RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 1.

JUAN MANUEL URBANO BLANCO

1. Dados los conjuntos $A = \{2,3\}$, $B = \{1,2,4,5\}$ y $C = \{2,5,6\}$, calcule los siguientes conjuntos:

   $$(A\cup B)\cap C,\ \ A\cup(B\cap C),\ \ A\cap B\cap C,\ \ B-(A\cup C),\ \ \overline{B}\cap\overline{C},\ \ \mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(C),\ \ \mathcal{P}(B-C).$$

2. Utilice las leyes del álgebra de conjuntos para simplificar las siguientes expresiones sobre conjuntos:
   a) $(A\cup\overline{B})\cap(C\cup A\cup\overline{B})$
   b) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$
   c) $\big((A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\big)\cup\big((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\big)$
   d) $(\overline{A}\cap\overline{B})\cap\Big(\big((A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\big)\cup\big((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\big)\Big)$

3. Sean los conjuntos $A,B\subseteq X$. El conjunto $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$ es igual a:

   a) $\varnothing$ b) $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ c) $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ d) $(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$

4. Si $A,B\subseteq X$ son conjuntos, entonces $A-(A-B)$ es igual a:

   a) A b) B c) $A\cap B$ d) $A\cup B$

5. Dados los conjuntos $A,B,C\subseteq X$, compruebe las siguientes identidades:
   a) $X=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$
   b) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup C)=(A\cap C)\cup(\overline{A}\cap B)$
   c) $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$

6. Sean los conjuntos $A,B\subseteq X$. Pruebe que cada una de las afirmaciones siguientes equivale a cada una de las restantes:
   a) $A\subseteq B$.
   b) $\overline{B}\subseteq\overline{A}$.
   c) $A\cap B=A$.
   d) $A\cup B=B$.
   e) $A-B=\varnothing$.

7. Si tenemos los conjuntos $A,B\subseteq X$, compruebe que $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$. El conjunto $(A-B)\cup(B-A)$ se denomina la *diferencia simétrica* de los conjuntos A y B, y se denota por $A\bigtriangleup B$ así como por $A\oplus B$. Compruebe las siguientes propiedades, donde $A,B,C\subseteq X$:
   a) $A\oplus A=\varnothing$.
   b) $A\oplus\varnothing=A$.

   c) $A \oplus B = B \oplus A$.
   d) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
   e) $A \oplus B = A \oplus C \;\Rightarrow\; B = C$.
   f) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

8. Estudie la veracidad ó faseldad de las siguientes afirmaciones sobre conjuntos:
   a) $A \times \varnothing = \varnothing$.
   b) Si $A \times B = \varnothing$, entonces $A = \varnothing$ ó $B = \varnothing$.
   c) Si $A_1 \times A_2 = B_1 \times B_2$, entonces $A_1 = B_1$ y $A_2 = B_2$.

9. Dados los conjuntos $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$, demuestre las siguientes propiedades:
   a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
   b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
   c) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$
   d) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$. Proporcione un ejemplo en el que la inclusión anterior sea estricta.
   e) $(A \times C) \setminus (B \times D) = (A \times (C \setminus D)) \cup ((A \setminus B) \times C)$

10. Demuestre las siguientes propiedades sobre conjuntos:
   a) Si $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C$, entonces $B \subseteq C$.
   b) $A \cup B = B \cap C$ si y sólo si $A \subseteq B \subseteq C$.

11. Indique cuales de las siguientes afirmaciones sobre conjuntos son verdaderas:
   a) Si $A \subseteq B$ y $B \not\subseteq C$, entonces $A \not\subseteq C$.
   b) Si $a \in A$ y $A \in B$, entonces $\{a\} \in B$.
   c) Si $a \in A$ y $A \subseteq B$, entonces $\{\{a\}\} \subseteq \{B\}$.
   d) Si $a \in A$ y $A \subseteq B$, entonces $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$.
   e) Si $A \in B$ y $A \subseteq B$, entonces $A = \phi$.
   f) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   g) Si $A \times B = C \times D$, entonces $A = C$ y $B = D$.
   h) Si $a \in A$, entonces $\{a\} \subseteq \{A\}$.
   i) Si $A = \{a, b, c, \{a, c, d, \{a\}\}\}$, entonces $\{\{a\}\} \in A$ y $\{a, b\} \subseteq A$.

12. Si $X = \{\{\varnothing\}\}$, entonces $\mathcal{P}(X)$ es igual a

   a) $\{\{\varnothing\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\}$ b) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ c) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ d) $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

13. Construya todas las particiones del conjunto $X = \{1, 2, 3\}$.

14. Consideramos las aplicaciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \frac{x}{a}, \;\; g(x) = ax^2,$$
   con $a \neq 0$. Obtenga expresiones lo más simples posibles para las aplicaciones siguientes:
$$f \circ f, \;\; f \circ f \circ f, \;\; g \circ g, \;\; g \circ g \circ g.$$
   Si n es un número entero positivo, obtenga una expresión para la aplicación que resulta de componer f n veces consigo misma. A continuación haga el mismo cálculo para g.

15. Para las aplicaciones $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$, $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\sqrt{x},\;\; g(x)=\frac{x}{4},\;\; h(x)=4x-8,$$

la aplicación $h\circ g\circ f(x)$ es igual a:

(A) $\sqrt{x-2}$ (B) $\sqrt{x-8}$ (C) $2\sqrt{x}-8$ (D) $\sqrt{x}-8$ (E) $\sqrt{x}-2$

16. Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos aplicaciones tales que $(g\circ f)(x)=16x^2-1$ y $f(x)=2x+3$. Entonces $g(x)$ es igual a

a) $4x^2-24x+35$ b) $8x^2-2$ c) $64x^2+192x+143$ d) $32x^2+1$

17. Sean dos aplicaciones $f:X\to Y$ y $g:Y\to Z$. Demuestre las siguientes propiedades:
a) Si f y g son inyectivas, entonces $g\circ f$ es inyectiva.
b) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g\circ f$ es sobreyectiva.
c) Si f y g son biyectivas, entonces $g\circ f$ es biyectiva.

18. Supongamos que para una aplicación $f:X\to Y$, existen dos aplicaciones $g:Y\to X$ y $h:Y\to X$ tales que $g\circ f=1_X$ y $f\circ h=1_Y$. Demuestre que $g=h$. Como consecuencia para una aplicación $f:X\to Y$ puede existir a lo sumo una aplicación $g:Y\to X$ tal que $g\circ f=1_X$ y $f\circ g=1_Y$. Cuando ello ocurre, se dice que la aplicación g es la inversa de f y se escribe $g=f^{-1}$.

19. Si $f:X\to Y, g:Y\to Z$ son aplicaciones biyectivas, demuestre que

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

20. Para cada una de las siguientes aplicaciones estudie si es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva, y dé su aplicación inversa cuando ésta exista:

a)
$$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=2x$$

b)
$$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$$
$$f(x)=\tfrac{2x+1}{3}-\tfrac{1}{2}$$

c)
$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$$
$$f(x)=x^2+2x+1.$$

d)
$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$f(n)=n+1$$

e)
$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$f(n)=n+1$$

f)
$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$f(n)=n(-1)^n$$

g)
$$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$f(x,y)=2x+3y$$

h)
$$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$
$$f(x,y)=(x+y,xy)$$

i)
$$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$
$$f(x,y)=(2x+y,x+y)$$

j)
$$f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$
$$f(x,y)=(x+y,x-y)$$

21. Obtenga la imagen para las aplicaciones de los apartados (a)-(g) en el ejercicio anterior.
22. Dada la aplicación $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ definida por $f(n)=\frac{n}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces:
    a) f es sobreyectiva y no es inyectiva.
    b) f es inyectiva y no es sobreyectiva.
    c) f es biyectiva.
    d) f no es inyectiva ni sobreyectiva.
23. La aplicación $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definida por $f(n)=n+(-1)^n$,
    a) no es inyectiva ni sobreyectiva,
    b) es biyectiva,
    c) es inyectiva, pero no sobreyectiva,
    d) es sobreyectiva, pero no inyectiva.
24. La aplicación $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ definida por $f(x,y)=(x-1,x+y+1)$
    a) es inyectiva pero no es sobreyectiva.
    b) es sobreyectiva pero no es inyectiva.
    c) es biyectiva.
    d) no es inyectiva ni sobreyectiva.
25. Sobre una aplicación $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forma $f(x)=ax+b$ se sabe que $(f\circ f)(x)=4x+2$. Entonces $f^{-1}(x)$ puede ser igual a:

    a) $2x+\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ d) $\frac{-1}{2}x+\frac{1}{8}$
26. *a*) Dado un conjunto $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, defina una aplicación biyectiva de $\mathcal{P}(X)$ en el conjunto $A=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$.
    b) Generalice el apartado anterior para el conjunto $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.
    c) Utilice el apartado (b) para deducir que $|\mathcal{P}(X)|=2^n$.

27. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ dos aplicaciones tales que $g \circ f = 1_X$. Justifique que f es inyectiva y g es sobreyectiva.

28. Defina una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

29. Consideramos la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por
$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{si } n \geq 1000 \\ f(f(n+6)) & \text{si } n < 1000 \end{cases}$$
Calcule el valor exacto de $f(1)$.

30. Si $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son dos aplicaciones, demuestre las siguientes propiedades:
   a) Si $\psi \circ \varphi$ es inyectiva, entonces φ es inyectiva.
   b) Si $\psi \circ \varphi$ es inyectiva y φ sobreyectiva, entonces ψ es inyectiva.
   c) Si $\psi \circ \varphi$ es sobreyectiva, entonces ψ es sobreyectiva.
   d) Si $\psi \circ \varphi$ es sobreyectiva y ψ es inyectiva, entonces φ es sobreyectiva.

31. Dada una aplicación $f : X \to Y$, siempre podemos definir dos nuevas aplicaciones que presentamos a continuación.
   - La aplicación imagen directa, $f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, la cual viene dada por: Si $A \in \mathcal{P}(X)$ (es decir, $A \subseteq X$), entonces
   $$f_*(A) = \{f(a) \in Y \mid a \in A\}.$$
   Obsérvese que $\mathrm{Im}(f) = f_*(X)$.
   - La aplicación imagen inversa, $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, la cual viene dada por: Si $B \subseteq Y$, se define
   $$f^*(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

   Si $X = \{a,b,c,d\}, Y = \{1,2,3\}$ y consideramos la aplicación $f : X \to Y$ definida por
   $$f(a) = 2,\ f(b) = 1,\ f(c) = 2,\ f(d) = 2,$$
   calcule $f_*(\{a,b\})$, $f_*(\{a,d\})$, $f_*(\varnothing)$, $f^*(\{2\})$, $f^*(\{3\})$, $f^*(\{1,3\})$, $f^*(\varnothing)$.

32. Dados conjuntos $A_1, A_2 \subseteq X$ y $B_1, B_2 \subseteq Y$, así como una aplicación $f : X \to Y$, demuestre las siguientes propiedades:
   a) $f_*(A_1 \cup A_2) = f_*(A_1) \cup f_*(A_2)$
   b) $f_*(A_1 \cap A_2) \subseteq f_*(A_1) \cap f_*(A_2)$
   c) $A_1 \subseteq f^*(f_*(A_1))$, y se tiene la igualdad si f es inyectiva.
   d) $f^*(B_1 \cup B_2) = f^*(B_1) \cup f^*(B_2)$
   e) $f^*(B_1 \cap B_2) = f^*(B_1) \cap f^*(B_2)$
   f) $f^*(B_2 \setminus B_1) = f^*(B_2) \setminus f^*(B_1)$
   g) $f^*(\overline{B_1}) = \overline{f^*(B_1)}$
   h) $f_*(f^*(B_1)) \subseteq B_1$, y se da la igualdad si f es sobreyectiva.
   i) Si f es inyectiva entonces f_* es inyectiva y f^* es sobreyectiva.
   j) Si f es sobreyectiva entonces f_* es sobreyectiva y f^* es inyectiva.

33. Sea X el conjunto de todas las rectas del plano. Estudie cuáles de las siguientes relaciones binarias definidas sobre X son de equivalencia:

a) $r_1\ R_1\ r_2$ si y solo si $r_1 \| r_2$, es decir, r_1 y r_2 son paralelas.
b) $r_1\ R_2\ r_2$ si y solo si $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$.

34. Para cada una de las relaciones binarias siguientes, estudie si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo obtenga una descripción del conjunto cociente:
a) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{R}$: $a\ \mathcal{R}\ b \Longleftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$.
b) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{Z}$: $a\ \mathcal{R}\ b \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, tal que $a-b = k\cdot m$, siendo m un número entero fijo.
c) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{N}$: $a\ \mathcal{R}\ b \Longleftrightarrow E(\sqrt{a}) = E(\sqrt{b})$, con $E(x) =$ parte entera de x.
d) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{R}$: $a\ \mathcal{R}\ b \Longleftrightarrow a\cdot b \geq 0$.
e) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \frac{a^2}{a-1} = \frac{b^2}{b-1}.$$

f) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d) \Longleftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$.
g) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d) \Longleftrightarrow a\cdot b = c\cdot d$.
h) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{Q}$: $a\ \mathcal{R}\ b \Longleftrightarrow f(a) = f(b)$, siendo $f(x) = -3x^2+5x-8$.
i) $\mathcal{R}$ definida sobre $\mathbb{R}$: $a\ \mathcal{R}\ b \Leftrightarrow a^2-5a = b^2-5b$.

35. Dado el conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$ y el subconjunto $Y = \{1,2,3\}$, consideramos las relaciones de equivalencia siguientes definidas sobre $\mathcal{P}(X)$.
a) $A\,R\,B \ \Leftrightarrow\ A\cap Y = B\cap Y$
b) $A\,R\,B \ \Leftrightarrow\ A\cup Y = B\cup Y$
Describa el conjunto cociente para cada una de ellas.

36. Para un número real x denotamos por $|x|$ el valor absoluto de x, es decir,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Consideramos la siguiente relación de equivalencia R definida sobre el conjunto $X = \{0,1,2,3,\ldots,98,99,100\}$:

$$a\,R\,b \ \Leftrightarrow\ |a-8| = |b-8|.$$

Entonces el cardinal del conjunto cociente X/R es igual a

a) 13 b) 56 c) 93 d) 85

37. Para cada una de las relaciones binarias siguientes definidas sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, estudie si es de orden, y en caso afirmativo estudie si es un orden total:
a) $(a,b)\ R\ (c,d) \iff a2^b \leq c2^d$.
b) $(a,b)\ R\ (c,d) \iff a2^d \leq c2^b$.
c) $(a,b)\ R\ (c,d) \iff (2a+1)2^b \leq (2c+1)2^d$.
d) $(a,b)\ R\ (c,d) \iff (3a+1)2^b \leq (3c+1)2^d$.
e) $(a,b)\ R\ (c,d) \iff (2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$.
f) $(a,b)\ R\ (c,d) \iff (3a+1)(3b+2) \leq (3c+1)(3d+2)$.

38. Construya el diagrama de Hasse del conjunto siguiente ordenado por inclusión:

$$X = \Big\{\{1\},\{1,4\},\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5,6\}\Big\}.$$

39. Construya el diagrama de Hasse del subconjunto siguiente de $\mathbb{R}^2$ ordenado por el orden producto cartesiano:

$$X = \Big\{(-1,-2),(-1/2,0),(0,1),(2,1/2),(3,2),(4,5)\Big\}.$$

40. Calcule los elementos distinguidos de cada uno de los subconjuntos siguientes de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con el orden producto cartesiano:
    a) $\{(-2,-1),(1,2),(4,3)\}$.
    b) $\{(-1,2),(0,1),(1,0)\}$.
    c) $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$.
    d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=9\}$.

41. Calcule los elementos distinguidos de cada uno de los subconjuntos siguientes de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con el orden lexicográfico a izquierda:
    a) $\{(-2,-1),(1,2),(4,3)\}$.
    b) $\{(-1,2),(0,1),(1,0)\}$.
    c) $\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$.
    d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=9\}$.

42. Sea X un conjunto no vacío y $f : X \to \mathbb{N}$ una aplicación. Definimos sobre X la siguiente relación binaria: $x_1\ R\ x_2 \iff f(x_1) \le f(x_2)$. Dar un ejemplo que ponga de manifiesto que R en general no es una relación de orden sobre el conjunto X. ¿Qué propiedad ha de verificar la aplicación f para que R sea una relación de orden sobre X?

43. Un conjunto ordenado $(A,\le)$ se dice que está bien ordenado si todo subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo. En tal caso, se dice que la relación de orden "$\le$" es un buen orden sobre A. Estudie cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son bien ordenados.
    a) $\{1,4,18,32,49\}$ con el orden usual de $\mathbb{N}$.
    b) $(\mathbb{N},\le)$.
    c) $(\mathbb{Z},\le)$.
    d) $[0,1]$ con el orden usual de $\mathbb{R}$.
    e) $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}),\subseteq)$.
    f) $(\{\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,3,5\}\},\subseteq)$.