Colegio Salesiano "Ramón Izquierdo".

Avd. María Auxiliadora, nº 4 (06011). Badajoz. Tfno: 924230854 . Fax: 924251025. E-Mail: badajoz@salesianos-sevilla.com

Funciones simples	*Funciones compuestas*
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsen\,x + C = -\arccos x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'\,dx = arcsen\,u + C = -\arccos u + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\,x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$	$\int \frac{1}{1+u^2}\cdot u'\,dx = arctg\,u + C = -\operatorname{arccotg} u + C$

Métodos básicos de integración:

Integración por descomposición:

Consiste en expresar la función integrando como combinación lineal de otras funciones que sabemos integrar de manera inmediata

Integración por cambio de variable:

Consiste en identificar una parte del integrando con una nueva variable, con la finalidad de obtener una integral más sencilla. Cambiaremos x=g(t) entonces dx=g'(x)dt, o bien t=g(x) entonces dt= g'(x)dx, y sustituyendo en el integrando hasta obtener una función dependiente sólo de t. Luego resolvemos la nueva integral. Deshacemos el cambio de variable efectuado para expresar el resultado en función de x.

Integración por partes:

Este método es para integrar el producto de dos funciones. Tendremos la situación siguiente:

$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ o con la notación clásica $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Para calcular una integral por partes procederemos del siguiente modo:

- Identificamos en el integrando u y dv, y calculamos du y v.
- Aplicamos la expresión $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
- Resolvemos la nueva integral.

Integración para funciones racionales:

Veremos cómo integrar funciones del tipo P(x)/Q(x) en las que P(x) y Q(x) son polinomios. Nos limitaremos al caso en que el grado de P(x) sea menor que el grado de Q(x), ya que el caso contrario se reduce a este después de efectuar la división. Los pasos a seguir para calcular una integral de este tipo son los siguientes:

- Descomponemos Q(x) en factores
- Escribimos el integrando como suma de fracciones simples (cuyo denominador es un polinomio irreducible)
- Integramos cada una de las fracciones simples.

Avd. María Auxiliadora, nº 4 (06011). Badajoz. Tfno: 924230854 . Fax: 924251025. E-Mail: badajoz@salesianos-sevilla.com

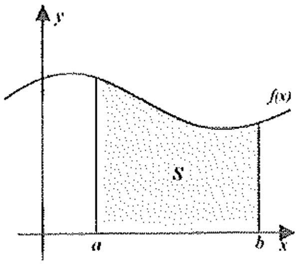
Distinguimos los distintos tipos según las raíces de Q(x):

- Las raíces de Q(x) son reales y simples: $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$, descomponemos el integrando de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$, de modo que cada integral simple es inmediata
$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = ALn|x-a|+C$$
- Las raíces de Q(x) son reales y múltiples: $Q(x)=(x-a)^n$, descomponemos en integrando de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$, de modo que cada integral simple es inmediata
$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}+C; k>1$$
- Las raíces de Q(x) son complejas y simples: Si el integrando es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, con Q(x) irreducible, el resultado es una suma de dos integrales inmediatas, una del tipo logaritmo neperieno y la otra del tipo arcotangente.

Avd. María Auxiliadora, nº 4 (06011). Badajoz. Tfno: 924230854 . Fax: 924251025. E-Mail: badajoz@salesianos-sevilla.com

Tema 14: Integral definida y aplicaciones.

Definición: Llamaremos ***integral definida*** de la función f entre los límites de integración a y b, al área que comprendida entre la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas x=a y x=b.



Propiedades:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $para\ a < c < b$
- Si f(x)<g(x) $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- Signo de la integral definida:
  - Si f(x)≥0 $\forall x \in [a,b]$ $entonces$ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ y $\int_a^b f(x)dx = A =$
    $= \text{Área del recinto limitado por la gráfica de } f, \text{el eje de abscisas y las rectas } x = a \text{ y } x = b$
  - Si f(x)≤0 $\forall x \in [a,b]$ $entonces$ $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ y $\int_a^b f(x)dx = -A =$
    $= -\text{Área del recinto limitado por la gráfica de } f, \text{el eje de abscisas y las rectas } x = a \text{ y } x = b$
  - Si f toma valores positivos y negativos en el intervalo [a,b], estudiaremos el signo de la función, calculando la integral como suma de integrales de los dos tipos anteriores.

Aplicaciones:

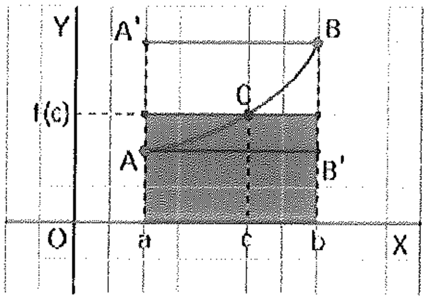
- **Área de figuras planas:**
  - Área limitada por la gráfica de un función continua, el eje de abscisas y las rectas x=a y x=b.
    A=$\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ si f tiene signo constante en [a,b]
    A=$\left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$ si f cambia de signo en [a,b]
  - Área limitada por la gráfica de dos funciones continuas y las rectas x=a y x=b.
    $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, siendo f(x)≥g(x)en [a,b]
- **Volumen de un sólido de revolución:** El volumen del sólido de revolución generado por una función continua f en un intervalo [a,b] al girar en torno al eje OX es:
  $V = \int_a^b \pi\, (f(x))^2 dx$

Avd. María Auxiliadora, nº 4 (06011). Badajoz. Tfno: 924230854. Fax: 924251025. E-Mail: badajoz@salesianos-sevilla.com

Teorema del valor medio del cálculo integral:

Si f es una función continua en un intervalo [a,b], existe c∈[a,b]tal que: $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

Interpretación geométrica: Si f(x)≥0 para todo x∈[a,b], $\int_a^b f(x)dx$ coincide con el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas x=a y x=b, que a su vez coincide con el área de un rectángulo de base igual a la longitud del intervalo, b-a, y altura f(c), siendo c un punto del intervalo [a,b].



Teorema fundamental de cálculo integral:

Si f es una función continua en [a,b] y F es la función definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt \;\; \forall x \in [a,b]$ entonces, f es derivable en [a,b] y F'(x)=f(x) $\forall x \in [a,b]$

Regla de Barrow: Si f es una función continua en [a,b]y F es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

También se denota por : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

Avd. María Auxiliadora, nº 4 (06011). Badajoz. Tfno: 924230854 . Fax: 924251025. E-Mail: badajoz@salesianos-sevilla.com

Ejercicios de Integrales:

1. $\int x^3\,dx$ 2. $\int \frac{x^3}{3}\,dx$ 3. $\int \frac{x^4}{6}\,dx$

4. $\int (x^3+3)\,dx$ 5. $\int (x^2+2x-\frac{1}{x})\,dx$ 6. $\int \frac{x^3-x^2+1}{x}\,dx$

7. $\int \frac{dx}{x^2}$ 8. $\int \frac{dx}{x^5}$ 9. $\int \frac{x^4-2x+3}{x^6}\,dx$

10. $\int \frac{4\sqrt[3]{x}}{3}\,dx$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ 12. $\int \left(\frac{8}{3}\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}\right)dx$

13. $\int \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x}+1)\,dx$ 14. $\int (x^2-2\,senx+8\,cosx)\,dx$ 15. $\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ 17. $\int \frac{(x+1)(x^2+3)}{x^3}\,dx$ 18. $\int (\sec^2 x+cosx+x)\,dx$

19. $\int tg^2 x\,dx$ 20. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ 21. $\int \frac{\cos^2 x-sen^2 x}{sen^2 x\,\cos^2 x}\,dx$

22. $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$ 23. $\int 5^x\,3^x\,dx$ 24. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{1+x^2}\right)dx$

25. $\int \frac{dx}{sen^2 x\,\cos^2 x}$ 26. $\int \frac{2-sen^3 x}{sen^2 x}\,dx$ 27. $\int \frac{dx}{3x+2}$

28. $\int \frac{dx}{3-x}$ 29. $\int \frac{x\,dx}{2+x^2}$ 30. $\int \frac{2\,dx}{(x+1)^3}$

31. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3}$ ~~32~~. $\int \frac{sen2x\,dx}{3+sen^2 x}$ 33. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$

34. $\int e^x\sqrt{2+e^x}\,dx$ 35. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ 36. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

37. $\int sen\,5x\,dx$ 38. $\int 6x\cos x^2\,dx$ ~~39~~. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+sen^2 x}$

40. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}$ 41. $\int x^4 e^{x^5}\,dx$ 42. $\int \frac{(4x^3)\,dx}{1+x^8}$

43. $\int 2^x\,dx$ 44. $\int \frac{dx}{x^2+9}$ 45. $\int e^{7x}\,dx$

46. $\int (e^x+e^{-x})\,dx$ 47. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ 48. $\int \frac{\cos x}{e^{sen\,x}}\,dx$

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ 50. $\int \frac{dx}{2x^2+9}$ 51. $\int (2x+5)^9\,dx$

52. $\int \frac{(arctgx)^3\,dx}{1+x^2}$ 53. $\int sen^3 x\cos x\,dx$ 54. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{sen^2 x}}\,dx$

55. $\int \frac{dx}{x\ln x}$ 56. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ 57. $\int (e^x+e^{-x})^2\,dx$

58. $\int \frac{dx}{(\arccos x)^3 \sqrt{1 - x^2}}$ 59. $\int \frac{1 + \ln x}{5 + x \ln x}\, dx$ 60. $\int \frac{tg^4 x + tgx}{\cos^2 x}\, dx$

61. $\int \sqrt{cosx}\ \ senx\ dx$ 62. $\int e^{e^x}\, e^x\, dx$ 63. $\int e^x \cos e^x\, dx$

64. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}$ 65. $\int \frac{sen^3 x}{\sqrt{cosx}}\, dx$ 66. $\int senlnx\, \frac{dx}{x}$

67. $\int \frac{x^2\, dx}{2 + x^6}$ 68. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}\, dx$ 69. $\int \frac{\sqrt{3 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

70. $\int \frac{\cos^3 x}{sen^3 x}\, dx$ 71. $\int x^3\, e^{-x^4}\, dx$ 72. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 2e^x + 1}\, dx$

73. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ 74. $\int x \sqrt{1 + x^2}\, dx$ 75. $\int \ln(\cos x)\, tgx\, dx$

76. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx$ 77. $\int \frac{e^{2\, tg x}}{\cos^2 x}\, dx$ 78. $\int \frac{senx}{\cos^2 x}\, dx$

79. $\int sen2 \frac{x}{\sqrt{2 - \cos 2x}}\, dx$ 80. $\int sen^3 x\ \ \cos^2 x\, dx$ 81. $\int \frac{\cos x}{e^{sen\, x}} dx$

INTEGRACIÓN POR PARTES

82. $\int x\ senx\ dx$ 83. $\int x \cos 3x\, dx$ 84. $\int x^2 \ln x\, dx$

85. $\int x^3\, e^x\, dx$ 86. $\int x^2\, e^{3x}\, dx$ 87. $\int x\, e^x\, dx$

88. $\int arcsenx\ dx$ 89. $\int x \sqrt{1 + 2x}\, dx$ 90. $\int x\ arctgx\ dx$

91. $\int x^2\ senx\ dx$ 92. $\int (\ln x)^2\, dx$ 93. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\, dx$

94. $\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$ 95. $\int arctgx\ dx$ 96. $\int x^2 \cos x\, dx$

97. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + x}}$ 98. $\int sen(\ln x)\, dx$ 99. $\int \frac{2x\, dx}{\cos^2 x}$

100. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ 101. $\int (x^2 - x)\, e^{-x}\, dx$ 102. $\int x^3\, e^{x^2}\, dx$

103. $\int \ln x\, dx$ 104. $\int e^x \cos x\, dx$ 105. $\int e^x sen\, x\, dx$

106. $\int x\, e^{-3x}\, dx$ 107. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$ 108. $\int x\ cosx\ dx$

109. $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ 110. $\int x^2\ senx\ dx$ 111. $\int e^{-3x} \cos x\, dx$

112. $\int x (\ln x)^2\, dx$ 113. $\int x^3 \ln x\, dx$ 114. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx$

115. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x}}$ 116. $\int (x - 3) senx\ dx$ 117. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$

118. $\int \frac{x\ arcsenx}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ 119. $\int x\ arcsenx^2\, dx$ 120. $\int \sqrt{x}\, (lnx)^2\, dx$

Avd. María Auxiliadora, nº 4 (06011). Badajoz. Tfno: 924230854 . Fax: 924251025. E-Mail: badajoz@salesianos-sevilla.com

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

121. $\int \frac{2x-3}{x+2}\,dx$

122. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

123. $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}\,dx$ 1

124. $\int \frac{2\,dx}{x^2+5x+6}$

125. $\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx$

126. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$ 2

127. $\int \frac{x^4+1}{x^2+x-6}\,dx$

128. $\int \frac{x^3-1}{x^2+x}\,dx$

129. $\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\,dx$ 3

130. $\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$

131. $\int \frac{dx}{x^2-9}$

132. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)}$ 4

133. $\int \frac{6\,dx}{x(x-1)(x+2)}$

134. $\int \frac{x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

135. $\int \frac{2x^2+2x-1}{x+1}\,dx$ 5

136. $\int \frac{(2x^2-7x)\,dx}{x^3-3x^2+4}$

137. $\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+2x-3}$

138. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)^2(x+3)}$

139. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$

140. $\int \frac{(3x^2+2x+5)\,dx}{(x-2)^2(x+1)^2}$

141. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

142. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

143. $\int \frac{(x-8)\,dx}{x^3-4x^2+4x}$

144. $\int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx$

145. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

146. $\int \frac{dx}{x^2+4}$

147. $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

148. $\int \frac{3\,dx}{x^3-1}$

149. $\int \frac{5x^2-2x+25}{x^3-6x^2+25x}\,dx$

150. $\int \frac{-2x\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$

INTEGRALES VARIADAS

151. $\int (x^3+3x^2+2x-3)\,dx$

152. $\int (e^x+3)\,dx$

153. $\int \left(e^{-x}+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

154. $\int x^2 e^x\,dx$

155. $\int \frac{dx}{(3x+1)^4}$

156. $\int \frac{3+2x^2}{5+(3x+2/3\,x^3)}\,dx$

157. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x)^3}$

158. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

159. $\int \frac{5\,dx}{e^x+e^{-x}}$

160. $\int (1+tag^2 x^2)\,x\,dx$

161. $\int sen^2 x\,dx$

162. $\int tag^2 x\,dx$

163. $\int (3+tag^2 x)\,dx$

164. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$

165. $\int \sqrt{2+x^2}\,x\,dx$

166. $\int \frac{5\cos x}{\sqrt{1+sen x}}\,dx$

167. $\int \frac{e^{3x}+e^x+1}{e^x}\,dx$

168. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

169. $\int \frac{3x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

170. $\int \frac{5^x}{3^x}\,dx$

171. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

172. $\int \left(\frac{6x^2}{sen^2 x^3}+\frac{4}{\cos^2 4x}\right)dx$

173. $\int \frac{dx}{e^{2x+1}}$

174. $\int \frac{dx}{x^2+4}$

Avd. María Auxiliadora, nº 4 (06011). Badajoz. Tfno: 924230854 . Fax: 924251025. E-Mail: badajoz@salesianos-sevilla.com

175. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+4}$

176. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}}\,dx$

177. $\int e^{-5x^2}(-5x)\,dx$

178. $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}\,dx$

179. $\int tgx\,dx$

180. $\int (\cos 5x - 3\,sen 2x)\,dx$

181. $\int \frac{x\,dx}{1+(x^2+3)^2}$

182. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

183. $\int (x - e^x \cos x)\,dx$

184. $\int \frac{dx}{1-senx}$

185. $\int e^{senx}\cos x\,dx$

186. $\int sen^3 x \cos^3 x\,dx$

187. $\int x\cos(1+x^2)\,dx$

188. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$

189. $\int \frac{x+9}{x^2-9}\,dx$

190. $\int \frac{5\,e^x}{2+e^x}\,dx$

191. $\int \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

192. $\int \frac{dx}{1-sen^2 x}$

193. $\int \frac{x\,dx}{x+\sqrt{x}}$

194. $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

195. $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$

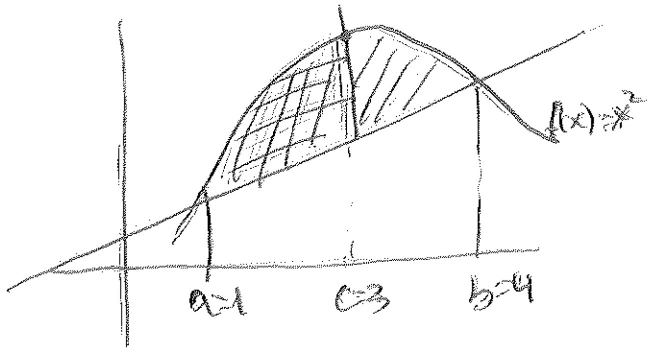
196. $\int \frac{2x}{9+5x^2}\,dx$

197. $\int \frac{2x^3+x^2+3x+1}{x+1}\,dx$

198. $\int \frac{1+sen^2 x}{senx\,\cos x}\,dx$

199. $\int \frac{\cos x}{sen^3 x}\,dx$

200. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$



$$= \int_a^{b} f(x)\,dx = \qquad = [2x]_a^b = 2b - 2a = [2x]_1^2 = 4 - 2 = \boxed{2}$$

1. $$\int_a^b K \cdot f(x) \cdot dx = K \int_a^b f(x) \cdot dx$$

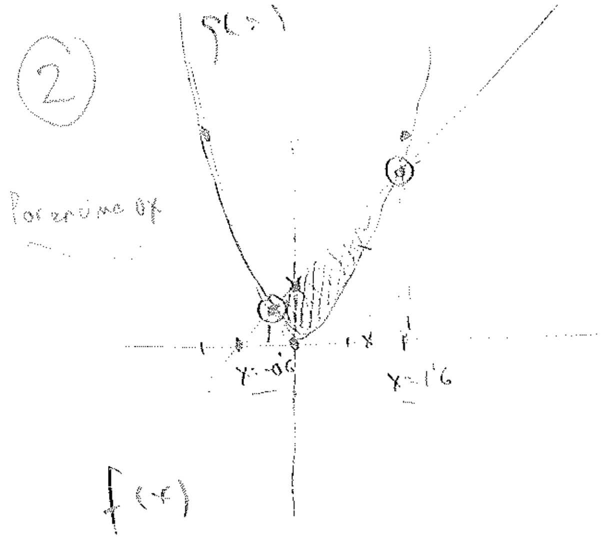
2. $$\int_a^b [f(x) + g(x)] \cdot dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b g(x) \cdot dx$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_1^4 x^2 \cdot dx = \int_1^3 x^2 dx + \int_3^4 x^1 dx$$

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0 \quad \rightarrow \quad [x]_c^a = a - c = 0$$

2



$$\boxed{f(x) = x^2} \qquad f'(x)$$

$$g(x) = x+1$$

1º Pintar con mucho cuidado

2º Ver si para abajo o la región es negativa

3º Ver punto de corte entre f(x) y g(x)

3º: $y = x^2$, $y = x+1$ | $x^2 = x+1$

$x^2 - x - 1 = 0$

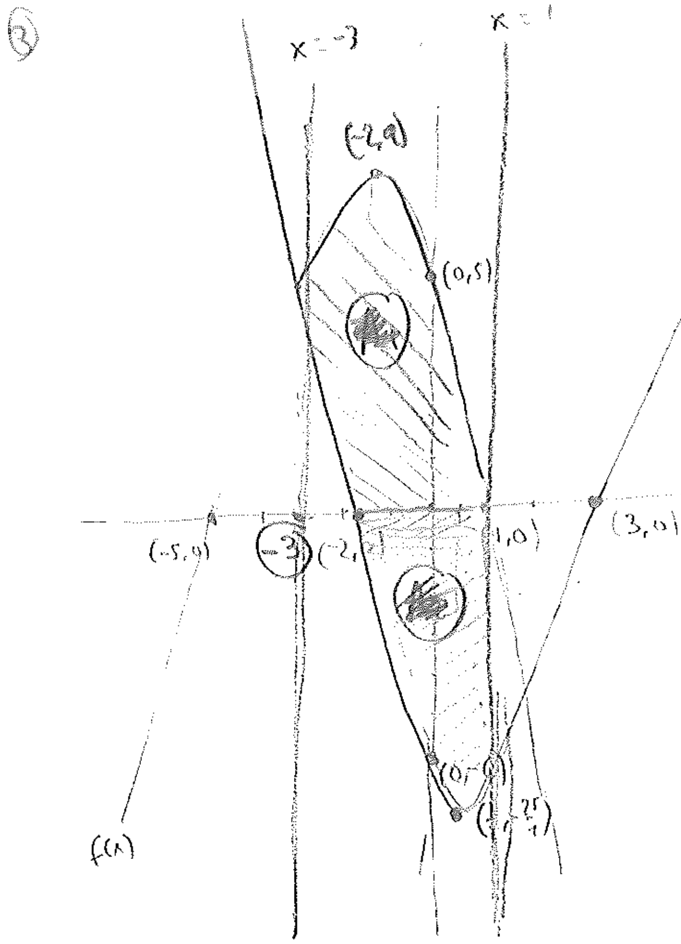
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot1\cdot(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'6 \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0'6$$

4º Calcular la integral definida entre los dos puntos de corte de f(x) y g(x)

$$A = \int_{-0'6}^{1'6} x^2 \, dx = \frac{1}{3}\int_{-0'6}^{1'6} 3\cdot x^2 \cdot dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-0'6}^{1'6} = \frac{1}{3}\cdot 1'6^3 - \frac{1}{3}(-0'6)^3 = 1'36 + 0'072 = 1'432\,u^2$$

$$\int_{-0'6}^{1'6} (f(x) - g(x))\cdot dx = \int_{-0'6}^{1'6} (x+1-x^2)\cdot dx$$

③



Estudio de → $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ | $x = -3$

$g(x) = x^2 - x - 6$ | $x = 1$

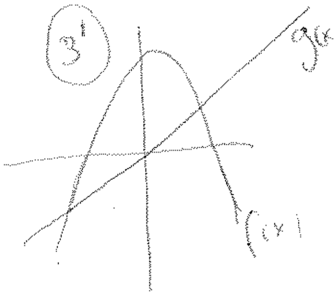
$f(x)$ | $\boxed{x = 0 \;,\; y = 5}$

$x^2 + 4x - 5 = 0 \quad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2}$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2} \left\langle \begin{matrix} -5 \\ 1 \end{matrix} \right.$

$\boxed{\begin{matrix} x = -5 & y = 0 \\ x = 1 & y = 0 \end{matrix}}$

3'



$f'(x) = -2x - 4 = 0$

$-2x - 4 = 0 \;;\; x = \dfrac{4}{-2} = -2$

$\boxed{x = -2} \quad y = -(-2)^2 - 4(-2) + 5$

$= -4 + 8 + 5 = \boxed{9}$

$\boxed{x = 2 \,,\, y = 9}$ MAX

Estudio de $g(x) = x^2 - x - 6$

$x = 0 \quad y = -6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-6)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x = \dfrac{1 \pm 5}{2} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \right.$

$x = 3 \quad y = 0$

$x = -2 \quad y = 0$

$g'(x) = 2x - 1 = 0$

$2x = 1 \;,\; x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 =$

$y = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - 6 = -\frac{1}{4} - 6$

$= \frac{-25}{4}$

$\boxed{x = \frac{1}{2} \quad y = -\frac{25}{4}}$ MIN

$$A = \int_{-3}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx =$$

Ojo!!

$$= \int_{-3}^{1} [(-x^2 - 4x + 5) - (x^2 - x - 6)]\, dx =$$

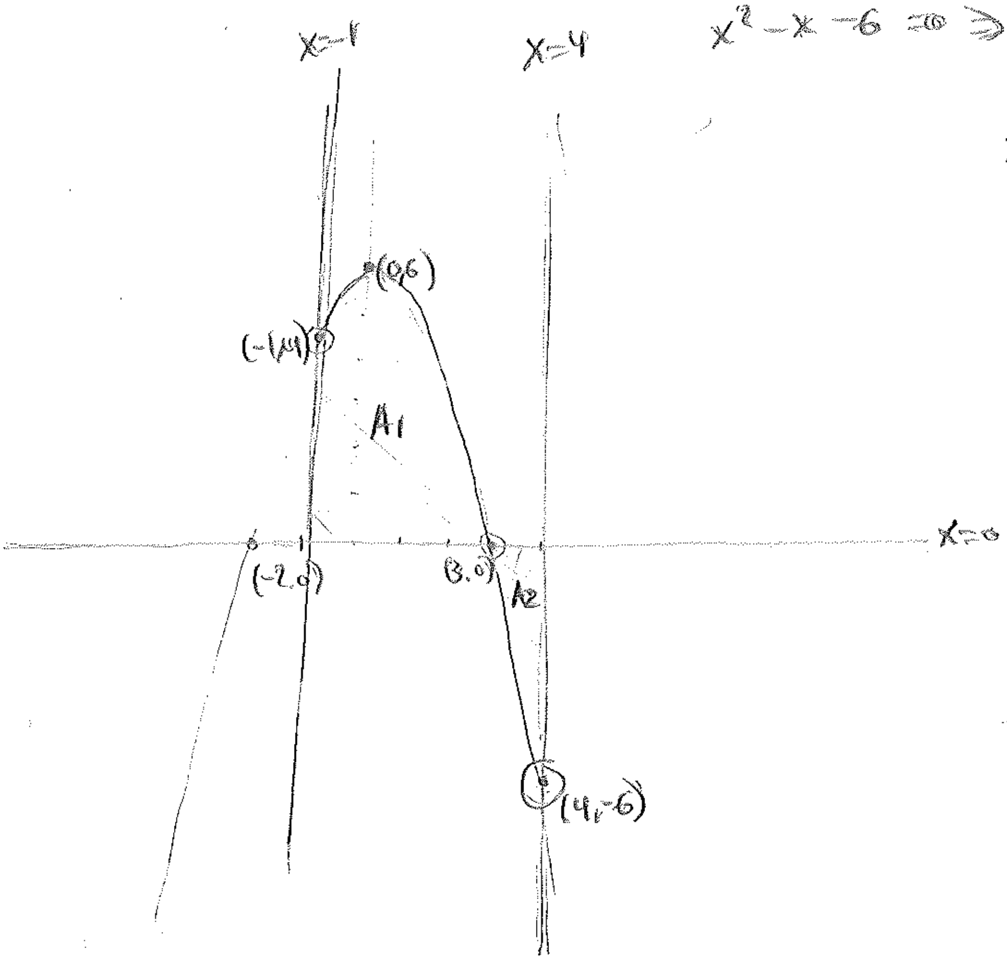
$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 4x + 5 - x^2 + x + 6)\, dx = \int_{-3}^{1} (-2x^2 - 3x + 11)\, dx$$

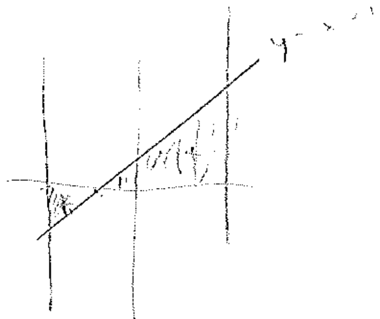
1

$f(x) = -x^2 + x + 6 \qquad y=0 \qquad x=-1 \qquad x=4$

$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} =$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$





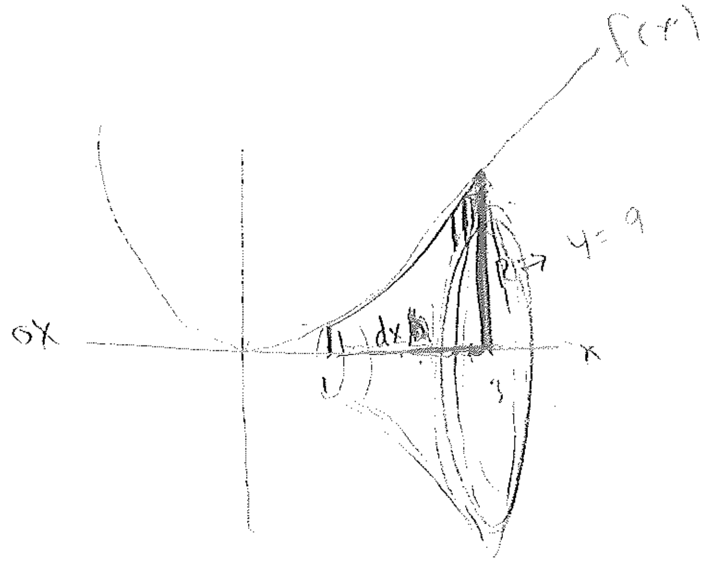
$\begin{cases} y = -x^2 + x + 6 \\ y = -(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 1 + 6 = 4 \end{cases} \quad (-1,4)$

$y = -4^2 + 4 + 6 = -16 + 10 = -6 \quad (4,-6)$

$A = A_1 + A_2 = \displaystyle\int_{-1}^{3} (-x^2 + x + 6)\,dx + \int_{3}^{4} (-x^2 + x + 6) \cdot dx = \Big[x \quad \Big]_{-2}^{3} + \Big[\quad \Big]_{3}^{4}$

* Si alguna de las integrales sale un número negativo se pasa a positivo, valor absoluto

$f(x) = \underline{x^2}$ entre 1, 3



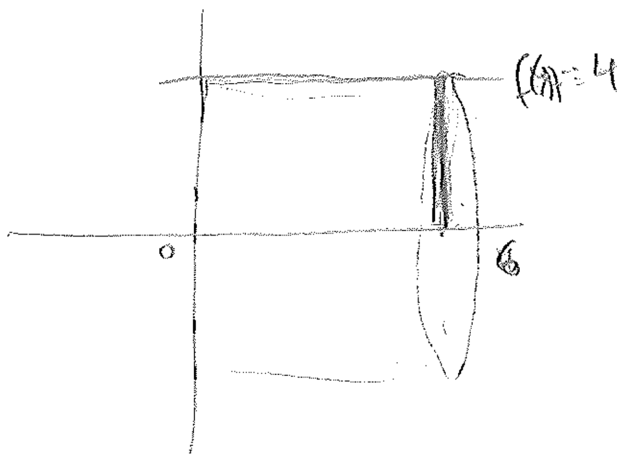
$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

$$V = \int_1^3 \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx = \int_1^3 \pi \cdot (x^2)^2 \cdot dx = \frac{1}{5}\pi \int_1^3 5x^4 \cdot dx$$

$$V = \frac{\pi}{5}\int_1^3 5x^4 \cdot dx = \left[\frac{\pi}{5} x^5\right]_1^3 = \frac{\pi}{5}\left(3^5 - 1^5\right) = \frac{\pi}{5} \cdot 242$$

y

y=



$$\int_0^4 \pi \cdot [f(x)]^2 \cdot dx$$

$$\int_0^6 \pi \cdot 4^2 \cdot dx = \pi 4^2 \int_0^6 dx = \pi \cdot 4^2 \cdot x \Big]_0^6$$

4 Halla el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al
(Pag 302)
girar en torno al eje OX el arco de gráfica de f entre las abscisas indicadas en cada caso:

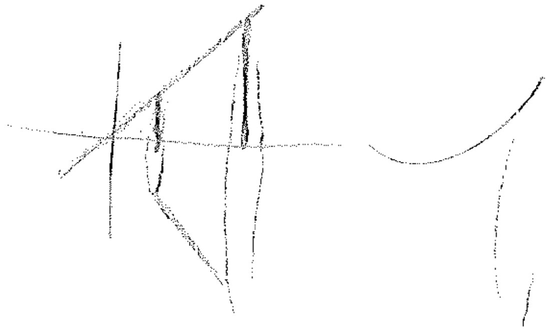
a) $f(x) = x$ entre 1 y 4

b) $f(x) = x^2+2$ entre -2 y 1

$f(x)$

a). $f(x) = x$ entre 1 y 4

$$\int_1^4 \pi x^2 \, dx$$



b) $f(x) = x^2+2$ entre -2 y 1

$$\int_{-2}^{1} \pi (x^2+2)^2 dx = \pi \int_{-2}^{1} x^4 + 4 + 4x^2$$

'ág 300)

3'

7. Halle el área limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = x+1$$

$$g(x) = x^2+1$$

Puntos corte

$$x+1 = x^2+1$$

$$-x^2+x = 0$$

$$x(-x+1) = 0$$

$$-x+1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}}$$

$$\int_0^1 \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_0^1 \left[(x+1) - (x^2+1)\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (x+1-x^2-1)\, dx = \int_0^1 (-x^2+x)\, dx = \int_0^1 -x^2\, dx + \int_0^1 x\, dx =$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 2x\, dx = \left[\frac{-1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-2+3}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\, u^2$$