IDENTIDADES NOTABLES

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

VALOR ABSOLUTO

$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Sea $x \in \mathbb{R}$

PROPIEDADES DEL Nº e Y DE LOS LOGARITMOS

- $a^b = e^{\log(a^b)} = e^{b \cdot \log(a)}$
- $e^{\log(x)} = x$
- $\log(e^x) = x$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}$
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(x^y) = \log(x) \cdot y$
- $\log(0) = -\infty$
- $e^{-\infty} = 0$

DOMINIOS DE f

Polinómicas $= \mathbb{R}$

$\sqrt{a}$: $a \geq 0$

Trigonométricas $= \mathbb{R}$

Logarítmicas $= \mathbb{R}^+$

Exponencial $= \mathbb{R}$

Racional $= \frac{f}{g} = \mathbb{R} \setminus \{g = 0\}$

f CONTINUA SI:

(C1) $\exists f(x_0)$

(C2) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ y es finito

(C3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

CÁLCULO DE IMAGEN DE f: (cont. y monótona)

- $f: [a,b] \to \nearrow = [f(a), f(b)] \to \searrow = [f(b), f(a)]$
- $f: [a,b[\to \nearrow = [f(a), \lim_{x \to b} f(x)[\to \searrow =]\lim_{x \to b} f(x), f(a)]$
- $f:]a,b[\to \nearrow =]\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x)[\to \searrow =]\lim_{x \to b} f(x), \lim_{x \to a} f(x)[$

ASÍNTOTAS

Vertical $\begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

Horizontal $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = L \end{cases}$

ESCALA DE INFINITOS

$\log(x);\ x^b;\ a^x;\ x^x$ — tendencia

ANÁLISIS DE FUNCIONES

① Dominio

② Simetría
$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Par
$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Impar

③ Pts. corte
$x = 0$ (eje y)
$y = 0$ (eje x)

④ Asíntotas

⑤ Monotonía (máx; mín)
- $f'(x) = 0 \begin{cases} a \\ b \end{cases}$ (posibles)

⑥ Cálculo de imagen

⑦ Representación gráfica

$\ominus \nearrow \quad a \searrow b \quad \oplus \nearrow$

tomamos valores en cada intervalo y si el resultado sale $\begin{cases} + \to \text{crece} \\ - \to \text{decrece} \end{cases}$ (segunda coordenada sustituir en $f(x)$).

$f'(x) > 0$ crece
$f'(x) < 0$ decrece

(*) F. periódicas: $\exists T \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(*) F. inversa: $f(x) = x^2$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

- Inyectiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Sobreyectiva: si su recorrido coincide con el conjunto $\mathbb{R}$. $Img(f) = \mathbb{R}$
- Biyectiva: inyec + sobre

TEOREMA DE CEROS DE BOLZANO

(comprobar raíces; sacar continuidad, a partir de esos valores hacer lim si salen $+\infty$ o $-\infty$)

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en los extremos de este toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$

$\exists c \in \mathbb{R} : f(c) = 0$

TEOREMA DE WEIERSTRASS (compacidad)

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la función alcanza su máx. abs y su mín. abs en el intervalo $[a,b]$.

$f([a,b]) = [m, M] = [f(x_0), f(y_0)]$

TEOREMA DE ROLLE

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, existe al menos un pto. $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

$f(a) = f(b)$ — paralela eje x

ECUACIÓN RECTA TANGENTE

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$

Pendiente

INDETERMINACIONES

- $\frac{0}{0}$: factorizo y simplifico
- $\frac{\infty}{\infty}$: exp. factorizo $\begin{cases} 0 \to \text{num} < \text{den} \\ \frac{a}{b} \to \text{num} = \text{den} \\ \pm\infty \to \text{num} > \text{den} \\ \quad \text{la regla signos} \end{cases}$
- $\infty - \infty$: Operar polinomios o multiplicar por el conjugado.
- 1^∞ : $\lim_{x \to \infty} (f(x)^{g(x)}) = e^{\lim_{x \to \infty} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$
- $0 \cdot \infty$: Operar hasta llegar a $\frac{\infty}{\infty}$
- $\left.\begin{matrix} \infty^0 \\ 0^0 \end{matrix}\right\} : f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$

*: cualquier cosa dividida por ∞ es 0.

DERIVADAS

- Producto $\to f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
- Cociente $\to \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$
- Potencial $\Rightarrow f(x) = g(x)^b \Rightarrow f'(x) = b \cdot g(x)^{b-1} \cdot g'(x)$
- Exponencial $\Rightarrow f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow e^{g(x)} \cdot g'(x)$
  $f(x) = a^x = e^{x \log(a)} \Rightarrow f'(x) = e^{x\log(a)} \cdot \log(a)$
  $f(x) = a^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = a^{g(x)} \cdot \log(a) \cdot g'(x)$
- Logarítmica $\Rightarrow f(x) = \log(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
- Trigonométricas
  $f(x) = \sin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$
  $f(x) = \cos(g(x)) \Rightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)$
  $f(x) = \tan(g(x)) \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot g'(x)$

- $f(x) = \frac{n^o}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-n^o \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- $f(x) = \sqrt[2]{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$f(x) = \arctan(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + (g(x))^2}$

$f(x) = \cot(g(x)) \Rightarrow f'(x) = -g'(x)(1 + \cot^2(g(x)))$

$f(x) = \arcsin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - (g(x))^2}}$

$f(x) = \arccos(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{\sqrt{1 - (g(x))^2}}$

INTEGRALES

Sea $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua y F una primitiva de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)$$

REGLA DE BARROW

- Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y F una primitiva de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (TFC)

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua y admite primitiva. Dado $a \in I$, se define $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \left(\begin{array}{c}\text{integral definida de } f \\ \text{con origen en } a\end{array}\right)$$

F es continua y derivable en I y $\left(\exists\, F'(x) = f(x),\ \forall x \in I \Rightarrow \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)\right)$

* Generalización del T.F.C.:

① (g derivable)

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' \overset{TFC}{=} f(g(x))\cdot g'(x)$$

② (h derivable)

$$\left(\int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt\right)' = \left(-\int_a^{h(x)} f(t)\,dt\right)' \overset{TFC}{=} -f(h(x))\cdot h'(x)$$

③ (g o h derivables)

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = \left(\int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' \overset{TFC}{=} \boxed{f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)}$$

RESOLUCIÓN DE INTEGRALES

* Por partes:

→ Orden de prioridad $\left\{\begin{array}{l}\text{A: arcotangentes...} \\ \text{L: logaritmos} \\ \text{P: potenciales} \\ \text{E: exponenciales} \\ \text{S: sen/cos}\end{array}\right.$

$$\to \int \underbrace{u \cdot dv}_{\text{un día vi}} = \underbrace{u\cdot v - \int v\cdot du}_{\text{un valiente soldado vestido de uniforme}}$$

* Descomposición (fracciones simples)

* Cambio de variable

$$\to \int f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{array}\right] = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

* Racionales

$$\to \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

* NOTA: División de polinomios

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = C(t) + \frac{R(t)}{Q(t)} \text{ (grado P < grado Q)}$$

* Trigonométricas

→ $\left.\begin{array}{l}\text{Cambio de variable} \\ \text{Racionales}\end{array}\right\}$ Mix

→ Inmediatas

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$$

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = -\log|\cos(x)|$$

FÓRMULA GENERAL DEL POLINOMIO DE TAYLOR

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(f)$$

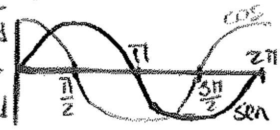
FUNCIONES ELEMENTALES

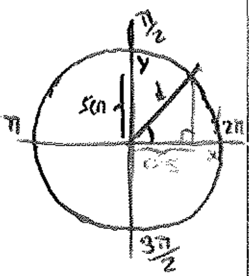
- Potenciales $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^b$ $\left\{\begin{array}{l}\text{· Cont. y derivable} \\ \text{· } b>0\text{: crece} \\ \text{· } b<0\text{: decrece} \\ \text{· } b\neq 0\text{: Biyectiva}\end{array}\right.$

- Logarítmicas $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \log(x) = Ln(x)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{· Biyectiva} \\ \text{· } \exists f^{-1} = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \text{· Cont. y derivable} \\ \text{· Est. creciente}\end{array}\right.$

- F. Trigonométricas $\left\{\begin{array}{l}\text{· Cont. y derivable} \\ \text{· Periódicas con periodo, } T = 2\pi \\ \text{· Cos → Par ; Sen → Impar} \\ \text{· No tienen límite en } +\infty\end{array}\right.$

Vuelta completa





- Exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ $\left\{\begin{array}{l}\text{· Cont. y derivable} \\ \text{· Est. creciente} \\ \text{· } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \to \text{Biyectiva} \\ \text{· Propiedades nº } e\end{array}\right.$

- Logaritmos en base a $\left\{\begin{array}{l}\text{· } \log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)} \\ \text{· } a\neq 1;\ a>0 \\ \text{· } \log_{10}(x\cdot y) = \dfrac{\log(xy)}{\log(10)} = \dfrac{\log(x)+\log(y)}{\log(10)} = \log_{10}(x) + \log_{10}(y) \\ \text{· Inyectiva}\end{array}\right.$

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2
cos(x)	1	1/2	√2/2	3/√2	0
sen(x)	0	3/√2	√2/2	3/2	1

- Exponenciales de base a ($a \in \mathbb{R}^+$) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $\left\{\begin{array}{l}\text{· Cont. y derivable} \\ \text{· } a>1 \to \text{Est. creciente} \\ \text{· } a<1 \to \text{Est. decreciente} \\ \text{· } a\neq 1 \Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \to \text{Biyectiva}\end{array}\right.$

PROPIEDADES DE LA TRIGONOMETRÍA

* $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$ * $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$

* $\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(y)$

$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cdot\cos(x)$

* $\cos(x-y) = \cos(x)\cdot\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(y)$

$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(y) - \cos(x)\cdot\operatorname{sen}(y)$

* $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}$; $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg}(a)-\operatorname{tg}(b)}{1+\operatorname{tg}(a)\cdot\operatorname{tg}(b)}$

* $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$

* $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$

* $\operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$

* $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}}$

* $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{2}}$

* $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$

* $\operatorname{sen}(a) + \operatorname{sen}(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $\cos(a) - \cos(b) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$

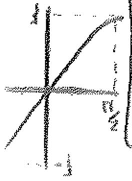
* $\operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right]$

* $\cos(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)\right]$

* $\cos(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

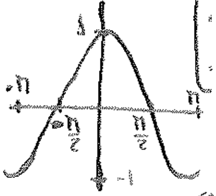
* $\operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b) = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

* Arcoseno



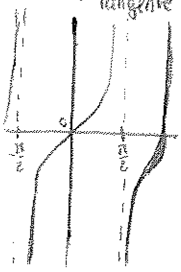
- Biyectiva
- $[-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: est. creciente
- $\operatorname{arcoseno}(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arcosen}(1) = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arcosen}(0) = 0$
- Derivable: $\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in]-1,1[$

* Arcocoseno



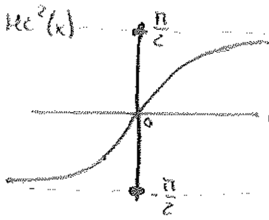
- Est. decreciente $[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$
- Biyectiva
- $\operatorname{arcocoseno}(-1) = \pi$; $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; $\arccos(1) = 0$
- Derivable: $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

* Tangente



- $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$
- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
- Derivable: $1 + tg^2(x)$; $\frac{1}{cos(x)}$; $sec^2(x)$
- Periódica en π
- Asíntota vertical en $\pi/2$

* Arcotangente



- Biyectiva
- Est. creciente: $\mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- Derivable: $\operatorname{arcotan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Asíntota horizontal
  - $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$
  - $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$
- $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $\arctan(0) = 0$; $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

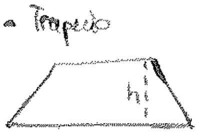
Áreas y perímetros

- Cuadrado

$A = a^2$

$P = 4 \cdot a$

- Trapecio



$A = \frac{M + m}{2} \cdot h$ (M: base mayor; m: base menor)

Triangulo

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$P = a + b + c$

Rectángulo

$A = b \cdot a$

$P = 2(b + a)$

Paralelogramo

$A = b \cdot h$

$P = 2(b + a)$

Círculo

$A = \pi \cdot r^2$

$P = 2\pi r$

Polígono regular

$A = \frac{P \cdot a}{2}$

$P = n \cdot b$

* Criterios para ver carácter de las Series: (Sea $\{a_n\}$ una sucesión de positivos)

- NO TÍPICAS:

* IMPORTANTE: Nunca el valor de una serie es el valor del límite.

• Criterio de la raíz (con exponentes)

1º) Si $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente

2º) Si $\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente

- Si fuese igual a 1, no nos da información este criterio $\Rightarrow$ No válido

• Criterio del cociente (con fracciones)

1º) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ es convergente

2º) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ no es convergente

- Si fuese igual a 1, no nos da información $\Rightarrow$ No válido

1) Dejarlo en una sola fracción.
2) Repasar los límites por tipos de funciones.

• Criterio de Comparación

- Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ (la cual conozco) dos sucesiones de números positivos

1º) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_{n\to+\text{grande}}} = 0$, $\overbrace{\sum b_n \text{ converge}}^{\text{yo lo sé}} \Rightarrow \sum a_n < \sum b_n \Rightarrow \sum a_n$ es convergente

2º) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^+$, $\sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum b_n < \infty \Rightarrow$ A las dos series les pasa lo mismo.

3º) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n^{\to+\text{grande}}}{b_n} = +\infty$, $\sum b_n$ no converge $\Rightarrow \sum a_n > \sum b_n \Rightarrow \sum a_n$ no es convergente.

• Series armónicas destacadas (con las que comparar)

• $\frac{1}{n} \Rightarrow$ No convergente (siempre diverge)

• $\frac{1}{n^p} \Rightarrow$ Si $p > 1 \Rightarrow$ Converge; Si $p \leq 1 \Rightarrow$ No converge

• $\frac{1}{p^n} \Rightarrow$ Converge

- TÍPICAS:

• Series geométricas

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \underset{\text{cte.}}{a} \cdot (\underset{\text{razón (cte)}}{r})^{\overset{\text{variable}}{n}} = a \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$$

• Converge $\Longleftrightarrow -1 \leq r \leq 1$

* Solución: $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} - (1 + r + r^2 + \dots + r^{n_0-1})$

$n_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-r}$

$n_0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-r} - 1$

$n_0 = 2 \Rightarrow \frac{1}{1-r} - (1 + r)$

$n_0 = 3 \Rightarrow \frac{1}{1-r} - (1 + r + r^2)$

$n_0 = 4 \Rightarrow \frac{1}{1-r} - (1 + r + r^2 + r^3)$

1. Estudiar la función: $\dfrac{x \cdot \log^2(x)}{1+\log(x)}$, con $x>0$

- Dominio: $1+\log(x)=0$; $\log(x)=-1$; $e^{\log(x)}=e^{-1}$; $x=e^{-1}$, $x=\dfrac{1}{e}$

  $Dom(f)=\mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{1}{e}\}$

- Monotonía: Dado que es una función continua y derivable por ser composición de funciones que lo son, estudiaré su monotonía aplicando técnicas de derivación.

$$f(x)=\frac{x\cdot\log^2(x)}{1+\log(x)} \Longrightarrow f(x)=\frac{\log^2(x^x)}{1+\log(x)}$$

$$f'(x)=\frac{\left[\left(1\cdot\log^2(x)+x\cdot 2\frac{1}{x}\log(x)\right)\cdot(1+\log(x))\right]-\left[(x\log^2(x))\frac{1}{x}\right]}{(1+\log(x))^2}=$$

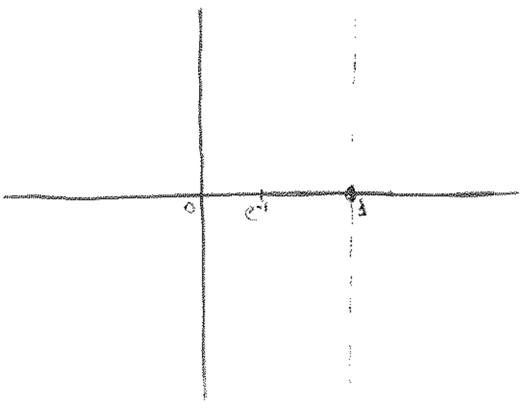
$$=\frac{\left(\log^2(x)+\frac{2\cancel{x}\log(x)}{\cancel{x}}\right)\cdot(1+\log(x))-\left(\frac{\cancel{x}\log^2(x)}{\cancel{x}}\right)}{(1+\log(x))^2}=\frac{\left[(\log^2(x)+2\log(x))\cdot(1+\log(x))\right]-\log^2(x)}{(1+\log(x))^2}=$$

$$=\frac{\cancel{\log^2(x)}+\log^3(x)+2\log(x)+2\log^2(x)-\cancel{\log^2(x)}}{(1+\log(x))^2}=\frac{\log^3+2\log+2\log^2}{(1+\log(x))^2}=\frac{\log(x)\left(\log^2(x)+2\log(x)+2\right)}{(1+\log(x))^2}$$

- Por lo tanto: $\log(x)=0 \iff x=1$ (único punto crítico ya que el segundo factor del numerador nunca se podrá anular)

- Sabiendo que $x>0$ siempre, estudiamos los intervalos de monotonía según $\log(x)$:

De lo cual deducimos que hay un posible punto de inflexión en e^{-1}, y que tenemos un mínimo absoluto en $x=1$ (ya que es el único mínimo que hay)



$f(1)=0$

• Calculamos el valor del conjunto imagen.

Los intervalos de monotonía nos permiten descomponer el conjunto imagen de la siguiente manera:

$$f(\mathbb{R}\setminus\{e^{-1}\}) = f(]0,e^{-1}[) \cup \underbrace{f(]e^{-1},1]) \cup f([1,+\infty[)}_{f\,]e^{-1},+\infty[}$$

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

- $\lim\limits_{x\to e^{-1}} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to e^{-1}_{+}} f(x) = \dfrac{+}{+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to e^{-1}_{-}} f(x) = \dfrac{+}{-} = -\infty \end{cases}$

- $f(1) = 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{ind}{=} \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1\cdot\log^2(x) + 2\log(x)\frac{1}{x}\cdot x}{\frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\log^2(x) + 2\log(x)\right) = +\infty$

- Por tanto el conjunto imagen de f sería:

$$f(\mathbb{R}^+\setminus\{e^{-1}\}) = \,]-\infty,0[\, \cup [0,+\infty[\, \cup [0,+\infty[\, = \mathbb{R}$$

b) Calcular los números reales que verifican que: $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq 3$

$\frac{|2x-1|}{|x+3|} \geq 3$

1º) Saco las raíces del denominador (RECORDAR NO INCLUIRLAS EN LA SOLUCIÓN):

$x+3=0$;

$x=-3$

2º) $|2x-1| \geq 3|x+3|$ (lo podemos pasar sin cambiar el valor de la inecuación dado que es un valor absoluto)

2.1) Suposición de valor:

· Suponemos +, +

$2x-1 \geq 3(x+3)$; $2x-1 \geq 3x+9$; $2x-1-3x-9 \geq 0$; $-x-10 \geq 0$; $x \geq -10$

· Suponemos −, −

$-2x+1 \geq 3(-x-3)$; $-2x+1 \geq -3x-9$; $-2x+3x+1+9 \geq 0$; $x+10 \geq 0$; $x \geq -10$

· Suponemos +, −

$2x-1 \geq 3(-x-3)$; $2x-1 \geq -3x-9$; $2x+3x-1+9 \geq 0$; $5x+8 \geq 0$; $x \geq \frac{-8}{5}$

· Suponemos −, +

$-2x+1 \geq 3(x+3)$; $-2x+1 \geq 3x+9$; $-2x-3x+1-9 \geq 0$; $-5x-8 \geq 0$; $x \geq \frac{8}{-5}$

3º) Por lo que tenemos que las raíces son: -10 y $-8/5$

NO | SÍ | NO

$-\infty$ | -10 | $-8/5$ | $+\infty$

$x=-11$ | $x=-9$ | $x=0$

$\frac{|2\cdot(-11)-1|}{|-11+3|} \geq 3$; $\frac{|2\cdot(-9)-1|}{|-9+3|} \geq 3$; $\frac{|2\cdot 0-1|}{|0+3|} \geq 3$;

$\frac{+23}{+8} \geq 3$ ✗ $\frac{+19}{+6} \geq 3$ ✓ $\frac{+1}{3} \geq 3$ ✗

Por tanto el único intervalo que se cumple dicha inecuación sería en $\left[-10, -\frac{8}{5}\right] \setminus \{-3\}$

Se incluyen ya que es mayor o igual el signo de la inecuación.

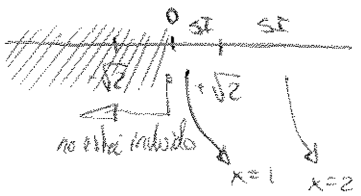
:) Pruebe que $\forall x > 0$, se verifica la desigualdad: $\frac{3}{2}x^2 - 6\log(x) > \frac{1}{2}$

- Tendríamos que probar que $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6\log(x) - \frac{1}{2} > 0$

1º) Calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x) = 3x - \frac{6}{x} = \frac{3x^2 - 6}{x} = \frac{3(x^2-2)}{x} = \frac{3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

2º) Tenemos las raíces: $-\sqrt{2}$ y $+\sqrt{2}$



$\frac{3}{2}1^2 - 6\log(1) - \frac{1}{2} > 0$ ✓; $\frac{3}{2}2^2 - 6\log(2) - \frac{1}{2} > 0$ ✓

- Podemos concluir que la desigualdad planteada es cierta ya que se cumple $\forall x > 0$ desde $]0, +\infty[$

1) Determinar el número de soluciones de la ecuación: $3x^4 - 8x^3 = 24$

• Tenemos que determinar el número de ceros de la función $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 24$

Al ser una ecuación polinómica de grado par no tenemos garantía de que tenga algún cero. Analizamos la derivada:

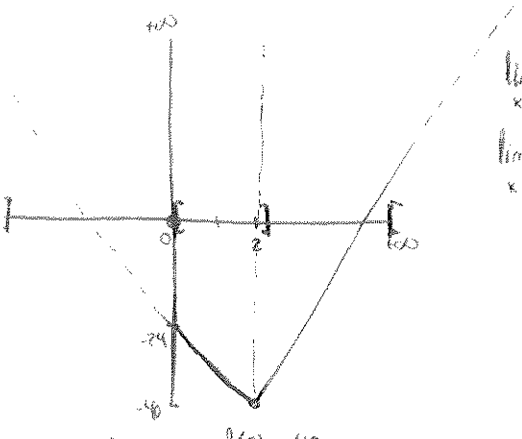
$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12(x^3 - 2x^2) = 12x^2(x-2) = 0 \to x=0,\; x=2 \quad \text{raíces}$$

Estudiamos los intervalos de monotonía determinados por los puntos críticos anteriores:

$-\infty$ ⊖ 0 ⊖ 2 ⊕ $+\infty$

$x=-1$ $x=1$ $x=3$

Por tanto, en $x=2$ se alcanza un mínimo relativo y en $x=0$ no se alcanza extremo.



$f(0) = -24$ $f(2) = -40$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano, podemos asegurar la existencia de un cero en el intervalo $]-\infty, 0[$.
Por otra parte, la función sigue decreciendo hasta su mínimo absoluto $(x=2)$ donde vale -40, y entonces comienza a crecer hasta $+\infty$, por lo que f tiene otro 0 después de $x=2$, en el intervalo $]2, +\infty[$.

En conclusión f tiene dos soluciones, una en $]-\infty, 0[$ y otra en $]2, +\infty[$.

2) Sea f desconocida, cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es:

$$P_3(x) = 1 + 1x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$; calcula P_3 en 0 de la función $g(x) = x \cdot f(x)$.

$n=3$
$a=0$

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$0 \to g(x) = x \cdot f(x) \longrightarrow g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$

$1 \to g'(x) = f(x) + xf'(x) \longrightarrow g'(0) = f(0) + 0\cdot f'(0) = 1 \iff g'(0) = 1$

$2 \to g''(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x) \longrightarrow g''(0) = f'(0) + f'(0) + 0 \cdot f''(0) \iff g''(0) = 1+1+0 = 2$

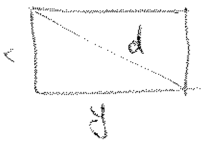
$3 \to g'''(x) = f''(x) + f''(x) + f''(x) + xf'''(x) \longrightarrow g'''(0) = f''(0) + f''(0) + f''(0) + xf'''(0) \iff g'''(0) = 2+2+2+0 = 6$

• Por lo que tenemos:

$$P_3(x) = g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 \iff P_3(x) = 0 + 1 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{6}{3\cdot 2}x^3 =$$

$$= 1 + x^2 + \frac{3}{2}x^3$$

f) De todos los rectángulos de perímetro 20, halla las dimensiones de aquel cuya diagonal sea mínima.



$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=20 \Longleftrightarrow x+y=10 \\ d=\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\}$$ Por lo que tenemos la función a minimizar siguiente:

$$f(x)=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+(10-x)^2} =$$
$$y=10-x$$
$$=\sqrt{x^2+100+x^2-20x} = \sqrt{2x^2-20x+100} = f(x)$$

• Considerando el dom(f) el intervalo $[0, \frac{20}{2}] = [0,10]$ dado que son dimensiones. Calculemos los puntos críticos en el interior:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}\cdot 4x-20 = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

$$f'(x)=\frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}=0 \Longleftrightarrow 2x-10=0 \Longleftrightarrow x=\frac{10}{2}\ ;\ \underline{x=5} \in]0,10[$$

• Evaluamos f en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$$f(0)=10=f(10) > f(5)=707$$

• Por tanto, podemos concluir que el mínimo absoluto de $f(x)$ se alcanza cuando $x=5$, entonces la solución al problema es que los lados del rectángulo (o mejor dicho, cuadrado) sean iguales a 5.

) Sea $f(x)=(x-a)\cos(x)$. Calcula el valor de a sabiendo $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}-2$

• Aplicando el método de integración por partes (un día vi un valiente soldadito vestido de uniforme):

ALPES

$$\int_0^{\pi/2}(x-a)\cos(x)\,dx = \begin{bmatrix} u=(x-a) \longrightarrow du=dx \\ dv=\cos(x)dx \to v=\operatorname{sen}(x)\end{bmatrix} \Longrightarrow \int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big[(x-a)\operatorname{sen}(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx =$$

$$=\big((\pi/2-a)\cdot 1\big)-\big((0-a)\cdot 0\big) - \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}-a-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx =$$

$$=\frac{\pi}{2}-a-\Big[-\cos(x)+C\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-a+\Big[\cos(x)+C\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-a+(0-1) = \frac{\pi}{2}-a-1$$

• Por tanto, despejamos a; sabiendo que $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}-2$

$$\frac{\pi}{2}-a-1=\frac{\pi}{2}-2\ ;\ a-1=-2\ ;\ \underline{\underline{a=1}}$$

1) Calcula: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt}{2x}\right)^{1/x}$

1º) Analizamos la base de la expresión:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt\right)'}{2} \xrightarrow{TFC} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}\cdot 1 - e^{-(-x)^2}\cdot(-1)}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+e^{-x^2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Indeterminación 1^{∞}

2º) Analizamos el exponente de la expresión:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$$

3º) Dado que estamos ante una indeterminación 1^{∞}, aplicamos la regla del nº e para resolverla: $e^{\lim_{x\to 0}(f(x)-1)\cdot g(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt}{2x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt - 2x}{2x^2} \underset{ind}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow[\text{y TFC}]{L'Hôp} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+e^{-x^2}-2}{4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}-2}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{2x} \underset{ind}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}(-2x)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

4º) Por lo que la solución al límite planteado sería:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt}{2x}\right)^{1/x} = e^{0} = 1$$

2) Calcula: $\int \dfrac{x^2+2}{x^3-9x^2+27x-27}dx \xrightarrow{ruffini}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -9 & 27 & -27 \\
3 & & 3 & -18 & 27 \\
\hline
 & 1 & -6 & 9 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & -9 & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\
3 & & 3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$$\frac{x^2+2}{(x-3)^3} = \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_3}{(x-3)^3} = \frac{A_1(x-3)^2+A_2(x-3)+A_3}{(x-3)^3}$$

Entonces tenemos que: $x^2+2 = A_1(x-3)^2+A_2(x-3)+A_3$; $x^2+2 = A_1x^2+9A_1+A_2x-3A_2+A_3$;

$$\underbrace{x^2}_{1}+\underbrace{0\cdot x}_{0}+\underbrace{2}_{2} = \underbrace{A_1x^2}_{1} + \underbrace{x(A_2-6A_1)}_{0} + \underbrace{(9A_1-3A_2+A_3)}_{2}$$

$A_1 = 1$;

$A_2 - 6A_1 \Rightarrow A_2 = 6$

$A_3 + 9(1) - 3\cdot 6 = 2$; $A_3 = 11$

Por lo que tenemos:

$$\int\frac{x^2+2}{x^3-9x^2+27x-27}dx = \int\frac{1}{(x-3)}dx + \int\frac{6}{(x-3)^2}dx + \int\frac{11}{(x-3)^3}dx \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{ble}]{\text{o de}} \begin{bmatrix}(x-3)=t\\ dx=dt\end{bmatrix} \Rightarrow \int\frac{1}{t}dt + \int\frac{6}{t^2}dt + \int\frac{11}{t^3}dt = \ln t + 6\int t^{-2}dt + 11\int t^{-3}dt = \ln t + 6(-1)\int -t^{-2}dt + 11\int\frac{-2}{-2}t^{-3}dt =$$

$$n\ t - 6\frac{1}{t} - \frac{11}{2}t^{-2} \xrightarrow[variable]{cambio} \ln(x-3) + \frac{6}{(x-3)} - \frac{11}{2}(x-3)^{-2} + C$$

1) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función $f(x)=\int_x^{x^2}\cos(t^2)\,dt$.

$a=0$ (centrado en el origen)

$n=2$

• Tenemos que calcular:

$$P_2(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \Longrightarrow f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

• Calculamos los coeficientes:

$$f(0)=\int_0^0 \cos(x^2)\,dx = 1-1 = 0$$

$$f'(0) \overset{TFC}{=} \cos(x^4)\cdot 2x - \cos(x^2) \Rightarrow f'(0)=-1$$

$$f''(0) = 2x(-\operatorname{sen}(x^4))4x^3 + 2\cos(x^4) - (-\operatorname{sen}(x^2))2x = 2\cos(x^4)+2x\operatorname{sen}(x^2) - 8x^4\operatorname{sen}(x^4) \Rightarrow f''(0)=2$$

• Por tanto, el polinomio pedido es:

$$P_2(x) = 0+(-1)x+\frac{2}{2}x^2 \;;$$

$$\underline{P_2(x) = x^2 - x}$$

i) Dada la sucesión, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, comprobar si es convergente (= tiene límite? = monótona y acotada?)

$x_1 = 1$; $x_2 = \sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3\sqrt{3}}$; $x_4 = \sqrt{3x_3} = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ .... (los números cada vez son más grandes)

¿convergente? = ¿Monótona y acotada? = ¿Tiene límite?

1°) Comparar x_1 con x_2:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \sqrt{3} \end{array}\right\} x_1 < x_2 \Rightarrow x_n \text{ es creciente}$$

2°) Demostramos por inducción que es monótona creciente:

2.1) Caso base, n=1:

$x_1 < x_2$ ✓

2.2) Hipótesis de inducción:

Suponemos que $x_n < x_{n+1}$

2.3) Demostramos si $x_{n+1} < x_{n+2}$:

- Partiendo de la suposición anterior $x_n < x_{n+1}$, obtenemos que:

$3x_n < 3x_{n+1}$;

$\underbrace{\sqrt{3x_n}}_{x_{n+1}} < \underbrace{\sqrt{3x_{n+1}}}_{x_{n+2}}$ queda demostrado

$x_{n+1} < x_{n+2}$ ✓ lo que implica que es monótona creciente

3°) Como es monótona creciente, y está acotada inferiormente por 1; comprobamos y calculamos la cota superior para concluir demostrando que es convergente (y por ello, el valor de su límite):

$x_1 < x_n \leq$ cota superior (valor del límite) ;

$1 < x_n \leq 3$

*En sucio:

- Calculo el límite:

$x = \sqrt{3x}$;

$x^2 = 3x$; $x^2 - 3x = 0$;

$x(x-3)$ → $\cancel{x=0}$ ⇒ No porque no es un valor de la sucesión, nunca podrá tender a 0 ya que es monótona creciente

→ $x = 3$

3.1) Demostramos por inducción que para todos $x_n \leq 3$:

3.1.1) Caso base, n=1:

$x_n \leq 3$;

$1 \leq 3$ ✓

3.1.2) Hipótesis de inducción:

Suponemos que $x_n \leq 3$

3.1.3) Demostramos que $x_{n+1} \leq 3$: ◁ queda demostrado

- Partiendo de la suposición anterior $x_n \leq 3$, obtenemos que:

$3x_n \leq 3 \cdot 3$; $\sqrt{3x_n} \leq \sqrt{3 \cdot 3}$; $\sqrt{3x_n} \leq \sqrt{9}$; $\sqrt{3x_n} \leq 3$

$x_{n+1} \leq 3$ ✓ ⇒ Está acotada superior.

4°) Como es monótona y creciente, y está acotada implica que es convergente. Procedemos a calcular su límite:

$x = \sqrt{3x}$; $x^2 = 3x$; $x^2 - 3x = 0$;

$x(x-3)$ → $\cancel{x=0}$ ⇒ No porque no es un valor de la sucesión, nunca podrá tender a 0 ya que es monótona creciente

→ $x = 3$ ⇒ x_n tiende a 3.

) Estudia el carácter de las siguientes series a) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$ b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$

1) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$ ⟶ Aplicando el criterio de la raíz:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n} \overset{ind}{=} 1^{\infty} \underset{regla\ e}{\Longrightarrow} e^{\lim_{x\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n-1}{2n+5}-1\right)} = e^{-2} < 1 \Rightarrow \text{Convergente}$$

$$\lim_{x\to\infty} n\cdot\left(\frac{2n+1-2n-5}{2n+5}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4n}{2n+5} = \frac{-4}{2} = -2$$

2) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$ ⟶ Aplicando el criterio del cociente:

1º) Calculo $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{\frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{1+\log(n)}{n^n}} = \frac{(1+\log(n+1))(n^n)}{(n+1)^{(n+1)}(1+\log(n))} = \frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{1+\log(n)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} =$$

$$= \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}$$

2º) Calculamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}}_{1}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{1^{\infty}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{0} = 0 < 1 \Longrightarrow \text{Convergente}$$

$$\text{regla } e \rightarrow n\left(\frac{n}{n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n-n-1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1} = -1 \Longrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}$$