TEMA 7

* Ángulo entre dos rectas

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

- $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

* Ángulo entre dos planos

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

* Ángulo entre recta y plano

$$\alpha = \arcsin \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\,|\vec{n}|}$$

- $r \perp \pi \Leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$

* Distancia entre dos puntos

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

* Distancia de un punto a una recta

$$d(P,r) = \frac{|[\vec{QP}] \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

* Distancia de un punto a un plano

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

* Distancia de un plano al origen de coordenadas.

$$d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

* Distancia entre dos rectas.

$$d(r,r') = \frac{|[\vec{AA'},\vec{v},\vec{v'}]|}{|\vec{v}\times\vec{v'}|}$$ → (Det y mód) → (Prod. escal y mód.)

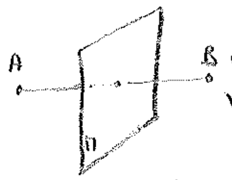
- Si r y r' ⇒ coincidentes
  $d\{r,r'\} = 0$
- Si r y r' ⇒ secantes
  $d\{r,r'\} = 0$

imp.
- Si r y r' ⇒ paralelas
  $d\{r,r'\} = d(A,r')$
- Si r y r' ⇒ se cruzan
  $V = |[\vec{AA'},\vec{u},\vec{v}]| = |\vec{v}\times\vec{u}|\cdot d(r,r')$
  $$d(r,r') = \frac{|[\vec{AA'},\vec{v},\vec{v'}]|}{|\vec{v}\times\vec{v'}|}$$

* distancia entre recta y plano

$$d(r,\pi) = d(P,\pi)$$

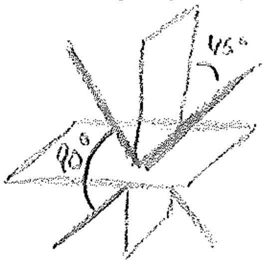
* Plano mediador: ⇒ $P = (x,y,z)$



$$d(P,A) = d(P,B)$$

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}$$

* Plano bisector:



$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$$

$$\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|A'x+B'y+C'z+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

* Vectores perpendiculares:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$\vec{u}\times\vec{v} = \vec{w} \rightarrow \vec{w} \perp \vec{u},\vec{v}$

EXAMEN 3

(1) a) Define ángulo entre 2 planos y cómo se calcula.

b) Calcula el ángulo que forma la recta $r:\begin{cases}2x-y+z=3\\ x+5y-2z=8\end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y+z-9=0$

(2) Halla el punto simétrico de $P=(0,0,3)$ respecto del plano $\pi: 2x+3y-z+1=0$

(3) Calcula la recta perpendicular común a las rectas. $r:\begin{cases}y=2\\ z=3\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=1\\ z=1\end{cases}$

(4) Discute la posición relativa de los planos $\pi: 2x+3y-z+1=0$ según los valores del parámetro m y calcula, $\pi': 4x+6y+mz+7=0$, la distancia entre ellos en cada caso.

(3)

$r\begin{cases}y=2\\ z=3\end{cases}$ $\quad \vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(1,0,0)$

$s:\begin{cases}x=1\\ z=1\end{cases}$ $\quad \vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=(0,1,0)$

- $\vec{v}\times\vec{u}=(1,0,0)\times(0,1,0)=\vec{w}$

$\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\vec{k}\Rightarrow\vec{w}=(0,0,1)$

- $\pi:\begin{vmatrix}x-0&1&0\\y-2&0&0\\z-3&0&1\end{vmatrix}=(0+0+0)-(0+0+y-2)=-y+2=0$

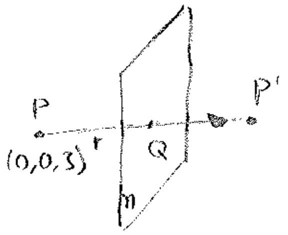
- $\pi':\begin{vmatrix}x-1&0&0\\y-0&1&0\\z-1&0&1\end{vmatrix}=(x-1+0+0)-(0+0+0)=x-1=0$

$t=\begin{cases}-y+2=0\\ x-1=0\end{cases}$

(2)

$P=(0,0,3)$

$\pi: 2x+3y-z+1=0$; $\vec{n}_\pi=(2,3,-1)$ $\quad r:\underbrace{\frac{x}{2}=\frac{y}{3}}=\frac{z-3}{-1}$, $\quad r:\begin{cases}3x-2y=0\\ -y-3z+9=0\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&0&0\\0&-1&-3&-9\\2&3&-1&-1\end{array}\right)$ $|A|=42$



$x=\dfrac{\begin{vmatrix}0&-2&0\\-9&-1&-3\\-1&3&-1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{12}{42}$

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}3&0&0\\0&-9&-3\\2&-1&-1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{18}{42}$

$z=\dfrac{\begin{vmatrix}3&-2&0\\0&-1&-9\\2&3&-1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{120}{42}$

$Q=\left(\frac{12}{42},\frac{18}{42},\frac{120}{42}\right)$

P —— Q —— P' (a,b,c)

$\frac{0+a}{2}=\frac{12}{42}$; $a=\frac{24}{42}$

$\frac{0+b}{2}=\frac{18}{42}$; $b=\frac{36}{42}$

$\frac{3+c}{2}=\frac{120}{42}$; $c=\frac{114}{42}$

$P'=\left(\frac{24}{42},\frac{36}{42},\frac{114}{42}\right)$

(1) a) $\alpha = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

El coseno del ángulo α entre los dos planos coincidirá, salvo en el signo, con el ángulo que forman sus vectores normales.

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$\Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

b) $r: \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 5y - 2z = 8 \end{cases}$ $\quad \pi: 2x + y + z - 9 = 0 \quad$ $\alpha = \arcsen \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|}$

$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (\cancel{2\vec{i}} + \cancel{\vec{j}} + 10\vec{k}) - (-\vec{k} + \cancel{5\vec{i}} - 4\vec{j}) = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 11\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (-3, 5, 11)$

$\vec{n}_\pi = (2, 1, 1)$ $\quad \alpha = \arcsen \frac{|10|}{\sqrt{3^2+5^2+11^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{155}\sqrt{6}}; \alpha = 0'33°$

4) $\pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$
$\pi': 4x + 6y + mz + 7 = 0$

$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & m & -7 \end{array}\right)}_{A}$ A'

$|A| = 3m - (-6); 3m = -6; m = \frac{-6}{3}; m = -2$

- Si $m \neq -2 \rightarrow$ Rang $A = 2 =$ Rang $A' \Rightarrow$ Secantes

Distancia $= 0$

- Si $m = 2 \rightarrow$ Rang $A = 1 \neq$ Rang $A' = 2 \Rightarrow$ Paralelos

$d(\pi, \pi') = d(P, \pi')$

P de $\pi = (0, 0, 1)$: $d(P, \pi') = \frac{|4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + (-2) \cdot 1|}{\sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{56}} = \frac{2\sqrt{56}}{56}$

EXAMEN 2

① Calcula la distancia del punto $P=(1,2,1)$ al plano $\pi: 2x+3y-z-1=0$ y a la recta $r: \frac{x}{2}=y-1=\frac{z}{2}$

a) $P=(1,2,1)$

$\pi: 2x+3y-z-1=0$; $\vec{n}=(2,3,-1)$

$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|2+6+(-1)+(-1)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{14}}\Rightarrow\frac{6\sqrt{14}}{14}$$

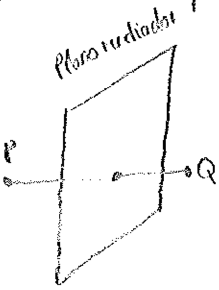
b) $P=(1,2,1)$

$r: \frac{x}{2}=y-1=\frac{z}{2}$; $\vec{v}=(2,1,2)$; $Q=(0,1,0)$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{QP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$d(P,r)=\frac{|(1,1,1)|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

② Calcula el plano mediador del segmento de extremos $P=(1,0,0)$ y $Q=(0,1,0)$



$d(A,P)=d(A,Q)$; $\sqrt{(x-p_1)^2+(y-p_2)^2+(z-p_3)^2}=\sqrt{(x-q_1)^2+(y-q_2)^2+(z-q_3)^2}$

$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}$

$\cancel{x^2}+\cancel{1}-2x+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{1}-2y+\cancel{z^2}$; $-2x+2y=0$

$\pi: -2x+2y=0$

$P=(1,0,0)$

$Q=(0,1,0)$

$A=(x,y,z)$

③ Halla la proyección ortogonal de la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ sobre el plano OXY $(z=0)$.

$\pi: z=0$; $\vec{n}=(0,0,1)$

$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ $\begin{cases} A=(1,0,2) \\ \vec{v}=(2,3,1) \end{cases}$

perpendicular a $\vec{n}$.

$$\pi'=\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-0 & 3 & -1 \\ z-2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(0-2z+4+0)-(0-x+1+0)=$$
$$=-2z+4+x-1=x-2z+3$$

$\pi' \equiv x-2z+3=0$

$r' \begin{cases} z=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$

4. Calcula la distancia entre las rectas:

$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$ $\qquad$ $s: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$ $\qquad$ $d(r,s) = \frac{|[\vec{AB}, \vec{v}, \vec{u}]|}{|\vec{v} \times \vec{u}|}$

$\vec{v} = (1,3,1)$ $\qquad$ $\vec{u} = (-3,1,2)$

$A = (1,-2,1)$ $\qquad$ $B = (-2,1,-3)$

$$\vec{AB} = (-3,3,-4)$$

- $\begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-18-9-4)-(36-3+6) = -70$
- $|(1,3,1)\times(-3,1,2)| = \sqrt{(-3)^2+3^2+2^2} = \sqrt{22}$

$$d(r,s) = \frac{|-70|}{\sqrt{22}} = \frac{70}{\sqrt{22}} \cdot \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{22}} \Rightarrow \frac{70\sqrt{22}}{22}$$

5. Halla la perpendicular común a las rectas del ejercicio anterior.

$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$; $\vec{v} = (1,3,1)$; $A = (1,-2,1)$

$s: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$; $\vec{u} = (-3,1,2)$; $B = (-2,1,-3)$

- $\vec{u} \times \vec{v} = (-3,1,2)\times(1,3,1) \Rightarrow \vec{w} = (-3,3,2)$
- $\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -3 \\ y+2 & 3 & 3 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (\cancel{6x}-6+\cancel{3z}-3-\cancel{3y}-6)-(-\cancel{9z}+9+\cancel{3x}-3+\cancel{2y}+4) =$
  $= 3x-5y+12z-25 \qquad \pi: 3x-5y+12z-25=0$
- $\pi': \begin{vmatrix} x+2 & -3 & -3 \\ y-1 & 1 & 3 \\ z+3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (\cancel{2x}+4-\cancel{9z}-27-\cancel{6y}+6)-(-\cancel{3z}-9+\cancel{6x}+12-\cancel{6y}+6) =$
  $= -4x-6z-26 \qquad \pi': -4x-6z-26=0$

$$t: \begin{cases} 3x-5y+12z-25=0 \\ -4x-6z-26=0 \end{cases}$$

Pag 157 (69)

(69) Halla el valor del parámetro K para que los planos π y π' sean perpendiculares y da un vector director de la recta intersección para el valor de K hallado.

$\pi: 2x-6y+5=0$ $\quad \vec{n}_{\pi} \times \vec{n}_{\pi'} = 0$ (perpendiculares)

$\pi': 3x-ky+z-1=0$ $\quad (2,-6,0) \times (3,-k,1)=0$

$6+6k+0=0 \;;\; k=\frac{-6}{6} \;;\; \underline{k=-1}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-6\vec{i}+0+2\vec{k})-(-18\vec{k}+0+2\vec{j}) = \vec{v}$$

$\underline{\vec{v}=(-6,2,20)}$

Pag 154 (37)

(37) Dada la recta r, con vector director (1,1,0) y que pasa por el origen de coordenadas, determina todas las rectas que forman un ángulo de 60° con r y, además, pasan por el origen y están contenidas en el plano XY.

$\vec{u}=(1,1,0)$

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{QP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{AB},\vec{v},\vec{u}]|}{|\vec{v}\times\vec{u}|}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{AB},\vec{v},\vec{u}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{AB},\vec{v},\vec{u}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Mediador: $d(P,A)=d(P,B)$

~~[illegible]~~

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}$$

Bisector: $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$

$$\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|A'x+B'y+C'z+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

$$\alpha=\arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$\alpha=\arccos\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

$$\alpha=\arcsen\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{v}_1|}{|\vec{n}||\vec{v}_1|}$$

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{PQ}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{AB},\vec{v},\vec{u}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

* 2 rectas

Coincidentes → Rang M = Rang M' = 2

Paralelas → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3

Secantes → Rang M = Rang M' = 3

Se cruzan → Rang M = 3 ≠ Rang M' = 4

* Recta y plano

Contenida → Rang M = Rang M' = 2

Paralela → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3

Secantes → Rang M = Rang M' = 3

* 2 planos

Coincidentes → Rang M = Rang M' = 1

Paralelos → Rang M = 1 ≠ Rang M' = 2

Secantes → Rang M = Rang M' = 2

Pag 144 (30)

(30)

$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$; $\vec{v} = (2,3,-2)$; $P = (1,0,0)$

$s: x = \frac{y+1}{3} = z$; $\vec{u} = (1,3,1)$; $P = (0,-1,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y-0 & 3 & 3 \\ z-0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (3x-3+6z-2y)-(3z-6z+6+2y) = 3x-4y+12z-9$$

$$d(\pi,s) = d(\pi,P_s) = \frac{|3\cdot 0-4(-1)+12\cdot 0+(-9)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}} = \frac{|4-9|}{\sqrt{169}} = \frac{\sqrt{4^2+(-9)^2}}{13}$$

$$d(\pi,s) = \frac{9'84}{13} = 0'75$$

EXAMEN 1

1) Calcula el ángulo que forma la recta r dada como intersección de los planos $x=0$ y $z=0$ con el plano π paralelo al plano $x+y-z=0$ que pasa por el punto $(1,1,1)$

$r: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\quad \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} y=\lambda \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \lambda=1 \quad \vec{v} = (0,1,0)$

$\pi \parallel \pi: x+y-z=0$

$\in (1,1,1)$

$x+y-z+D=0$; $1+1-1+D=0$; $D=-1$

$\pi: x+y-z-1=0$

$$\alpha = \text{arc sen} \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|} = \text{arc sen} \frac{|(0,1,0)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}} = \text{arc sen} \frac{|1|}{1} =$$

$\alpha = \text{arc sen } 1 = 1'57$

② Sea el punto $P=(0,2,0)$, la recta $r:(x,y,z)=(0,0,1)+k(0,0,1)$, la recta $s: x=y+1=z$, y el plano π dado por la ecuación $z=2$. Calcula:

a) Distancia del punto P y la recta r.

$P=(0,2,0)$

$$d(P,r)=\frac{|\vec{QP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

$r:(x,y,z)=(0,0,1)+k(0,0,1)$

$(0,0,1) \to Q$; $(0,0,1) \to \vec{v}$

$\vec{QP}=(0,2,0)-(0,0,1)=(0,2,-1)$

$$d(P,r)=\frac{|(0,2,-1)\times(0,0,1)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{\sqrt{0^2+0^2+(-1)^2}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

b) Distancias entre el punto P y el plano π.

$P=(0,2,0)$

$\pi: z-2=0$; $\vec{n}_\pi=(0,0,1)$

$$d(P,\pi)=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|0\cdot0+2\cdot0+0\cdot1-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{|-2|}{1}=\frac{2}{1}=2$$

c) Distancia entre la recta r y el plano π.

$r:(x,y,z)=(0,0,1)+k(0,0,1)$; $P=(0,0,1)$

$\pi: z-2=0$; $\vec{n}_\pi=(0,0,1)$

$$d(\pi,r)=d(P,\pi)=\frac{|0\cdot0+0\cdot0+1\cdot1-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{1}=1$$

d) La distancia entre las rectas r y s.

$r:(x,y,z)=(0,0,1)+k(0,0,1)$; $A=(0,0,1)$; $\vec{v}=(0,0,1)$

$s: x=y+1=z$; $B=(0,-1,0)$; $\vec{u}=(1,1,1)$

$$d(r,s)=\frac{|[\vec{AB},\vec{v},\vec{u}]|}{|\vec{v}\times\vec{u}|}$$

$\vec{AB}=(0,-1,-1)$

- $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(0-1+0)-(0+0+0)=-1$

- $|\vec{v}\times\vec{u}|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$

$$d(r,s)=\frac{|-1|}{1}=\frac{1}{1}=1$$

③ Halla la perpendicular común a las rectas del ejercicio anterior.

$r: (x,y,z) = (0,0,1) + K(0,0,1)$; $A = (0,0,1)$; $\vec{v} = (0,0,1)$

$s: x = y+1 = z$; $B = (0,-1,0)$; $\vec{u} = (1,1,1)$

- $\vec{u} \times \vec{v} = (0,0,1) \times (1,1,1)$

$$\vec{w}: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0 + \vec{j} + 0) - (0 + \vec{i} + 0) = \vec{j} - \vec{i}$$

$\vec{w} = (-1,1,0)$

- $$\Pi: \begin{vmatrix} x-0 & 0 & -1 \\ y-0 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+0-y) - (0+x+0) = -y-x \;;\; \Pi: -x-y=0$$

$$\Pi': \begin{vmatrix} x-0 & 1 & -1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z-0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+z-y-1) - (-z+x+0) = 2z-y-x-1 \;;\; \Pi': -x-y+2z-1=0$$

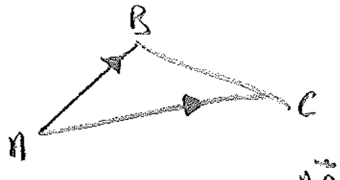
$$t: \begin{cases} -x-y=0 \\ -x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

④ Dado el plano $\pi: 2x+2y+z-2=0$, calcula:

a) El área del triángulo ABC, siendo A, B y C, los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados.

$\Pi: 2x+2y+z-2=0$

$A: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\quad B: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\quad C: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$



$2x-2=0$ $\quad 2y-2=0$ $\quad z-2=0$

$x=1$ $\quad y=1$ $\quad z=2$

$A=(1,0,0)$ $\quad B=(0,1,0)$ $\quad C=(0,0,2)$

$\vec{AB} = (-1,1,0) = \vec{v}$

$\vec{AC} = (-1,0,2) = \vec{u}$

$$\text{área} = |\vec{v} \times \vec{u}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2\vec{i}+0+0) - (-k+0-2\vec{j}) = 2\vec{i}+2\vec{j}+k = (2,2,1)$$

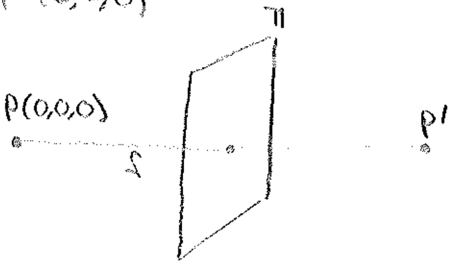
↳ área paralelogramo: $|\vec{v} \times \vec{u}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

Al ser un triángulo: $\frac{3}{2}$

b) Calcula el punto simétrico al origen de coordenadas respecto al plano π.

$\pi: 2x+2y+z-2=0$; $\vec{n}=(2,2,1)$

$P: (0,0,0)$



• $s \perp \pi$ pasa por $P \Rightarrow s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

$$s: \begin{cases} x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

$$\bullet\ Q \equiv \begin{cases} 2x+2y+z-2=0 \\ x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad |A|=9$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{9}$$

$$Q = \left(\frac{4}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-2}{9}\right)$$

P Q P'

$(0,0,0)$ $\left(\frac{4}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-2}{9}\right)$ (a,b,c)

$\frac{0+a}{2} = \frac{4}{9}$; $9a=8$; $a=\frac{8}{9}$

$\frac{0+b}{2} = \frac{-4}{9}$; $9b=-8$; $b=\frac{-8}{9}$

$\frac{0+c}{2} = \frac{-2}{9}$; $9c=-4$; $c=\frac{-4}{9}$

$$P' = \left(\frac{8}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{-4}{9}\right)$$