en base 2 y a continuación en base 8.
3. Si a, b y c son números enteros tales que $a|(b+c)$ y $a|b \cdot c$, demuestre que $a|(b^2+c^2)$. (Sugerencia: Relacione el número b^2+c^2 con los números $b+c$ y $b \cdot c$, y aplique propiedades de la divisibilidad.)
4. Sea $\alpha = 769824$. Factorice α como producto de potencias de primos distintos. ¿Cuántos números enteros positivos dividen a α?
5. El número de divisores positivos del número $5^2 \cdot 6^5 \cdot 8^6 \cdot 9^4$ es:
   a) $24 \cdot 14 \cdot 3$
   b) $(5^2-5) \cdot (6^5-6^4) \cdot (8^6-8^5) \cdot (9^4-9^3)$
   c) $3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5$
   d) $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4$
6. ¿Cuál es el número natural más pequeño que tiene exactamente 28 divisores positivos?
7. Demuestre que el conjunto de los números primos es infinito.
8. Si un número entero $a > 1$ no es primo, demuestre que existe un número entero $b > 1$ tal que $b|a$ y $b \leq \sqrt{a}$.
9. Utilice el ejercicio anterior y la lista de los primeros números primos dada en los apuntes para estudiar cuáles de los números siguientes son primos: 1207, 2017, 2071.
10. Si $p_1, \ldots, p_n$ son números primos distintos, demuestre que $\sqrt{p_1 \cdots p_n}$ es un número irracional, es decir, pertenece a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Demuestre también que si p y q son dos números primos, entonces $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ también es irracional. Ponga un ejemplo de dos números primos distintos p y q tales que $\sqrt{p+q}$ es racional.
11. Resuelva cada una de las ecuaciones diofánticas siguientes:
$$x \cdot y + 2 = 0; \quad x \cdot y = 10; \quad x^2 \cdot y = 12;$$
$$xy - 5x + y = 18; \quad xy - 4y + 3x - 205 = 0; \quad 2xy - y + 6x - 56 = 0.$$
12. Demuestre que para cualquier entero $n \neq 0$, el número n^2+4 no es un cuadrado perfecto. (Sugerencia: Razone por reducción al absurdo.)
13. Sea $a = \pm \prod_{i=1}^n p_i^{a_i}$, $b = \pm \prod_{i=1}^n p_i^{b_i}$ y $c = \pm \prod_{i=1}^n p_i^{c_i}$ tres números enteros representados como producto de potencias de primos distintos, con $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ y $c_i \geq 0$. Justifique que $\mathrm{mcd}(a, b, c) = \mathrm{mcd}(\mathrm{mcd}(a, b), c)$.

14. Aplique el Algoritmo extendido de Euclides para calcular el máximo común divisor y unos coeficientes de Bézout para los números 1537 y -1711.

15. Dados $a = 841$ y $b = 1073$, calcule el mínimo común múltiplo de a y b.

16. Dos cuerdas miden 931 cm y 1001 cm, respectivamente. Si se desea cortarlas en trozos iguales, ¿cuál es la mayor longitud que puede tener cado trozo?

17. Sean a, b, c, d números enteros tales que $a = b \cdot c + d$. Pruebe que el conjunto de los números enteros que dividen a a y b es el mismo que el conjunto de los números enteros que dividen a b y d. Deduzca de lo anterior que $\operatorname{mcd}(a, b) = \operatorname{mcd}(b, d)$.

18. Si a y b son dos números enteros, justifique que a y b son primos relativos si, y sólo si, existen dos números enteros u y v tales que $a \cdot u + b \cdot v = 1$.

19. *a*) Demuestre que $\operatorname{mcd}(k \cdot a, k \cdot b) = |k| \cdot \operatorname{mcd}(a, b)$.
    b) Deduzca que si $\operatorname{mcd}(a, b) = g$, entonces $\operatorname{mcd}(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$.

20. Resuelva cada una de las ecuaciones diofánticas siguientes:

    a) $4x + 9y = 1$
    b) $4x + 9y = -5$
    c) $9x - 21y = 7$
    d) $4x + 10y - 3z = 1$
    e) $143x + 187y + 221z = 2$

21. ¿Para cuántos valores $c \in \mathbb{N}$ tales que $10 < c < 20$ tiene solución la ecuación diofántica $84x + 990y = c$?

    a) 2 b) 5 c) 7 d) 9

22. Determine el número de soluciones de la ecuación diofántica $7x+5y = 2014$ en el primer cuadrante.

23. Un hombre recibió un cheque bancario, pero al cobrarlo el cajero confundió el número de euros con el número de céntimos. Sin darse cuenta de ésto, el hombre gastó 68 céntimos y perplejo descubrió que tenía el doble de dinero que aparecía en el cheque. Determine la cantidad de dinero que aparecía en el cheque, si se sabe que era menor que 100 euros.

24. Si a, b, c son números enteros tales que a y b son primos relativos, y cada uno de ellos divide a c, demuestre que $a \cdot b$ también divide a c.

25. ¿Qué valores puede tomar $\operatorname{mcd}(n^2 - n + 1, n + 2)$ al variar n en $\mathbb{Z}$? ¿Y $\operatorname{mcd}(4n^3 + 7n^2 + 12n + 4, 4n^2 + 3n + 5)$?

26. Si a y b son primos relativos, demuestre $a + b$ y $a \cdot b$ también son primos relativos. (Sugerencia: Utilice la propiedad de los números primos que dice que si p es primo y $p|a \cdot b$, entonces $p|a$ ó $p|b$.)

27. Descomponga la fracción 126/299 como suma de dos fracciones cuyos denominadores sean 13 y 23.

28. Demuestre los apartados (1) y (2) de la Proposición 44 en los apuntes del Tema 3.

29. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones en congruencia:

 a) $45x \equiv 1 \mod 18$
 b) $45x \equiv 1 \mod 17$
 c) $45x \equiv -1 \mod 17$
 d) $45x \equiv 11 \mod 17$
 e) $35x \equiv 16 \mod 19$

30. Calcule todos los $n \in \mathbb{Z}$ para los cuales la ecuación diofántica $12x - 20y = 7 + 3n$ tiene solución.

31. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencia:

 a) $x \equiv 0 \mod 3,\ x \equiv 0 \mod 7$
 b) $3x \equiv 1 \mod 14,\ 5x \equiv -1 \mod 18$
 c) $5x \equiv 11 \mod 14,\ 8x \equiv 1 \mod 21$
 d) $3x \equiv 1 \mod 5,\ 7x \equiv 2 \mod 9,\ 2x \equiv 5 \mod 11$
 e) $x \equiv 4 \mod 5,\ x \equiv 8 \mod 9,\ x \equiv 10 \mod 11$

32. Sea el sistema de congruencias

$$\begin{cases} 15x \equiv 7 \mod 16 \\ 10x \equiv 14 \mod 28 \end{cases}$$

El sistema dado:

 a) No tiene solución.
 b) Tiene solución, pero ninguna entre 0 y 100.
 c) Tiene exactamente una solución entre 0 y 100.
 d) Tiene exactamente dos soluciones entre 0 y 100.

33. Demuestre las siguientes propiedades sobre divisibilidad:

 a) $11|(10a + b) \Leftrightarrow 11|(a - b)$.
 b) $19|(10a + b) \Leftrightarrow 19|(a + 2b)$.

(Sugerencia: Haga un planteamiento usando congruencias.)

34. Sea $a = 15^{1357}$. La congruencia $ax \equiv 3 \mod 13$ tiene como solución a:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8

35. ¿Cuántos números enteros x verifican que $-10^4 \leq x \leq 10^4$, al dividir x entre 17 el resto es 3 y al dividir $2x$ entre 31 el resto es 15?

36. Un comerciante compró 5 camiones de naranjas, todos ellos con la misma cantidad. Al embasar el primero en sacos de 49 Kg, sobraron 26 Kg, al embasar el segundo en sacos de 27 Kg, faltaron 3 Kg para completar el último saco, al embasar el tercero en sacos de 25 Kg, sobraron 10 Kg, al embasar el cuarto en sacos de 11 Kg, sobraron 2 Kg, y al embasar el quinto en sacos de 7 Kg, sobraron 5 Kg. ¿Cuál es la menor cantidad de Kg que podía tener cada camión, sabiendo que había más de 6000 Kg en cada uno?

37. Se dispone de tres contadores C_1, C_2 y C_3, que se incrementan al mismo tiempo y cuyos rangos de valores van desde 0 hasta 9, desde 0 hasta 14 y desde 0 hasta 83, respectivamente. Si en un instante de tiempo t_0 marcan 7, 7 y 79, respectivamente, ¿existe algún instante de tiempo posterior a t_0 en el que los tres contadores marquen 0 a la vez? En caso afirmativo, obtenga la expresión de todos los instantes de tiempo en los que los tres contadores marquen 0.

38. Para cualquier número entero x, razone que ni x^2+1 ni x^3+2 es múltiplo de 7.

39. ¿Para cuántos números enteros $1 \leq a \leq 1000$ es a^3+2a+1 múltiplo de 11?

40. Calcule el inverso de 8 en $\mathbb{Z}_{57}$. ¿Cuántos elementos de $\mathbb{Z}_{57}$ tienen inverso?

41. ¿Tiene el elemento 39 inverso en $\mathbb{Z}_{114048}$? ¿Cuántos elementos de $\mathbb{Z}_{114048}$ tienen inverso?

42. Calcule el resto de dividir:

    a) 2^{2013} entre 9.
    b) 47^{2013} entre 9.
    c) 152^{2013} entre 17.
    d) $(11^{23}+23^{11})^{2014}$ entre 16.

43. Compruebe que el número $111^{333}+333^{111}$ es múltiplo de 7.

44. Calcule el dígito de las unidades y el dígito de las decenas del número 7^{9999}.

45. Demuestre que $\varphi(n^2) > \varphi(n)^2$ para cualquier $n \geq 2$. (Sugerencia: Recuerde las reglas para calcular la función φ.)

46. Calcule el resto de dividir $100^{103^{109}}$ entre 17.

47. Sea p un número primo. Razone que para cualquier número natural k tal que $0 < k < p$, el coeficiente binomial $\binom{p}{k}$ es múltiplo de p. Deduzca de lo anterior que para cualesquiera dos números enteros a y b se verifica $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$, es decir, $(a+b)^p = a^p + b^p$ en $\mathbb{Z}_p$.

48. ¿Existe alguna base b en la cual $(11001)_b$ es múltiplo de 19?

49. Demuestre que para cualquier $b \geq 3$, los números $(b-1)^2$ y $2(b-1)$ se escriben en base b como $(uv)_b$ y $(vu)_b$, respectivamente.

50. Sea $a = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}$ un entero positivo escrito en base 10.

    a) Pruebe que $a \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \mod 9$ y deduzca de aquí la regla del 9 para calcular el resto de la división de un entero entre 9.

b) Pruebe que $a \equiv a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n \mod 11$ y deduzca de aquí la regla del 11 para calcular el resto de la división de un entero entre 11.

51. ¿Es posible permutar los dígitos del número 12345678 de modo que el número resultante sea primo?

52. En $\mathbb{Z}_5[x]$ calcule el resto y el cociente de dividir el polinomio $x^5 + 2x^3 + 4x^2 + x + 1$ entre $3x^2 + x + 2$.

53. Calcule un máximo común divisor para los polinomios $f(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x + 3$ y $g(x) = x^4 + 2x^2 - x + 2$ en $\mathbb{Q}[x]$. ¿Qué grado tiene cualquier mínimo común múltiplo de $f(x)$ y $g(x)$?

54. En $\mathbb{Z}_{11}[x]$ calcule el resto de dividir el polinomio $x^{40} + 2x^{22} + x^{10} + x^6 + 4x^2 + x + 1$ entre:

    a) $x + 10$ b) $4x + 1$ c) $x^2 + 1$ d) $5x^7$

55. Sea $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$. Entonces $p(x)$ es igual a:

    a) $(x+2)^2 \cdot (x+3) \cdot (x+4)^2$
    b) $(x+2)^2 \cdot (x+3)^2 \cdot (x+4)$
    c) $(x+2) \cdot (x+3)^2 \cdot (x+4)^2$
    d) $(x+2)^3 \cdot (x+3) \cdot (x+4)$

56. Sea α un número complejo no nulo que verifica $\frac{3}{\alpha} + \alpha + 1 = 0$ y sea el polinomio $f(x) = 3x^{10} - x^9 + 4x^5 + x^2 + x - 1 \in \mathbb{R}[x]$. Calcule el valor numérico exacto de $f(\alpha)$.

57. Dado un número natural $n \geq 1$, ¿cuál de los siguientes polinomios de $\mathbb{R}[x]$ es múltiplo de $x^2 - 1$?

    a) $x^{2n} - 2x^n + 1$ b) $x^{2n} + 1$ c) $x^{2n} - x^n - 1$ d) $x^{4n} + x^{2n} - 2$

58. Sean $\mathbb{K}$ y $\mathbb{K}'$ dos cuerpos tales que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}'$ una raíz de $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Demuestre que α es una raíz múltiple de $f(x)$ si, y sólo si, α también es raíz del polinomio $f'(x)$, denominado la derivada formal de $f(x)$.

59. Compruebe que todas las raíces del polinomio $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ son simples y deduzca que

    $$x(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) = x^p - x.$$

    (Sugerencia: Utilice el Teorema de Euler-Fermat y el ejercicio anterior.)

60. Demuestre que el polinomio $(x-1)^2$ divide al polinomio $x^{n+1} - n(x-1) - x$ en $\mathbb{Q}[x]$ para todo $n \geq 0$.

61. Obtenga todos los polinomios mónicos irreducibles de $\mathbb{Z}_3[x]$ con grado ≤ 3.

62. Factorice el polinomio $f(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ como producto de polinomios irreducibles.

63. Demuestre que el polinomio $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ no es irreducible en $\mathbb{K}[x]$, para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$.

64. Si p es un primo, ¿cuántos polinomios de grado 3 hay en $\mathbb{Z}_p[x]$? ¿Cuántos polinomios de grado 3 en $\mathbb{Z}_p[x]$ tienen a $\alpha = 2$ como raíz?

65. Factorice la expresión $a^5 - a^3b^2 - a^2b^3 + b^5$ como producto de expresiones más simples.

66. Calcule el polinomio de menor grado que hay que sumarle al polinomio $2x^6 + x + 1$ para que el polinomio resultante sea múltiplo de $3x^4 + x^3 + 1$ en $\mathbb{Z}_7[x]$.

67. Sea el anillo $R = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4+x^2+1)}$. ¿Cuántos elementos hay en R? ¿Es R un cuerpo? ¿Cuántos elementos de R tienen inverso para el producto?

68. Justifique que el anillo $A = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2+x+2)}$ es un cuerpo con respecto de las operaciones usuales y calcule el inverso de cada elemento no nulo de A.

69. En el cuerpo $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3+x+1)}$ el elemento $x^2 + x + 1$ es igual a:

    a) x^4 b) x^5 c) x^6 d) x^7

70. En el cuerpo finito $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^3+2)}$, obtenga una expresión lo más reducida posible para cada uno de los elementos siguientes:

    a) $[x^2 + x + 1]^2$ b) $[x]^{-1}$ c) $[x]^{20}$ d) $[(x^2 + 3)^{-1} + 1]^{10}$

71. Resuelva la ecuación $(x^2 + 3) \cdot \alpha(x) = x$ en el anillo $A = \frac{\mathbb{Z}_5[x]}{(x^3+x+2)}$.