Cálculo
Examen de Septiembre 2015

1. Calcula los siguientes límites:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\, dt}{x}$ (1.25 ptos.) 1 pto

   b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 + \operatorname{sen}(x)\,\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \right)^{1/x}$ (1.25 ptos.) 1 pto

2. a) Determina el número de ceros de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$. (1.25 ptos.) 1 pto

   b) Calcula $f([1,3])$. (1.25 ptos.) 1 pto

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero es $P_2(x) = 1 + x - x^2$. Calcula el polinomio de Taylor de igual orden y centro de la función $g(x) = \log(f(x))$. (1.25 ptos.)

4. Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   a) Calcula una primitiva, F, de f. (1 pto.)

   b) Calcula, si existen, los puntos donde la pendiente de la recta tangente de F es mínima y donde es máxima. (1 pto.)

5. Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   a) Prueba que $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (0.75 ptos.)

   b) Prueba que $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite. (1 pto.)

6. Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle \sum \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$. (1.25 ptos.) 1 pto

Granada, a 1 de septiembre de 2015.

Cálculo

1. a) Comprueba que la ecuación $x = 4\log(x)$ tiene una única solución, c, en el intervalo $]1/2, 2[$.

   b) Se considera la sucesión definida por recurrencia como

$$x_1 = 1/2, \quad x_{n+1} = 4\log(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Comprueba que la sucesión es convergente y su límite es c. (2 ptos.)

2. Calcula la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida como (2 ptos.)'25

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\, e^{1/x}.$$

3. a) Calcula $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$.

   b) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \cos(t^2)\,dt$. (2 ptos.)'25

4. Estudia el límite de la función $f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x$ en 0 y en $+\infty$. (2 ptos.)

5. a) Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\right)^{-n^3}$.

   b) Calcula $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n+2}+3^{-n}}{5^n}$. (2 ptos.)'5

Granada, a 11 de febrero de 2015.

Examen final febrero 2015.

1) Comprueba que la ecuación $x = 4\log(x)$ tiene una única solución, c, en el intervalo $]1/2, 2[$.

$f(x) = x - 4\log(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Por el teorema de Bolzano:

$$f(1/2) = \frac{1}{2} - 4\log\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\text{prop. log}} \frac{1}{2} - 4(\log(1) - \log(2)) = \frac{1}{2} - 4\overset{0}{\log(1)} + 4\log(2) = \frac{1}{2} + 4\log(2) > 0$$

$$f(2) = 2 - 4\log(2) = 2(1 - 2\log(2)) \xrightarrow{\text{prop. log}} 2(1 - \log(2^2)) = 2(1 - \log(4)) > 0$$

No existe solución, ya que no pasa por 0 en el intervalo $]\frac{1}{2}, 2[$.

2) Calcula la imagen de la función $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} e^{1/x}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} \cdot e^{1/x} + e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \cdot e^{1/x} + e^{1/x} \cdot \left(-\frac{x^2}{x^2(x^2+1)}\right) =$$

$$= \frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot e^{1/x} - \frac{1}{x^2+1} \cdot e^{1/x} = e^{1/x}\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\right) = e^{1/x}\left(\frac{2x - (x^2+1)}{(x^2+1)^2}\right) = e^{1/x}\left(\frac{2x - x^2 - 1}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= e^{1/x}\left(-\frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}\right) = -e^{1/x}\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Observamos que la derivada siempre es negativa, por lo que f es decreciente en todo $\mathbb{R}^*$.

Para calcular la imagen de f necesitamos calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} e^{1/x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x^2+1} e^{1/x} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2+1}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0^+} x^2 \cdot e^{1/x}}_{\text{IIIND}} = 1 \cdot \infty = +\infty$$

$$\text{“}0 \cdot \infty\text{”} \xrightarrow[\text{cambio variable}]{} \frac{1}{x} = y \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty \text{ (por escala de infinitos)}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x^2+1} e^{1/x} = 0$$

Finalmente:

$$f(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty, 0[) \cup f(]0, +\infty[) =]\lim_{x \to 0^-} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)[\cup]\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x)[=$$

$$=]0, 1[\cup]1, +\infty[= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

(f estrictamente decreciente).

3) a) Calcula $\int \frac{\text{sen}^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx$.

b) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función $f(x)=\int_x^{x^2}\cos(t^2)\,dt$.

a) Integral trigonométrica: Cambio de variable $\Rightarrow$ $t=\cos(x) \Rightarrow dt=-\text{sen}(x)\,dx$

$$\int \frac{\text{sen}^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx = \int \frac{\text{sen}^2(x)\,\text{sen}(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx = \int \frac{(1-\cos^2(x))\,\text{sen}(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx \xrightarrow[\text{de variable}]{\text{aplicamos el cambio}}$$

$\boxed{\text{Ley fund. trig: } \text{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1}$

$$\Rightarrow = -\int \frac{(1-t^2)}{\sqrt{t}}dt = \int \frac{t^2-1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-\frac{1}{2}}(t^2-1)\,dt = \int (t^{3/2}-t^{-1/2})\,dt = \frac{2}{5}t^{5/2}-2\sqrt{t}+C_1 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\cos^{5/2}(x)-2\sqrt{\cos(x)}+C_1$$

b) La función $f(x)=\int_x^{x^2}\cos(t^2)\,dt$ es una función definida a través de una integral. Utilizando el TFC sabemos que esta función es derivable. Y según la derivada que obtengamos, deduciremos que también se puede derivar dos veces.

Según el polinomio de Taylor que nos piden hay que calcular:

$$P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \longrightarrow P_2(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Calculamos entonces los coeficientes:

$$f(0)=\int_0^0 \cos(t^2)\,dt=0$$

$$f'(x)\Rightarrow \text{TFC} \Rightarrow f'(x)=\cos(x^4)\,2x-\cos(x^2)\Rightarrow f'(0)=-1$$

$$f''(x)=2\cos(x^4)-8x^4\,\text{sen}(x^4)+2x\,\text{sen}(x^2)\Rightarrow f''(0)=2$$

Por lo que el polinomio pedido es:

$$P_2(x)=0-x+\frac{2}{2!}x^2=x^2-x$$

4) Estudia el límite de la función $f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x$ en 0 y en $+\infty$.

a) En 0:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = \overbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\right)^x}^{1}\cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}(\arctan(x))^x}_{\substack{\text{IND } 0^0\\ \text{(regla nº e)}}}$$

$$0^0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{x\log(\arctan(x))} \Rightarrow \lim_{x\to 0} x\log(\arctan(x)) \overset{\text{IND}}{=} 0\cdot\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\log(\arctan(x))}{1/x} \overset{\text{IND}}{=} \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{L'Hôp}}{\Longrightarrow}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}\overbrace{\frac{-1}{1+x^2}}^{-1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{\arctan(x)}}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \overset{\text{L'Hôp}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} 2x(1+x^2)=0\,;$$

Por tanto: $\lim_{x\to 0}(x\log(\arctan(x)))=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(\arctan(x))^x = e^0=1$; y entonces: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = 1\cdot e^0 = 1$

b) En $+\infty$:

Sabiendo que el $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, tenemos una indeterminación del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = \left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^{+\infty} \overset{IND}{=} 1^\infty \xrightarrow{\text{R. n}^\circ e} \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right) = e^{\lim_{x\to\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2}{\pi}\arctan(x) - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2\arctan(x)-\pi}{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty} x(2\arctan(x)-\pi) \overset{IND}{=} \infty\cdot 0$$

reescribimos expresión

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x(2\arctan(x)-\pi) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\arctan(x)-\pi}{1/x} \overset{IND}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'HôP}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{1+x^2} = -2$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2}{\pi}\arctan(x)-1\right] = \frac{-2}{\pi} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^x = e^{-2/\pi}$$

NOTA:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Relación de problemas tema 1 Reales

1) Para qué valores de x se verifica ?

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff 3(2x-3) < x+2 \iff \begin{cases} \text{Si } x+2>0 \iff 6x-9 < x+2 \iff 5x<11 \iff -2<x<\frac{11}{5} \to \text{Sol} \\ \text{Si } x+2<0 \iff 6x-9 > x+2 \iff 5x>11 \iff \cancel{x>\frac{11}{5} \text{ y } x<-2} \text{ (imposible)} \to \text{No Sol} \end{cases}$$

↳ Observamos que $x \neq -2$

2) Encuentra aquellos valores de x que verifiquen:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$ m.c.m $\to x(1-x)$

↳ Observamos que $x \neq 0, 1$

$$\frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} > 0 \iff x(1-x) > 0$$

$-$ 0 $+$ 1 $-$

$x \in \,]0,1[$

b) $x^2-5x+9 > x \iff x^2-6x+9>0 \iff (x-3)^2>0 \iff x \neq 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \; ; \; x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3 \Rightarrow x \neq 3$$

c) $x^3(x-2)(x+3)^2<0 \iff x^3(x-2)(x+3)^2$

$x \neq 0 \quad x \neq 2 \quad x \neq -3$

$\oplus$ -3 $\ominus$ 0 $\ominus$ 2 $\oplus$

$0<x<2$

$x \in \,]0,2[$

d) $x^2 \leq x \iff x^2-x \leq 0 \iff x(x-1) \leq 0$

$\oplus$ 0 $\ominus$ 1 $\oplus$

$0 \leq x \leq 1$

$x \in [0,1]$

e) $x^3 \leq x \iff x^3-x \leq 0 \iff x(x-1)(x+1) \leq 0$

$\ominus$ -1 $\oplus$ 0 $\ominus$ 1 $\oplus$

$x \in \,]-\infty,-1] \cup [0,1]$

3) Averigua para qué valores de x se verifica que:

a) $|x-1||x+2| = 3$, $|x-1||x+2| = |(x-1)(x+2)| = 3$

$$\iff \begin{cases} (x-1)(x+2)=3 \iff x^2+x-5=0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-5)}}{2} \to \frac{-1+\sqrt{21}}{2} = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{21}) \; ; \; \frac{-1-\sqrt{21}}{2} = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{21}) \\ \text{ó} \\ (x-1)(x+2)=-3 \iff x^2+2x-x-2=-3 \iff x^2+x+1=0 \iff x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow \text{No Sol} \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{21})$

b) $|x^2-x| > 1$

$$\begin{cases} \text{Si } 1 < |x^2-x| = x-x^2 \iff x^2-x+1<0 \text{ No ocurre nunca (No Sol)} \\ \text{Si } 1 < |x^2-x| = x^2-x \iff x^2-x-1>0 \; ; \; x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-4)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

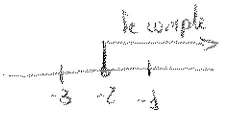
$x \notin \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

c) $|x-1|+|x+1|<1 \to$ Nunca se verifica la desigualdad

d) $|x+1| < |x+3|$

* forma 1:

$|x+1| < |x+3|$



$$\begin{cases} \cdot \text{ Si } x > -1 \Rightarrow x+1 < x+3 \Rightarrow 1 < 3 \text{ (se cumple)} \\ \cdot \text{ Si } -3 < x < -1 \Rightarrow -(x+1) < x+3 \Leftrightarrow -x-1 < x+3 \Leftrightarrow -4 < 2x \Leftrightarrow -2 < x \text{ (solo se cumple en este caso)} \\ \cdot \text{ Si } x < -3 \Rightarrow -(x+1) < -(x+3) \Leftrightarrow -x-1 < -x-3 \Leftrightarrow -1 < -3 \text{ (no se cumple)} \end{cases}$$

$x \in]-2, +\infty[$

* forma 2:

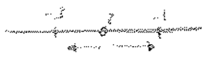
$|x+1| < |x+3| \Leftrightarrow |x+1|^2 < |x+3|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 < (x+3)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1 < x^2+6x+9 \Leftrightarrow -4x-8 < 0 \Leftrightarrow$

NOTA:
$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$

* forma 3:

$$\left.\begin{array}{l} |x+1| = |x-(-1)| = \text{dist}(x,-1) \\ |x+3| = |x-(-3)| = \text{dist}(x,-3) \end{array}\right\} \quad \underset{\text{dist}(x,-1)}{|x+1|} < \underset{\text{dist}(x,-3)}{|x+3|}$$

NOTA:
$\text{dist}(x,y) = |x-y|$

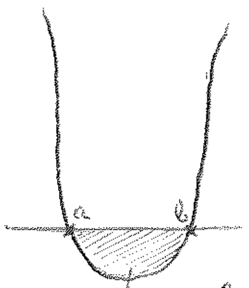


) ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad siguiente?

$x^2-(a+b)x+ab < 0$ → ¿Cuándo es negativo? ⇒ Buscar raíces

$$x = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2-4ab}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2+2ab-4ab}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+b^2-2ab}}{2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2} \Rightarrow$$

entonces ⇒
$$\begin{cases} \cdot \text{ si } a > b \Rightarrow \dfrac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2} = \dfrac{a+b \pm a-b}{2} = \begin{cases} \dfrac{a+b+a-b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \\ \dfrac{a+b-a-b}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases} \\ \cdot \text{ si } a < b \Rightarrow \dfrac{a+b \pm \sqrt{(b-a)^2}}{2} = \dfrac{a+b \pm b-a}{2} = \begin{cases} \dfrac{a+b+b-a}{2} = \dfrac{2b}{2} = b \\ \dfrac{a-b-b-a}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases} \end{cases}$$



→ Negativo entre a y b.

Lo que: $x^2-(a+b)x+ab < 0 \Rightarrow (x-a)(x-b) = 0$

$\Leftrightarrow x \in]\min(a,b), \max(a,b)[$

1. Funciones elementales

) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ → ¿ $\exists \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \Rightarrow -2 \notin \text{Dom}(f)$

	-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	$+$
$x+2$	$-$		$+$	$+$
$\frac{x-2}{x+2}$	$+$		$-$	$+$

$\text{Dom}(f) =]-\infty, -2[\cup [2, +\infty[$

b) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right) \longrightarrow ¿\exists \log\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right) \Longleftrightarrow \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6} > 0 \Longleftrightarrow x^2+4x+6>0$ y $x^2-5x+6>0$

Entonces: 1º) $x^2+4x+6=0$; $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{2}$ $b<0$ $\Longrightarrow$ Un x anula nunca

2º) x^2-5x+6 , $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{6}{2} = 3 \\ \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$

Por lo tanto $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-|x|}} \longrightarrow ?\exists \sqrt{\dfrac{x}{1-|x|}} \Longleftrightarrow \dfrac{x}{1-|x|} \geq 0 \Longleftrightarrow 1-|x|>0$ y $x \geq 0$

Entonces: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases} \Longrightarrow 1-|x| = \begin{cases} \text{si } 1-|x|>0 \Rightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow 1-x=0 ; x=1 ; x<1 \\ \text{si } 1-|x|>0 \Rightarrow 1-(-x)>0 \Leftrightarrow 1+x=0 ; x=-1 ; x \leq -1 \end{cases}$

Por lo tanto $Dom(f) =]-\infty, -1] \cup [0, 1[$

d) $f(x) = \tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \longrightarrow ?\exists \tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{4}+k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

e) $f(x) = \log(\operatorname{sen}(x))$

f) $f(x) = \sqrt{\log(\operatorname{sen}(x))} \longrightarrow ?\exists\ Dom(f) \Leftrightarrow \log(\operatorname{sen}(x)) \geq 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen}(x) \geq 1 \Longleftrightarrow \operatorname{sen}(x) = 1$

1º camino

$x \mapsto \operatorname{sen}(x) \to \log(\operatorname{sen}(x)) \to \sqrt{\log(\operatorname{sen}(x))}$

2º camino

$\log(\operatorname{sen}(x)) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\log(\operatorname{sen}(x))} \geq e^0$

$\Downarrow$

$x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi , k \in \mathbb{Z}$

$Dom(f) = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

) Si $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f, g, $f+g$, $f\cdot g$ y $f\circ g$, $g\circ f$?

$\text{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$

$\text{Dom}(g)=\mathbb{R}^+$

$\text{Dom}(f+g)=\mathbb{R}^+$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\text{Dom}(f\cdot g)=\mathbb{R}^+$

$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$\text{Dom}(g\circ f)=\mathbb{R}^+$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt{x}$

$\text{Dom}(f\circ g)=\mathbb{R}^+$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt{x}$

¿Son pares o impares las siguientes funciones?

) $f(x)=|x+1|-|x-1|$

$f(-x)=|-x+1|-|-x-1|=|x-1|-|x+1|=-f(x)\Longrightarrow f$ es impar $(f(-x)=-f(x))$

) $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)$

$f(-x)=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\log(1-x)-\log(1+x)=-f(x)\Longrightarrow f$ es impar

) $f(x)=e^x+e^{-x}$

$f(-x)=e^{-x}+e^{x}=e^{x}+e^{-x}\Longrightarrow f$ es par $(f(-x)=f(x))$

) $f(x)=\operatorname{sen}(|x|)$

$f(-x)=\operatorname{sen}(|-x|)=\operatorname{sen}(|x|)\Longrightarrow f$ es par

) $f(x)=e^x-e^{-x}$

$f(-x)=e^{-x}-e^{x}=-f(x)\Longrightarrow f$ es impar

) $f(x)=\cos(x^3)$

$f(-x)=\cos(-x^3)=$

¿Para qué números reales es cierta la desigualdad $e^{3x+8}(x+7)>0$?

$\underbrace{e^{3x+8}}_{(+)}\underbrace{(x+7)}_{?}>0\Longleftrightarrow x+7>0\Longleftrightarrow x>-7$

Comprueba que la igualdad $a^{\log(b)}=b^{(\log a)}$ es cierta para cualquier par de números positivos a y b.

$a^{\log(b)}=b^{\log(a)}$

$\Downarrow$

$e^{\log(b)\log(a)}=e^{\log(a)\log(b)}\Longrightarrow\log(b)\log(a)=\log(a)\log(b)$

8) Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)} \iff \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(x)}} = \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(b)}} + \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(c)}} + \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(d)}} \iff$$

$$\iff \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\log(b)}{\log(a)} + \frac{\log(c)}{\log(a)} + \frac{\log(d)}{\log(a)} \iff \log(x) = \log(b) + \log(c) + \log(d) \iff \log(x) = \log(bcd) \iff \underline{x = bcd}$$

i) ¿Para qué valores de x se cumple que ... ?

$$\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2) \Rightarrow \log((x-1)(x-2)) = \log(x-1) + \log(x-2)$$

Hace falta que $\left\{\begin{array}{l} x > 1 \\ x > 2 \\ (x-1)(x-2) > 0 \iff \end{array}\right.$  $\Big\}\ \underline{x > 2}$

) Prueba que:

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0 \iff \log((x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)) = \log((\sqrt{1+x^2})^2 - x^2) =$$

$$= \log(1 + x^2 - x^2) = \log 1 = \underline{0}$$

) Resuelve la ecuación:

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \log(x^{\sqrt{x}}) = \log(\sqrt{x}^{\,x}) \iff \sqrt{x}\cdot\log(x) = x\cdot\log(\overset{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}) \iff \sqrt{x}\cdot\log(x) = x\cdot\log(x^{\frac{1}{2}}) \iff$$

$$\iff \sqrt{x}\cdot\cancel{\log(x)} = \frac{x}{2}\cdot\cancel{\log(x)} \iff \sqrt{x} = \frac{x}{2} \iff x = \frac{x^2}{4} \iff 4x = x^2 \iff x = \cancel{0},\ 4 \Rightarrow x = 4$$

↳ si $\log(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

No puede ser 0 por los log.

$\boxed{\text{*IMPORTANTE: Al elevar los dos miembros al cuadrado quizás obtener soluciones extrañas a la ecuación original. (no en este caso) ¡CUIDADO!}}$

11) Simplifica las siguientes expresiones:

i) $a^{\log(\log(a))/\log(a)} = a^{\log_a(\log(a))} = \underline{\log(a)}$

ii) $\log_a(\log_a(a^{a^x})) = \dfrac{\log(\log_a(a^{a^x}))}{\log(a)} = \dfrac{\log\left(\frac{\log(a^{a^x})}{\log(a)}\right)}{\log(a)} = \dfrac{\log\left(\frac{a^x\cdot\log(a)}{\log(a)}\right)}{\log(a)} = \dfrac{\log(a^x)}{\log(a)} = \dfrac{x\cdot\log(a)}{\log(a)} = \underline{x}$

i) Comprueba que si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $f\circ f\circ f(x) = x$.

$$f\circ f = f(f(x)) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1-x} - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x}$$

$$f\circ f\circ f(x) = \frac{1-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x\left(1-\frac{1}{1-x}\right)}{-1} = \frac{1-x-\frac{1-x}{1-x}}{-1} = \frac{1-x-1}{-1} = \frac{-x}{-1} = \underline{x}$$

6) Calcula la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}=y \Longrightarrow \sqrt[3]{1-x^3}=y\ ;\ \left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^3=y^3\ ;\ 1-x^3=y^3;\ x^3=1-y^3;\ x=\sqrt[3]{1-x^3}$

$x \longrightarrow f(x)=y$

$f=f^{-1}$

b) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}=y \Longrightarrow y(1+e^x)=e^x;\ y+ye^x=e^x;\ y=e^x-ye^x;\ y=e^x(1-y);\ e^x=\dfrac{y}{1-y};$

$\log(e^x)=\log\left(\dfrac{y}{1-y}\right);\ x=\log\left(\dfrac{y}{1-y}\right);\ x=\log(y)-\log(1-y)$

7) ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que...?

$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \Longleftrightarrow \left(\sqrt{x+y}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \Longleftrightarrow x+y=x+y \Longleftrightarrow x-x=y-y \Longleftrightarrow 0=0$

para $x=0$ e $y=0$

8) ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que...?

$\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=0 \Longleftarrow$

jercicios | (límites)

1) Sea $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^{\frac{1}{\log(x)-1}}$, para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$. Estudia el comportamiento en $0, e, +\infty$.

a) En 0:

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log(x)-1} = 0 \left(\text{dado que } \frac{1}{-\infty} \to 0\right)$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} \overset{\text{ind}}{=} 0^0 \Longrightarrow$ Regla del nº e para resolverla $\Rightarrow e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$

$$= \lim_{x\to 0} \log(x)\cdot\frac{1}{\log(x)-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^1 = e$$

0^0: $f(x)^{g(x)} \to e^{g(x)\cdot\log(f(x))}$

b) En e, estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to e^-} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to e^+} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^{+\infty} = +\infty$$

c) En $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} \overset{\text{ind}}{=} \infty^0 \Longrightarrow \text{Regla del nº } e \text{ para resolverla} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^1 = e$$

2) Sea $f: \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)}$. Prueba que f tiene límites en los puntos 0 y $\frac{\pi}{2}$ y calcúlalos.

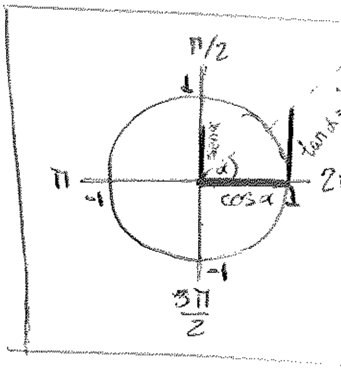
* En 0:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{1}{1} = 1$$

(ya que $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)} = 1$ usando que $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$)

* En $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)^{\operatorname{sen}(x)}}{\operatorname{sen}(x)^{\operatorname{sen}(x)}} = \frac{0}{1} = 0$$



3) Prueba que existe un número real positivo x tal que $\log(x) + \sqrt{x} = 0$

Consideremos la función $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log(x) + \sqrt{x}$. La función f es continua y está definida en un intervalo, además:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Por tanto, (por el Teorema de Bolzano) f cambia de signo y tiene que anularse en $\mathbb{R}^+$.

4) Determina la imagen de la función $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(\log|x|)$.

Como la función es par, $f(x) = f(-x)$, se tiene que $f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+)$. En este caso, f es la composición de la función arcotangente y la función logaritmo neperiano. Dado que ambas son estrictamente crecientes, su composición también lo es. Por tanto:

$$f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+) = \left]\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como: $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\,dt$.

$f'(x) = e^{-(x^3-x^2)} \cdot (3x^2-2x)$; Pts críticos: $f'(x)=0$ $(3x^2-2x=0) \to x(3x-2)=0$; $3x=2$; $x=\frac{2}{3}$, $x=0$ $\Big\}$ Pts. críticos

Como el dominio es $\mathbb{R}^+$ sólo nos quedamos con el punto $x=\frac{2}{3}$.

$0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3}$

$f'(\frac{1}{3}) < 0 \to$ Decrece $\Big\{$ Por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0, \frac{2}{3}]$ y estrictamente creciente en

$f'(\frac{3}{3}) > 0 \to$ Crece $\Big\{$ $[\frac{2}{3}, +\infty[$. En consecuencia f alcanza su mínimo absoluto en $\frac{2}{3}=x$.

) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\int_0^0 e^{-t^2}\,dt}{0} \overset{\text{IND}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp}}{\Longrightarrow} \frac{\text{Aplicamos teorema fundamental del cálculo integral}}{\text{Derivamos } \operatorname{sen}^2(x)}$$

Tanto el numerador $\underbrace{\text{(T° Fundamental del Cálculo)}}$ como el denominador son funciones derivables:

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right)'(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x)$$
$$= e^{-\operatorname{sen}(x)^2}\cos(x) - e^{-(x^2+x)^2}(2x+1)$$

Por tanto, el límite queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2}\cos(x) - e^{-(x^2+x)^2}(2x+1)}{2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)} \overset{\text{IND}}{=} \frac{0}{0} \Longrightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos(x)}}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2}\cos(x) - e^{-(x^2+x)^2}(2x+1)}{\operatorname{sen}(x)}}_{\text{L'Hôp}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)^2 e^{-\operatorname{sen}(x)^2} - \operatorname{sen}(x)\, e^{-\operatorname{sen}(x)^2}\, 2(x^2+x)(2x+1)^2 e^{-(x^2+x)^2} - 2e^{-(x^2+x)^2}}{\cos(x)} = \frac{-2}{1} = -2$$

En conclusión, como $\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos(x)} = 1/2$, el límite que nos piden es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{2}\cdot(-2) = \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

7) Calcule el máximo absoluto de la función $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t})\,dt$.

Sabiendo que el límite: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$, calcule el mínimo absoluto de f.

a) Estudiamos la monotonía de la función f. Para ello analizamos el signo de la derivada:

$\text{T}^{\text{a}}\text{F.C} \Rightarrow f'(x) = e^{-(x-1)^2}\cdot 1 - e^{-2(x-1)}\cdot 1 = e^{-(x-1)^2} - e^{-2(x-1)} = 0 \iff (x-1)^2 = 2(x-1)$

$x^2+1 = 2x-2$; $x^2-2x+3=0$

$x = 2 \pm 4 -$

¿ dsd 1y3?

Limites y continuidad

) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{7x+4} = \frac{1}{7}$ (mismo grado numerador y denominador)

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x+3}{2x^2+2} = 0$ (grado numerador < grado denominador)

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x+2 = 4$

d) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+4}{x-2} = +\infty$

) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{x-4} \right)$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x} = 0$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|}$

Ejercicios $\int$ (integrales)

8) Calcula: (Descomposición en fracciones simples)

$$\int\left(\frac{5}{\cos^2(x)}-\frac{2}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx=\underbrace{\int\left(\frac{5}{\cos^2(x)}\right)dx}_{A_3}-\underbrace{\int\left(\frac{2}{x}\right)dx}_{A_2}+\underbrace{\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx}_{A_1}$$

$$A_1 \Rightarrow 5\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=5\int\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx=5\int\frac{2}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx=5\cdot 2\int\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx=10\cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 \Rightarrow 2\int\frac{1}{x}\,dx=2\ln(x)$$

$$A_3 \Rightarrow 5\int\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx=5\tan(x)$$

$$\rightarrow \int\left(\frac{5}{\cos^2(x)}-\frac{2}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx=5\tan(x)-2\ln(x)+10x^{\frac{1}{2}}+C$$

9) Calcula: (cambio de variable)

$$\int\frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx=\left[\begin{array}{l}e^x=t \longleftrightarrow x=\log(t)\\ dx=\frac{1}{t}\,dt\end{array}\right]=\int\frac{t+3t^2}{2+t}\,\frac{1}{t}\,dt=\int\frac{\cancel{t}(1+3t)}{2+t}\,\frac{1}{\cancel{t}}\,dt=\int\frac{3t+1}{t+2}\,dt=$$

$$=\int 3\,dt-5\int\frac{1}{t+2}\,dt=3t-5\log|t+2|+C=3e^x-5\log(e^x+2)+C$$

$$\begin{array}{r|l}3t+1 & t+2\\ -3t-6 & 3\\ \hline 0\;-5 & \end{array}=3-\frac{5}{t+2}$$

10) Calcula: (racionales ① $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$)

$$\int\frac{2x+1}{x^2-4}\,dx \xrightarrow[\text{Ruffini}]{\text{factor común, id. notables}} (x+2)(x-2)$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)}=\frac{A_1}{(x+2)}+\frac{A_2}{(x-2)}=\frac{A_1(x-2)+A_2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

$2x+1=A_1(x-2)+A_2(x+2)$; $2x+1=A_1x-2A_1+A_2x+2A_2$;

$2x+1=x(A_1+A_2)+(-2A_1+2A_2)$;

$\Downarrow$

$$\begin{array}{l}2=A_1+A_2\\ 1=-2A_1+2A_2\end{array}\quad \times 2\left\{\begin{array}{l}4=2A_1+2A_2\\ 1=-2A_1+2A_2\\ \hline 5=0+4A_2\\ A_2=\frac{5}{4}\end{array}\right.\quad 2=A_1+\frac{5}{4};\ 2-\frac{5}{4}=A_1\quad A_1=\frac{3}{4}$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2-4}\,dx=\int\left(\frac{3/4}{(x+2)}+\frac{5/4}{(x-2)}\right)dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{(x+2)}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{(x-2)}\,dx=\frac{3}{4}\ln(x+2)+\frac{5}{4}\ln(x-2)+C$$

11) Calcula: (racionales (II))

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-9x^2+27x-27}\,dx \xrightarrow[\text{ruffini}]{} \frac{x^2+2}{(x-3)^3} = \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_3}{(x-3)^3} = \frac{A_1(x-3)^2 + A_2(x-3) + A_3}{(x-3)^3}$$

$$x^2+2 = A_1(x-3)^2 + A_2(x-3) + A_3 \; ; \; x^2+2 = A_1x^2 - 6A_1x + 9A_1 + A_2x - 3A_2 + A_3$$

$$\underbrace{x^2}_{1} + \underbrace{0\cdot x}_{0} + \underbrace{2}_{2} = \underbrace{A_1x^2}_{1} + \underbrace{x(A_2-6A_1)}_{0} + \underbrace{(9A_1-3A_2+A_3)}_{2}$$

$A_1 = 1$

$A_2 - 6A_1 = 0 \; ; \; A_2 = 6$

$9A_1 - 3A_2 + A_3 = 2 \; ; \; A_3 = 11$

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-9x^2+27x-27}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)}\,dx + \int \frac{6}{(x-3)^2}\,dx + \int \frac{11}{(x-3)^3}\,dx \xrightarrow{\text{cambio de variable}} \begin{bmatrix} x-3=t \\ dx=dt \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{6}{t^2}\,dt + \int \frac{11}{t^3}\,dt = \ln t + 6\int \frac{1}{t^2}\,dt + 11\int \frac{1}{t^3}\,dt =$$

$$= \ln t + 6\int t^{-2}\,dt + 11\int \frac{-2}{-2} t^{-3}\,dt = \ln t - 6\int -t^{-2}\,dt + 11\int \frac{-2}{-2} t^{-3}\,dt =$$

$$= \ln t - 6\cdot\frac{1}{t} - \frac{11}{2}t^{-2} \xrightarrow[\text{cambio de variable}]{} \ln(x-3) + \frac{6}{(x-3)} - \frac{11}{2}(x-3)^{-2} + C$$

12) Calcula: (funciones trigonométricas)

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1-\cos^2(x)}\,dx \xrightarrow{\text{cambio de variable}} \begin{bmatrix} \cos(x)=t \\ -\operatorname{sen}(x)dx = dt \end{bmatrix} \Rightarrow \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{1}{t^2-1}\,dt \xrightarrow{\text{racionales}}$$

$$\Rightarrow (t^2-1) = (t-1)(t+1) \rightarrow \frac{1}{\cancel{t^2-1}} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{\cancel{t^2-1}} \rightarrow 1 = A(t+1) + B(t-1) \rightarrow$$ Damos los valores de las raíces del denominador a t

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow t=1 \rightarrow 1 = 2A \; ; \; A = \frac{1}{2} \\ t=-1 \rightarrow 1 = B(-1-1) \; ; \; B = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \frac{1}{t^2-1} = \frac{1/2}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \; ;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\,dx \underset{\cos(x)=t}{=} \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| =$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{|t-1|}{|t+1|} \xrightarrow[\text{cambio variable}]{} \frac{1}{2}\log\frac{|\cos(x)-1|}{|\cos(x)+1|} + C$$

13) Integración por partes:

a) $\int \log(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u=\log(x) \Longrightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx \Longrightarrow v=x \end{array}\right] = x\log(x) - \int dx = x\log(x) - x$

b) $\int \arctan(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u=\arctan(x) \Longrightarrow du=\frac{1}{1+x^2} \\ dv=dx \Longrightarrow v=x \end{array}\right] = x\cdot\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

c) $\int \arcsen(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u=\arcsen(x) \Longrightarrow du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx \Longrightarrow v=x \end{array}\right] = x\cdot\arcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\cdot\arcsen(x) + \sqrt{1-x^2}$

d) $\int x\,\sen(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\sen(x) \Longrightarrow v=-\cos(x) \end{array}\right] = -x\cdot\cos(x) + \int\cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sen(x)$

e) $\int x e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x} \end{array}\right] = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(1+x)$

f) $\int x^2e^{3x}dx = \left[\begin{array}{l} u=x^2 \Longrightarrow du=2x\,dx \\ dv=e^{3x}dx \Longrightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right] = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \left[\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=e^{3x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right] = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}\right)$

$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x}$

g) $\int x\,\sen(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int x\,\sen(2x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\sen(2x)dx \Rightarrow v=-\frac{\cos 2x}{2} \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx\right) =$

$= -\frac{x\cos(2x)}{4} + \frac{1}{8}\sen(2x)$

14) Integración de funciones racionales:

a) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx =$ (como num. y den. tienen el mismo grado comenzamos dividiendo) $= \int 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}\,dx =$

$= x + 3\int\frac{dx}{x^2-5x+6} =$ (descomponemos en fracciones simples) $= x + 3\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)} = x + 3\int\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx =$

$= x + 3\log|-3+x| - 3\log|-2+x|$

b) $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx =$ (Dividimos y descomponemos en fracciones simples) $= \int\left(5 + \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}\right)dx =$

$= \int\left(5 + \frac{1}{2x} - \frac{7}{3(x-1)} + \frac{161}{6(x-4)}\right)dx = 5x + \frac{161}{6}\log(-4+x) - \frac{7}{3}\log|-1+x| + \frac{\log|x|}{2}$

c) $\int\frac{dx}{x(x+1)^2} =$ (Descomponemos en fracciones simples e integramos) $= \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{1}{1+x} + \log|x| - \log|1+x|$

d) $\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} =$ (Descomponemos en fracciones simples y resolvemos) $= \int\left(\frac{4x+15}{130(x^2+4x+5)} - \frac{1}{20(x-1)} + \frac{1}{52(x-3)}\right)dx =$

$= \frac{7}{130}\arctan(2+x) + \frac{1}{52}\log|-3+x| - \frac{1}{20}\log|-1+x| + \frac{1}{65}\log|5+4x+x^2|$

e) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$ = (Descomponemos en fracciones simples y sustituimos) $= \int \frac{1}{(b-a)(x+a)}dx + \int \frac{1}{(a-b)(x+b)}dx =$

$= \frac{\log|a+x|}{-a+b} + \frac{\log|b+x|}{a-b}$

f) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ = (Descomponemos en fracciones simples y resolvemos) $= \int \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx =$

$= \frac{\arctan\left(\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log|1+x| - \frac{1}{6}\log|1-x+x^2|$

g) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ = (Utilizando la descomposición se demuestra que:) $= \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \int\left(\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1+b_2x}{x^2+1}\right)dx \Rightarrow$

$\Longrightarrow \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1+x^2)} + \frac{\arctan(x)}{4} + \frac{1}{2}\log|1+x| - \frac{1}{4}\log(1+x^2)$

h) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$ = (Como $(x^4-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$, tenemos la descomposición:) $= \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} +$

$+ \int\left(\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{x-1} + \frac{b_2+b_3x}{x^2+1}\right)dx \Longrightarrow$ (derivando y calculando los coeficientes se obtiene:) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(-1+x^4)} + \frac{3\arctan(x)}{8} - \frac{3}{16}\log|-1+x| + \frac{3}{16}\log|1+x|$.

5) Integración de funciones trigonométricas

a) $\int \cos^3(x)\,dx \Rightarrow$ Cambio de variable $\operatorname{sen}(x)=t \Rightarrow \int \cos^2(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2(x))\cdot\cos(x)\,dx = \int (1-t^2)\,dt =$

$= t - \frac{t^3}{3} = \operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}$

b) $\int \operatorname{sen}^5(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^2(x)\cdot\operatorname{sen}^2(x)\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx = \int (1-\cos^2(x))\cdot(1-\cos^2(x))\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx \Rightarrow$ Cambio de variable $\cos(x)=t$

$\Rightarrow \int (1-t^2)^2\,dt = -\int t^4 - 2t^2 + 1\,dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t \Rightarrow -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \cos(x)$

c) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^2(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\,dx \Rightarrow$ Cambio de variable $\operatorname{sen}(x)=t \Rightarrow \int t^2(1-t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{5}$

d) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\,dx \Rightarrow$ Utilizando la prop: $2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x) \Rightarrow \int \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)}{2}\,dx = \frac{1}{32}(4x - \operatorname{sen}(4x))$

e) $\int \cos^6(3x)\,dx \Rightarrow$ Utilizando repetidamente que $2\cos^2(x) = 1+\cos(2x)$ y el cambio de variable $3x=t \Rightarrow \frac{1}{3}\int \cos^6(t)\,dt =$

$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^3 dt = \frac{1}{24}\int 1 + 3\cos(2t) + 3\cos^2(2t) + \cos^3(2t) = \frac{1}{576}\left(180x + 45\operatorname{sen}(6x) + 9\operatorname{sen}(12x) + \operatorname{sen}(18x)\right)$

f) $\int \frac{\cos^5(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}\,dx \Rightarrow$ Cambio de variable $\operatorname{sen}(x)=t \Rightarrow \int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}\,dt = \int t^{-3} + t - 2t^{-1}\,dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{2}t^2 - 2\log|t| =$

$= -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) - 2\log|\operatorname{sen}(x)|$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx \Rightarrow$ Cambio variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = \int\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt = 2\arctan(t) - t = x - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

?

h) $\displaystyle\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\,dx \Rightarrow$ Como la función es par en seno y coseno, cambio de variable $\tan(x)=t \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1+\tan(x)}{(1-\tan(x))(1+\tan^2(x))}\,dx =$

$$= \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)}\,dt = \int\left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \log(t-1) \Rightarrow \frac{1}{2}\log(\tan^2(x)+1) - \log(\tan(x)-1)$$

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx \Rightarrow$ Utilizamos las fórmulas del ángulo doble, y hacemos el cambio de variable $y=\operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{dy}{1+y} = \log|1+y| = \log(1+\operatorname{sen}^2(x))$$

Examen Final de Cálculo
Curso 2016/2017

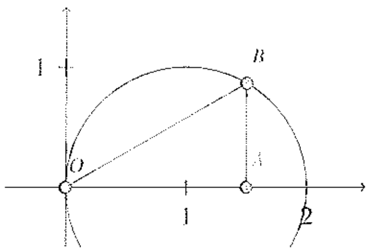
1. **(1.5 puntos)** Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x) = e^{-x^2+x}(1-2x).$$

2. Calcula los siguientes límites:

   a) **(1.25 puntos)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen}(2x))}{\log(\operatorname{sen}(x))}$.

   b) **(1.5 puntos)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\,dt}{\sqrt{x}}$.

3. **(1.5 puntos)** Un triángulo rectángulo OAB, inscrito en la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=1$, tiene un vértice en el origen, otro A en el eje horizontal y el tercero B en dicha circunferencia. Si uno de los catetos es horizontal, calcula B de forma que el triángulo OAB tenga área máxima.



4. **(1.5 puntos)** Calcula $\displaystyle\int (\log(x))^2\,dx$.

5. Estudia la convergencia de las series:

   a) **(1.5 puntos)** $\displaystyle\sum \left(\frac{2(n+1)}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

   b) **(1.25 puntos)** $\displaystyle\sum \left(\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{4\cdot 8\cdots(4n)}\right)^2$.

Granada, 2 de febrero de 2017.

I)

$f(x) = e^{-x^2+x}(1-2x)$ → no se anula

$1-2x=0$; $-2x=-1$; $x=\frac{1}{2}$

$]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) =$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = e^{-x^2+x}(1-2x) + -2\cdot e^{-x^2+x}$

$e^{-x^2+x}\cdot(-2x)(1-2x) + (-2e^{-x^2+x}) =$

$= e^{-x^2+x}\cdot(-2x+4x^2) - 2e^{-x^2+x}$

$= -2xe^{-x^2+x} + 4x^2e^{-x^2+x} - 2e^{-x^2+x}$ → No se anula (dado que no se anula y es composición de funciones crecientes, esta es estrictamente creciente en su dominio)

↗ $-\frac{1}{2}$ $\frac{-2}{5}$ ↗

$-0'6$ ← $-0'5$ → $-0'4$

$-\frac{9}{4}+\frac{3}{2} = -\frac{9}{4}+\frac{6}{4}$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} e^{-x^2+x}(1-2x) = e^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}(1+1) = 2e^{-3/4}$

$f(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}(1-2\cdot\frac{3}{2})$

$e^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}(1-\frac{6}{2})$

$\shortparallel$

$-2e^{-3/4}$

$-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}$

$-\frac{9}{4}+\frac{6}{4} = \frac{-3}{4}$ $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} e^{-x^2+x}(1-2x) = e^{-\frac{2}{3}}$

$-\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}-\frac{2}{4} = -\frac{3}{4}$

$e^{-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}(1-2\cdot\frac{3}{2}) = e$

$(-2x+1)(1-2x)$

$-2x+4x^2+1-2x = -4x+4x^2+1$

$e^{-x^2-x}\left(\left(4x^2-4x+1\right)-2\right)$

$e^{-1-1}(+4+4-1)$

$e^{-2}(7)$

$e^{-(1)+1}(-1)$

$1\cdot(-1) = -1$

$e^{-4+2}(4\cdot4-8-1)$

$e^{-2}(7)$

2)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\sin(2x))}{\log(\sin(x))} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'Hôp}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos(2x)\cdot 2}{\sin(2x)}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \cancel{\ldots}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)\cdot\cos(x)}{2\cos(2x)\cdot\sin(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'Hôp}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)\cdot(-\sin(x)) + 2\cos(2x)\cdot\cos(x)}{-2\sin(2x)\cdot\sin(x) + 2\cos(2x)\cdot\cos(x)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos(2x)\cdot\cos(x)}{2\cos(2x)\cdot\cos(x)}}_{1} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)\cdot(-\sin(x))}{-2\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

$$= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'Hôp}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{2\sin(2x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{\sin(2x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'Hôp}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos(x)}{2\cos(x)} = \frac{2}{2} = 1$$

Per tanto:

$$1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

---

7)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_x^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\,dt}{\sqrt{x}} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{l'Hôp}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(1+x)}{2\sqrt{x}} - \log(1+x^2)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

T.F.C: $f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$

$$\log(1+\sqrt{x}^{\,2})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \log(1+x^2)\cdot 1 = \qquad = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{2\sqrt{x}}\,\log(1+x)}{\cancel{2\sqrt{x}}} - 2\sqrt{x}\,\log(1+x^2)$$

$$= \frac{\log(1+x)}{2\sqrt{x}} - \log(1+x^2) \qquad = \lim_{x\to 0^+} \log(1+x) - 2\sqrt{x}\,\log(1+x^2)$$

Criterio del cociente · $\left(\frac{1\cdot 4 \cdots (3n-2)}{4\cdot 8 \cdots (4n)}\right)^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 4\cdots(3(n+1)-2)}{4\cdot 8\cdots(4(n+1))}}{\frac{1\cdot 4\cdots(3(n)-2)}{4\cdot 8\cdots(4(n))}}$$

$$3n-2 \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 4 \\ 3 = 7 \\ 4 = 10 \end{cases}$$ De 3 en 3

$3n-2 \rightarrow 3(n+1)-2$

$3(3n-2)-2$

$6n-6-2$

$6n-8$

$$4n \begin{cases} 1 = 4 \\ 2 = 8 \\ 3 = 12 \\ 4 = 16 \end{cases}$$

$4n \rightarrow 4(n+1)$

$4(4n)$

$16n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 4\cdots \cancel{(3n-2)}(6n-8)}{4\cdot 8\cdots \cancel{(4n)}(16n)}}{\frac{1\cdot 4\cdots \cancel{(3n-2)}}{4\cdot 8\cdots \cancel{(4n)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4\cdots(6n-8)}{4\,8\cdots(16n)} = \frac{6}{16} < 1$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} e^{-x^2+x}(1-2x) =$$

$$e^{-4} \quad \left(1+2\cdot\frac{+2}{5}\right.$$

$$1+\frac{4}{5} = 2$$

4)

$$\int (\log(x))^2 dx \xRightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}} \begin{bmatrix} t = \log(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{bmatrix} = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} \xRightarrow[\text{variable}]{\text{cambio}} \frac{(\log(x))^3}{3}$$

$$\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

---

5)

i) $\sum \left(\frac{2(n+1)}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$. Aplicando el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow$ Convergente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2(n+1)}{e}\right)^n \frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2(n+1)}{e}\right) \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \text{Convergente}$$

$$\infty \cdot 0 = 0 < 1 \Rightarrow \text{Convergente} \qquad (n!)^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum \frac{(2(n+1))^n}{e^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2(n+1))^n}}{\sqrt[n]{e^n} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{e \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{en!}$$

$$n!$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2(n+1)}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(n+1)}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2(n+1)}{e} \cdot (n!)^{-\frac{1}{n}}$$