* Posición relativa de 2 rectas

- Coincidentes → Rang M = Rang M' = 2
- Paralelas → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3
- Secantes → Rang M = Rang M' = 3
- Se cruzan → Rang M = 3 ≠ Rang M' = 4

* Posición relativa de recta y plano

- Contenida → Rang M = Rang M' = 2
- Paralelos → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3
- Secantes → Rang M = Rang M' = 3

* Posición relativa de 3 planos

- Rang M = Rang M' = 1 → Coincidentes
- Rang M = Rang M' = 2
  - → 3 planos secantes en una recta
  - → 2 coincidentes y secantes al tercero.
- Rang M = Rang M' = 3 → Secantes en un pto.
- Rang M = 1 ≠ Rang M' = 2
  - → Paralelos 2 a 2.
  - → 2 coincidentes y paralelos al 3º.
- Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3
  - → Secantes 2 a 2
  - → 2 paralelos y secantes al 3º.

* Posición relativa de dos planos

- Coincidentes: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

  Rang M = Rang M' = 1
- Paralelos: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

  Rang M = 1 ≠ Rang M' = 2
- Secantes: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

  Rang M = Rang M' = 2

* Posición relativa de 2 rectas

- Coincidentes → Rang M = Rang $M' = 2$
- Paralelas → Rang $M = 2 \neq$ Rang $M' = 3$
- Secantes → Rang M = Rang $M' = 3$
- Se cruzan → Rang $M = 3 \neq$ Rang $M' = 4$.

* Posición relativa de 2 planos

- Coincidentes: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$

  Rang M = Rang $M' = 1$
- Paralelos: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

  Rang $M = 1 \neq$ Rang $M' = 2$
- Secantes: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ o $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$ o $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

  Rang M = Rang $M' = 2$

* Posición relativa de recta y plano

- Contenida → Rang M = Rang $M' = 2$
- Paralelos → Rang $M = 2 \neq$ Rang $M' = 3$
- Secantes → Rang M = Rang $M' = 3$

* Posición relativa de 3 planos

- Rang M = Rang $M' = 1$ → Coincidentes
- Rang M = Rang $M' = 2$
  - → 3 planos secantes en 1 recta.
  - → 2 planos coincidentes y secantes al 3º.
- Rang M = Rang $M' = 3$ → Secantes en 1 pto.
- Rang $M = 1 \neq$ Rang $M' = 2$
  - → Paralelos 2 a 2
  - → 2 coincidentes y paralelos al tercero
- Rang $M = 2 \neq$ Rang $M' = 3$
  - → 2 planos paralelos y secante al tercero
  - → 3 planos secantes 2 a 2.

Tema 6

*** Rectas en el espacio.**

- Ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+k(v_1,v_2,v_3)$$

- Ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x=a_1+kv_1 \\ y=a_2+kv_2 \\ z=a_3+kv_3 \end{array}\right\}$$

- Ecuaciones continuas

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$$

- Ecuaciones implícitas (general)

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$ Para pasar a dos vectores

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

Pto y vector

$$\boxed{\vec{v}\perp\vec{u} \rightarrow \vec{v}=(3,1,2) \rightarrow \vec{u}=(0,-2,1)}$$ Perpendicular

*** Planos en el espacio**

- Ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)$$

- Ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x=a_1+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=a_2+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=a_3+\lambda u_3+\mu v_3 \end{array}\right\}$$

- Ecuación general

$$Ax+By+Cz+D=0$$

*** Posición relativa de dos rectas.** (intersección de planos)

* Coincidentes ⇒ Rang M = Rang $M'=2$

* Paralelas ⇒ Rang $M=2\neq$ Rang $M'=3$

* Secantes ⇒ Rang M = Rang $M'=3$

* Se cruzan ⇒ Rang $M=3\neq$ Rang $M'=4$

- A partir de sus vectores

* Si los dos vectores directores respectivos son linealmente dependientes, las rectas son coincidentes si verifica dicha ecuación y por el contrario serán paralelas

$$\vec{v}=\alpha\vec{v}'$$

* Si los vectores directores respectivos son linealmente independientes, las rectas están en el mismo plano y por lo tanto se cortan.

* Si los vectores directores respectivos son linealmente dependientes, las rectas están en planos diferentes y por lo tanto se cruzan.

*** Posición relativa de dos planos.**

* Rang M = Rang $M'=1$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'} \\ \text{SCI sus soluciones dependen de dos parámetros} \end{array}\right\}$$ Planos coincidentes

* Rang $M=1$ y Rang $M'=2$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D'}{D} \\ \text{SI. No hay puntos comunes} \end{array}\right\}$$ Planos Paralelos

* Rang M = rang $M'=2$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'} \text{ o } \frac{A}{A'}\neq\frac{C}{C'} \text{ o } \frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'} \\ \text{SCI. Sus soluciones dependen de un parámetro.} \end{array}\right\}$$ Planos secantes

*** Haces de planos:** Un punto y dos vectores directores determinan un plano. Si falta alguno de estos obtendremos un Haz.

- Ecuación de un haz de planos secantes.

$$r\ \left\{\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right.$$

- Ecuación de un haz de planos paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ Ax+By+Cz+D'=0 \end{array}\right\} D\neq D'$$

*Posición relativa de tres planos

- Rang M = Rang M' = 1 ⇒ Coincidentes
- Rang M = Rang M' = 2 → Los 3 planos secantes en una recta
  → Dos coincidentes y secantes al tercero.
- Rang M = Rang M' = 3 ⇒ Secantes en un punto
- Rang M = 1 y Rang M' = 2 → Paralelos y distintos dos a dos
  → Dos planos coincidentes y paralelos al tercero.
- Rang M = 2 y Rang M' = 3 → Los planos son secantes o se cortan dos a dos
  → Dos planos paralelos y secantes al tercero

*Posición relativa de recta y plano

- Rang M = Rang M' = 2 ⇒ Recta contenida en el plano
- Rang M = 2 y Rang M' = 3 ⇒ Paralelos
- Rang M = Rang M' = 3 ⇒ Secantes

*Posición de rectas y planos respecto la referencia.

- Eje OX $\left\{ r: (x,y,z) = (0,0,0) + K(1,0,0) \right\}$ $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- Eje OY $\left\{ r: (x,y,z) = (0,0,0) + K(0,1,0) \right\}$ $r: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- Eje OZ $\left\{ r: (x,y,z) = (0,0,0) + K(0,0,1) \right\}$ $r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

— o — o — o — o — o — o — o — o — o — o —

- Recta paralela al eje OX $\left\{ r: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + K(1,0,0) \right\}$ $r: \begin{cases} y = a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$
- Recta paralela al eje OY $\left\{ r: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + K(0,1,0) \right\}$ $r: \begin{cases} x = a_1 \\ z = a_3 \end{cases}$
- Recta paralela al eje OZ $\left\{ r: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + K(0,0,1) \right\}$ $r: \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \end{cases}$

— o — o — o — o — o — o — o — o — o — o —

- Recta paralela al plano XY $\left\{ r: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + K(v_1,v_2,0) \right\}$ $r: \begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ z = a_3 \end{cases}$
- Recta paralela al plano XZ $\left\{ r: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + K(v_1,0,v_3) \right\}$ $r: \begin{cases} Ax + Cz + D = 0 \\ y = a_2 \end{cases}$
- Recta paralela al plano YZ $\left\{ r: (x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + K(0,v_2,v_3) \right\}$ $r: \begin{cases} By + Cz + D = 0 \\ x = a_1 \end{cases}$

① Halla la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $A=(1,-1,2)$ y $B=(5,5,4)$ y calcula otros dos puntos.

$\vec{AB} = B - A = (4,6,2)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = -1 + 6k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$$

$k = 2 \rightarrow$ pto $C = (9, 11, 6)$

$k = 3 \rightarrow$ pto $D = (13, 17, 8)$

② Halla la ecuación del plano que contiene a la recta del ejercicio anterior y pasa por el punto $C = (1,0,0)$

$\vec{AB} = (4,6,2)$ (vector director del plano)

$A = (1,-1,2) \longrightarrow \vec{AC} = (0, 1, -2)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 0 \\ y+1 & 6 & 1 \\ z-2 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-12x + 12 + 4z - 8 + 0) - (0 + 2x - 2 - 8y - 1) = -12x + 12 + 4z - 8 - 2x + 2 + 8y + 1$$

$$\Pi = -14x + 8y + 4z + 7 = 0$$

③ Hallar la posición relativa de las rectas:

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{2} \longrightarrow 2y + 4 = 3x - 3;\ 3z - 3 = 2y + 4;\ r: \begin{cases} -3x + 2y + 7 = 0 \\ -2y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$

$s: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z+3}{2} \longrightarrow 7x + 14 = -3y + 3;\ 7z + 21 = 2y - 2;\ s: \begin{cases} 7x + 3y + 11 = 0 \\ -2y + 7z + 23 = 0 \end{cases}$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 7 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 7 & 23 \end{array}\right)$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 42 + 0) - (0 - 27 + 0) = 69 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 3$$

$$|M'| \xrightarrow{f_3 = f_1 + f_3} \left|\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & -7 & 12 \\ 2 & 0 & 3 & -11 \\ 12 & 0 & -8 & 28 \\ 3 & -2 & 0 & 7 \end{array}\right| = -5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -11 \\ 12 & -8 & 28 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 7 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & -11 \\ 12 & -8 & 28 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\left[(-112 + 252 + 0) - (264 + 0 + 252)\right] + 2\left[(588 - 924 - 192) - (432 + 616 + 392)\right] =$$

$$= -5(656) + 2(-1968) = -7216 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 4$$

$$\text{Rang } M = 3 \neq \text{Rang } M' = 4 \Rightarrow \underline{\text{Se cruzan}}$$

$\vec{r} = (2,3,2)$

$\vec{s} = (-3,7,2)$

④ Discute las posiciones relativas de los planos π, π', π'' según el valor del parámetro m:

$\pi: x + y + mz = 1$

$\pi': mx + y + z = 1$

$\pi'': 2x + y + z = m$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & m \end{array}\right) \qquad |M| = (1 + 2 + m^2) - (2m + 1 + m) = = m^2 - 3m + 2$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{array}$$

- Si $m \neq \{2, 1\} \longrightarrow |M| \neq$ Rang M = Rang $M' = 3 \longrightarrow$ Planos secantes en un punto
- Si $m = 2 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to$ Rang $M = 2$

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 + 2 + 2) - (2 + 1 + 4) \neq 0 \to \text{Rang } M' = 3$$

Rang $M = 2 \neq$ Rang $M' = 3$ como hay 2 planos con $\vec{n}$ proporcional entonces: 2 planos paralelos y secantes al 3.

- Si $m = 1 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to$ Rang $M = 2$

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 2 + 1) - (2 + 1 + 1) = 0 \to \text{Rang } M' = 2$$

Rang M = Rang $M' = 2$ como hay 2 planos con $\vec{n}$ proporcional entonces: Dos coincidentes y secantes al tercero

⑤ Halla la ec. de la recta que contiene al punto $A: (0,0,0)$ y corta a r y s:

$r: x = 2y = z - 1 \to \frac{x}{1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{1} \quad \vec{r} = (2,1,2) \quad R = (0,0,1)$

$s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z \to \vec{s} = (2,3,1) \quad S = (0,1,0)$

- $\left.\begin{array}{l} \vec{AR} = (0,0,1) \\ \vec{r} = (2,1,2) \\ A = (0,0,0) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} x-0 & 2 & 0 \\ y-0 & 1 & 0 \\ z-0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

- $\left.\begin{array}{l} \vec{AS} = (0,1,0) \\ \vec{s} = (2,3,1) \\ A = (0,0,0) \end{array}\right\} \begin{vmatrix} x-0 & 2 & 0 \\ y-0 & 3 & 1 \\ z-0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

① Calcula:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$ $\quad \left(\vec{u}=(2,3,-4);\ \vec{V}=(5,1,3)\right)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (9\vec{i}-20\vec{j}+2\vec{k})-(15\vec{k}-4\vec{i}+6\vec{j}) = 13\vec{i}-26\vec{j}-13\vec{k}$$

b) Área del paralelogramo ABCD $\begin{cases} A=(2,1,3) \\ B=(3,1,2) \\ C=(4,2,1) \\ \text{[redacted]} \end{cases}$

$\vec{AB}=(1,0,-1)=\vec{u}$ $\qquad |\vec{u}\times\vec{v}|=$ área paralelogramo ABCD

$\vec{AC}=(2,1,-2)=\vec{v}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k})-(0\vec{k}-1\vec{i}-2\vec{j}) =$$
$$= 1\vec{i}+0\vec{j}+1\vec{k}$$

$|1\vec{i}+1\vec{k}| = \sqrt{1^2+1^2} = 1u$ (al ser un triángulo se ~~multiplica~~ divide $\times 2$)

Área del triángulo ABC $= \frac{1}{2} u$.

② Sean los vectores $\vec{u}=(2,0,1)$; $\vec{v}=(2k,1,0)$ y $\vec{w}=(4,k,1)$. Calcula:

a) los valores de k para que el volumen del paralelepípedo determinado sea $16\,u^3$.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2k & 1 & 0 \\ 4 & k & 1 \end{vmatrix} = (2+0+2k^2)-(4+0+0) = 2k^2-2$$

$|2k^2-2|=16 \Rightarrow \begin{cases} 2k^2-2=16 \rightarrow k=\pm 3 \\ 2k^2-2=-16 \rightarrow \nexists\ \text{sol} \end{cases}$ Para estos valores de K, los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ determinan un paralelepípedo de $16\,u^3$

b) los valores de k para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ (linealmente dependientes) $\longrightarrow 2k^2-2=0;\ k=\pm 1$

④ Ecuación del haz de planos que contiene a $r: \begin{cases} x-y+3z=4 \rightarrow x-y+3z-4=0 \\ 2x+4y+7-P=0 \end{cases}$

Haz $\pi_{\alpha\beta} = \alpha(x-y+3z-4)+\beta(2x+4y+7-8)=0$.

Para los infinitos valores que podemos dar a α y β tenemos los infinitos planos del Haz.

(3) Discute la posición relativa de las rectas r y s.

$$r: \begin{cases} x + 3z - 2 = 0 \\ mx + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 4z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ m & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 = -f_3 + f_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ m & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$|M'| = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ m & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \; ; \; |M'| = 2\left[(18+24+16)-(24+16+18)\right] + 1\left[(-4+12m)-(-4+1\ldots\right.$$

$$|M'| = 0 \quad \text{Rang } M' < 4$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ m & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4+0+3m)-(0-1+0) = 3m - 3 = 0 \; ; \; m = 1$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow |M| \neq 0 \rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \rightarrow$ Se cortan
- Si $m = 1 \rightarrow |M| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \rightarrow$ Coincidentes

a) Teoría producto vectorial. $\boxed{\text{EXAMEN } 2^{\circ}A}$

① b) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no proporcionales del espacio real tridimensional ¿Qué relación existe entre las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y la dirección del producto vectorial? ¿Cuánto vale el módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

② a) Escribe un vector de módulo 4 que sea ortogonal al vector de coordenadas (3,4,-2)

b) ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia...?

③ Calcula alguna recta que sea paralela al plano de coordenadas $x+z=2$ y corte perpendicularmente a la recta de ~~ecuaciones~~ ecuaciones $\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=2 \end{cases}$

1 - La relación que existe entre las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y su producto vectorial es que el vector resultante de hacer el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ~~~~ es un vector perpendicular a ambos.

- Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

- Dirección: simultáneamente perpendicular a las de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2

a) $\vec{v} = (3,4,-2) \xrightarrow{\text{perpendicular}} \vec{w} = (0,2,4)$

- módulo de $\vec{w} = (0,2,4)$

$$|\vec{w}| = \sqrt{0^2+2^2+4^2} = 4'47$$

$$\vec{w}' = 4\,\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{4}{4'47}\cdot(0,2,4) = (0,\ 1'78,\ 7'15)$$

b) $\boxed{\begin{array}{l} |\vec{v}| = (\vec{v}\cdot\vec{v})^{\frac{1}{2}} \\ |\vec{v}| = 3 \Longrightarrow v\cdot v = 9 \end{array}}$ → Concepto

(i) $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})}$

$(\vec{u}\cdot\vec{u})^{\frac{1}{2}} = (\vec{u}\vec{u} - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}$

$(\vec{v}\cdot\vec{v})^{\frac{1}{2}} = (\vec{u}\vec{u} - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}$

$\longrightarrow$ (ii) $0 = -2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u}$

$\vec{u}\vec{v} = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}$

(iii) $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \arccos \dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$; $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \arccos \dfrac{\vec{u}\vec{v}}{(\vec{u}\vec{u})^{\frac{1}{2}}(\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}} = \arccos \dfrac{\frac{\vec{v}\vec{v}}{2}}{(\vec{u}\vec{u})^{\frac{1}{2}}(\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}} =$

$= \arccos \dfrac{\vec{v}\vec{v}}{2(\vec{u}\vec{u})^{\frac{1}{2}}(\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}}$ * $= \arccos \dfrac{(\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}(\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}}{2(\vec{u}\vec{u})^{\frac{1}{2}}(\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}}$; $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \arccos \dfrac{1}{2}\,\dfrac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$

$\to \vec{v}\cdot\vec{v} = (\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}}(\vec{v}\vec{v})^{\frac{1}{2}} \,//\, 2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$

3

- $\pi: x + z - 2 = 0 \quad \vec{n}_\pi = (1,0,1)$

Paramétricas (sacamos el punto dando valores a λ)

- $r: \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda} \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases} \longrightarrow P(-1,1,1) \quad \vec{r} = (-1,1,-1)$

$$r': \begin{cases} \Pi_1 \parallel \pi & P(-1,1,1) \\ \Pi_2 \perp r & P(-1,1,1) \end{cases}$$

- $\Pi_1 \equiv x + z + D = 0 \; ; \; \Pi_1 \equiv -1 + 1 + D = 0 \; ; \; D = 0$

$\Pi_1 \equiv x + z = 0$

- $\vec{n}_{\Pi_2} = \vec{r} \; ; \; \Pi_2 \equiv -x + y - z + D = 0 \; ; \; \Pi_2 \equiv -(-1) + 1 - 1 + D = 0$

$D = -1 \Longrightarrow \Pi_2 \equiv -x + y - z - 1 = 0$

$$r': \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

EXAMEN 2º B

① a) Teoría producto mixto

b) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores no coplanarios del espacio real tridimensional ¿Cual es el significado geométrico del producto mixto de los tres vectores? Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A=(0,0,0)$, $B=(3,0,0)$, $C=(0,3,0)$ y $D=(0,0,1)$ $\frac{1}{6}V_P$

② a) Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas $(1,2,1)$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

b) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulo 4 y 3 respectivamente. Calcula el módulo de los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$, indicando los resultados teóricos en que te basas para ello.

③ a) Determina el plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: \frac{x-1}{2} = y = z+1$

b) Calcula el punto donde se cortan la recta y el plano.

④ Discute las posiciones relativas de la recta r y el plano π según el valor del parámetro

$$r:\begin{cases} mx-y+z=2 \\ 6x+5y-3z=m \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x+3y-2z=4$$

② a) Ortogonal $\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$\vec{u}=(1,2,1)$

$\vec{V}=(a,b,c)$; $\vec{u}\cdot\vec{V}=0$; $(1,2,1)(a,b,c)=0$

$a+2b+c=0 \longrightarrow$ Cualquier terna de $\vec{n}$ que cumpla la ec. es solución.

$$\begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow -1+2b-1=0;\ b=\frac{2}{2};\ b=1 \text{ entonces } \vec{v}=(-1,1,-1)$$

Si multiplicamos el vector $\vec{v}$ por $\frac{1}{|\vec{v}|}$ obtendremos otro vector de módulo la unidad y con la misma dirección.

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2};\ |\vec{v}|=\sqrt{3}$$

$$V'=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \longrightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=V'$$

Ortonormal → Perpendicular/ortogonal y módulo 1.

$$\vec{u}=(1,2,1) \xrightarrow{\text{perpendicular}} \vec{v}=(0,-1,2) \qquad |\vec{v}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$V'=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \Longrightarrow V'=\left(0,\frac{-\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

b)

$$\begin{cases} |\vec{u}| = 4 \;;\; \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = 4 \;;\; \vec{u}\cdot\vec{u} = 16 \\ |\vec{v}| = 3 \;;\; \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = 3 \;;\; \vec{v}\cdot\vec{v} = 9 \\ \text{Ortogonal = perpendicular} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \end{cases}$$

- $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{16} + \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{u}}_{0} + \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{v}}_{9}} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$

  $|\vec{u}+\vec{v}| = 5$

- $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{16} - \underbrace{\vec{u}\,\vec{v}}_{0} - \underbrace{\vec{v}\,\vec{u}}_{0} + \underbrace{\vec{v}\,\vec{v}}_{9}} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

1

b) El producto mixto nos indica la dependencia o independencia de tres vectores ya que se calcula como un determinante, y siendo este distinto de 0, quiere decir que los tres vectores son linealmente independientes.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \vec{u},\vec{v} \text{ y } \vec{w} \rightarrow \text{linealmente independientes.}$$

También nos permite calcular volúmenes dado que es una combinación entre producto escalar y producto vectorial: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$.

3

a) $P = (1,1,1)$

$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = z+1 \;;\; \begin{cases} \vec{r} = (2,1,1) \\ A = (1,0,-1) \end{cases}$

- $\Pi \equiv 2x + y + z + D = 0$

  $2\cdot(1) + 1 + 1 + D = 0 \;;\; D = -4$

  $\Pi \equiv 2x + y + z - 4 = 0$ ($\Pi \perp r$ y pasa por $(1,1,1)$)

b) $\frac{x-1}{2} = y \;;\; x-1 = 2y \;;\; x-2y-1=0$

$y = z+1 \;;\; y-z-1=0$

$$\left.\begin{matrix} x-2y-1=0 \\ y-z-1=0 \end{matrix}\right\} \equiv r$$

$\Pi \equiv 2x+y+z-4=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & -1 & +1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

A, A'

$|A| = (1+4+0)-(0-1+0) = 6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{6} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

Pto. corte $= \left(2, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

4

$$r \equiv \begin{cases} mx - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = m \end{cases} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -3 & m \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)}_{A,\ A'}$$

$$\pi : 2x + 3y - 2z = 4$$

$$|A| = (-10m + 6 + 18) - (10 - 9m + 12) =$$

$$m + 2 = 0 \ ; \ m = -2$$

- Si $m \neq -2 \Rightarrow$ Rang A = Rang $A' = 3 \Rightarrow$ Recta y plano secantes
- Si $m = -2$: $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Rang $A = 2$

$$|A'| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-40 + 4 + 36) - (20 + 12 - 24) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A' = 3$$

Rang $A = 2 \neq$ Rang $A' = 3 \Rightarrow$ Recta y plano paralelos