TEMA 3

Lenguajes de primer orden (básica)

Ejercicio 1. *Para las siguientes fórmulas, determina qué variables son libres y cuáles son ligadas*

1. $\forall z(R(x,z) \to S(y,z))$
2. $\exists x R(x,y)$
3. $\exists x R(y,x)$
4. $\exists z R(y,x)$
5. $\exists x(R(x,y) \wedge S(x,y))$
6. $\exists x R(x,y) \wedge \forall y S(x,y)$
7. $\exists x(R(x,y) \wedge \forall y S(x,y))$
8. $\exists x(\forall y R(x,y) \wedge S(x,y))$
9. $\exists z(R(x,z) \vee P(y))$
10. $\forall x(P(x) \to R(x,y))$
11. $\forall x((P(x) \wedge Q(x)) \to \neg R(x,y))$
12. $\exists x(P(x) \wedge S(x,y))$
13. $\exists x(\exists y Q(x) \vee R(x,y))$
14. $\forall x(\exists y R(x,y) \to R(x,z))$
15. $\forall x(R(x,z) \to \exists y R(x,y))$
16. $\forall x(\forall z R(x,z) \to S(x,z))$
17. $((P(x) \vee Q(y)) \wedge \forall x \forall y R(x,y))$

Ejercicio 2. *Sea el lenguaje de primer orden con:*
- *Símbolos de constante:* a, b, c.
- *Símbolos de variable:* x, y, z.
- *Símbolos de relación:* H^1, M^1, P^2, A^2, Hr^2.

Consideramos la estructura cuyo universo es el conjunto formado por todos los seres humanos, e interpretamos cada uno de los símbolos como sigue:

- $a =$*Antonio,* $b =$*Begoña,* $c =$*Carmen.*
- $H(x):$ x *es hombre.*
- $M(x):$ x *es mujer.*
- $P(x,y):$ x *es progenitor de* y.
- $A(x,y):$ x *es antepasado de* y.
- $Hr(x,y):$ x *es hermano de* y.

Expresa con este lenguaje los siguiente enunciados:

1. *Begoña es la madre de Carmen*
2. *Begoña es tia de Antonio*
3. *Antonio es abuelo de Begoña*
4. *Begoña es nieta de Antonio*
5. *Todo el mundo tiene padre.*
6. *Todo el mundo tiene dos progenitores.*
7. *Nadie es progenitor de sí mismo.*
8. *Hay gente que no tiene hermanos.*
9. *Los antepasados de Begoña son antepasados de Carmen*
10. *Hay quien tiene hijos y quien no*
11. *Dos personas son hermanas si, y sólo si, tienen los mismos progenitores*
12. *Begoña es hermana de un hijo de Antonio*
13. *Un progenitor de un antepasado es un antepasado*
14. *Los padres son antepasados*
15. *Nadie es progenitor de sus hermanos*
16. *Toda persona tiene una única madre*
17. *Begoña es abuela materna de Carmen*
18. *Carmen es bisabuela de Antonio*
19. *Todos tenemos abuelos*
20. *Todos tenemos bisabuelos*
21. *Algunos antepasados de Begoña no son antepasados de Carmen*
22. *Begoña tiene al menos dos hermanos*
23. *Begoña tiene exactamente dos hermanos*

Añadimos al lenguaje los siguientes elementos:
- Símbolos de función: p^1, m^1
- Símbolos de relación: Eq^2.
que interpretamos como sigue:

- $p(x)$: *El padre de* x.
- $m(x)$: *La madre de* x.
- $Eq(x, y)$: $x = y$.

Expresa ahora, los enunciados 1, 2, 3, 4, 6, 14 *y* 16 *con este lenguaje, utilizando alguno de los nuevos símbolos introducidos.*

Ejercicio 3. *Consideramos el lenguaje cuyos símbolos de constante son* c *y* d*, sus símbolos de variable son* x, y, z*, y sus símbolos de predicado son* P^1, Q^1, E^2, R^2, S^2. *Sea la estructura dada por:*

- *El universo es* $\mathbb{Z}_4$.
- $c = 0$ *y* $d = 1$.
- $P(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 = 0 \\ 0 & \text{si } x^2 \neq 0 \end{cases}$

- $Q(x) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 = 2 \\ 0 & si\ x^2 \neq 2 \end{cases}$
- $E(x, y) \equiv x = y$
- $R = \{(0, 1), (0, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 2), (3, 0)\}$
- $S = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 3), (0, 0)\}$

Estudia cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas para esta estructura:

1. $P(c)$
2. $\neg P(d)$
3. $P(c) \wedge P(d)$.
4. $P(c) \to \neg Q(d)$
5. $\exists x Q(x)$
6. $\neg(\exists x Q(x))$
7. $\exists x \neg Q(x)$
8. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
9. $\forall x Q(x)$
10. $\forall x(P(x) \to Q(x))$
11. $\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$
12. $\forall x(Q(x) \to \exists y(P(x) \vee Q(y)))$
13. $\forall x R(c, x)$
14. $\forall x S(c, x)$
15. $\forall x(R(c, x) \to S(c, x))$
16. $\exists y \forall x(R(c, x) \to S(c, x))$
17. $\forall x \forall y(R(x, y) \to S(x, y))$
18. $\forall x \forall y(R(x, y) \to \exists z(S(x, z)))$
19. $\forall x(P(x) \to \exists y(R(x, y)))$
20. $\forall x(P(x) \to \exists y(S(x, y) \wedge R(y, x)))$
21. $\forall x \exists y R(x, y)$
22. $\forall x \exists y S(x, y)$
23. $\exists y \forall x R(x, y)$
24. $\exists y \forall x S(x, y)$
25. $\exists y \forall x R(y, x)$
26. $\forall x \forall y \forall z((S(x, y) \wedge S(y, z)) \to R(x, z))$
27. $\forall x \forall y(R(x, y) \to \neg R(y, x))$
28. $\forall x \forall y(\neg S(x, y) \to \neg S(x, y))$
29. $\forall x \forall y(\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y)) \to R(x, y))$
30. $\forall x \forall y(\exists z(R(x, z) \wedge S(z, y)) \to R(x, y))$

31. $\forall x \forall y(\exists z(S(x,z) \wedge R(z,y)) \rightarrow R(x,y))$

32. $\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \rightarrow S(x,y))$

33. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(y,x))$

34. $\forall x(E(x,c) \rightarrow \exists y R(y,x))$

35. $\forall x(\exists y R(y,x) \rightarrow P(x))$

36. $\forall x(E(x,d) \leftrightarrow R(c,x))$

Ejercicio 4. *Determina el carácter (satisfacible y refutable, universalmente válida o contradicción) de las siguientes fórmulas.:*

1. $\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$

2. $(\forall x \exists y(P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \rightarrow (\exists x \exists y(P(x,y) \rightarrow P(y,x)))$

3. $\forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$

4. $\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$

5. $\exists x \forall y R(x,y) \rightarrow \forall y \exists x R(x,y)$

6. $\forall x \exists y(P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$

Ejercicio 5. *Dadas las fórmulas:*

a) $\forall x P(f(x)) \rightarrow \neg Q(b, f(y))$

b) $\neg \exists x \neg(Q(x,x) \vee (Q(g(x,a),y) \rightarrow P(x)))$

c) $\forall x \exists y(P(x) \rightarrow \neg Q(x, f(y))$

d) $P(a) \leftrightarrow \forall x(P(x) \vee \exists y(Q(y,b) \rightarrow Q(x,x))$

e) $\exists x Q(x,a) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q(x,b))$

Y las estructuras y valoraciones:

1)
- $D = \mathbb{Z}$.
- $a = 1$, $b = 2$.
- $f(x) = 2x - 1$, $g(x,y) = x - y$.
- $P(x) \equiv x$ *es impar*, $Q(x,y) \equiv x \geq 2y$.

$v(x) = -1$, $v(y) = 2$.

2)
- $D = \mathbb{Z}_5$.
- $a = 3$, $b = 1$.
- $f(x) = x^2$, $g(x,y) = x + 2y + 1$.
- $P = \{0, 2, 4\}$, $Q(x,y) \equiv x = y$.

$v(x) = 2$, $v(y) = 3$.

3)
- $D = M_2(\mathbb{Z})$.
- $a = Id$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $f(A) = A^2$, $g(A,B) = A \cdot B$.
- $P(A) \equiv A = Id$ $Q(A,B) \equiv A = B$.

$v(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4)
- $D = \mathbb{N}$.
- $a = 0$, $b = 5$.
- $f(x) = 3x + 2$, $g(x,y) = x + y$.
- $P(x) \equiv x$ *es primo*, $Q(x,y) \equiv x \geq y$.

$v(x) = 2$, $v(y) = 0$.

Interpreta cada una de las fórmulas en la estructura dada con la valoración correspondiente.

	a	b	c	d	e
1					
2					
3					
4					

Ejercicio 6. *Consideramos el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ definido por $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f^2, g^1\}$, $\mathcal{R} = \{P^2, Q^2\}$ y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ dada por:*

Dominio $D = \mathbb{Z}_{10}$.

Constantes $a = 4$.

Funciones $f(x, y) = x + y$, $g(x) = x^2$.

Predicados $P = \{(k, k) \colon k \in D\}$, $Q = \{(0, 0), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)\}$

Interpreta las fórmulas siguientes usando la valoración

$$v \colon \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{10}$$

$$x \mapsto 0, y \mapsto 4$$

1. $\forall x(P(g(x), a) \to Q(f(y, a), x))$
2. $\forall x \exists y \exists z P(x, f(g(y), g(z)))$

Ejercicio 7. *Consideremos el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ definido por $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{R} = \{P\}$ y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ dada por:*

Dominio $D = \mathbb{Z}_6$.

Constantes $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$.

Funciones $f = (x, y) = x + y$, $g(x, y) = x \cdot y$.

Predicados $P = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

1. *Describe todas las valoraciones v sobre el conjunto de variables $\{x, y\}$ en esta estructura para las que la siguiente fórmula se interpreta como verdadera:*

$$\neg P(g(x, f(b, b)), a) \to P(f(y, c), g(y, y))$$

2. *Interpreta la sentencia $\forall x \exists y P(g(y, c), x)$.*

Ejercicio 8. *Dado el lenguaje de primer orden con símbolos de constantes a, b, símbolos de función d, s, p y símbolos de predicado Pr, P, M, Eq, y la estructura siguiente:*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Constntes $a = 0$, $b = -1$.

Funciones $d(x) = 2x$, $s(x, y) = x + y$, $p(x, y) = x \cdot y$.

Predicados $Pr(x) \equiv x$ *es primo,* $P(x) \equiv x$ *es par,* $M(x, y) \equiv x < y$, $Eq(x, y) \equiv x = y$.

Escribe en este lenguaje los siguientes enunciados:

1. *El doble de cualquier número es par.*
2. *El único número primo par y positivo es el dos.*
3. *El cuadrado de un número es mayor que el propio número.*
4. *Si en una desigualdad multiplicamos ambos miembros por un número positivo se mantiene la desigualdad.*
5. *Si en una desigualdad multiplicamos ambos miembros por un número negativo, cambia la desigualdad.*
6. *La suma de dos números impares es par.*

7. *Si la suma de dos números es impar, entonces uno de ellos tiene que serlo.*

8. *El cubo de un número positivo es positivo.*

9. *Todo número positivo tiene raíz cuadrada.*

Ejercicio 9. *(Junio 2011)*
Consideramos un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ *con dos símbolos de función* f *y* g *(el primero 1-ario y el segundo binario) y con un símbolo de predicado binario. Sea* α *la fórmula*

$$\forall x \exists y \exists z P(x, g(f(y), f(z))).$$

Y consideramos la estructura $\mathcal{E}$*:*

Dominio $D = \mathbb{Z}_7$.

Funciones $f(x) = x^2$, $g(x, y) = x + y$.

Predicados $P(x, y) \equiv x = y$.

Calcula el valor de verdad de la fórmula α *en la estructura* $\mathcal{E}$.

Ejercicio 10. *(Septiembre 2015)*
Traduce a un lenguaje de primer orden con dominio $\mathbb{N}$ *la frase*
Todo número natural mayor que 1 tiene al menos dos divisores distintos
usando los símbolos de predicado P^2, E^2, Q^2 *con los significados*

$$\begin{array}{lcl} P(x,y) & \equiv & x > y; \\ E(x,y) & \equiv & x = y; \\ Q(x,y) & \equiv & x \textit{ es un divisor de } y. \end{array}$$

y el símbolo de constante a *con valor igual a 1.*