Producto vectorial

▷ Llamamos producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V_3, $\vec{u}\times\vec{v}$, al vector de 3 que se define de la siguiente forma:

- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos:
  - módulo: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
  - Dirección: simultáneamente $\perp$ a las de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- Si $\vec{u}=0$ o $\vec{v}=0$, $\vec{u}\times\vec{v}=0$

▷ Propiedades:

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
2. $\vec{u}\times\vec{u} = 0$
3. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{u}\times\vec{w})$
4. $k(\vec{u}\times\vec{v}) = (k\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k\vec{v})$, con $k\in\mathbb{R}$

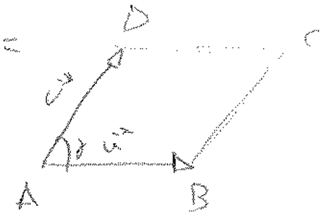
▷ Interpretación geométrica:

▷ El módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el área del paralelogramo construido sobre ellos.

$\vec{u}\times\vec{v}$

$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\alpha =$

$= AB\cdot AD\cdot\operatorname{sen}\alpha$



▷ Expresión analítica

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Teorema de Rouché-Frobenius

→ Un sistema es compatible si y sólo si el rango de A, (la matriz del sistema) y el de A', (la matriz ampliada), son iguales:

$$\boxed{\text{Sistema compatible} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A')}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{rango } A = \text{rango } A' = n^{o} \text{ incógnitas} \rightarrow SCD \\ \text{rango } A = \text{rango } A' \neq n^{o} \text{ incógnitas} \rightarrow SCI \\ \text{rango } A \neq \text{rango } A' \rightarrow SI \end{array}}$$

Vectores

Vector fijo → Dados dos puntos A y B del espacio, se denomina vector fijo de origen A y extremo B al par ordenado (A, B). Se representa por $\vec{AB}$.
Vector libre → Se denomina vector libre al conjunto de vectores fijos equipolentes a uno dado.

Producto escalar:

› Llamamos producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V_3, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, al número real definido de la siguiente forma:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son no nulos} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ ó } \vec{v} \text{ es el vector nulo} \end{cases}$$

› Propiedades:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$
3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
4. $k(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v}$, ~~con~~ $= \vec{u}$, con $k \in \mathbb{R}$

› expresión analítica:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

módulo vector:

$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

› Ángulo entre vectores:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\,\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Producto mixto

→ Llamamos producto mixto de ~~(los vectores)~~ tres vectores libres $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ de V_3, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, al número real definido de la siguiente forma

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

· Interpretación geométrica:

→ El valor absoluto del producto mixto de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ coincide con el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos.

Ecuaciones de una recta

- Vectorial: $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(v_1, v_2, v_3)$

- paramétrica: $\left.\begin{array}{l} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \\ z = a_3 + kv_3 \end{array}\right\}$

- Continua: $$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

- implícita:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2} \to (x - a_1)v_2 = (y - a_2)v_1 \\ \dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{z - a_3}{v_3} \to (x - a_1)v_3 = (z - a_3)v_1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

Ecuaciones de un plano

- vectorial: $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$

- paramétrica: $$\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}$$

- general: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

Posiciones relativas

Dos rectas
- rang (M) = rang (M') = 2 → SCI, coincidentes
- rang (M) ; rang (M') = 3 → SI, paralelas
- rang (M) = rang (M') = 3 → SCD, secantes o se cortan
- rang (M) = 3 ; rang (M') = 4 → SI, se cruzan

Dos planos
- rang (M) = rang (M') = 1 → SCI, coincidentes $\left(\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}\right)$
- rang (M) = 1 ; rang (M') = 2 → SI, paralelos $\left(\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}\right)$
- rang (M) = rang (M') = 2 → SCD, secantes o se ~~cruzan~~ cortan $\left(\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \text{ o } \frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'} \text{ o } \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}\right)$

tres planos
- rang (M) = rang (M') = 1 → SCI, coincidentes
- rang (M) = rang (M') = 2 → SCI
  - Sin planos coincidentes. Los 3 planos son ~~coincidentes~~ secantes en una recta
  - 2 planos coincidentes. 2 son coincidentes y secantes al 3º
- rang (M) = rang (M') = 3 → SCD, secantes en un punto
- rang (M) = 1 ; rang (M') = 2 → SI
  - Sin planos coincidentes. Planos paralelos dos a dos.
  - Hay planos coincidentes. 2 son coincidentes y paralelos al 3º
- rang (M) = 2 ; rang (M') = 3 → SI
  - No existen planos =. Son secantes 2 a 2
  - Hay planos =. 2 son = y secantes al 3º

recta y plano
- rang (M) = rang (M') = 2 → SCI, ~~con~~ recta contenida en el plano
- rang (M) = 2 ; rang (M') = 3 → SI, recta y plano paralelos
- rang (M) = rang (M') = 3 → SCD, recta y plano secantes

Ángulo entre dos rectas

- Coincidentes o paralelas $\rightarrow 0^\circ$
- Secantes

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Ángulo entre dos planos

- Coincidentes o paralelos $\rightarrow 0^\circ$

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

Ángulo entre recta y plano

- recta incluida en el plano o ambos paralelos $\rightarrow 0^\circ$

$$\alpha = \text{arc sen} \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

Rectas perpendiculares

- Dos rectas, r y s, son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores respectivos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es cero

$$r \perp s \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Planos perpendiculares

$\rightarrow$ Dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores normales respectivos, $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$, es cero

$$\pi_1 \perp \pi_2 \leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0 \leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

Recta y plano perpendiculares

$\rightarrow$ Una recta r con vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y un plano π con vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ son perpendiculares si $\vec{v}$ y $\vec{n}$ son *linealmente dependientes*.

$$r \perp \pi \leftrightarrow \frac{v_1}{A} = \frac{v_2}{B} = \frac{v_3}{C}$$

Distancia entre dos puntos

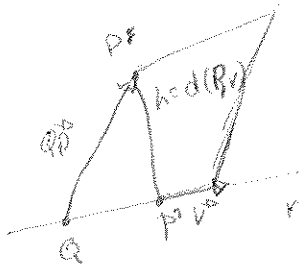
→ La distancia entre los puntos A y B es el módulo de vector $[\vec{AB}]$:

$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Distancia punto y recta

- Si P es un punto de r → distancia 0

$$d(P,r) = \frac{|[\vec{QP}] \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



Distancia de un punto a un plano

- Si P es un pto del plano π, distancia → 0

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Distancia de un plano al origen de coordenadas

$$d(O,\pi) = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos rectas

Rectas coincidentes o secantes, distancia → 0

- Si son paralelas → $d(r,r') = d(P,r) = \dfrac{|[\vec{QP}] \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$$d(r,r') = \frac{|[\vec{AA'}, \vec{v}, \vec{v'}]|}{|\vec{v} \times \vec{v'}|}$$

Distancia entre dos planos

Planos coincidentes o ~~secan~~ secantes → 0

Si son paralelos $d(\pi,\pi') = d(P,\pi) = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Distancia entre recta y plano

Recta incluida en el plano o recta y plano secantes → 0

Si la recta y el plano son paralelos ~~de~~ $d(r,\pi) = d(P,\pi) = \dfrac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Plano mediador

Plano ~~a~~ mediador entre ~~A y B~~ AB:

$$d(P,A) = d(P,B)$$

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}$$

$$2(b_1-a_1)x + 2(b_2-a_2)y + 2(b_3-a_3)z + D = 0$$

Plano bisector

Plano bisector de π_1 y π_2

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$$

$$\frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|A'p_1 + B'p_2 + C'p_3 + D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Perpendicular común

Perpendicular común entre r y s

- Calculamos: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ (vector perpendicular de las rectas)
- Hallamos el plano π y π':

$$\left.\begin{array}{l} \pi = (A, \vec{u}, \vec{w}) \\ \pi' = (B, \vec{v}, \vec{w}) \end{array}\right\} t$$

- Las ecuaciones ~~de los planos~~ generales de los planos forman la recta implícita t, que es la perpendicular común

---

Continuidad de una función en un pto

Una función f es continua en un punto x_0 si se verifican las tres condiciones siguientes:

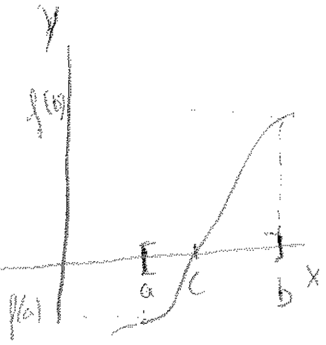
C1. Existe $f(x_0)$

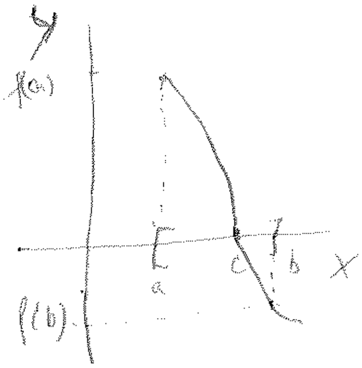
C2. Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y es finito

C3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema de Bolzano

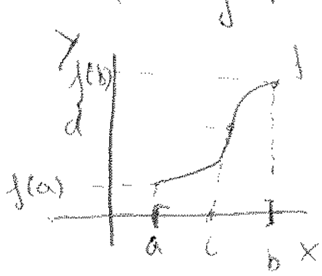
→ Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$





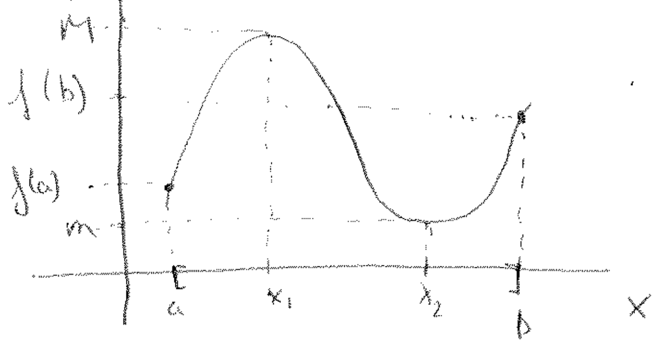
Teorema de los valores intermedios

→ Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ (si $f(a) \neq f(b)$). Es decir, para cualquier valor d comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$



Teorema de Weierstrass

→ Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$

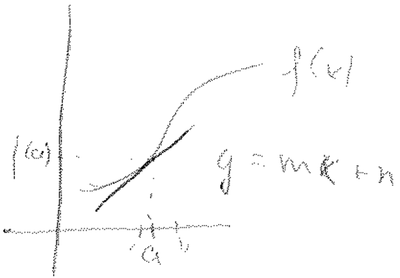


Derivada de una función en un punto

→ La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = m =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$f(x) = tg\,x \rightarrow f'(x) = \begin{cases} sec^2 x \\ \frac{1}{cos^2 x} \\ 1 + tg^2 x \end{cases}$

$f(x) = cotg\,x \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{sen^2 x} \\ -cosec^2 x \end{cases}$

$f(x) = sec\,x \rightarrow f'(x) = tg\,x \cdot sec\,x$

$f(x) = cosec\,x \rightarrow f'(x) = -cotg\,x \cdot cosec\,x$

$f(x) = arcsen\,x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = arccos\,x \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = arctg\,x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f(x) = arc\,cotg\,x \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Estudio de una función

1) Dominio y Recorrido

$D(f(x)) \rightarrow$ ptos en los que ~~la función~~ existe $f(x)$ en el eje x

2) Ptos de corte

~~corte~~ · Corte eje $OX \rightarrow y=0$

· Corte eje $Oy \rightarrow x=0$

3) Signo

Se iguala la función a $0 \rightarrow f(x)=0$ y se saca el signo

4) Asíntotas

- AV

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \rightarrow \exists$ asíntota V en $x=a$

- AH

Hay ~~asi~~ AH $\rightarrow a = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ o $a = \lim_{x \to -\infty} f(x)$

A.O

$$y = mx + b \quad \begin{cases} m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

5) Simetría

$f(x)$ es par $\rightarrow f(-x) = f(x) \rightarrow$ su gráfica es simétrica respecto al eje OY

$f(x)$ es impar $\rightarrow f(-x) = -f(x) \rightarrow$ su gráfica es simétrica respecto del origen O

) Monotonía

gualamos la primera derivada a $0 \rightarrow f'(x) = 0$;

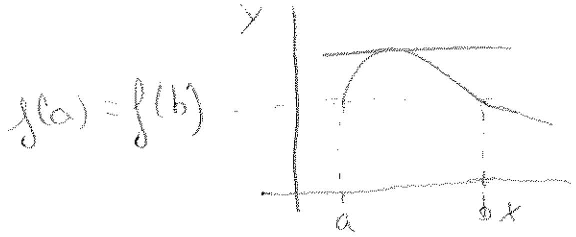
sacamos las raíces y vemos que ocurre en sus ~~a~~ laterales, y sustituimos algún lor de sus laterales en la derivada, $\begin{cases} \text{y si } f'(x) > 0 \rightarrow \text{crece} \\ \text{si } f'(x) < 0 \rightarrow \text{decrece} \end{cases}$ y si en un iteral crece y en el otro decrece, hay un máx, y si en uno decrece y en el otro ece, un mínimo.

) Curvatura y pto de inflexión

igualamos la 2ª derivada a $0 \rightarrow f''(x) = 0$; y sacamos sus raíces y vemos ~~crea~~ que ocurre en ~~a~~ los laterales de esos ptos, $\begin{cases} \text{Si } f''(a) > 0 \rightarrow \text{convexa } \cup \\ \text{Si } f''(a) < 0 \rightarrow \text{cóncavo } \cap \end{cases}$ y si en na de sus raíces (ptos) cambia, tenemos que comprobar si ese pto es un pto de inflexión, aciendo su 3ª derivada $\rightarrow f''(a) = 0 \rightarrow f'''(a) \neq 0 \rightarrow$ pto inflexión en $x=a$

Teorema de Rolle

→ Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$



Teorema del valor medio de Lagrange

→ Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Regla de L'Hôpital

→ Sean f y g dos funciones derivables en un entorno del punto "a" tales que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Entonces:

si existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existirá también $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Optimización

1. Se escribe la función a maximizar o minimizar
2. Se hace depender dicha función de una sola variable mediante relaciones de dependencia (relación que relaciona 2 variables)
3. Se deriva e iguala a 0
4. Se comprueban los máximos y mínimos

Integrales inmediatas

1. $\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int e^f \cdot f' = e^f + C$

3. $\int \frac{1}{f} \cdot f' dx = \ln |f| + C$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f' dx = \arcsin f + C$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \cdot f' dx = \operatorname{arctg} f + C$

6. $\int x^f \cdot f' dx = \frac{x^f}{\ln x} + C$

7. $\int \operatorname{sen} f \cdot f' dx = -\cos f + C$

8. $\int \cos f \cdot f' dx = \operatorname{sen} f + C$

Integral por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

~~Para escoger las primeras si~~ hay un ln, si no ~~un arctg~~

Para escoger la u:

ALPES

1º A → arc sen x / arc cos x / arc tg x

2º L → Logaritmos

3º P → Polinomios

4º E → Exponentes

5º S → sen x / cos x

Definición integral

→ Una función $F(x)$ es primitiva de otra función $f(x)$, cuando al derivar $F(x)$ obtenemos $f(x)$ y cuando integramos $f(x)$ obtenemos $F(x)$

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, bend left, "\text{integrar}"] & F(x) \arrow[l, bend left, "\text{derivar}"] \end{tikzcd}$$

Integración por cambio de variable o sustitución

→ El método de sustitución consiste en, dado una integral $\int f(x)dx$, identificar una parte de $f(x)$ con una nueva variable, con la finalidad de simplificar el cálculo integral. Se haría de la siguiente forma.

1. Sustituimos la variable x por una nueva variable, por ejemplo t. Dicha sustitución se puede hacer de varias formas:

   I. $x = g(t) \to dx = g'(t)dt$

   II. $g(x) = t \to g'(x)dx = dt$

Ahora sustituimos en el integrando hasta obtener una nueva integral dependiente solo de t

2. Calculamos la nueva integral
3. Deshacemos el cambio de variable efectuado en t para ~~obtener~~ expresar la primitiva obtenida de la función dt.

Ejemplo:

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ t = x+2 \to dt = dx \\ x = t-2 \end{array} \right| = \int (t-2)\sqrt{t}\,dt = \int (t-2)\,t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \int (t^{3/2} - 2t^{1/2})\,dt = \int t^{3/2}dt - 2\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{5/2}}{5/2} - 2\frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$$

Integrac

Integrales racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \rightarrow P < \text{grado } Q$$

~~d~~ Descompone $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx \rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}$

1. Descomponemos $Q(x)$ en factores

$$x^2+x-2 \rightarrow x = \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

2. Descomponemos el integrando $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples cuyo denominador es un polinomio irreducible y aplicamos el m.c.m

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x+5}{\cancel{(x-1)(x+2)}} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{\cancel{(x-1)(x+2)}}$$

$$x+5 = A(x+2)+B(x-1)$$

3. Aplicamos valores a la x de forma que en cada uno de las ecuaciones A y B se anulen respectivamente:

A? $x-1=0$; si $x=1 \rightarrow B=0 \longrightarrow 6 = A\cdot 3 \rightarrow A=2$

B? $x+2=0$; si $x=-2 \rightarrow A=0 \longrightarrow 3 = B\cdot(-3) \rightarrow B=-1$

4. Por último resolvemos las ecuaciones simples haciendo la integral sustituyendo la A y la B por sus respectivos valores:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{x+2}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x+2}\,dx =$$

$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{2}{x-1}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx = 2\ln|x-1| + C$$

Integración de funciones $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (racionales) con $P(x) \geq$ grado $Q(x)$

Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional en la que ~~el~~ grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$.

Efectuamos la división:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \rightarrow P(x) = Q(x)\,C(x) + R(x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

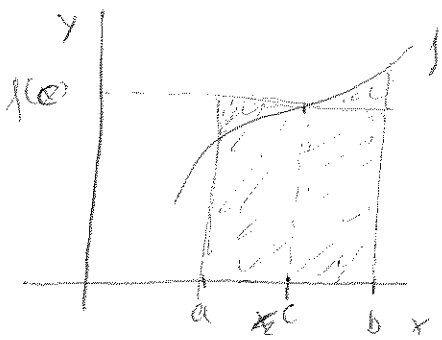
Por tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

Teorema del valor medio del cálculo integral

→ Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$



Regla de Barrow

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

1. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_1^4 x^2\,dx$

1. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$
2. $C = 0$; $F(x) = \frac{x^3}{3}$
3. $\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21$

Integrales

· **Definición primitiva:**

→ Una función F es primitiva de f si y solo si $F' = f$

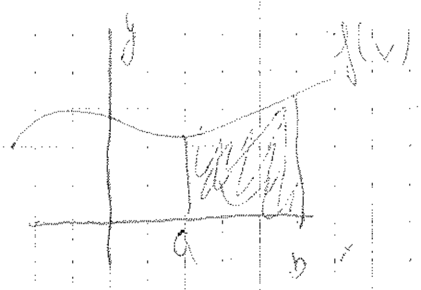
*si F es una primitiva de f, también son primitivas de f todas las funciones de la forma $F + C$, siendo $C \in \mathbb{R}$

· **Definición integral indefinida:**

→ El conjunto formado por todas las primitivas de una ~~función~~ función f se llama integral indefinida de f y se representa por $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ donde C es la constante de integración.

· **Integral definida**

→ Llamamos integral definida de la función f entre los límites de integración a y b, al área que comprendida entre la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas $x = a$ y ~~x~~ $x = b$.



INTEGRACES

Una función F es una primitiva o derivada de f si y solo si $F = f$

Integrales inmediatas

Tabla:

$\int 0\,dx = C$	1. $\int f^n \cdot f'\,dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ $n \neq -1$
$\int dx = x + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	2. $\int \frac{1}{f} \cdot f'\,dx = \ln\lvert f \rvert + C$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x \rvert + C$	3. $\int e^f \cdot f'\,dx = e^f + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	4 $\int \operatorname{sen} f \cdot f'\,dx = -\cos f + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos f \cdot f'\,dx = \operatorname{sen} f + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	5. $\int \sec^2 f \cdot f'\,dx = \operatorname{tg} f + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$	
$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$\int \operatorname{cosec}^2 f \cdot f'\,dx = -\operatorname{cotg} f + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'\,dx = \operatorname{arcsen} f + C$ $-\arccos f + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$ $-\operatorname{arccotg} x + C$	7. $\int \frac{1}{1+f^2} \cdot f'\,dx = \operatorname{arctg} f + C$ $-\operatorname{arccotg} f + C$

Rectas en el espacio

- Ecuación vectorial:

$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v}$

$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + k(v_1, v_2, v_3) \longrightarrow$

Si $A = (-1, 1, 3)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$

$r(A; \vec{v})$:

$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v}$

$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + k(3, -2, 1)$

- Ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + kv_1 \\ y = a_2 + kv_2 \\ z = a_3 + kv_3 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$r(A; \vec{v})$:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 3k \\ y = 1 - 2k \\ z = 3 + k \end{array}\right\}$$

Ecuación continua

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3} \longrightarrow$$

$r(A; \vec{v})$

$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{1}$$

Ecuación implícita

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$r(A; \vec{v})$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - 3z + 10 = 0 \end{array}\right\}$$

Planos en el espacio

Si $A = (-1, 1, 3)$, $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$

Ecuación vectorial

$\pi(A; \vec{u}, \vec{v})$

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

$$\rightarrow (x, y, z) = (-1, 1, 3) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(3, -2, 1)$$

Ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda + 3\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{array}\right\}$$

Ecuación general

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y-1 & 0 & -2 \\ z-3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\cancel{-2x - 4y + 2z + 8 = 0;\ -x - 2y - z + 4 = 0}$

$$-2x - 4y - 2z + 8 = 0;\ x + 2y + z - 4 = 0$$

Posiciones relativas

· De dos rectas

$$r: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{array}\right)$$

rang (M) = rang $(M') = 2 \rightarrow$ SCI $\rightarrow$ rectas coincidentes

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(M) = 2 \\ \text{rang}(M') = 3 \end{array}\right\}$ SI $\rightarrow$ rectas paralelas

rang (M) = rang$(M') = 3 \rightarrow$ SCD $\rightarrow$ Secantes en un pto. (se cortan)

$\left.\begin{array}{l} \text{rang}(M) = 3 \\ \text{rang}(M') = 4 \end{array}\right\}$ SI $\rightarrow$ rectas se cruzan.

· De dos planos

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$\pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right)$$

rang (M) = rang $(M') = 1$

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} \rightarrow$ SCI $\rightarrow$ coincidentes

rang$(M) = 1$ y rang$(M') = 2$

$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \rightarrow$ SI $\rightarrow$ paralelos

rang(M) = rang$(M') = 2$

$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow$ SCI $\rightarrow$ Secantes (se cortan)

Posición relativa de tres planos

$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$

$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$

$\pi_3 : A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

rang(M) = rang(M') = 1 → SCI → coincidentes

rang(M) = rang(M') = 2 → SCI → Secantes en una recta
→ Dos son coincidentes y secantes al 3.º

rang(M) = rang(M') = 3 → SCD → Secantes en un pto.

rang(M) = 1, rang(M') = 2 } SI → Paralelos y distintos 2 a 2
→ 2 coincidentes y paralelos al 3.º

rang(M) = 2, rang(M') = 3 } SI → Secantes (se cortan) 2 a 2
→ 2 paralelos y secantes al 3.º

Recta y plano

$$r : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

- rang(M) = rang(M') = 2 → recta contenida en el plano → SCI

rang(M) = 2, rang(M') = 3 } SI → recta y plano, paralelos

rang(M) = rang(M') = 3 → SCD → secantes