TEMA 4

* Operaciones con componentes

Pag 77 (9)

9

$\vec{u} = (2, 0, -1)$ a) $5\vec{u} + 6\vec{v} = (10, 0, -5) + (-18, 6, 12) = (-8, 6, 7)$

$\vec{v} = (-3, 1, 2)$ b) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (2, 0, -1) + (-3, 1, 2) - (4, -2, 7) = (-5, 3, -6)$

$\vec{w} = (4, -2, 7)$ c) $2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = (4, 0, -2) - (-3, 1, 2) + (\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{7}{3}) =$

$= (7, -1, -4) + (\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{7}{3}) = (\frac{25}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{3})$

* Expresar como combinación lineal

Pag 77 (10)

10 $\vec{s}$ como combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

$\vec{u} = (1, 2, 3)$

$\vec{v} = (-4, 1, 7)$

$\vec{w} = (0, -2, -5)$

$\vec{s} = (-2, -1, -2)$

$\vec{S} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$(-2, -1, -2) = a(1, 2, 3) + b(-4, 1, 7) + c(0, -2, -5) =$

$= (a, 2a, 3a) + (-4b, b, 7b) + (0, -2c, -5c) =$

$= (a - 4b + 0, 2a + b - 2c, 3a + 7b - 5c)$

$$\left.\begin{array}{l} a - 4b = -2 \\ 2a + b - 2c = -1 \\ 3a + 7b - 5c = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[3_3 - 3 \cdot 1_1]{2_2 - 2 \cdot 1_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & -2 & 3 \\ 0 & 19 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$

o o o

* Determinar independencia o dependencia lineal de vectores:

$\vec{u} = (3, -2, 5)$ $k_1(3, -2, 5) + k_2(-3, 5, 2) + k_3(1, 1, 6) = (0, 0, 0)$

$\vec{v} = (-3, 5, 2)$ $(3k_1, -2k_1, 5k_1) + (-3k_2, 5k_2, 2k_2) + (k_3, k_3, 6k_3) = (0, 0, 0)$

$\vec{w} = (1, 1, 6)$ $(3k_1 - 3k_2 + k_3, -2k_1 + 5k_2 + k_3, 5k_1 + 2k_2 + 6k_3) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} 3k_1 - 3k_2 + k_3 = 0 \\ -2k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \\ 5k_1 + 2k_2 + 6k_3 = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{A} & A' \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow |A| \neq 0$ rang $A = 3 =$ rang $A' = n$ SCD

Cramer $\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{4} = 0$

La solución trivial es la única solución posible por lo que los vectores son linealmente independientes.

$\vec{u} = (1,3,-2)$
$\vec{v} = (-2,5,3)$
$\vec{w} = (0,11,-1)$

$k_1(1,3,-2) + k_2(-2,5,3) + k_3(0,11,-1) = (0,0,0)$

$(k_1, 3k_1, -2k_1) + (-2k_2, 5k_2, 3k_2) + (0, 11k_3, -k_3) = (0,0,0)$

$(k_1 - 2k_2 + 0,\ 3k_1 + 5k_2 + 11k_3,\ -2k_1 + 3k_2 - k_3) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} k_1 - 2k_2 = 0 \\ 3k_1 + 5k_2 + 11k_3 = 0 \\ -2k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2f_1+f_3]{-3f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 11 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2 = \text{rang } A' < n \Rightarrow SCI$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} k_1 - 2k_2 = 0 \\ 11k_2 + 11k_3 = 0 \end{array}\right\}$$

$\boxed{k_2 = \lambda}$ $\boxed{k_1 = 2\lambda}$ $\quad 11\lambda + 11k_3 = 0;\ k_3 = \frac{-11\lambda}{11}$ $\boxed{k_3 = -\lambda}$

Puesto que existen otras soluciones a parte de la trivial el conjunto es linealmente dependiente.

* Cálculo del rango de un conjunto de vectores

$\vec{u} = (1,-2,3)$
$\vec{v} = (-2,4,-6)$
$\vec{w} = (4,-8,12)$

verticales

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$ existe algún elemento diferente de 0
$|\text{menor } A| = 0$ por lo que el rango de A, rang A = 1

- rang A = rang $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = 1$ significa que el máximo número de vectores linealmente independientes es 1

— o — o — o — o — o — o

$\vec{u} = (1,-2,3)$
$\vec{v} = (-2,4,-6)$
$\vec{w} = (4,-8,12)$
$\vec{s} = (3,2,-1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & -8 & 2 \\ 3 & -6 & 12 & -1 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2 = \text{rang}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s}\} = 2$

- Rang $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{s}\} = 2$ significa que el máximo número de vectores linealmente independientes es 2.

* Componentes de un vector determinado por dos puntos $\vec{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

$P = (1,3,-2)$
$Q = (1,1,5)$

$[\vec{PQ}] = (1-1, 1-3, 5-(-2)) = (0,-2,7)$

* Punto medio de un segmento $m_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ $m_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ $m_3 = \frac{a_3+b_3}{2}$

Punto medio del segmento de extremos $A = (1,5,-3)$ y $B = (1,3,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = \frac{1+1}{2} = 1 \\ m_2 = \frac{5+3}{2} = 4 \\ m_3 = \frac{-3+(-1)}{2} = -2 \end{array}\right\}$$

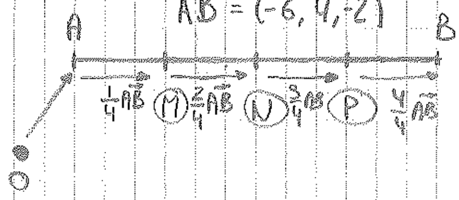
Por lo que el punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $(1,4,-2)$.

* Dividir un segmento en n partes iguales

4 partes iguales

$A = (7, 2, -1)$

$B = (1, 6, -3)$



- $M = \vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AB}$

  $= (7, 2, -1) + \frac{1}{4}(-6, 4, -2) = \left(\frac{22}{4}, 3, \frac{-6}{4}\right)$

- $N = \vec{ON} = \vec{OA} + \frac{2}{4}\vec{AB}$

  $= (7, 2, -1) + \frac{2}{4}(-6, 4, -2) = (4, 4, -2)$

- $P = \vec{OP} = \vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{AB}$

  $= (7, 2, -1) + \frac{3}{4}(-6, 4, -2) = \left(\frac{5}{2}, 5, -\frac{5}{2}\right)$

Rouché - Frobenius (parámetros)

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{matrix}}_{A} \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right)}_{A'}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0$$

Ruffini: $a \to 1, -2$ } Hacen 0 el determinante

- Si $a \neq \{1, -2\}$ $|A| \neq 0$
$\longrightarrow$ rang A = rang $A' = n = 3 \Rightarrow$ SCD

* $a \neq \{1, -2\} \Rightarrow$ SCD

$\downarrow$

Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a + 2} = \frac{1}{a^3 - 3a + 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a + 2} = \frac{1}{a^3 - 3a + 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a + 2} = \frac{1}{a^3 - 3a + 2}$$

* $a = 1$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right)}_{A'}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{rang } A = \text{rang } A' &= 1 \\ n &= 3 \end{aligned}\right\} \quad 1 < 3 \Rightarrow \text{SCI}$$

$\downarrow$

Por Gauss

$$x + y + z = 1$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases} \quad z = 1 - \lambda - \mu$$

$n = 3$
ecuaciones: 1
parámetros: $3 - 1 =$

* $a = -2$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix}}_{A} \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right)}_{A'}$$

$$\left.\begin{aligned} &|A| = 0 \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2 \\ &\text{rang } A' = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A' = 3 \end{aligned}\right\} \text{SI}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 3x + my + 4z = 1 \end{array}\right\} \quad \underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & m & 4 & 1 \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right)}_{A'}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & m & 4 \end{vmatrix} = (-4 + 9 + 2m) - (-3 + 3m + 8) =$$

$$= -4 + 9 + 2m + 3 - 3m - 8 =$$

$$= -m = 0$$

$$m = 0$$

° Si $m \neq 0$ $|A| \neq 0 \Rightarrow$ rang $A = 3$

rang $A' = 3$

$\Downarrow$

SCD

* Si $m \neq 0 \Rightarrow$ SCD

$\downarrow$ Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-7m}{-m} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-m} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5m}{-m} = -5$$

* Si $m = 0$

$$\underbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right.}_{A}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right)}_{A'}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rang $A = 2 =$ rang $A' < n =$

$\Downarrow$

SCI

$\downarrow$

Por Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2f_1+f_2]{-3f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{1} & \cancel{-5} \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -3y + z = -5 \end{array}\right\}$$ cambio variable $\boxed{y = \lambda}$

$$\boxed{z = -5 + 3\lambda}$$

$$x = 2 - \lambda + 5 - 3\lambda$$

$$\boxed{x = -4\lambda + 7}$$

RESOLVER SISTEMAS POR GAUS

50ª
$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 5 \\ x - y + 2z &= -3 \\ 3x - 2y + z &= -2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_2+f_3} \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 5 \\ x - y + 2z &= -3 \\ 3x + z &= 2 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-3f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & +3 & -5 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-f_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{array}\right) \quad 0z = 24 \qquad S.I.$$

* Rouché - Frobenius (paramétricos)

$$\left.\begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

A, A'

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = 0$$

⇓ Ruffini

$a = 1$, $a = -2$ } Hacen 0 el determinante

• Si $a \neq \{1, -2\}$ $|A| \neq 0 \Rightarrow$ Rang A = Rang A' = nº incóg = 3 ⇒ SCD (Por Cramer)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a + 2} = \frac{1}{a^3 - 3a + 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a + 2} = \frac{1}{a^3 - 3a + 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 3a + 2} = \frac{1}{a^3 - 3a + 2}$$

• Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A, A'

Rang A = Rang A' = 1 < nº incóg = 3 ⇒ SCI (Por Gauss)

$x + y + z = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \end{array}\right\} z = 1 - \lambda - \mu$$

• Si $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

A, A'

$|A| = 0$ $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Rang A = 2

Rang A' $= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Rang A' = 3

Rang A = 2 ≠ Rang A' = 3 ⇒ SI

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 2x-y+3z&=-1\\ 3x+my+4z&=1\end{aligned}\right\}\qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 2&-1&3&-1\\ 3&m&4&1\end{array}\right)}_{A,\ A'}\qquad |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&3\\3&m&4\end{vmatrix}=-m=0\Rightarrow m=0$$

- Si $m\neq 0$ $|A|\neq 0$ Rang A = Rang A' = nº incóg = 3 $\Rightarrow$ SCD (por Cramer)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&-1&3\\1&m&4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-7m}{-m}=\underline{\underline{7}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&-1&3\\3&1&4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{-m}=\underline{\underline{0}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-1&-1\\3&m&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{5m}{-m}=\underline{\underline{-5}}$$

- Si $m=0$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 2&-1&3&-1\\ 3&m&4&1\end{array}\right)}_{A,\ A'}\qquad |A|=\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0\Rightarrow \text{Rang } A=2$$

$$|A'|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-1&-1\\3&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \text{Rang } A'=2$$

Rang A = Rang A' = 2 < nº incóg = 3 $\Rightarrow$ SCI (por Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 2&-1&3&-1\\ 3&0&4&1\end{array}\right)\xrightarrow[-2f_1+f_2]{-3f_1+f_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&2\\ 0&-3&1&-5\\ 0&-3&1&-5\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ -3y+z&=-5\end{aligned}\right\}$$ Cambio de variable $\boxed{y=\lambda}$

$$\boxed{z=-5+3\lambda}$$

$$x=2-\lambda+5-3\lambda$$

$$\boxed{x=-4\lambda+7}$$

ROUCHÉ - FROBENIUS

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)}_{A,\ A'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Rang } A \Rightarrow |A| = -8 \\ |A| \neq 0 \to \text{rang } A = 3 \\ \\ \text{Rang } A' = 3 \end{array}\right\} SCD$$

Pag 58 (9)

(9)

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Rang $A \Rightarrow |A| = -3$

$|A| \neq 0 \to$ rang $A = 2$

Rang $A' = 2$

SCD

b) $\left.\begin{array}{l} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Rang $A \Rightarrow |A| = 0 \to$ rang $A = 1$

Rang $A' = 1$ (porque no tiene ningún menor de orden 2 cuyo determinante es diferente de 0)

SCD

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3z = -3 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to \text{rg} A = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Como todos los menores de orden 3 en A' son nulos y $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to \text{rg} A' = 2$

$\text{rg} A = 2 = \text{rg} A' <$ nº incóg $= 3 \to$ SCI

d) $\left.\begin{array}{l} -x + y - z = -1 \\ 5x + y + 2z = -3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$|A| = 0$ pero $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to \text{rg} A = 2$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \to \text{rg} A' = 3$

$\text{rg} A = 2 \neq \text{rg} A' = 3 \longrightarrow SI$

10

e) $\left.\begin{array}{l} -x+y-z=-1 \\ 5x+y+2z=-3 \\ 4x+2y+z=0 \\ 3x+3y=-1 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)}_{A'}$

$|A| \begin{cases} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$ $|A| = 0 \rightarrow rg\,A = 2$

Probar con todos los menores

MATRIZ INVERSA

$* \exists A^{-1} \Longleftrightarrow |A| \neq 0 \qquad * A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = id$

- ¿Para que valores de m esta matriz tiene inversa?

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad |A| = (m^3 + 1 + 1) - (m + m + m)$$

$$m^3 - 3m + 2 \longrightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$m = \{1, -2\}$ (Para estos valores la matriz no tiene inversa)

$|A| = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

- Calcula la inversa de la siguiente matriz: $* A^{-1} = \frac{1}{|A| \neq 0} (\text{Adj } A)^t$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

$|A| \neq 0$

- $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & +4 \\ +4 & -1 & -1 \\ +2 & +3 & -1 \end{pmatrix}$

- $(\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} -4 & +4 & +2 \\ -4 & -1 & +3 \\ +4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & +4 & +2 \\ -4 & -1 & +3 \\ +4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- Resolver sistema de ecuaciones por la matriz inversa

$$A x = B \longrightarrow \cancel{x = \frac{B}{A}}$$

$$A^{-1} A x = A^{-1} B$$

$$id \; x = A^{-1} B$$

$$x = A^{-1} B$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$* \; A^{-1} = \frac{1}{|A| \neq 0} (\text{Adj } A)^t$$

- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \; ; \; |A| \neq 0$

- $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -8 & 5 & 1 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

- $(\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 7 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 7 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$Ax = B$

$A^{-1} A x = A^{-1} B$

$\text{id}\, x = A^{-1} B$

$x = A^{-1} B \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -8 & 7 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}}_{3\,(3)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(3)\,1} = \begin{pmatrix} 1 + (-16) + 7 \\ -1 + 10 + (-3) \\ 2 + 2 + (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

3×1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= -8 \\ y &= 6 \\ z &= -1 \end{aligned}}$$

Δ_1 → El determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden.

Δ_2 → Si se multiplican por un número todos los elementos de una línea de una matriz su determinante queda multiplicado por dicho número

Δ_3 → Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de líneas iguales a las del determinante inicial.

Δ_4 → Si se intercambian dos líneas paralelas de una matriz, su determinante cambia de signo.

Δ_5 → Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es igual a cero.

Δ_6 → Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es igual a cero.

Δ_7 → Si una matriz tiene una línea con todos los elementos nulos, su determinante es igual a cero.

Δ_8 → Si una de las líneas de la matriz es combinación lineal de otras líneas paralelas, su determinante es igual a cero.

Δ_9 → Si a una línea de una matriz se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas, su determinante no varía.

Examen año pasado:

① a) Definir el rango
b) Calcular el determinante de:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

② Hallar $X \Rightarrow AX + A = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

③ Calcula el rango de la siguiente matriz según el valor de m:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

④ Calcula la inversa, usando determinantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \frac{Adj\, A^t}{|A| \neq 0} \quad o \quad A^{-1} = \frac{(Adj\, A)^t}{|A| \neq 0}}$$

a) El rango de una matriz escalonada A es el número de filas no nulas de A. (Rang A).

① b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3 - 3f_1]{f_2 - 2f_1} \begin{vmatrix} 1 & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= 1[30 + 8 + 0 - (14 + 24 + 0)] = \underline{\underline{0}}$$

②
$$AX + A = B$$
$$AX = B - A$$
$$\underbrace{A^{-1} A}_{I} X = A^{-1}(B - A)$$
$$X = A^{-1}(B - A)$$

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + c = 1 & 2b + d = 0 \\ a + c = 0 & b + d = 1 \end{cases}$$

$$(B - A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a = 1 & b = -1 \\ c = -1 & d = 2 \end{matrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

③

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix} \qquad |A| = m^3+1+1-(m+m+m) = m^3-3m+2 \quad \begin{cases} m=1\\ m=-1\\ m=-2\end{cases}$$

• Si $m \neq \{1,-1,-2\} \longrightarrow$ Rang $A = 3$

• Si $m = 1$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rang $A = 1$

• Si $m = -1$ $\quad \begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$ Rang $A = 2$

$\quad \begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$

• Si $m = -2$ $\quad \begin{vmatrix} -2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 3 \neq 0 \longrightarrow$ Rang $A = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } m \neq \{1,-1,-2\} \rightarrow \text{Rang } A = 3\\ \text{Si } m = 1 \longrightarrow \text{Rang } A = 1\\ \text{Si } m = \{-1,-2\} \longrightarrow \text{Rang } A = 2 \end{array}\right\}$$

④

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

• $|A| = 0-4+0-(6-1+0) = -9 \neq 0$

• $\text{Adj } A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1\\ +3 & -6 & +3\\ -5 & +1 & 1\end{pmatrix}$

• $(\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 1 & +3 & -5\\ -2 & -6 & +1\\ -1 & +3 & +1\end{pmatrix}$

• $A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5\\ -2 & -6 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$