

Integración

8

8.1 Funciones integrables 113 8.2 Teorema fundamental del Cálculo 119 8.3 Ejercicios 122

El área de un recinto, la longitud de un cable que cuelga entre dos postes, el volumen o la superficie de una esfera...Estos son el tipo de problemas que vamos a resolver en este capítulo. Para ello presentamos el concepto de integral de una función.

8.1 Funciones integrables

Definición 8.1. Una *partición* P de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito del tipo $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ejemplo 8.2. Los conjuntos $\{0, 1\}$, $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ o $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ son particiones del intervalo $[0, 1]$. No lo son, en cambio, conjuntos como $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\}$, $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

Definición 8.3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición del intervalo. La *suma superior* $S(f, P)$ de la función f relativa a la partición P es

$$S(f, P) = \sup f([x_0, x_1])(x_1 - x_0) + \sup f([x_1, x_2])(x_2 - x_1) + \dots \\ + \sup f([x_{n-1}, x_n])(x_n - x_{n-1}).$$

Análogamente se define la *suma inferior* $I(f, P)$ como

$$I(f, P) = \inf f([x_0, x_1])(x_1 - x_0) + \inf f([x_1, x_2])(x_2 - x_1) + \dots \\ + \inf f([x_{n-1}, x_n])(x_n - x_{n-1}).$$

Las sumas inferiores y superiores que vemos en la siguiente figura son una aproximación del área que queremos calcular. Ahora bien, el valor de la suma inferior siempre será menor que el de la integral y a la suma superior le ocurre lo contrario.

Definición 8.4. La *integral superior* de f se define como

$$\overline{\int}_{[a,b]} f = \inf \{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}.$$

La *integral inferior* de f se define como

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \sup \{I(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}.$$

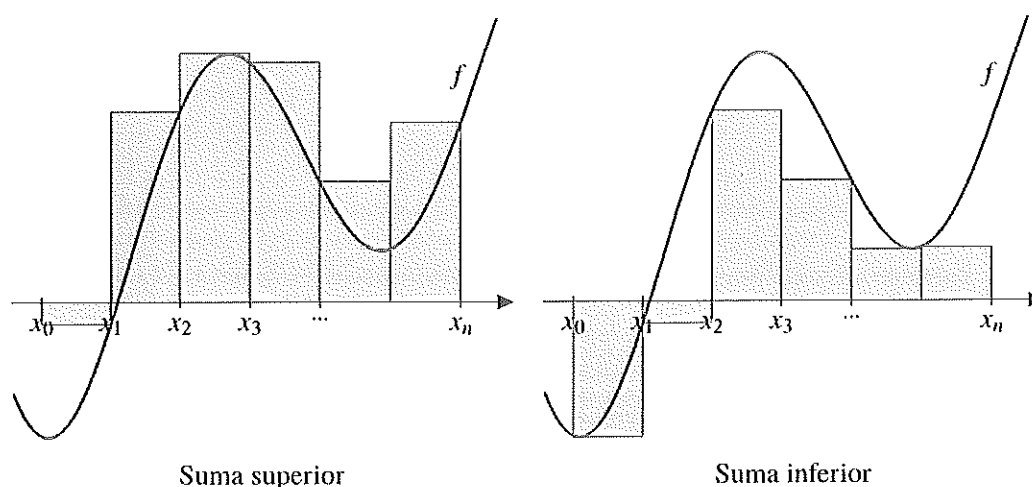


Figura 8.1 Sumas superiores e inferiores

Las integrales superior e inferior son aproximaciones a la integral de la función. En un caso por exceso y en otro por defecto. Cuando ambas aproximaciones coinciden, tenemos una función integrable.

Definición 8.5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es *integrable* si coinciden la integral superior e inferior. En ese caso, denotaremos $\int_{[a,b]} f$ a dicha integral.

También usaremos con frecuencia las notaciones $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x) dx$ si queremos hacer hincapié en la variable de integración.

Ejemplo 8.6. Calcular la integral de $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$ Consideremos la partición P_n del intervalo $[0, 1]$ que consiste en dividirlo en n trozos iguales:

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

Como la función f es creciente, su valor máximo se alcanzará en el extremo de la derecha y el mínimo en el extremos de la izquierda. Con esto es fácil calcular el valor de las sumas superiores e inferiores.

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2n^2}, \text{ y}$$

$$I(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{(n-1)n}{2n^2}.$$

Si hacemos tender n a infinito, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \frac{1}{2}$. Por tanto $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

No es fácil calcular la integral de una función con la definición. En el ejemplo anterior hemos tenido que usar la suma de una progresión aritmética y usar particiones de una forma particular. En el resto del tema veremos qué funciones son integrables, qué propiedades tienen y, por último, el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow nos permitirán calcular integrales de una forma más cómoda.

8.1.1 Propiedades

Comenzamos recogiendo información sobre la integrabilidad de funciones relacionada con las operaciones usuales.

Linealidad de la integral

Con respecto a la suma, el conjunto de las funciones integrables es un espacio vectorial y la integral es una aplicación lineal.

Proposición 8.7. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces

a) La suma $f + g$ es integrable y $\int (f + g) = \int f + \int g$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\int (\lambda f) = \lambda \int f$.

Producto de funciones

La integral que acabamos de introducir también se comporta bien con respecto al producto aunque en este caso *no* hay una identidad que relacione la integral de un producto de funciones con el producto de las integrales.

Proposición 8.8. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables.

a) El producto de ambas funciones, fg , es una función integrable.

b) (Desigualdad de Schwarz) $\left(\int (fg) \right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$.

c) (Desigualdad de Minkowski) $\left(\int (f + g)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int f^2 \right)^{1/2} + \left(\int g^2 \right)^{1/2}$.

Orden

En cuanto al orden, el siguiente resultado nos dice que la integral lo conserva.

Proposición 8.9. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Si $f(x) \leq g(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

En particular, si $f(x) \geq 0$ para cualquier x se tiene que $0 \leq \int_a^b f(x) dx$.

No es evidente de la definición, pero se puede comprobar que si una función es integrable, su valor absoluto también lo es.

Proposición 8.10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces la función $|f|(x) = |f(x)|$ es integrable y

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f|(x) dx.$$

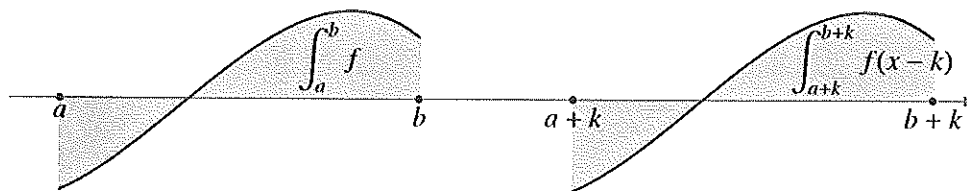
Dominio

Se puede demostrar que si una función es integrable en un intervalo, también lo es en cualquier intervalo contenido en él. Teniendo en cuenta esto, podemos calcular la integral de una función en un intervalo dividiendo este en varios trozos y sumar los resultados. Esto se conoce como aditividad de la integral respecto de su dominio.

Proposición 8.11 (Aditividad respecto del dominio). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in]a, b[$. Entonces f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. En ese caso,

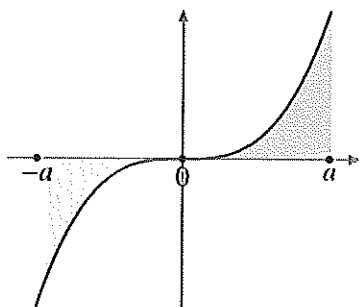
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Observación 8.12. La integral de una función f en un intervalo $[a, b]$ no cambia si “trasladamos” dicha función.



Podemos utilizar esto para simplificar el cálculo de algunas integrales. Por ejemplo, si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



¿Por qué? Sólo tenemos que mirar la gráfica de la función. El área entre 0 y a es igual que el área entre $-a$ y 0 pero con signos opuestos y ambas se cancelan. Por ejemplo

$$\int_{-a}^a x^3 dx = 0.$$

Si por el contrario f es una función par entonces $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.

8.1.2 Condiciones suficientes de integrabilidad

Ya hemos visto que las funciones integrables tienen muchas propiedades interesantes. La siguiente cuestión es ¿hay muchas? ¿Qué funciones son integrables? ¿Tenemos suficientes ejemplos de funciones integrables?

El primer resultado que presentamos nos dice que el conjunto de las funciones integrables incluye a la mayoría de las funciones con las que hemos estado trabajando hasta ahora.

Proposición 8.13 (Condiciones suficientes de integrabilidad). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

a) Si f es continua, entonces es integrable.

b) Si f es monótona, entonces es integrable.

Observa que no hemos mencionado que la función tenga que ser acotada. En ninguno de los casos es necesario: para funciones monótonas es inmediato y para funciones continuas es consecuencia de la propiedad de compacidad.

Podemos ir un poco más lejos, si “estropeamos” una función integrable en unos pocos puntos, ni la integrabilidad ni el valor de la integral se alteran.

Proposición 8.14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verificando que el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ es finito. Entonces g es integrable y

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Este resultado afirma que si se cambia el valor de una función en una cantidad finita de puntos se obtiene una función que sigue siendo integrable y, de hecho, el valor de la integral no cambia.

Observación 8.15. Existen funciones integrables que no son continuas. Este hecho debería estar claro después de haber afirmado que las funciones monótonas son integrables y recordando que ya conocemos funciones monótonas que no son continuas (como por ejemplo la parte entera). De todas formas la última proposición nos da una manera muy fácil de fabricar funciones integrables que no son continuas: tómese una función continua y cámbiesele el valor en un punto. De este modo se obtiene una función que deja de ser continua en dicho punto pero que tiene la misma integral.

Cambiando el valor de una función en un punto sólo obtenemos discontinuidades evitables. Aunque las discontinuidades no sean evitables, si no son demasiadas, la función es integrable.

Proposición 8.16. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades, entonces es integrable.

Existe una caracterización completa de las funciones integrables. Para darla, se necesita hablar de conjuntos “pequeños”: los llamados conjuntos de medida nula. Si la medida, la longitud en este caso de un intervalo acotado es $\ell(I) = \sup(I) - \inf(I)$. Un conjunto de medida nula es un conjunto que tiene longitud cero. Veamos la definición con más detalle.

Definición 8.17. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} . Diremos que A es un *conjunto de medida nula* si dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos acotados $\{I_n\}$ verificando que

a) $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$, y

b) $\ell(I_1) + \ell(I_2) + \cdots + \ell(I_n) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 8.18. Cualquier conjunto finito es de medida nula.

Teorema 8.19 (de Lebesgue). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:

a) f es integrable.

b) El conjunto de puntos de discontinuidad de f es un conjunto de medida nula.

8.1.3 Sumas de Riemann

Una de las dificultades de la definición de integral que hemos dado radica en el hecho de que involucra *todas* las posibles particiones del intervalo $[a, b]$. La segunda dificultad es averiguar cuál es el supremo o el ínfimo de la función en cada uno de los intervalos asociados a una partición. Vamos a dar respuesta a ambas cuestiones:

- En cuanto a las particiones, veremos que es necesario considerar todas sino sólo algunas elegidas adecuadamente. Así nos encontraremos el concepto de norma de una partición.
- En cuanto al segundo punto, el teorema de Darboux nos dirá que no hace falta calcular el supremo ni el ínfimo y que cualquier punto del intervalo puede jugar el mismo papel.

Comencemos con las particiones. El ejemplo típico de partición que hemos usado consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en trozos iguales. Aumentando el número de trozos, nos aproximamos al valor de la integral. En este caso, la longitud de cada uno de los trozos es $\frac{b-a}{n}$, la longitud del intervalo dividido por el número de trozos, n . La norma de una partición nos mide el tamaño de los trozos o, más concretamente, el tamaño del trozo más grande.

Definición 8.20. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. La *norma* de la partición P es

$$\|P\| = \max \{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Si en las sumas inferiores y superiores aproximábamos por rectángulos cuya altura era el supremo o el ínfimo de la función, ahora vamos a elegir como altura el valor de la función en un punto arbitrario en cada uno de los intervalos relativos la partición. Para cada partición, tenemos muchas posibles elecciones de puntos. A cualquiera de éstas, las vamos a llamar sumas integrales o sumas de Riemann.

Definición 8.21. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Una *suma integral* o *suma de Riemann* es una suma de la forma

$$f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(y_n)(x_n - x_{n-1})$$

donde $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ya podemos dar la respuesta a la pregunta que planteamos al principio de la sección: para aproximarnos al valor de la integral de la función sólo tenemos que asegurarnos de que la norma de las particiones tiendan a cero independientemente de cuáles sean los puntos elegidos en el intervalo. Una de las formas más fáciles de conseguirlo es dividiendo el intervalo en n trozos iguales y hacer n tender a infinito.

Esta es una versión “light” del teorema de Darboux que, de hecho, permite caracterizar las funciones integrables utilizando sumas integrales en lugar de sumas superiores e inferiores.

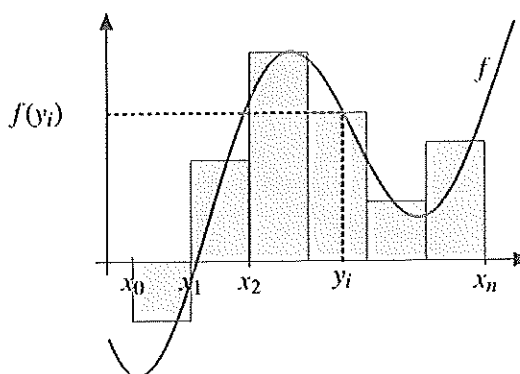


Figura 8.2 Suma integral o de Riemann

Teorema 8.22 (de Darboux). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$. Entonces, si S_n son sumas de Riemann asociadas a P_n se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f$.

8.2 Teorema fundamental del Cálculo

Si f es una función definida y a es un elemento de su dominio, diremos que f es integrable en $[a, a]$ y que $\int_a^a f(x) dx = 0$. También convendremos que $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Definición 8.23. Sea I un intervalo. Diremos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es *localmente integrable* si es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I .

Ejemplo 8.24.

- Las funciones continuas y las funciones monótonas son localmente integrables.
- Si f es integrable en $[a, b]$, es localmente integrable en dicho intervalo.

Lema 8.25. Sea f una función localmente integrable en un intervalo I y sean $a, b, c \in I$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Obsérvese que la comodidad del lema anterior radica en que no sabemos como están ordenados a, b y c .

Definición 8.26. Si f es una función localmente integrable en I y $a \in I$ podemos definir una nueva función que mide como cambia la integral de la función de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

A las funciones F definidas de esta forma las llamaremos *integrales indefinidas* de f .

La integral indefinida es la función que nos da el área sombreada de la Figura 8.3.

Definición 8.27. Sea I un intervalo de \mathbb{R} . Una *primitiva* de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en el interior del intervalo que cumple que $G'(x) = f(x)$ para cualquier x en el interior de I .

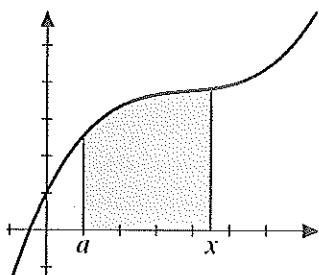


Figura 8.3 Integral indefinida

Observación 8.28. Dos integrales indefinidas se diferencian en una constante. Ocurre lo mismo para dos primitivas de una misma función. En efecto, la diferencia entre dos funciones con la misma derivada tiene derivada cero y por tanto es constante (en un intervalo). En cuanto a integrales indefinidas, si

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{y} \quad G(x) = \int_b^x f(t) dt$$

son integrales indefinidas, entonces

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_a^x f(t) dt - \int_b^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Existe una gran tendencia a confundir integral y primitiva. Es usual que hablemos de “vamos a calcular la integral” cuando nos estamos refiriendo a “encontremos una función cuya derivada sea...”. Los conceptos de integral definida y primitiva son, en principio, independientes. El objetivo de los dos siguientes resultados es poner de manifiesto que existe una clara relación entre ellos y, de paso, obtener una forma práctica de calcular integrales.

Teorema 8.29 (fundamental del Cálculo). Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable y F una integral indefinida de f . Entonces

- a) F es una función continua.
- b) Si f es continua en $a \in I$, entonces F es derivable en a con $F'(a) = f(a)$.

En particular, si f es una función continua, F es una función derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo x en I .

Ejemplo 8.30.

- a) La función parte entera, $E(x)$, es monótona y por tanto integrable en cualquier intervalo. Dicho de otra manera, la función parte entera es localmente integrable en \mathbb{R} . Cualquier integral indefinida será una función continua en todo \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sin embargo, la función parte entera no tiene primitiva. El teorema del valor intermedio para las derivadas (Teorema 5.21) nos dice que la función parte entera no es la derivada de nadie porque su imagen no es un intervalo.

- b) La función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = \pm 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1 < x < 1, \end{cases}$$

no es integrable por no ser acotada. En cambio, sí admite una primitiva: la función arcoseno.

Una de las primeras utilidades del Teorema fundamental del Cálculo es poder definir funciones de una manera rigurosa usando la integral. Por ejemplo, se puede definir la función logaritmo como

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

La función $G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$ es continua si lo son f y g . Si, además, g y h son derivables, y f es continua, entonces G es derivable con

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Ejemplo 8.31. La función $f(x) = \int_1^{x^2+1} \frac{\sin(t)}{t} dt$ es derivable y su derivada es

$$f'(x) = \frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1} 2x.$$

8.2.1 Regla de Barrow

El siguiente resultado, la regla de Barrow, nos permite resolver de modo práctico el cálculo de integrales y sustituirlo por el cálculo de primitivas.

Teorema 8.32 (Regla de Barrow). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y G una primitiva de f . Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Ejemplo 8.33. La primera integral que calculamos fue la de la identidad en el intervalo $[0, 1]$ (ver Ejemplo 8.6). Ahora podemos calcularla mucho más fácilmente.

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 8.34. Las propiedades de la integral nos pueden servir para darnos cuenta de que estamos haciendo algo mal. Por ejemplo:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^4} dx = \int_{-1}^1 x \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{2}{3} \frac{1}{2} (1 + x^2)^{3/2} \right]_{-1}^1 = 0.$$

A primera vista puede parecer correcto, pero la integral de una función continua y positiva no puede valer cero, tiene que ser positiva también. ¿Qué hemos hecho mal? La respuesta es que $\sqrt{x^2}$ es $|x|$ y no x como hemos dicho. Hagámosla correctamente:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^4} dx = \int_{-1}^1 |x| \sqrt{1 + x^2} dx$$

usemos que el integrando es una función par,

$$= 2 \int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{2}{3} (1 + x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}.$$

Corolario 8.35 (Teorema de cambio de variable). Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada ϕ' integrable. Sea I un intervalo tal que $\phi([a, b]) \subset I$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con primitiva G . Entonces

$$\int_a^b (f \circ \phi) \phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = G(\phi(b)) - G(\phi(a)).$$

8.3 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \sin^3(t) dt,$

b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\sin^2(t)} dt,$

c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\sin^2(t)} dt.$

Ejercicio 8.2. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(\log(1+t)) dt,$

b) $F(x) = \int_{x^2}^1 \sin^3(t) dt,$

c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t) dt.$

Ⓔ **Ejercicio 8.3.** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

Ⓔ **Ejercicio 8.4.** Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\sin(x)} e^{-t^2} dt}{\sin^2(x)}.$$

Ⓔ **Ejercicio 8.5.** Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t}) dt.$$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$, calcula el mínimo absoluto de f .

Ejercicio 8.6. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \sin(\sin(t)) dt}{x^2}.$$

Ⓔ Ejercicio 8.7. Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f en \mathbb{R} .

b) Calcula los extremos relativos de f .

c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x^3 - x^2)}$.

Cálculo de primitivas

9

9.1 Cálculo de primitivas

Utilizaremos la notación $\int f(x) dx$ para denotar una primitiva de la función f . Además, abusando del lenguaje, a menudo hablaremos de “integral de la función” cuando deberíamos decir “primitiva de la función”.

Los métodos que vamos a comentar son sólo unos pocos y cubren la mayoría de los casos usuales, pero no debes olvidar que hay muchos más. En cualquier caso, lo primero y más importante es manejar con soltura las derivadas de las funciones elementales. En el Apéndice B puedes encontrar un par de tablas con algunas de las derivadas y primitivas.

Inmediatas	Versión general
$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$	$\int g(x)^m g'(x) dx = \frac{g(x)^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \log x + C$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log g(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{g(x)} g'(x) dx = e^{g(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{g(x)} g'(x) dx = \frac{a^{g(x)}}{\log(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$	$\int \operatorname{sen}(g(x)) g'(x) dx = -\cos(g(x)) + C$
$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C$	$\int \cos(g(x)) g'(x) dx = \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\int \tan x dx = -\log \cos(x) + C$	$\int \tan(g(x)) g'(x) dx = -\log \cos(g(x)) + C$
$\int \cotan(x) dx = \log \operatorname{sen}(x) + C$	$\int \cotan(g(x)) g'(x) dx = \log \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$	$\int \sec^2(g(x)) g'(x) dx = \tan(g(x)) + C$
$\int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\cotan(x) + C$	$\int \operatorname{cosec}^2(g(x)) g'(x) dx = -\cotan(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + C$	$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \operatorname{arcsen}(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctan}(x) + C$	$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} = \operatorname{arctan}(g(x)) + C$

Inmediatas	Versión general
$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$	$\int g(x)^m g'(x) dx = \frac{g(x)^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$	$\int \sinh(g(x)) g'(x) dx = \cosh(g(x)) + C$
$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$	$\int \cosh(g(x)) g'(x) dx = \sinh(g(x)) + C$

9.1.1 Cambio de variable

Mediante un cambio de variable es posible transformar la integral en otra más sencilla. Si hacemos $y = \phi(x)$, $dy = \phi'(x) dx$, se tiene

$$\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int f(y) dy.$$

Para terminar sólo tenemos que deshacer el cambio.

Ejemplo 9.1. Calcular $\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2 + e^x} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2 + e^x} dx &= \left[\begin{array}{l} y = e^x \\ dy = e^x dx \end{array} \right] = \int \frac{y + 3y^2}{2 + y} \cdot \frac{1}{y} dy = \int \frac{1 + 3y}{2 + y} dy \\ &= \int \left(3 - \frac{5}{2 + y} \right) dy \\ &= 3y - 5 \log |y + 2| = 3e^x - 5 \log(e^x + 2). \end{aligned}$$

9.1.2 Integración por partes

Si u y v son dos funciones, teniendo en cuenta que $(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$, obtenemos que

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Esta fórmula aparece escrita en muchas ocasiones de la forma

$$\int u dv = uv - \int v du$$

El teorema especifica con un poco más de rigurosidad las condiciones necesarias.

Teorema 9.2 (Integración por partes). Sean $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables con derivada continua. Entonces uv' y vu' son integrables en $[a, b]$ y

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

Ejemplo 9.3. Calcular $\int x e^x dx$.

$$\int x e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x - 1).$$

Ejemplo 9.4. Calcular $\int \sin(x) e^x dx$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(x)e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(x), \quad du = \cos(x)dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right] = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx \\
&= \left[\begin{array}{l} u = \cos(x), \quad du = -\operatorname{sen}(x)dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right] \\
&= \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \operatorname{sen}(x)e^x dx,
\end{aligned}$$

con lo que despejando tenemos $\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x)$.

9.1.3 Integración de funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, y queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q , podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q . Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q .

Integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{(ax+b)^n}$

El cambio de variable $y = ax + b$ la transforma en una integral inmediata de la forma $\int \frac{P(y)}{y^n} dy$.

Ejemplo 9.5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2 + 5x + 2}{(x-1)^3} dx &= [y = x-1, dy = dx] = \int \frac{3(y+1)^2 + 5(y+1) + 2}{y^3} dy \\
&= \int \frac{3y^2 + 11y + 10}{y^3} dy \\
&= 3 \int \frac{dy}{y} + 11 \int \frac{dy}{y^2} + 10 \int \frac{dy}{y^3} \\
&= 3 \log|y| - \frac{11}{y} - 10 \frac{1}{2y^2} \\
&= 3 \log|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el denominador no tiene raíces reales

Siempre se puede escribir $x^2 + bx + c = (x-d)^2 + k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx &= \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2} dx = \int \frac{M(x-d) + N + Md}{(x-d)^2+k^2} dx \\
&= \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2} dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2} dx \\
&= \frac{M}{2} \log|(x-d)^2+k^2| + (N+Md) \int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}
\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $y = \frac{x-d}{k}$.

Ejemplo 9.6. Calcular $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$.

Como $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, hacemos el cambio $y = x + 1$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2(y-1)+3}{y^2+1} dy = \int \frac{2y}{y^2+1} dy + \int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \log(y^2+1) + \arctan(y) = \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1).\end{aligned}$$

Raíces reales y/o complejas simples

En este caso

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2) \dots (x^2 + b_mx + c_m).$$

Lo que vamos a hacer es descomponer de nuevo en fracciones más sencillas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \\ &\quad + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{x^2 + b_mx + c_m},\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, C_m$ son constantes a determinar. Para calcularlas desarrollamos e igualamos los coeficientes del mismo grado.

Observación 9.7. Si el polinomio $Q(x)$ sólo tiene raíces reales se pueden calcular las constantes A_1, \dots, A_n dando a la variable x los valores a_1, \dots, a_n .

Ejemplo 9.8. Cálculo de $\int \frac{1}{x^4-1} dx$:

Como $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, la descomposición nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Si desarrollamos e igualamos coeficientes:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1}$$

$$\begin{aligned}1 &= (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D) \\ \left. \begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A - B + D &= 0 \\ A + B - C &= 0 \\ A - B - D &= 1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= 1/4 \\ B &= -1/4 \\ C &= 0 \\ D &= -1/2 \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4 - 1} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \log|x - 1| - \frac{1}{4} \log|x + 1| - \frac{1}{2} \arctan(x).\end{aligned}$$

Raíces reales múltiples

En este caso el denominador tiene la forma $Q(x) = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \dots (x - a_n)^{r_n}$, y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{C_{r_n}}{(x-a_n)^{r_n}}$$

Cada una de estas fracciones pertenecen a alguno de los casos ya estudiados.

Ejemplo 9.9. Calcular $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} dx$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \\ &= \frac{A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^2 + C(x-1)(x+1) + D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3} \\ &= \frac{(A+B)x^3 + (3A+B+C)x^2 + (3A-B+D)x + A-B-C-D}{(x-1)(x+1)^3} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\left. \begin{aligned} A+B &= 0 \\ 3A+B+C &= 0 \\ 3A-B+D &= 0 \\ A-B-C-D &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{8} \\ C = -\frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La integral nos queda

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^3} \\ &= \frac{1}{8} \log|x-1| - \frac{1}{8} \log|x+1| + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Raíces reales y complejas múltiples. Método de Hermite

El método que vamos a estudiar, conocido como Método de Hermite, consiste en descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones más simples de una forma muy particular. Pasos a seguir:

Paso 1

Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}.$$

Paso 2

Escribimos el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{x^2+b_mx+c_m} + \\ &\quad + \frac{d}{dx} \left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n-1} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}} \right) \end{aligned}$$

donde $A_1, \dots, A_n, M_1, \dots, M_m, N_1, \dots, N_m$ son coeficientes que tenemos que determinar, y en la fracción que aparece con una derivada $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que

su denominador. En resumen, se trata de escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$. ¿Cómo determinamos todos los coeficientes? Basta efectuar la derivada, reducir todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), e igualar $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes.

Paso 3

Una vez escrita la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x - a_1} dx + \cdots + \int \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + b_1 x + c_1} dx + \cdots + \frac{F(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n - 1} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1 - 1} \cdots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m - 1}}$$

Ejemplo 9.10. Cálculo de $\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} &= \frac{Mx+N}{x^2+9} + \frac{d}{dx} \left(\frac{ax+b}{x^2+9} \right) \\ &= \frac{(Mx+N)(x^2+9)}{(x^2+9)^2} + \frac{a(x^2+9) - 2x(ax+b)}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{Mx^3 + (N-a)x^2 + (9M-2b)x + (9a+9N)}{(x^2+9)^2} \end{aligned}$$

Igualando los numeradores coeficiente a coeficiente, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{rcl} M & = & 0 \\ -a+N & = & 1 \\ -2b+9M & = & 0 \\ 9a+9N & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M=0 & b=0 \\ N=1/2 & a=-1/2 \end{array} \right.$$

De esta forma se tiene

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+9} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+9},$$

y la última integral vale

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} dx = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

En resumen,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{-x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

Ejemplo 9.11. Calcular $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} dx$.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)} \right).$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es $a=0$, $b=5/2$, $c=0$, $d=1$, $A=5$, $M=-5$ y $N=0$; por lo tanto

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \frac{(5/2)x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} + 5 \log(x) - \frac{5}{2} \log(x^2 + 1).$$

9.1.4 Integración de funciones trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sin(ax) \cos(bx)$, $\int \sin(ax) \sin(bx)$, $\int \cos(ax) \cos(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)],$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)].$$

Ejemplo 9.12.

$$\int \sin(3x) \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(5x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(x) dx = -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{2} \cos(x).$$

Integrales de la forma $\int \tan^n(x)$, $\int \cotan^n(x)$

Se reducen a una con grado inferior separando $\tan^2(x)$ o $\cotan^2(x)$ y sustituyéndolo por $\sec^2(x) - 1$ y $\operatorname{cosec}^2(x) - 1$.

Ejemplo 9.13. Calcular $\int \tan^5(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int \tan^5(x) dx &= \int \tan^3(x) \tan^2(x) dx = \int \tan^3(x) (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \int \tan^3(x) \sec^2(x) dx - \int \tan^3(x) dx. \end{aligned}$$

Acabamos por separado cada integral:

$$\begin{aligned} \int \tan^3(x) \sec^2(x) dx &= \frac{1}{4} \tan^4(x) \quad (\text{utilizando el cambio } y = \tan(x)) \\ \int \tan^3(x) dx &= \int \tan(x) \tan^2(x) dx = \int \tan(x) (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \int \tan(x) \sec^2(x) dx - \int \tan(x) dx = \frac{1}{2} \tan^2(x) + \log |\cos(x)|. \end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \sin^m(x) \cos^n(x)$, con n o m enteros impares

Se transforman en una integral racional con el cambio $y = \cos(x)$ (si m es impar) o $y = \sin(x)$ (si n es impar).

Ejemplo 9.14. Calcular $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx}{\sin^2(x)} = \left[\begin{array}{l} y = \sin(x) \\ dy = \cos(x) dx \end{array} \right] = \int \frac{1 - y^2}{y^2} dy \\ &= -\frac{1}{y} - y = -\frac{1}{\sin(x)} - \sin(x). \end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \sin^m(x) \cos^n(x)$, con n y m enteros pares

Se resuelven usando las identidades $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, y $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.

Ejemplo 9.15. Calcular $\int \cos^2(x) dx$.

$$\int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}.$$

Integrales de la forma $\int R(\sin(x), \cos(x))$, R una función racional par.

Diremos que R es una función racional par si $R(\sin(x), \cos(x)) = R(-\sin(x), -\cos(x))$. Se resuelven utilizando el cambio $y = \tan(x)$

Ejemplo 9.16. Calcular $\int \frac{dx}{\sin^3(x) \cos^5(x)}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3(x) \cos^5(x)} &= \left[\begin{array}{l} y = \tan(x) \\ dy = \sec^2 x dx \end{array} \right] = \int \frac{(1+y^2)^3}{y^3} dy \\ &= -\frac{1}{2} \cotan^2(x) + 3 \log |\tan(x)| + \frac{3}{2} \tan^2(x) + \frac{1}{4} \tan^4(x). \end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int R(\sin(x), \cos(x))$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\sin(x)$ y $\cos(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\sin(x)$ y $\cos(x)$. En general, se hace el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Con este cambio convertimos la integral en la integral de una función racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 9.17. Calcular $\int \frac{dx}{\sin(x) - \tan(x)}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin(x) - \tan(x)} &= \int \frac{\cos(x) dx}{\sin(x) \cos(x) - \sin(x)} = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \right] = \dots = \int \frac{t^2 - 1}{2t^3} dt \\ &= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log |t|}{2} = \frac{1}{4 \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

9.1.5 Integración de funciones hiperbólicas

Integrales de la forma $\int R(\sinh(x), \cosh(x))$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$. En general, se hace el cambio de variable $e^x = t$, con lo que la integral es una racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 9.18. Calcular $\int \frac{dx}{1+2\sinh(x)+3\cosh(x)}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{1 + 2 \sinh(x) + 3 \cosh(x)} &= \int \frac{dx}{1 + \frac{5}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}} = \left[\begin{array}{l} e^x = t \\ dx = dt/t \end{array} \right] \\
 &= 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 2t + 1} \\
 &= \arctan\left(\frac{5t + 1}{2}\right) \\
 &= \arctan\left(\frac{5e^x + 1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

En algunos casos, utilizar un método similar al que usamos para calcular primitivas de funciones trigonométricas puede simplificar los cálculos. El siguiente método es un ejemplo de ello.

Integrales de la forma $\int \sinh(ax) \cosh(bx)$, $\int \sinh(ax) \sinh(bx)$ o $\int \cosh(ax) \cosh(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}
 \sinh(x) \sinh(y) &= \frac{1}{2} (\cosh(x+y) - \cosh(x-y)) \\
 \cosh(x) \cosh(y) &= \frac{1}{2} (\cosh(x+y) + \cosh(x-y)) \\
 \sinh(x) \cosh(y) &= \frac{1}{2} (\sinh(x+y) + \sinh(x-y)).
 \end{aligned}$$

Ejemplo 9.19.

$$\int \sinh(3x) \cosh(x) dx = \frac{1}{2} \int \sinh(4x) dx + \frac{1}{2} \int \sinh(2x) dx = -\frac{1}{8} \cosh(4x) - \frac{1}{4} \cosh(2x).$$

9.1.6 Integración de funciones irracionales

Integrales de la forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Se resuelven utilizando el cambio de variable $y^q = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde q es el mínimo común múltiplo de q_1, q_2, \dots, q_n .

Ejemplo 9.20. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Haciendo el cambio $x = y^6$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6y^5}{y^3 + y^2} dy = 6 \int \frac{y^3}{y+1} dy \\
 &= 2y^3 - 3y^2 + 6y - 6 \log|y+1| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \log|\sqrt[6]{x} + 1|.
 \end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$

Se transforman en una integral trigonométrica con el cambio $x = a \sin(t)$ o $x = a \cos(t)$. También se puede realizar el cambio $x = a \tanh(t)$ y se transforma en una integral hiperbólica.

Ejemplo 9.21. Cálculo de $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$:

Hacemos el cambio $x = 2 \operatorname{sen}(t)$, con lo que $dx = 2 \cos(t) dt$ y $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2(t)} = 2 \cos(t)$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{(2 \cos(t))(2 \cos(t))}{4 \operatorname{sen}^2(t)} dt = \int \cotan^2(t) dt \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2(t) - 1) dt = -\cotan(t) - t \end{aligned}$$

usando que $\cotan(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, se tiene que

$$= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$

Se transforman en una integral trigonométrica usando el cambio $x = a \tan(t)$. También se pueden resolver utilizando el cambio $x = a \sinh(t)$.

Ejemplo 9.22. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Hacemos el cambio $x = \tan(t)$, $dx = \sec^2(t) dt$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2(t)}{\tan(t) \sec(t)} dt = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}(t)} = -\log \left| \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right| + \log \left| \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right|.$$

Ejemplo 9.23. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Hacemos el cambio $x = \sinh(t)$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \sinh^2(t) dt = \frac{1}{2} \int (\cosh(2t) - 1) dt = \frac{1}{4} \sinh(2t) - \frac{t}{2}.$$

Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$

Se resuelven utilizando los cambios $x = a \sec(t)$ o $x = a \cosh(t)$.

Ejemplo 9.24. Calcular $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$.

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \tan(t) \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)} dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos^3(t)} dt,$$

que se resuelve aplicando los métodos ya vistos. También podríamos haber utilizado el cambio $x = \cosh(t)$ y, en ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int \sinh^2(t) dt = \int \frac{\cosh(2t) - 1}{2} dt \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sinh(2t) \end{aligned}$$

usando que $\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t) = 2\sqrt{\cosh^2(t) - 1} \cosh(t)$,

$$= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\operatorname{arccosh}(x)}{2}.$$

Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Se reducen a uno de los casos anteriores completando cuadrados, esto es, escribiendo $ax^2 + bx + c$ de la forma $a(x + \alpha)^2 + \beta$.

Ejemplo 9.25. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.

Transformamos el integrando:

$$8x - x^2 = -(x^2 - 8x + 16) + 16 = -(x-4)^2 + 16 = 16 \left(1 - \left(\frac{x-4}{4} \right)^2 \right)$$

y hacemos el cambio de variable $y = (x-4)/4$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16 \left(1 - \left(\frac{x-4}{4} \right)^2 \right)}} = \left[\begin{array}{l} y = (x-4)/4 \\ dy = dx/4 \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{4dy}{4\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen}(y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-4}{4}\right). \end{aligned}$$

9.2 Ejercicios

9.2.1 Integrales inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 9.1. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int 5x^6 dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

b) $\int x(x+1)(x-2) dx$

e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$

c) $\int (2+3x^3)^2 dx$

Ejercicio 9.2. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx$

b) $\int \frac{dx}{e^{x+1}}$

c) $\int x(2x+5)^{10} dx$

9.2.2 Integración por partes

Ejercicio 9.3. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \log(x) dx$

d) $\int x \operatorname{sen}(x) dx$

g) $\int x \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx$

b) $\int \arctan(x) dx$

e) $\int x e^{-x} dx$

c) $\int \operatorname{arcsen}(x) dx$

f) $\int x^2 e^{3x} dx$

9.2.3 Integración de funciones racionales

Ejercicio 9.4. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$

d) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

b) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$

c) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

c) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

Ejercicio 9.5. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{x^3+1}$

c) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

9.2.4 Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 9.6. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \cos^3(x) dx$

e) $\int \cos^6(3x) dx$

b) $\int \sin^5(x) dx$

f) $\int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)} dx$

c) $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$

d) $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

Ejercicio 9.7. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$

d) $\int \frac{dx}{3 \sin^2(x)+5 \cos^2(x)}$

b) $\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} dx$

e) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)} dx$

c) $\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)}$

Integrales impropias

10

10.1 Integrales impropias en intervalos acotados

Hasta ahora hemos visto cómo calcular integrales de funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados. En esta sección vamos a extender la noción de integral a intervalos de cualquier tipo y a funciones no acotadas. Pensemos por un momento en un caso concreto: la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $] -1, 1[$. Sabemos calcular su integral en cualquier intervalo de la forma $[a, b] \subset] -1, 1[$:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen(b) - \arcsen(a).$$

Si queremos definir la integral en $] -1, 1[$, la idea más natural parece tomar límites. Movamos b hacia 1 y a hacia -1 . La forma más cómoda de formalizar estos límites es utilizar sucesiones.

Definición 10.1. Sea $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Diremos que f es *impropiamente integrable* si para cualesquiera sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de elementos de $]a, b[$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ se cumple que existe el límite¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx.$$

En ese caso, usaremos la notación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

La integral impropia satisface propiedades similares a la de la integral ya vista. Sirvan los siguientes resultados como muestra.

Proposición 10.2 (Aditividad respecto del dominio). Sea f una función localmente integrable en el intervalo $]a, b[$ y sea $c \in]a, b[$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- f es impropiamente integrable en $]a, b[$.
- f es impropiamente integrable en $]a, c[$ y en $]c, b[$.

Además, caso de ser ciertas, se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Proposición 10.3. Sean f y g funciones impropiamente integrables en $]a, b[$ y sean λ, μ números reales.

- La función $\lambda f + \mu g$ es impropiamente integrable y

¹ En esta definición no hemos asumido que el límite es único. Esto se obtiene como consecuencia de que el límite exista para cualesquier pareja de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $]a, b[$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Sí hay una diferencia en cuanto a la integrabilidad impropia de la función $|f|$. Hay funciones impropriamente integrables cuyo valor absoluto no lo es. El recíproco sí es cierto.

Teorema 10.4 (Test de comparación). Sea f una función localmente integrable en $]a, b[$ y supongamos que g es una función impropriamente integrable en $]a, b[$ con $|f(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in]a, b[$. Entonces f es impropriamente integrable y se cumple que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

En particular si f es localmente integrable y $|f|$ es impropriamente integrable, f también es impropriamente integrable.

Ejemplo 10.5. La función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$ es impropriamente integrable en $]0, +\infty[$ pero $|f|$ no lo es.

En el caso de funciones continuas la situación es un poco más sencilla. El teorema fundamental del Cálculo nos garantiza que la integral indefinida es una primitiva. Vamos a ver tres casos posibles.

10.2 Integración en intervalos no acotados

Supongamos que tenemos una función definida en un intervalo no acotado, $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, que es continua en todo $[a, +\infty[$. Podemos buscar una primitiva de f , llamémosla F , y estudiar su comportamiento en $+\infty$: si la función F tiene límite en $+\infty$, diremos que existe la integral impropia de f en $[a, +\infty[$, y dicha integral valdrá:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right) - F(a),$$

es decir, la integral vale " $F(+\infty) - F(a)$ ", considerando $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$.

Una vez que hemos definido una integral para este tipo de funciones, podemos generalizar el área bajo una curva, la longitud de un arco de curva, la superficie y el volumen de un sólido de revolución, etc. siendo todas fórmulas perfectamente válidas.

El caso de una función definida en un intervalo de la forma $] -\infty, b]$ es completamente análogo. Además, si tenemos una función definida en todo \mathbb{R} , podemos dividir la integral como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Si la suma vale " $\infty - \infty$ ", no podemos calcular la integral.

Ejemplo 10.6. Calcular el área comprendida bajo la curva $y = 1/x^2$ en el intervalo $[1, +\infty[$. Viendo el área bajo la curva como una integral se tiene que

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \right) - (-1) = 1.$$

10.3 Algunos casos particulares

10.3.1 Integración de funciones continuas en intervalos abiertos

Se trata de calcular integrales de funciones definidas en un intervalo abierto en uno de sus extremos, y que tienen una asíntota vertical en dicho extremo. Supongamos que el intervalo es de la forma $]a, b]$; el caso de un intervalo $[a, b[$ es completamente análogo.

Sea pues $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a la que queremos calcular su integral, y sea F una primitiva suya. Estudiamos entonces el límite por la derecha de la primitiva en a , y si existe podemos calcular la integral de f :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - \left(\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \right)$$

Nota: Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$. Si tenemos una función continua en un intervalo abierto $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, su integral valdrá

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \right)$$

Otra vez, si la suma vale “ $\infty - \infty$ ”, *no podemos calcular la integral*.

Al igual que antes, podemos aplicar estos resultados al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

Ejemplo 10.7. Calcular el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en $]0, 1]$.

Aplicamos la fórmula dada, y tenemos

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = 2 - \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \right) = 2.$$

10.3.2 Integración de funciones continuas en un intervalo salvo un punto interior

Supongamos que tenemos una función $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $[a, b] \setminus \{c\}$ y que tiene una asíntota vertical en $x = c$. Entonces, si queremos calcular la integral de f entre a y b , tenemos que dividir dicha integral en dos trozos: la integral en $[a, c[$ y la integral en $]c, b]$. Como estos dos casos quedan contemplados en los supuestos anteriores, podemos calcular la integral de f entre a y b como

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

El único problema que se puede presentar es, de nuevo, que la suma valga “ $\infty - \infty$ ”, en cuyo caso *no podemos calcular la integral*.

Ejemplo 10.8. Calcular $\int_{-1}^1 \log(x^2) dx$.

La función que nos dan es $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que para calcular su integral dividimos el intervalo en dos partes, $[-1, 0[$ y $]0, 1]$. Cada una de las dos integrales vale:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \log(x^2) dx &= \left[x \log(x^2) - 2x \right]_{-1}^0 = -2 \\ \int_0^1 \log(x^2) dx &= \left[x \log(x^2) - 2x \right]_0^1 = -2, \end{aligned}$$

con lo que se tiene que $\int_{-1}^1 \log(x^2) dx = -2 - 2 = -4$.

Ejemplo 10.9. Calcular $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Si hacemos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - (+1) = -2!!!!$$

Pero la función que estamos integrando es positiva, ¡no tiene sentido que tenga integral negativa!
¿Qué ha pasado? Como la función $1/x^2$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, tenemos que descomponer la integral como

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx,$$

pero

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1/x) - (+1) = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_0^1 = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1/x) = +\infty,$$

y por tanto $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = +\infty$.

10.4 Ejercicios

Ejercicio 10.1. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right)$

b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \arcsen\left(\frac{2}{3}\right) - \arcsen\left(\frac{7}{12}\right)$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{\pi}{6}$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi+\log(2)}{10}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 10.2. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx = 3\pi$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 dx = \frac{4}{3}$

d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(y) \cos^2(y) dy = \frac{\pi}{16}$

Aplicaciones de la integral

11

11.1 Cálculo de áreas

El área entre dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

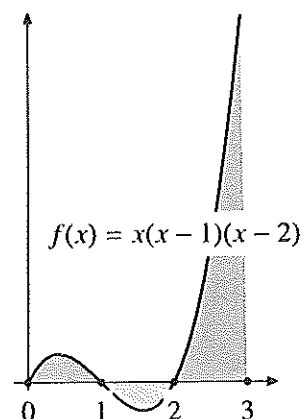
$$\text{Área} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Hasta ahora no hemos visto ningún método que nos permita calcular primitivas en las que aparecen valores absolutos. Por eso, antes de comenzar a integrar, es necesario estudiar cuánto vale $|f - g|$ o, dicho de otra forma, averiguar cuál de las dos funciones es la mayor.

Ejemplo 11.1. Calcular el área entre la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$.

Dividimos en intervalos donde sepamos el signo de la función e integramos:

$$\begin{aligned} \int_0^3 |f(x)| dx &= \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx + \int_2^3 |f(x)| dx \\ &= \int_0^1 x(x-1)(x-2) dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2) dx \\ &\quad + \int_2^3 x(x-1)(x-2) dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{15} + \frac{19}{30} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



11.2 Longitudes de curvas

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{longitud} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ejemplo 11.2. Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.

La ecuación de una circunferencia de radio 1 es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos despejar y en la parte positiva: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ con $x \in [-1, 1]$. Así, la longitud de *media* circunferencia será:

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \dots = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \left[\arcsen(x) \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

11.3 Área de sólidos de revolución

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en $[a, b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$\text{Superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ejemplo 11.3. Calcular la superficie de una esfera de radio 1.

Podemos generar una esfera girando respecto del eje OX la curva del ejemplo anterior

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

De esta forma, la superficie será:

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \dots = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-1}^1 dx = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

11.4 Volúmenes de sólidos de revolución

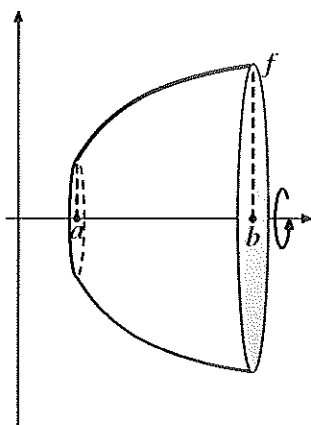


Figura 11.1 Volumen al girar respecto al eje OX

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX es

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

y el volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

En este segundo caso, la función f tiene que ser positiva.

Ejemplo 11.4. Calcular el volumen de una esfera de radio 1.

Podemos generar una esfera rotando respecto del eje OX el área bajo la curva $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ $x \in [-1, 1]$ Con ello, el volumen será

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 f(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

11.5 Algunas funciones definidas mediante integrales

11.5.1 La función gamma

La función gamma $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Sucesiones de números reales

13

13.1 Definición y propiedades	153	13.2 Sucesiones parciales	156	13.3 Monotonía	156
13.4 Sucesiones divergentes	159	13.5 Criterios de convergencia	160		
13.6 Velocidad de convergencia	163	13.7 Ejercicios	164		

El concepto de límite es básico en Cálculo y, de entre las diversas posibilidades, hemos elegido que haga su aparición asociado a sucesiones de números reales. La idea intuitiva de sucesión es sencilla: una sucesión es una lista ordenada.

13.1 Definición y propiedades

Definición 13.1. Una *sucesión* de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ n &\mapsto x_n. \end{aligned}$$

Llamamos *término general* a x_n y, usualmente, no mencionaremos la función sino sólo la imagen de la función. Dicho de otra manera, hablaremos de sucesión con término general x_n y la notaremos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo 13.2. Hay dos formas usuales de definir una sucesión: mediante una fórmula general que nos permita obtener todos los términos de la sucesión o, por recurrencia, o sea obtenemos cada término en función de los anteriores. Por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión 1, 3, 5, 7, ... Como puedes ver, sabemos todos los términos de la sucesión. El que ocupa el lugar 53 es $\frac{1}{105}$. En cambio, la sucesión definida como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ conocida como sucesión de Fibonacci está definida por recurrencia. Para calcular un término tenemos que conocer previamente el valor de los dos anteriores. No importa. Puesto que sabemos los dos primeros, podemos calcular el tercero y así sucesivamente: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

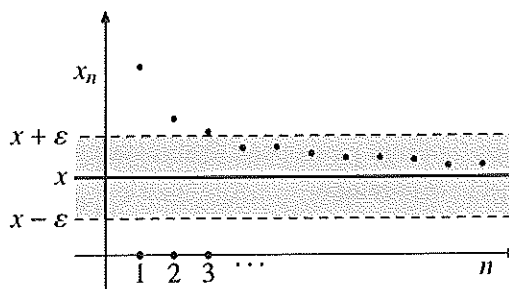


Figura 13.1 Límite de una sucesión

Definición 13.3. Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *convergente* si existe $x \in \mathbb{R}$ verificando que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ o $\{x_n\} \rightarrow x$.

Se puede comprobar fácilmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ si, y sólo si, } \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0.$$

Ejemplo 13.4.

- a) La sucesión constantes son convergentes y su límite es dicha constante.
- b) La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a cero.
- c) La sucesión $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente.
- d) La sucesión $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente.

13.1.1 Sucesiones y acotación**Definición 13.5.**

- a) La sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está *acotada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) si existe $M \in \mathbb{R}$ verificando que $x_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (respectivamente $x_n \geq M$).
- b) La sucesión está *acotada* si lo está superior e inferiormente o, lo que es lo mismo, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$, para cualquier natural n .

Proposición 13.6. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Aplicamos la definición de convergencia para $\varepsilon = 1$. Entonces existe un natural n_0 tal que $|x_n - x| < 1$ para $n \geq n_0$. En particular, el conjunto $\{x_n : n \geq n_0\}$ está acotado superiormente por $x + 1$ e inferiormente por $x - 1$. El resto de los términos de la sucesión también está acotado por ser un conjunto finito. Por tanto, la unión de ambos está acotado. \square

Observación 13.7. El recíproco no es cierto. La sucesión $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada pero no es convergente.

13.1.2 Álgebra de límites

Después de definir el límite de una sucesión, los siguientes resultados relacionan su comportamiento y las operaciones usuales de números reales. En primer lugar, comenzamos con la suma y el producto.

Proposición 13.8. *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Entonces*

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$,
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right)$,
- c) si $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$.

Proposición 13.9. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a cero e $\{y_n\}$ una sucesión acotada. Entonces $\{x_n y_n\}$ es convergente a cero.*

Ejemplo 13.10. Vamos a calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3n^4 - 2n + 7)}{\log(2n^2 + 2n - 1)}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3n^4 - 2n + 7)}{\log(2n^2 + 2n - 1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(n^4\left(3 - \frac{2}{n^3} + \frac{7}{n^4}\right)\right)}{\log\left(n^2\left(2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^4) + \log\left(3 - \frac{2}{n^3} + \frac{7}{n^4}\right)}{\log(n^2) + \log\left(2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \log(n) + \log\left(3 - \frac{2}{n^3} + \frac{7}{n^4}\right)}{2 \log(n) + \log\left(2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}
 \end{aligned}$$

dividimos por $\log(n)$ numerador y denominador

$$= \frac{4}{2} = 2.$$

13.1.3 Convergencia y orden

En esta sección vamos a hacer relacionar convergencia y orden. El primer resultado nos dice que las desigualdades entre los términos de dos sucesiones se trasladan a sus respectivos límites. De hecho, no hace falta que todos los términos verifiquen la desigualdad. Es suficiente con que, por ejemplo, para los términos pares o los impares tengamos la desigualdad.

Proposición 13.11. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones convergentes. Supongamos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n\}$ es infinito. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

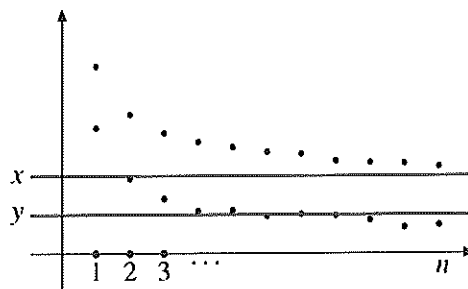


Figura 13.2 El orden se conserva al tomar límites

Proposición 13.12 (Regla del sandwich). Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones de números reales verificando que

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ y que

b) $x_n \leq y_n \leq z_n$, para cualquier n natural.

Entonces $\{y_n\}$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Ejemplo 13.13. Vamos a calcular el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} + \frac{2}{n^2 \sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2 \sqrt{n}}.$$

Usando que

$$\frac{1}{n^2 \sqrt{n}} \leq \frac{m}{n^2 \sqrt{n}} \leq \frac{n}{n^2 \sqrt{n}}$$

para cualquier natural m entre 1 y n , podemos acotar superior e inferiormente la sucesión:

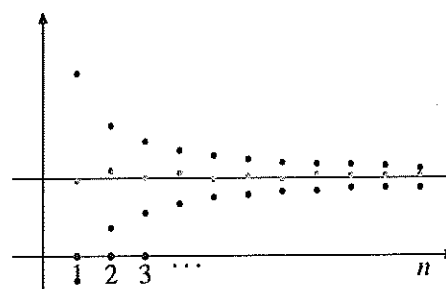


Figura 13.3 Límites y sucesiones encajadas

$$n \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} + \frac{2}{n^2 \sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2 \sqrt{n}} \leq n \frac{n}{n^2 \sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como nuestra sucesión está encajada entre dos sucesiones que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{n}} + \frac{2}{n^2 \sqrt{n}} + \cdots + \frac{n}{n^2 \sqrt{n}} = 0.$$

13.2 Sucesiones parciales

Si una sucesión es una “lista” de números, podemos construir una lista nueva escogiendo algunos de estos, por ejemplo los que ocupan un lugar par o impar. A este tipo de sucesiones las llamaremos parciales de la sucesión original.

Definición 13.14. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{y_n\}$ es una *sucesión parcial* de $\{x_n\}$ si existe una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{\sigma(n)}$ para cualquier natural n .

Ejemplo 13.15.

- a) El primer ejemplo de sucesión parcial de una sucesión dada es simple: eliminemos una cantidad finita de términos al inicio de la sucesión. Por ejemplo, eliminar los tres primeros términos se consigue con la aplicación $\sigma(n) = n + 3$. La sucesión $\{x_{n+3}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es lo que se llama una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

En general, si p es un número natural, la sucesión parcial $\{x_{n+p}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una *cola* de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. La convergencia de una sucesión y de sus colas es equivalente: la sucesión converge si, y sólo si, lo hacen todas o alguna de sus colas.

- b) Quedarnos sólo con los términos que ocupan una posición par o impar consiste en considerar las parciales $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ o $\{x_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposición 13.16. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales convergente. Entonces cualquier parcial es convergente y con el mismo límite.

Este resultado se suele usar para demostrar que una sucesión *no* es convergente: si existe alguna parcial no convergente o existen parciales distintas convergentes a límites distintos, la sucesión original no es convergente.

Ejemplo 13.17. La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente puesto que la parcial de los pares converge a 1 mientras que la de los impares lo hace a -1 .

13.3 Monotonía

La definición de monotonía para funciones cualesquiera se puede enunciar para sucesiones.

Definición 13.18. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *creciente* si cumple que $x_n \leq x_{n+1}$ para todo natural n . Dicho de otra forma, cuando avanzamos en la lista los términos son mayores:

$$n \leq m \implies x_n \leq x_m.$$

Análogamente, diremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *decreciente* si cumple que $x_n \geq x_{n+1}$ para todo natural n o, lo que es lo mismo, $n \leq m \implies x_n \geq x_m$.

Evidentemente no todas las sucesiones son monótonas al igual que no todas las funciones son monótonas. Por ejemplo, la sucesión $\{\cos(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es monótona ni tampoco lo es la sucesión $\{(-1)^n\}$.

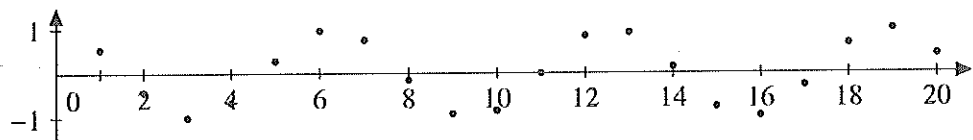


Figura 13.4 La sucesión $\{\cos(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es monótona

Eso sí, de cualquier sucesión siempre podemos elegir términos cada vez mayores o cada vez menores. En otras palabras, siempre podemos elegir una sucesión parcial monótona.

Proposición 13.19. *Toda sucesión tiene una parcial monótona.*

¿Cuál es el interés de las sucesiones monótonas? Son más fáciles de estudiar. Por ejemplo, la convergencia de las sucesiones monótonas se reduce al estudio de su acotación.

Proposición 13.20. *Una sucesión monótona es convergente si, y sólo si, está acotada. De hecho, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

El hecho de que las sucesiones monótonas y acotadas sean convergentes nos permite demostrar que una sucesión es convergente sin, teóricamente, conocer su límite.

Ejemplo 13.21. Vamos a estudiar la convergencia de la sucesión

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}, \forall n \geq 1.$$

Para demostrar que esta sucesión es convergente vamos a comprobar que es una sucesión monótona y acotada.

a) Observa que $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$. Vamos a demostrar por inducción que la sucesión es creciente.

i) El primer paso ya lo tenemos dado: $x_2 = \sqrt{2} > x_1 = 1$.

ii) Si ahora suponemos que $x_n < x_{n+1}$, veamos que $x_{n+2} > x_{n+1}$:

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} + 1} > \sqrt{x_n + 1} = x_{n+1}.$$

Luego la sucesión es monótona creciente.

b) Veamos que también está mayorada, concretamente que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. De nuevo lo comprobamos por inducción.

i) Es inmediato para $n = 1$.

ii) Si $x_n \leq 2$, veamos que para x_{n+1} también se verifica:

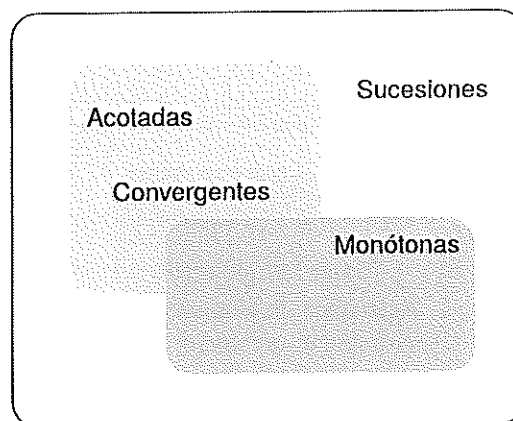


Figura 13.5 Distintos tipos de sucesiones

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \leq \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} \leq 2.$$

Por tanto, existe $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y lo calculamos haciendo uso de la fórmula de recurrencia. Tomando límites

$$x_{n+1}^2 = x_n + 1 \implies x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $\{x_n\}$ es creciente y el primer término es 1, la única posibilidad que cabe es que $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ⓔ **Ejemplo 13.22.** Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por recurrencia como $x_1 = -\frac{3}{2}$ y $3x_{n+1} = 2 + x_n^3$ para cualquier natural n . Estudia si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y, caso de que lo sea, calcula su límite.

a) Si calculas algunos términos de la sucesión, parece que la sucesión es creciente. Vamos a comprobarlo por inducción.

i) $x_1 = -\frac{3}{2} \leq x_2 = -\frac{11}{24}.$

ii) Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$ para un natural n , entonces

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \leq \frac{2 + x_{n+1}^3}{3} = x_{n+2}$$

ya que la función $f(x) = x^3$ es creciente.

Acabamos de demostrar que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}\}$ es inductivo y que, por tanto, la sucesión es creciente.

b) ¿Está acotada la sucesión? Por ser una sucesión creciente, está acotada inferiormente. Sólo nos falta encontrar una cota superior. De hecho, la sucesión será convergente si, y sólo si, está acotada superiormente. Si la sucesión fuera convergente a un número L , como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$, se tiene que cumplir que $3L = 2 + L^3$. Las soluciones de este polinomio son 1 y -2 (compruébalo por ejemplo por el método de Ruffini). Dado que la sucesión es creciente y su primer término es $-\frac{3}{2}$, queda descartado que el límite sea -2 . Vamos a comprobar por inducción que 1 es una cota superior.

i) Es evidente que $x_1 = -\frac{3}{2} \leq 1$.

ii) Supongamos que $x_n \leq 1$ para un natural n , entonces

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n^3}{3} \leq \frac{2 + 1}{3} \leq 1.$$

En resumen, la sucesión es creciente y mayorada y, por lo visto anteriormente, su límite es 1.

Ejemplo 13.23. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la siguiente sucesión: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Vamos a ver que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y que su límite, x , verifica $x^2 = a$. Estudiamos en primer lugar si la sucesión es monótona:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{x_n^2 + a}{x_n} \right) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}.$$

La sucesión será decreciente si $x_{n+1} - x_n \leq 0$ o, equivalentemente, si $a - x_n^2 \leq 0$. Si se da la desigualdad opuesta, la sucesión será creciente. En cualquier caso, tenemos que estudiar la relación entre x_n^2 y a . Como no tenemos una fórmula para x_n , vamos a trabajar con x_{n+1} .

$$\begin{aligned} x_{n+1} \geq x_{n+2} &\iff a - x_{n+1}^2 \leq 0 \iff a \leq \left(\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \right)^2 \\ &\iff 4a \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} + 2a \iff 0 \leq x_n^2 + \frac{a^2}{x_n^2} - 2a \\ &\iff 0 \leq \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2. \end{aligned}$$

Esta última afirmación es claramente cierta. Por tanto la sucesión $\{x_{n+1}\}$ es decreciente. Al mismo tiempo hemos demostrado que está acotada inferiormente: $\sqrt{a} \leq x_n$, para cualquier n natural. Por tanto, la sucesión $\{x_{n+1}\}$ (que no es más que la sucesión $\{x_n\}$ comenzando en el segundo término) es convergente. Llamemos L a su límite. Debe verificar que

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L} \right) \iff L = \sqrt{a}.$$

Volveremos a este ejemplo más adelante.

Si unimos los dos resultados anteriores: toda sucesión acotada tiene una parcial monótona que, por ser parcial, sigue siendo acotada y, por tanto, convergente.

Teorema 13.24 (de Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene una parcial convergente.*

Aunque lo usaremos poco en los ejemplos prácticos, este teorema es la clave que permite probar la existencia de máximo y mínimo de funciones continuas en intervalos cerrados y acotados.

13.4 Sucesiones divergentes

La sucesión $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente, pero tiene un comportamiento muy particular. Los términos de esta sucesión toman valores tan grandes como se desee siempre que dicho términos sean lo suficientemente avazados. A esto nos solemos referir como que la sucesión $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $+\infty$.

Definición 13.25.

- a) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge positivamente* o *tiende a $+\infty$* si para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \geq M$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- b) De manera similar, diremos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge negativamente* o que *tiende a $-\infty$* si para cualquier $K \in \mathbb{R}$ existe un natural n_0 tal que $x_n \leq K$ para cualquier $n \geq n_0$. En ese caso escribiremos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.
- c) En general, diremos que una sucesión es *divergente* si diverge positiva o negativamente.

De la definición se deduce directamente que las sucesiones divergentes no están acotadas: las sucesiones divergentes positivamente no están acotadas superiormente y las que divergen negativamente no están acotadas inferiormente.

Observación 13.26. Un error muy común es decir que una sucesión tiende a $+\infty$ si “sus términos son cada vez más grandes” o “si hay términos tan grandes como se quiera”. Compruébalo en los siguientes ejemplos:

- a) La sucesión $1, 1, 2, 4, 3, 9, \dots, n, n^2, \dots$ no es creciente pero es divergente.
- b) La sucesión $1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots, n, 1, \dots$ tiene términos tan grandes como se quiera pero no es divergente.

Proposición 13.27. Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de números reales.

- a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ y $\{y_n\}$ está acotada inferiormente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = +\infty$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$ si, y sólo si, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
- c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ y existe un natural n_0 y un número positivo k tal que $y_n \geq k$ para $n \geq n_0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$.

Ejemplo 13.28. Vamos a probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } x > 1, \\ 0, & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Comencemos con el caso $x > 1$. Vamos a demostrar que la sucesión $\{x^n\}$, que claramente es creciente, no está acotada. Por reducción al absurdo, supongamos que sí está acotada. En ese caso, la sucesión es convergente al supremo de sus elementos por ser creciente. Notemos L a dicho supremo. Se tiene que $x^n \leq L, \forall n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$x^{n+1} \leq L, \forall n \in \mathbb{N} \implies x^n \leq \frac{L}{x} < L,$$

lo que contradice que L sea el supremo.

Si $x < 1$, entonces $\frac{1}{x} > 1$ y podemos aplicar el apartado anterior para obtener que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = +\infty$ y, por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

13.5 Criterios de convergencia

El primer criterio que vamos a ver, el criterio de Stolz, permite resolver indeterminaciones de la forma “ $\frac{0}{0}$ ” o “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”. En cierta manera juega un papel similar a la regla de L'Hôpital para cocientes de funciones.

Proposición 13.29 (Criterio de Stolz). Sean $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Supongamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:

- a) $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y diverge positivamente, o bien
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona.

Entonces se verifica que:

- a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = -\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.

Veamos un ejemplo de su uso.

Ejemplo 13.30. Vamos a calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$$

Aplicando el criterio de Stolz, tenemos que estudiar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

Proposición 13.31 (Criterio de la raíz). Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Se verifica que:

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = +\infty$.

Ejemplo 13.32. Aplicando el criterio de la raíz, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Proposición 13.33 (Regla del número e). Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente a uno, y sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera. Entonces se verifica que:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_n - 1) = L \in \mathbb{R} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = e^L$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_n - 1) = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = +\infty$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_n - 1) = -\infty \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = 0$.

Ejemplo 13.34. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 2} \right)^{n+3}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 2} \right)^{n+3} = e^L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3) \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 2} - 1 \right) = L.$$

Para terminar, resolvemos el segundo límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3) \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 2} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3) \left(\frac{n^2 - n + 3}{n^2 + 2n - 2} - \frac{n^2 + 2n - 2}{n^2 + 2n - 2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(-3n+5)}{n^2 + 2n - 2} = -3. \end{aligned}$$

Ejemplo 13.35. La sucesión $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y tiene límite e .

Para comprobar que, en efecto, es creciente vamos a escribir el término n -ésimo utilizando el binomio de Newton

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \frac{1}{3!} + \cdots \\ &\quad \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Es fácil imaginar cuál es el término siguiente:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \frac{1}{3!} + \cdots \\ &\quad \cdots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \frac{1}{n!} \\ &\quad \cdots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Observa los dos términos que acabamos de escribir. Hay dos diferencias:

- Este último tiene un sumando más que el término n -ésimo. Dicho término de más, el último, es positivo. En realidad, todos los sumandos son positivos.
- Si nos fijamos en el resto de sumandos y vamos comparando uno a uno

$$\begin{aligned}1 &\leq 1, \\ 1 - \frac{1}{n} &\leq 1 - \frac{1}{n+1}, \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) &\leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right),\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Uniendo estos dos apartados, obtenemos la desigualdad que estábamos buscando, esto es, que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

El cálculo del límite es fácil utilizando la Proposición 13.33 (la regla del número e):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = L,$$

y este segundo límite es inmediato comprobar que vale uno.

13.6 Velocidad de convergencia

Las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tienen límite cero, pero un rápido vistazo a sus términos en la Tabla 13.1 nos convence de que los términos de la segunda se acercan más rápidamente al límite.

Otra forma de ver esto es la siguiente. El cociente entre los términos generales de las dos sucesiones es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

lo que indica que la sucesión del denominador, $\frac{1}{n}$, es mucho mayor que la del numerador, $1/n^2$.

Definición 13.36. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente con límite l y sea $\{b_n\}$ otra sucesión convergente a otro número m .

a) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante K tal que

$$\frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de convergencia de la sucesión es $o(b_n)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - l|}{|b_n - m|} = 0.$$

n	$1/n$	$1/n^2$
1	1.0	1.0
2	0.5	0.25
3	0.3333333333333333	0.1111111111111111
4	0.25	0.0625
5	0.2	0.04
6	0.1666666666666667	0.0277777777777778
7	0.1428571428571428	0.02040816326530612
8	0.125	0.015625
9	0.1111111111111111	0.01234567901234568
10	0.1	0.01

Tabla 13.1 Primeros términos de las sucesiones $1/n$ y $1/n^2$

La notación “O grande” y “o pequeña” es bastante común a la hora de describir la convergencia de un algoritmo. Obsérvese que $\{b_n\} - m$ es una sucesión que converge a 0. Lo que se hace, en esencia, es comparar la velocidad de convergencia de $\{a_n\}$ a su límite con la velocidad de la convergencia de otra sucesión que converge a 0. Normalmente como sucesión $\{b_n\}$ se toma la sucesión $\{\frac{1}{n^p}\}$ para un natural p .

La definición anterior también tiene una versión para sucesiones divergentes:

Definición 13.37. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión divergente y sea $\{b_n\}$ otra sucesión divergente.

a) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $O(b_n)$ si existe una constante K tal que

$$\frac{|a_n|}{|b_n|} \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Diremos que la velocidad o el orden de divergencia de la sucesión $\{a_n\}$ es $o(b_n)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = 0.$$

Análogamente a lo que es usual en sucesiones convergentes, para comparar con sucesiones divergentes suelen utilizarse las sucesiones $\{n^p\}$ con p natural.

Ejemplo 13.38. Con la nomenclatura anterior la sucesión $\left\{\frac{n^2+2n+1}{n^3-2n^2+3n+1}\right\}$ tiende a cero con velocidad $O(1/n)$. En el caso de divergencia se tiene que $\log(n)$ diverge con velocidad $o(n)$.

13.7 Ejercicios

13.7.1 Sucesiones

Ejercicio 13.1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ejercicio 13.2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

Ejercicio 13.3. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

Ⓔ **Ejercicio 13.4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

Ⓔ **Ejercicio 13.5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

Ⓔ **Ejercicio 13.6.** Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n .

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Ejercicio 13.7. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

13.7.2 Criterios de convergencia

Ejercicio 13.8. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

$$\text{a) } \left\{ \frac{1 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{n!} \right\}$$

$$\text{c) } \left\{ \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n}{n} \right\}$$

$$\text{d) } \left\{ \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right\}$$

Ejercicio 13.9. Calcula el límite de las siguientes sucesiones

$$\text{a) } \left\{ \frac{\log(1 \cdot 2 \cdots n)}{n \log(n)} \right\},$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{n^2 \sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}} \right\}$$

$$\text{c) } \left\{ \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n^2} \right\}$$

Ejercicio 13.10. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$\text{a) } \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{1}{n} \sqrt[3]{(3n+1)(3n+2) \cdots (3n+n)} \right\}$$

$$\text{c) } \left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right\}$$

$$\text{d) } \left\{ \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}}{n+1} \right\}$$

Ejercicio 13.11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$\text{a) } \left\{ \left(1 + \frac{1}{n^2+1} \right)^{n^2+56n+5} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1} \right)^{\frac{n^2+5}{n+2}} \right\}$$

$$\text{c) } \{(1 + \log(n+1) - \log(n))^n\}$$

Ejercicio 13.12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$\text{a) } \left\{ \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log(n)} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{\log(n+1)!}{\log(n+1)^n} \right\}$$

Ejercicio 13.13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$\text{a) } \left\{ \left(\frac{n+1}{n^2+n+5} \right)^{\frac{1}{1+\log(n)}} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$\text{c) } \left\{ \frac{\cos(\sqrt{n^2+1}) \log(n)}{n} \right\}$$

Ejercicio 13.14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$\text{a) } \left\{ \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}} \right\}$$

$$\text{b) } \left\{ \frac{\log(n!)}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}} \right\}$$

- Ⓔ Ejercicio 13.15. Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}.$$

- Ⓔ Ejercicio 13.16. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \log \left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 5n} \right) \right)^{4n+1}.$$

Series

14

14.1 Definición y propiedades	167	14.2 Convergencia absoluta e incondicional	171
14.3 Criterios de convergencia para series de términos no negativos	172	14.4 Otros criterios	175
14.5 Suma de series	176	14.6 Ejercicios	179

En el siglo XVIII muchos matemáticos buscaban, sin demasiado éxito, el valor de la expresión

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

La primera aportación relevante fue hecha por Jacobo Bernoulli en 1689 cuando demostró la convergencia de dicha serie. Más tarde, en 1728–1729, D. Bernoulli calculó su valor con una precisión de una centésima. Stirling aumentó la precisión hasta los ocho primeros decimales al año siguiente. Cuatro años después, Euler calculó el valor con dieciocho cifras decimales y se dio cuenta de que coincidían con la expresión de $\pi^2/6$. En años posteriores, Euler no sólo demostró que, efectivamente, ese era el valor de dicha suma sino que calculó $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots$ para k par.

En este tema vamos a estudiar sucesiones de esta forma. Veremos que, en algunos casos concretos, seremos capaces de calcular su límite. En el resto de ocasiones intentaremos, al menos, decidir sobre la convergencia o no de dichas sucesiones.

14.1 Definición y propiedades

Las series de números reales son un caso particular de sucesiones. Comencemos con una sucesión $\{a_n\}$ y construimos la sucesión

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. A las sucesiones de la forma $\{s_n\}$ las llamaremos series y hablaremos de la suma de la serie para referirnos a su límite.

Definición 14.1. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $\{s_n\}$ definida como

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

A esta sucesión $\{s_n\}$ la llamaremos *serie de término general* a_n y la notaremos $\sum_{n \geq 1} a_n$. A los términos s_n se les suele llamar *sumas parciales* de la serie. Si $\{s_n\}$ tiene límite, lo notaremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

La principal dificultad para estudiar la convergencia de una serie es que normalmente no disponemos de una fórmula para las sumas parciales. En aquellos casos en que sí, la convergencia de una serie se reduce al cálculo de un límite. Vamos a empezar por un ejemplo sencillo.

Ejemplo 14.2. Vamos a estudiar si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ es convergente o, lo que es lo mismo, vamos a calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Los términos de la sucesión de sumas parciales son

n	sumas parciales	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	$\frac{14}{16}$
...		
n	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^n}$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1$.

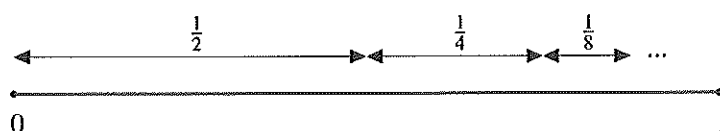


Figura 14.1 La suma de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$

Vale, pero ¿de dónde ha salido la fórmula de la suma de los n términos? Gráficamente es muy fácil de ver. El segmento $[0, 1]$ se obtiene uniendo el $[0, \frac{1}{2}]$, y luego vamos añadiendo la mitad de la mitad que nos falta.

Este ejemplo se basa en la suma de los términos de una progresión geométrica. Recordemos cuál es la fórmula para calcular su suma.

Progresiones geométricas **Ejemplo 14.3.** Una *progresión geométrica de razón r* es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n,$$

donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad fija r , la razón. Esta forma particular hace que se puede calcular su suma de manera explícita. Fijémonos que

$$(1-r) \sum_{k=0}^n r^k = \sum_{k=0}^n r^k - r \sum_{k=0}^n r^k = 1 - r^{n+1}$$

de donde se deduce que

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = a \sum_{k=0}^n r^k = a \frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \quad (14.1)$$

Por ejemplo, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

El hecho de que tengamos la fórmula (14.1) nos pone en bandeja el cálculo del límite cuando n tiende a $+\infty$. Es fácil comprobar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0, & \text{si } r \in]-1, 1[, \\ 1, & \text{si } r = 1, \\ \text{no existe,} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

si, y sólo si, $|r| < 1$.

Estamos dando una definición de suma de infinitos números. La primera condición parece inmediata: los números que sumemos tienen que ser pequeños (ceranos a cero) si no queremos que el resultado final se dispare.

Condición necesaria de convergencia

Proposición 14.4. Si la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Demostración. Si $\{A_n\}$ es la sucesión de sumas parciales,

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Restamos y obtenemos que $A_{n+1} - A_n = a_{n+1} \rightarrow 0$. \square

Ejemplo 14.5. Este resultado nos da una condición necesaria para la convergencia de la serie. Sin embargo, esta condición no es suficiente. El término general de la serie $\sum \frac{1}{n}$, usualmente llamada *serie armónica* converge a cero, pero la serie no es convergente. La serie armónica no es convergente

a) Vamos a comprobarlo estudiando las sumas parciales hasta un índice que sea potencia de 2.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\dots}_n + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Como consecuencia $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

b) También podemos usar el Ejercicio 13.11. Recordemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)} = 1$$

y que, por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = +\infty$.

c) También podemos utilizar integrales para calcular la suma. Fijado un natural n , consideremos la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, n]$ y consideremos la partición $P = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ de dicho intervalo. ¿Cuánto valen las sumas superiores e inferiores?

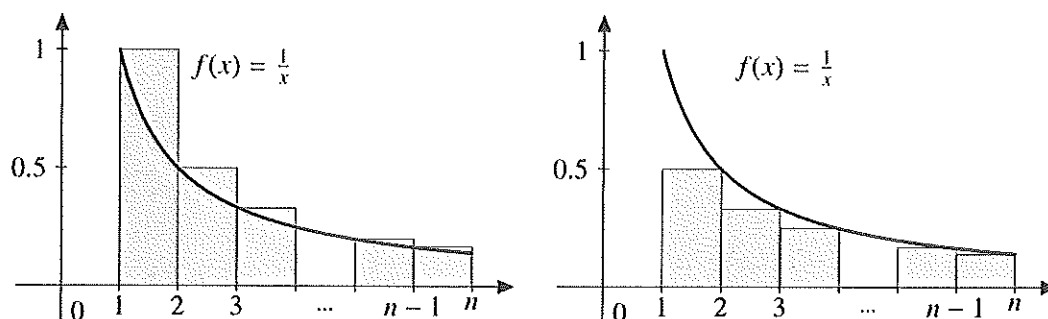


Figura 14.2 Sumas superiores e inferiores de la función $1/x$ en el intervalo $[1, n]$

Sumando las áreas de los rectángulos de la Figura 14.2, podemos acotar la integral superiormente por

$$\log(n) = \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} \quad (14.2)$$

e inferiormente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \log(n). \quad (14.3)$$

De la desigualdad (14.2), obtenemos que

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

y desigualdad (14.3) se deduce que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq 1 + \log(n).$$

En resumen,

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq 1 + \log(n).$$

Como la función logaritmo diverge positivamente en $+\infty$, obtenemos que la serie no es convergente, aunque la anterior desigualdad nos da más información sobre el valor de las sumas parciales del que hemos conseguido en los dos apartados anteriores.

Dado que una serie de números reales no es más que una sucesión, las propiedades que ya conocemos de límites de sucesiones siguen siendo ciertas en este ambiente. La siguiente proposición nos dice que el límite de una serie es lineal: parte sumas y saca fuera escalares.

Proposición 14.6. Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series convergentes. Sean λ y μ números reales. Entonces la serie $\sum_{n \geq 1} (\lambda a_n + \mu b_n)$ es convergente y

Linealidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Trabajando con sucesiones es inmediato comprobar (de hecho, ya lo hemos usado en varias ocasiones) que una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente si, y sólo si, lo son sus colas $\{a_{n+k}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Además, ambas tienen el mismo límite. Si consideramos la serie asociada a cada una de ellas, la convergencia de ambas está también muy relacionada.

Proposición 14.7. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y k un número natural fijo. Entonces la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, lo es la serie $\sum_{n \geq 1} a_{n+k}$. Además, caso de que sean convergentes, se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

De nuevo obtenemos que la convergencia de una serie depende de las colas de dicha serie aunque la suma total sí depende de que añadamos o no los primeros términos.

14.2 Convergencia absoluta e incondicional

Definición 14.8.

- a) Diremos que la serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.
- b) La serie $\sum a_n$ es *incondicionalmente convergente* si para cualquier aplicación biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la serie $\sum a_{\sigma(n)}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Observación 14.9. La convergencia incondicional de una serie es el análogo a la propiedad conmutativa para una suma infinita. Una serie es incondicionalmente convergente si se puede sumar en cualquier orden y el resultado siempre es el mismo. Este es el motivo de que en algunos textos se hable de series conmutativamente convergentes.

La convergencia absoluta y la convergencia incondicional son condiciones más fuertes que la convergencia de una serie. El siguiente resultado nos dice que están relacionadas.

Teorema 14.10 (de Riemann). Sea $\sum a_n$ una serie de números reales. La serie converge incondicionalmente si, y sólo si, converge absolutamente.

En la práctica, es sumamente difícil comprobar la convergencia incondicional de una serie directamente. No es sencillo trabajar con todas las reordenaciones posibles de una sucesión de números reales. Lo que sí haremos es estudiar la convergencia absoluta.

El primer criterio y, posiblemente, el más importante que vamos a utilizar en el estudio de la convergencia de series de números reales es el criterio de comparación. Esencialmente nos dice que si una serie se puede sumar también se puede sumar otra más pequeña y, recíprocamente, si una serie no se puede sumar, otra mayor tampoco se puede.

Teorema 14.11 (Criterio de comparación). Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales verificando que $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.

Si aplicamos el criterio de comparación tomando $b_n = |a_n|$, se obtiene que las series absolutamente convergentes son convergentes, esto es, una de las implicaciones del teorema de Riemann. El recíproco del criterio de comparación no es cierto.

Ejemplo 14.12. La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente pero no absolutamente convergente.

Dado que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ no es incondicionalmente convergente, si la sumamos en distinto orden nos puede dar un resultado diferente pero ¿cuántos?. La respuesta es que muchos. Más concretamente, la serie se puede reordenar de forma que su suma sea el número real que queramos.

Teorema 14.13 (Teorema de Riemann). Sea $\sum a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente. Dado un número real x cualquiera, existe una biyección $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$.

14.3 Criterios de convergencia para series de términos no negativos

El primer criterio es una versión del criterio de comparación usando límites.

Proposición 14.14 (Criterio de comparación por paso al límite). Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de números reales verificando $a_n \geq 0$, y $b_n > 0$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ entonces, $\sum a_n$ converge $\iff \sum b_n$ converge.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ entonces, $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge.

c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ entonces, $\sum a_n$ converge $\implies \sum b_n$ converge.

Ejemplo 14.15. Las series $\sum \frac{1}{n^2}$ y $\sum \frac{1}{3n^2-n+7}$ tienen el mismo carácter de convergencia. La ventaja del criterio de comparación por paso al límite es que no hace falta saber que una de ellas es mayor que la otra. Es suficiente con que sean “aproximadamente” iguales:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{3n^2 - n + 7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 7}{n^2} = 3.$$

Por ahora no sabemos si ambas series son convergentes o no (dentro de poco veremos que sí lo son) pero sí podemos aplicarlo a otras series. Por ejemplo, $\sum \frac{1}{2^n - n}$ y $\sum \frac{1}{2^n}$ tiene el mismo carácter. Como sabemos que $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente, también lo es $\sum \frac{1}{2^n - n}$. Observa que el criterio de comparación no nos resuelve este mismo problema: $\frac{1}{2^n - n}$ es mayor que $\frac{1}{2^n}$ y, por tanto, el criterio de comparación no da información.

Proposición 14.16 (Criterio de la raíz o de Cauchy). Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.

a) Si $\sqrt[n]{a_n} \leq L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.17. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.18. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}$ utilizando el criterio de la raíz. Para ello calculamos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{7n+3}\right)^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{7n+3}\right)^{\frac{2n+1}{n}} = \frac{1}{7^2}.$$

Como dicho límite es menor que uno, la serie es convergente.

Para calcular el límite de una raíz n -ésima podemos aplicar el criterio de la raíz (véase Proposición 13.31).

Proposición 14.19 (Criterio del cociente o de D'Alembert). Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.

a) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.20. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.21. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum \frac{2n^2}{2^n + 3}$ utilizando el criterio del cociente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2(n+1)^2}{2^{n+1} + 3}}{\frac{2n^2}{2^n + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2}{2n^2} \cdot \frac{2^n + 3}{2^{n+1} + 3} = \frac{1}{2}.$$

Como el límite es menor que uno la serie es convergente.

Proposición 14.22 (Criterio de Raabe). Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.

a) Si $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Corolario 14.23. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ no es convergente.

Ejemplo 14.24. Vamos a estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es

$$a_n = \frac{(2n)!}{n! n!} \frac{1}{(2n+1) 2^{2n}}.$$

Aplicamos, en primer lugar, el criterio del cociente.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{1}{(2n+3) 2^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{(2n+1) 2^{2n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{4(n+1)(n+1)(2n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)(2n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6} = 1. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6} \leq 1$$

el criterio del cociente no da información útil. Aplicamos ahora el criterio de Raabe:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{4n^2 + 10n + 6} = \frac{6}{4} > 1, \end{aligned}$$

y, por tanto, el criterio de Raabe nos dice que la serie es convergente.

Proposición 14.25 (Criterio de condensación). Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos tal que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente a cero. Entonces se verifica que

$$\sum a_n \text{ es convergente} \iff \sum 2^n a_{2^n} \text{ es convergente}.$$

Ejemplo 14.26. Vamos a estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Serie armónica generalizada

- a) Si $a \leq 0$, el término general $\frac{1}{n^a}$ no tiende a cero y, por tanto, la serie no es convergente.
- b) Si $a > 0$, el término general es decreciente y converge a cero. Podemos aplicar el criterio de condensación: las series $\sum \frac{1}{n^a}$ y $\sum \frac{2^n}{(2^n)^a}$ tienen el mismo comportamiento. Como

$$\sum \frac{2^n}{(2^n)^a} = \sum \frac{1}{2^{(a-1)n}},$$

aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^{(a-1)n}}} = \frac{1}{2^{a-1}} < 1 \iff a > 1.$$

Resumiendo, si $a > 1$ la serie es convergente. Si $a < 1$, la serie no es convergente y si $a = 1$ ya sabíamos que no era convergente.

A esta serie se la suele llamar *serie armónica generalizada de exponente a*.

El ejemplo anterior será clave en muchos ejercicios para poder aplicar el criterio de comparación. Es por esto que lo resaltamos:

Proposición 14.27. $\sum \frac{1}{n^a}$ es convergente si, y sólo si, $a > 1$.

Por ejemplo, si comparamos $\frac{1}{n^a}$ con a_n tenemos que estudiar el cociente

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^a}} = n^a a_n.$$

El siguiente resultado recoge las diferentes posibilidades que se pueden presentar.

Proposición 14.28 (Criterio de Pringsheim). Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números no negativos.

- a) Si existe $a > 1$ tal que la sucesión $\{n^a a_n\}$ está acotada entonces $\sum a_n$ es convergente.
- b) Si existe $a \leq 1$ tal que $\{n^a a_n\}$ converge a $L \neq 0$ o es divergente entonces $\sum a_n$ no es convergente.

14.4 Otros criterios

La principal herramienta para estudiar la convergencia de series de términos cualesquiera serán los criterios de Dirichlet y Abel.

Teorema 14.29. Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales.

- a) Si $\{a_n\}$ es monótona, converge a cero y la serie $\sum b_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n b_n$ converge.
- b) Si $\{a_n\}$ es monótona, acotada y la serie $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n b_n$ es convergente.

Criterio de Dirichlet

Criterio de Abel

La sucesión $\{(-1)^n\}$ no es convergente pero sus sumas parciales siempre valen -1 o 0 y, en particular, están acotadas. Tomando $b_n = (-1)^n$ en el criterio de Dirichlet obtenemos lo siguiente.

Proposición 14.30 (Criterio de Leibniz). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales no negativos. Si la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente a cero, entonces la serie alternada $\sum (-1)^n x_n$ es convergente.

Ejemplo 14.31. La serie alternada $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$, que ya comentamos en el Ejemplo 14.12, es convergente porque $\frac{1}{n}$ es decreciente y converge a cero.

14.5 Suma de series

Sólo en contadas ocasiones es factible calcular de manera explícita la suma de una serie. La mayoría de las veces serán necesarios medios indirectos como veremos, por ejemplo, en la siguiente sección. La dificultad radica en el cálculo explícito del valor de las sumas parciales. Si sabemos cuánto valen, el problema de estudiar la convergencia de la serie se reduce a un problema de cálculo de límites, cosa normalmente mucho más sencilla.

Observación 14.32. Hasta ahora sólo hemos estudiado la convergencia y no el valor de la suma de la serie. No es lo mismo $\sum_{n \geq 1} a_n$ que $\sum_{n \geq 0} a_n$. ¡Hay un sumando de diferencia!

14.5.1 Series telescópicas

Las series telescópicas son aquellas series $\sum a_n$ cuyo término general se puede escribir de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ para alguna sucesión $\{b_n\}$. El cálculo de su suma equivale al cálculo del límite de la sucesión $\{b_n\}$. Para verlo sólo tienes que calcular las sumas parciales:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (b_1 - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \cdots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Resumiendo,

Proposición 14.33. Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces la serie que tiene como término general $a_n = b_n - b_{n+1}$ es convergente si, y sólo si, $\{b_n\}$ es convergente. En ese caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Ejemplo 14.34. Vamos a calcular el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, la sucesión de sumas parciales es

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

con lo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$.

14.5.2 Series geométricas

La serie $\sum r^n$ se puede sumar utilizando que conocemos sus sumas parciales, como ya hicimos en el Ejemplo 14.3. Sabemos que

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

y tomando límites cuando n tiende a infinito obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 14.35. *La serie $\sum r^n$ es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. En ese caso $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.*

Demostración. Sólo hay que usar la fórmula de la suma de una progresión geométrica que vimos en el Ejemplo 14.3:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = \frac{1}{1-r},$$

ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. En cualquier otro caso el término general de la serie no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente. \square

Veamos un ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{5^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{4}{1 - \frac{1}{5}} = 5.$$

Si la serie no comienza en $n = 0$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = [m = n - 2] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+2}} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

14.5.3 Series aritmético-geométricas

Las series aritmético-geométricas son series de la forma $\sum p(n)r^n$, donde p es un polinomio. Para calcular su suma, transformamos la serie en otra en la que el grado del polinomio es menor hasta obtener una serie geométrica. Si $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n = S$, entonces

$$\begin{aligned} (1-r)S &= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)r^{n+1} + 1 \\ &= p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (p(n) - p(n-1))r^n. \end{aligned}$$

Observa que $p(n) - p(n-1)$ sigue siendo un polinomio, pero con grado estrictamente menor que el grado de $p(n)$. Repitiendo este proceso las veces necesarias, acabamos obteniendo una serie geométrica. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 14.36. Vamos a calcular la suma de la serie $\sum_{n \geq 0} (n^2 - n)r^n$. Si su suma es S , entonces

$$(1-r)S = \sum_{n=1}^{\infty} [(n^2 - n) - ((n-1)^2 - (n-1))]r^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2nr^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$S = \frac{2}{1-r} \sum_{n=1}^{\infty} nr^n.$$

Repetimos el proceso anterior, si $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n$, entonces

$$(1-r)S_1 = r + \sum_{n=2}^{\infty} [n - (n-1)]r^n = r + \frac{1}{1-r} - 1 - r = \frac{r}{1-r}.$$

Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n)r^n = \frac{2}{1-r} \cdot \frac{r}{1-r} = \frac{2r}{(1-r)^2}.$$

14.5.4 Cocientes de polinomios

En algunos casos se pueden sumar descomponiendo el término general en fracciones simples. También pueden ser de utilidad algunas identidades como, por ejemplo, la que define la constante de Euler.

La constante de Euler-Mascheroni

En el Ejercicio ?? vimos que

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

se cumple para cualquier x positivo. En particular, para $x = \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$\log(1+n) - \log(n) = \log\left(\frac{1+n}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

y que

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Si definimos $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ y $a_{2n} = \log(n+1) - \log(n)$, las desigualdades anteriores se escriben como

$$a_{2n+1} < a_{2n} < a_{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o, lo que es lo mismo, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. El criterio de Leibniz nos da que la serie $\sum (-1)^{n+1} a_n$ es convergente, o sea que existe el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^n a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (\log(2) - \log(1)) \\ &\quad + \frac{1}{2} - (\log(3) - \log(2)) + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - (\log(n+1) - \log(n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n+1). \end{aligned}$$

Este límite recibe el nombre de *constante de Euler-Mascheroni* y se denota por γ :

Constante de
Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n).$$

14.6 Ejercicios

14.6.1 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 14.1. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$
 b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$
 c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

d) $\sum \frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$
 e) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Ejercicio 14.2. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$
 b) $\sum \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$
 c) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

d) $\sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$
 e) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Ejercicio 14.3. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$
 b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
 c) $\sum \frac{1}{2n-1}$
 d) $\sum \frac{1}{2^n - n}$

e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2^n}$
 f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
 g) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Ejercicio 14.4. Aplicar el criterio de condensación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n \log(n)}$
 b) $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$
 c) $\sum \frac{1}{n(\log(n)) \log(\log(n))}$

Ejercicio 14.5. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$
 b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$
 c) $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$

d) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$
 e) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Ejercicio 14.6. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$
 b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
 c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

d) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$
 e) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Ejercicio 14.7. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$
 b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{6}{5}}$
 c) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
 d) $\sum \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$

e) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$
 f) $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}$
 g) $\sum \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}$

Ejercicio 14.8. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum (-1)^n \frac{20^n}{n+1}$
 b) $\sum \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^2$
 c) $\sum \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

d) $\sum \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$
 e) $\sum \frac{\sqrt[n]{n} \log(n)}{n^2+1}$
 f) $\sum (-1)^n e^{-n}$

Ⓔ **Ejercicio 14.9.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$
 b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$

Ⓔ **Ejercicio 14.10.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^2}$
 b) $\sum a^n n^a$

14.6.2 Suma de series

Ejercicio 14.11. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

Ejercicio 14.12. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

Ejercicio 14.13. Suma la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$

Números complejos

I

1.1 Introducción	1	1.2 Forma binómica de un número complejo	3	1.3 Representación gráfica. Conjugado y módulo de un número complejo	4	1.4 Forma polar y argumento de un número complejo	5	1.5 Funciones elementales	8
------------------	---	--	---	--	---	---	---	---------------------------	---

1.1 Introducción

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1572) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que "ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación" y acuñó el calificativo *imaginarias* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo esto se interpreta como que el problema no tiene solución.

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la naturaleza de los mismos; no se preguntaron ¿qué es un número complejo?, sino que se dijeron ¿para qué sirven?, ¿qué puede hacerse con ellos? Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como *Teorema Fundamental del álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. Algunas de sus implicaciones las podemos comentar directamente. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x + 3 = 0, \quad 2x + 3 = 0, \quad x^2 - 2 = 0, \quad x^2 + 2x + 2 = 0,$$

cuyas soluciones $x = -3$, $x = 3/2$, $x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 1 \pm i$ tienen sentido cuando x es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5 + (1 - i)x^4 + (1/5 - i\sqrt{2})x^2 - 8x + 3 - i/\sqrt{3} = 0.$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El teorema fundamental del álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de "números complejos" se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra " i " que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

En estas notas vamos a dar solamente unos breves conceptos de distintas formas de expresar los números complejos y cómo se trabaja con ellos. Pero antes de empezar una advertencia: aunque históricamente (y vulgarmente) se llama i a la raíz cuadrada de -1 esta expresión no es totalmente cierta. Si así fuera obtendríamos la siguiente cadena de igualdades que no es posible, ¿verdad?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = ii = i^2 = -1.$$

Suma de números complejos

Recordemos que para dotar a un conjunto, en este caso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de estructura de cuerpo se necesita una suma y un producto que verifiquen ciertas propiedades. La suma no es nada nuevo, es la suma de \mathbb{R}^2 como espacio vectorial, es decir, si (a, b) , (c, d) son dos elementos de \mathbb{R}^2 , definimos su suma como

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Es evidente (por otra parte nosotros ya lo sabíamos del estudio de espacios vectoriales) que esta suma cumple las propiedades que tiene que cumplir:

- 1) Asociativa.
- 2) Conmutativa.
- 3) Existencia de neutro $((0, 0))$.
- 4) Existencia de inverso $(-(a, b) = (-a, -b))$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 1.1) es $z + w$.

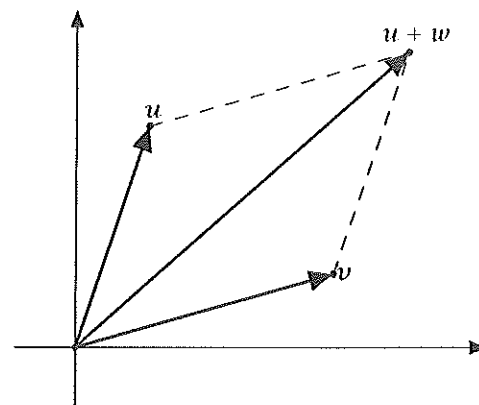


Figura 1.1 La suma de números complejos es la suma usual de vectores en el plano

Producto de números complejos

El producto sí es nuevo. Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, definimos su producto como

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Tampoco es difícil comprobar que este producto es adecuado, en el sentido de que verifica las propiedades

- 5) Asociativa,
- 6) Conmutativa,
- 7) Existencia de elemento neutro (el neutro para el producto es $(1, 0)$, compruébalo).
- 8) Si $(a, b) \neq (0, 0)$ entonces su inverso es

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Comprueba también que $(a, b)(a, b)^{-1} = (1, 0)$.

- 9) Distributiva: $(a, b)((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$.

Así, por ejemplo, $\left(\frac{2,3}{3,4}\right) = (2,3) \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right) = \left(\frac{18}{25}, \frac{1}{25}\right)$. Pues bien, los números complejos son justamente el cuerpo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Es decir cada número complejo es una pareja (a, b) donde a y b son números reales, y la suma y el producto de complejos son los que hemos descrito antes. A esta forma de representar los números complejos se la suele llamar *forma cartesiana*. Esta forma es muy cómoda para trabajar con sumas de números complejos pero no lo es tanto para trabajar con el producto: prueba a calcular $(1, -1)^4$.

Forma cartesiana

En la siguiente definición recogemos toda la información anterior.

Definición 1.1. Consideremos en el conjunto \mathbb{R}^2 las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

El elemento neutro de la suma es $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a, -b)$ es el opuesto de (a, b) , y todo $(a, b) \neq (0, 0)$ tiene inverso

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (léase “el conjunto \mathbb{R}^2 con las operaciones suma y producto”) es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por \mathbb{C} y sus elementos se llaman *números complejos*.

No hay un orden en \mathbb{C} compatible con la estructura algebraica

Al ampliar \mathbb{R} a \mathbb{C} ganamos mucho pero también perdemos algo. Te recuerdo que \mathbb{R} tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en \mathbb{C} no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en \mathbb{C} , pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que \leq es una relación de orden en \mathbb{C} compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación \leq no respetara el orden de \mathbb{R}). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en \mathbb{C} ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

1.2 Forma binómica de un número complejo

Dentro de \mathbb{R}^2 podemos distinguir el subconjunto formado por los elementos que tienen la segunda componente 0, $\{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$. Restringidos la suma y el producto a este subconjunto tenemos una propiedad curiosa y es que nos seguimos quedando en el subconjunto. Es inmediato observar que

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

$$(a_1, 0)(a_2, 0) = (a_1 a_2, 0), \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Esto hace que el conjunto $\{(a, 0); a \in \mathbb{R}\}$, con la suma y el producto definidos antes sea también un cuerpo, pero este cuerpo se puede identificar con los números reales mediante la aplicación

$$\mathbb{R} \longrightarrow \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\}$$

$$a \longrightarrow (a, 0)$$

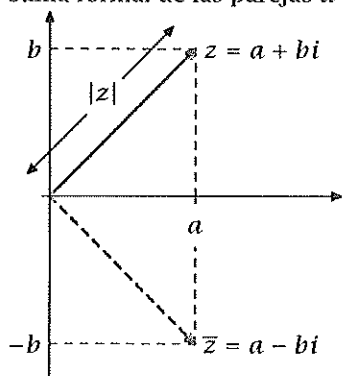
De ahora en adelante siempre usaremos esta identificación; es decir, para nosotros van a ser indistinguibles el complejo $(a, 0)$ y el número real a . Como consecuencia, cualquier número complejo (a, b) se puede escribir de la forma

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b(0, 1).$$

Si ahora llamamos $(0, 1) = i$, obtenemos que el número complejo $z = (a, b)$ (se le suele llamar a los números complejos con letras como z, u, v, \dots) se puede poner como $z = a + ib$. Esto es lo que se llama la *forma binómica* de un número complejo. Al número real a se le llama la *parte real* del complejo y al número b se le llama la *parte imaginaria*. A i también se le llama la *unidad imaginaria*. Es claro que i no es ningún número real (no es un par con la segunda componente 0) y cumple una propiedad que nos será útil y que, seguramente, ya conocías

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

es decir, el cuadrado de i es -1 . Esto nos permite que las fórmulas para la suma y el producto de números complejos, cuando están puestos en forma binómica, sean fáciles de recordar, ya que, formalmente, los vamos a sumar y multiplicar como si fueran números reales y simplemente tendremos en cuenta que $i^2 = -1$. Nos referimos a lo siguiente: antes hemos definido la suma de dos números complejos (puestos como pares) de la forma $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Esta misma operación, puesta en forma binómica, quedaría $a + ib + c + id = a + c + i(b + d)$, que es la suma formal de las parejas $a + ib$ y $c + id$, sacando al final factor común el i .



Para el producto sucede igual. Si multiplicamos dos complejos en forma de pares $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Esto puesto en forma binómica sería $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$. Pero este resultado es lo que se obtiene multiplicando formalmente $a + ib$ por $c + id$ y tenemos en cuenta que $i^2 = -1$.

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2 bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Figura 1.2 Representación de un número complejo

1.3 Representación gráfica. Conjugado y módulo de un número complejo

Según hemos definido, el número complejo $a + ib$ no es más que el elemento (a, b) del plano \mathbb{R}^2 y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Definición 1.2. Si $z = a + ib$ es un número complejo (con a y b reales), entonces el *conjugado* de z se define como $\bar{z} = a - ib$ y el *módulo* o *valor absoluto* de z , se define como: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observa que $\sqrt{a^2 + b^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $a^2 + b^2$.

Geométricamente, \bar{z} es la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia del punto (a, b) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (a, b) (ver figura 1.2). La *distancia* entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver Figura 1.1) es $z + w$.

Proposición 1.3. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

- a) $\bar{\bar{z}} = z$,
- b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$,
- c) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$,
- d) $|z|^2 = z\bar{z}$,
- e) $\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$,
- f) $|zw| = |z||w|$,
- g) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Desigualdad triangular

Demostración. La comprobación de estas afirmaciones es inmediata. Por ejemplo, para comprobar que la propiedad f) se verifica, basta observar que $|zw|$ y $|z||w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2.$$

Para demostrar la última afirmación es suficiente probar que $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z| + |w|)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Observación 1.4. De la demostración de la última afirmación se deduce que $|z + w| = |z| + |w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, esto es, si $z\bar{w} \in \mathbb{R}_0^+$, o lo que es lo mismo $z\bar{w} = \rho$ donde $\rho \in \mathbb{R}_0^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por w como $z|w|^2 = \rho w$, esto es, $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

Ejemplo 1.5. La división de números complejos es fácil teniendo en cuenta que el producto de un complejo y su conjugado da como resultado el módulo al cuadrado de dicho número complejo.

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{1+i}{2-i} \frac{2+i}{2+i} = \frac{1+3i}{5}.$$

La división o el producto de dos números complejos no es difícil, pero sí que puede ser aburrido calcular $(1+i)^{10}$. ¿Existe algo como el binomio de Newton para números reales? Compruébalo tú mismo. Lo que sí es muy fácil es su módulo:

$$|(1+i)^{10}| = |1+i|^{10} = \sqrt{2}^{10} = 2^5. \triangleleft$$

1.4 Forma polar y argumento de un número complejo

Hay otras formas de representar los números complejos. Una de ellas es la forma polar. Supongamos que tenemos un número complejo $z = a + ib \neq 0$. Este complejo se corresponde con la pareja de números reales (a, b) que podemos representar en el plano.

A los dos ejes del plano (en este caso se suele llamar el plano complejo) se les denota por el eje real (donde se representa la primera componente) y el eje imaginario (donde se representa la segunda).

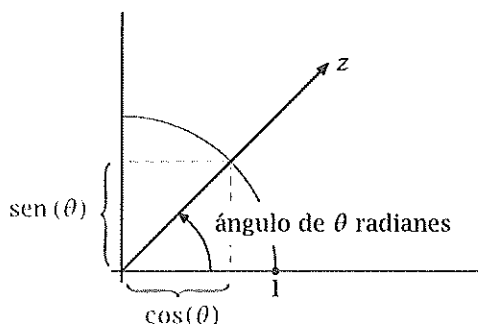


Figura 1.3 Argumento

A la vista del dibujo está claro que el número z (o el par (a, b) , al fin y al cabo para nosotros son la misma cosa) queda totalmente determinado por dos magnitudes: la longitud del vector y su "dirección". ¿Cómo medimos la dirección? Si normalizamos el número complejo z

$$z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right).$$

Como $\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|} \right)$ es un vector de módulo uno (perteneciente a la circunferencia centrada en el origen y de radio uno), se tiene que poder escribir de la forma

$$\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|} \right) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

para conveniente $\theta \in \mathbb{R}$. En otras palabras, $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

Argumento

Definición 1.6. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z| (\cos(t) + i \sin(t))$ cualquiera de ellos recibe el nombre de *argumento* de z . El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\text{Arg}(z)$.

$$\text{Arg}(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))\}$$

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay un único argumento que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$. A dicho argumento se le llama *argumento principal* de z y se representa por $\arg(z)$.

Argumento principal

Forma polar

Al número complejo de módulo ρ y argumento θ se le suele representar ρ_θ y las fórmulas que hemos visto son la forma de pasar de la forma binómica a la forma polar de un complejo.

Observación 1.7.

- Observa que el argumento principal no es más que el ángulo que forma el vector con la parte positiva del eje real.
- Si θ_1 y θ_2 son dos argumentos del mismo número complejo, entonces

$$\theta_1, \theta_2 \in \text{Arg}(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \end{cases} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Dicho de otra manera, si θ es un argumento de z , podemos obtener el conjunto de todos argumentos añadiendo múltiplos enteros de 2π , esto es, $\text{Arg}(z) = \{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. En particular,

$$\text{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cálculo del argumento principal

Para calcular el argumento principal de un número complejo hay varias fórmulas, pero la más intuitiva es la siguiente: si $z = a + ib \neq 0$ su argumento principal θ es

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{si } a > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi, & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0. \end{cases}$$

También se puede calcular el argumento de un número complejo mediante la fórmula

$$\arg(z) = \begin{cases} 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) + |z|}\right), & \text{si } z \notin \mathbb{R}^-, \\ \pi, & \text{si } z \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Ejemplo 1.8. Si tenemos el complejo $z = -2 + 2\sqrt{3}i$, entonces su módulo será $|z| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$, mientras que el argumento se calcula de la siguiente forma. Como la parte real es negativa y la parte imaginaria es positiva, el argumento es

$$\theta = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Así $-2 + 2\sqrt{3}i = 4 \frac{2\pi}{3}$.

Para pasar de la forma polar de un complejo a la forma binómica es aún más fácil. Utilizando las fórmulas de la trigonometría se tiene que si $z = \rho_\theta$ su forma binómica será $z = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta)$. Realmente la fórmula $\rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ se llama la *forma o expresión trigonométrica* del complejo z .

Forma trigonométrica

Ejemplo 1.9. El complejo $5 \frac{-3\pi}{4}$ escrito en forma binómica es

$$5 \frac{-3\pi}{4} = 5 \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i5 \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -5 \frac{\sqrt{2}}{2} - i5 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.4.1 Formula de De Moivre. Interpretación geométrica del producto

Si tenemos dos números complejos no nulos

$$z = |z|(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)), \quad w = |w|(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)).$$

y los multiplicamos, obtenemos que

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= |zw|(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2))) \\ &= |zw|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos*. Por ejemplo, para calcular $(1 + i)^4$ como $|1 + i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1 + i) = \pi/4$, se sigue que $(1 + i)^4 = -4$.

Obsérvese que aunque los dos argumentos sean argumentos principales la suma no tiene por qué ser argumento principal.

Así pues, el producto de dos números complejos es geoméricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Como consecuencia, es fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula que será de gran utilidad.

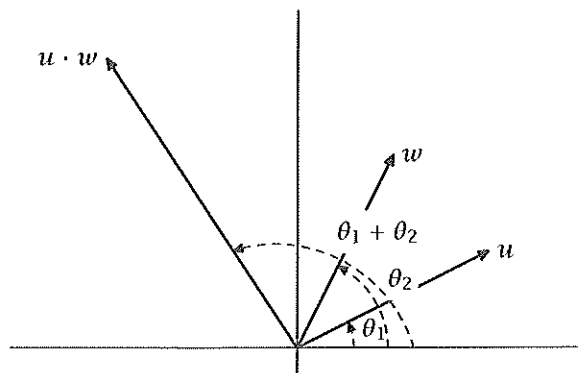


Figura 1.4 Interpretación geométrica del producto

Fórmula de
De Moivre

Proposición 1.10. Si z es un complejo no nulo, θ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$, y, en particular, $n\theta \in \operatorname{Arg}(z^n)$.

Ejemplo 1.11. Aunque ya es conocido, veamos cómo podemos aplicar la fórmula de De Moivre para calcular $\cos(2x)$, con x real. Utilizando que $\cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$ es un número complejo de módulo uno, la fórmula de De Moivre nos dice que

$$\begin{aligned} \cos(2x) + i \operatorname{sen}(2x) &= (\cos(x) + i \operatorname{sen}(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + (i \operatorname{sen}(x))^2 + 2i \cos(x) \operatorname{sen}(x) \\ &= (\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)) + 2i \cos(x) \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Igualando parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria obtenemos que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \text{ y que } \operatorname{sen}(2x) = 2 \cos(x) \operatorname{sen}(x). \triangleleft$$

1.5 Funciones elementales

1.5.1 Raíces de un número complejo

Aplicando la fórmula de De Moivre vamos a obtener las raíces n -ésimas de un número complejo. Para empezar por el caso más fácil vamos a suponer como complejo el número real 1. Vamos a llamar raíces n -ésimas de la unidad a aquellos números complejos z que verifiquen que $z^n = 1$. Trabajando con la forma trigonométrica de $z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ y teniendo en cuenta que el módulo de 1 es 1 y su argumento principal es 0, obtenemos que

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = 1 = 1(\cos(0) + i \operatorname{sen}(0)),$$

de donde $|z|^n = 1$ y por tanto $|z| = 1$. Por otra parte igualando los argumentos tenemos que $n\theta = 0$. Se podría pensar que de aquí se puede obtener únicamente que $\theta = 0$ pero eso sería si consideráramos solamente argumentos principales. Realmente cualquier múltiplo entero de 2π es un argumento de 1 y entonces lo que obtenemos es que $n\theta = 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y entonces $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, para $k \in \mathbb{Z}$. Dándole valores a k y numerando las correspondientes soluciones, obtenemos para los enteros comprendidos entre $k = 0$ y $k = n - 1$

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{n}, \quad \dots \quad \theta_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Obviamente hay más números enteros pero no es difícil ver que cualquier otro entero nos da un ángulo que difiere en un múltiplo entero de 2π de los que hemos obtenido y produce, por tanto, el mismo argumento. Concluyendo, las raíces n -ésimas de 1 son n números complejos distintos, z_0, z_1, \dots, z_{n-1} todos con módulo 1 y el argumento (no necesariamente el principal) de z_k es $\frac{2k\pi}{n}$ para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Ejemplo 1.12. Las raíces cúbicas de la unidad son los números complejos $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{\frac{2\pi}{3}}$ y $z_2 = 1_{\frac{4\pi}{3}}$. Es decir $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, y $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si las representamos en el plano complejo quedan las tres en la circunferencia unidad pero es que además forman un triángulo equilátero uno de cuyos vértices está en el 1. De igual forma las raíces cuartas de la unidad serán $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 1_{\frac{4\pi}{4}}$ y $z_3 = 1_{\frac{6\pi}{4}}$, es decir $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -i$. En este caso, al igual que antes, todas las raíces se distribuyen en la circunferencia unidad (todas tienen módulo 1) pero ahora serán los vértices de un cuadrado, siendo uno de ellos (el que corresponde a z_0) el número 1. ◁

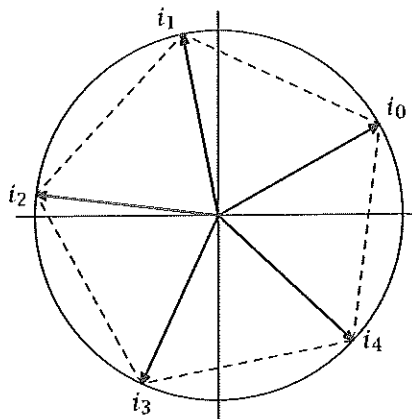


Figura 1.5 Raíces quintas de i

Esta propiedad puede generalizarse a cualquier natural: dado $n \in \mathbb{N}$ las raíces n -ésimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad, estando uno de dichos vértices en el punto 1.

Finalmente si lo que queremos es hacer las raíces n -ésimas de un número complejo, haciendo pequeñas modificaciones en el proceso anterior, obtendremos las raíces que se recogen en el siguiente resultado.

Proposición 1.13. Sea n un número natural. Las raíces n -ésimas del número complejo z vienen dadas por

$$z_k = |z|^{1/n} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

donde θ es un argumento de z .

Esto también tiene una interpretación geométrica clara. Las n raíces n -ésimas de un número complejo $z = |z|_\theta$ se distribuyen todas en la circunferencia centrada en el origen y radio $\sqrt[n]{|z|}$ formando los vértices de un polígono regular de n lados, uno de los cuales está en el complejo $\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{n} \right) \right)$.

1.5.2 La función exponencial

Definimos la exponencial compleja como

$$e^z = \exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos(\operatorname{Im}(z)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(z))).$$

Observa que $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$, $\operatorname{Im}(z) \in \operatorname{Arg}(e^z)$. En particular, obtenemos la llamada **fórmula de Euler**

$$e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad $e^{i\pi} + 1 = 0$ en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas. De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas **ecuaciones de Euler**:

Raíz n -ésima

Fórmula de Euler

Ecuaciones de Euler

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es $e^z = e^{z+2k\pi i}$. Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función *periódica* con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} > 0$.

Justificación

¿Por qué hemos definido la función exponencial de esta forma? En un principio sólo tenemos la restricción de que su valor coincida con el de la función exponencial que ya conocemos en los números reales. Si queremos que se siga cumpliendo que $e^x e^y = e^{x+y}$, podemos avanzar algo. Si $z \in \mathbb{C}$, debería cumplirse que

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Por tanto, sólo nos hace falta definir e^{it} con t real. ¿Por qué hemos elegido cómo definición $e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$? Una posible justificación es que la definición está hecha así para que las derivadas vayan bien: si

$$(e^{it})' = i e^{it} = i (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t)) = -\operatorname{sen}(t) + i \cos(t),$$

entonces coincide con

$$(\cos(t) + i \operatorname{sen}(t))' = -\operatorname{sen}(t) + i \cos(t).$$

El segundo motivo necesita conocer el desarrollo de Taylor de la las funciones exponencial, seno y coseno. En la Sección ?? tienes los detalles.

1.5.3 Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\operatorname{Re}(w)} (\cos(\operatorname{Im}(w)) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im}(w))).$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

- $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re}(w)} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re}(w) = \log |z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).
- $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im}(w) \in \operatorname{Arg}(z)$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im}(w) = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que $\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$. Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z . El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log}(z)$. De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal*, definido por

$$\log(z) = \log |z| + i \arg(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k .

Logaritmo
Logaritmo principal

Observación 1.14. Es importante que nos demos cuenta de que la igualdad $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$, que es válida para números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\log(-1 + i\sqrt{3}) &= \log|-1 + i\sqrt{3}| + i \arg(-1 + i\sqrt{3}) \\ &= \log(2) + i(\arctan(-\sqrt{3}) + \pi) = \log(2) + i\frac{2\pi}{3} \\ \log(-\sqrt{3} + i) &= \log|-\sqrt{3} + i| + i \arg(-\sqrt{3} + i) \\ &= \log(2) + i(\arctan(-1/\sqrt{3}) + \pi) = \log(2) + i\frac{5\pi}{6} \\ \log((-1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)) &= \log(-4i) = \log(4) - i\frac{\pi}{2} \\ &\neq \log(-1 + i\sqrt{3}) + \log(-\sqrt{3} + i) = \log(4) + i\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Lo que sí está claro es que el número $\log(z) + \log(w) \in \text{Log}(zw)$, es decir, $\log(z) + \log(w)$ es un logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo principal de zw .

Como la función $z \mapsto \arg(z)$ es continua¹ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ y discontinua en \mathbb{R}_0^- , se deduce que el logaritmo principal es discontinuo en \mathbb{R}_0^- y continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

1.5.4 Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log(a)}$. Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a , todos ellos son de la forma $\log(a) + i2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $e^{b(\log(a) + i2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es una potencia de base a y exponente b . De todas ellas se destaca una:

$$a^b = e^{b \log(a)}$$

y dicho número se llama *valor principal* de la potencia de base a y exponente b . Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, el número

$$\begin{aligned}a^{1/n} &= \exp\left(\frac{1}{n} \log(a)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\log(a)}{n} + i \frac{\arg(a)}{n}\right) \\ &= |z|^{1/n} \left(\cos\left(\frac{\arg(a)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg(a)}{n}\right) \right)\end{aligned}$$

es el valor principal de la raíz n -ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$. Esta definición da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a , $z \mapsto a^z$, definidas por $a^z = \exp(z \log(a))$. También permite definir la función potencia compleja de exponente b , $z \mapsto z^b$ como $z^b = \exp(b \log(z))$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b = z^b w^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b \log(zw)) = \exp(b \log(z) + b \log(w))$$

o, puesto que la función exponencial es periódica de periodo $2\pi i$, cuando se verifique que

¹ No hemos hablado todavía de funciones continuas, mucho menos de continuidad de funciones complejas, pero la idea intuitiva de que cuando z se acerca a z_0 , el argumento principal de z se acerca al argumento principal de z_0 sigue siendo válida.

$$b \log(zw) = b \log(z) + b \log(w) + 2k\pi i, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante la igualdad $\log(zw) = \log(z) + \log(w)$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k = 0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.