jercicios de examen para el primer parcial.

1) Sept. 2013.

Sea $f:]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log(x) - x + 2$.

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos

b) Calcula $f(]0,+\infty[)$

c) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x)=0$ en $\mathbb{R}^+$ y localizarlas en intervalos de longitud $\frac{1}{2}$.

a) Función continua y derivable (ya que está formada por funciones que también lo son)

Estudiamos la monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (único punto crítico)} \longrightarrow \text{Intervalos de monotonía: }]0,1[\text{ y }]1,+\infty[$$

$x \in]0,1[\Rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f$ es est. creciente en $]0,1[$

$x \in]1,+\infty[\Rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f$ es est. decreciente en $]1,+\infty[$

Como consecuencia se alcanza un extremo relativo en $x=1$, que al ser el único se convierte en extremo absoluto. Máximo absoluto de $f = 1$.

b) Calculamos la imagen de f:

$$f(]0,+\infty[) = f(]0,1]) \cup f([1,+\infty[) =]\lim_{x\to 0} f(x), f(1)] \cup]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)]$$

Calculamos lo necesario:

$$\lim_{x\to 0}(\log(x) - x + 2) = -\infty$$

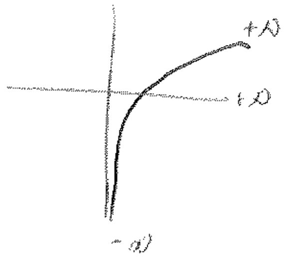
$$\lim_{x\to+\infty}(\log(x) - x + 2) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x}\left(\left(\frac{\log(x)}{x} - 1 + \frac{2}{x}\right)\right) = -\infty$$

$-\infty$ (escala de infinitos)

$$f(1) = \underset{0}{\log(1)} - 1 + 2 = 1$$

Por lo tanto, tenemos que $f(]0,+\infty[) =]-\infty,1] \cup]-\infty,1] =]-\infty,1]$

*IMPORTANTE:



c) Según el Teorema de Bolzano en el intervalo $]0,1[$, hay cambio de signo de f, por tanto hay al menos un 0 de f entre 0 y 1. Análogamente en el intervalo $]1,+\infty[$ hay al menos otro 0 de f por encima de 1.

No existen más ceros de f dado que f' sólo se anula una única vez, y por el Teorema de Rolle sabemos que f no se puede anular más de 2 veces.

Por tanto, la ecuación tiene exactamente 2 soluciones.

La primera solución se localiza en el intervalo $]0,\frac{1}{2}]$ y la segunda en $[e, e+\frac{1}{2}]$, ya que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \log\left(\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} + 2 = \log(2^{-1}) - \tfrac{3}{2} = -1\log(2) + \tfrac{3}{2} > 0$$

Cambio de signo

$$f(e) = \log(e) - e + 2 = 1 - e + 2 = 3 - e > 0$$

$$f\left(e + \tfrac{1}{2}\right) = \log\left(e + \tfrac{1}{2}\right) - e - \tfrac{1}{2} + 2 = 0'04943 < 0$$

Cambio de signo

) Sept 2012.

Calcula el siguiente límite:

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+x^2)-x^2}{x^2} = \dfrac{0}{0} \overset{L'Hô}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{1+x^2} - 2x}{3x^2} = \dfrac{\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x(1+x^2)}{1+x^2}}{3x^2} = \dfrac{\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x-2x^3}{1+x^2}}{3x^2} = \dfrac{\frac{-2x^3}{1+x^2}}{3x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x^3}{3x^2(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x}{3(1+x^2)} = \dfrac{0}{3} = \underline{\underline{0}}$

Sept 2012

Sea $m>0$. Determina el número de soluciones de la ecuación: $mx - 1 + \dfrac{1}{x} = 2m$, con $x>0$

$\parallel$

$mx - 1 + x^{-1} = 2m \Rightarrow mx - 1 + x^{-1} - 2m = 0$

Analizamos sus posibles puntos críticos igualando la primera derivada a 0:

$f(x) = mx - 1 + x^{-1} - 2m$

$f'(x) = m - x^{-2} = m - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{1}{x^2}$; $x^2 = \dfrac{1}{m}$

$x = \sqrt{\dfrac{1}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$

Podemos afirmar por el Teorema de Rolle, que como la función derivada sólo tiene un punto crítico, f se puede anular como mucho en 2 puntos.

Comprobamos si es máximo ó mínimo con la segunda derivada:

$f''(x) = -(-2)x^{-3} = \dfrac{2}{x^3} \Longleftrightarrow f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right) > 0 \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{m}}$ siempre positivo

Por tanto, tenemos un mínimo absoluto en $\dfrac{1}{\sqrt{m}}$, ya que es el único punto crítico. Evaluamos f en dicho punto y calculamos los límites de f en los extremos del dominio para concluir el ejercicio;

$f(x) = mx - 1 + \dfrac{1}{x} - 2m \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right) = m\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right) - 1 + \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{m}}} - 2m = m\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right) + \sqrt{m} - 2m - 1 = \sqrt{m} + \sqrt{m} - 2m - 1 = 2\sqrt{m} - 2m - 1 =$

$= 2(\sqrt{m} - m) - 1 < 0$

Llegamos a la conclusión de que el valor de f en el punto mínimo es negativo ya que si resolvemos la ecuación $2(\sqrt{m}-m)-1=0$; $2\sqrt{m} = 2m+1$; $4m = 4m^2 + 4m + 1 \Longrightarrow 4m^2 + 1 = 0$, esta ecuación no tiene solución para ningún $m>0$, el valor del mínimo de f es negativo siempre.

Hay que añadir que la función tanto en 0 como en $+\infty$, diverge a $+\infty$. Con todo esto concluimos que la función f tiene dos ceros (uno antes de $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ y otro después).

Por tanto, la ecuación planteada tiene exactamente 2 soluciones en $\mathbb{R}^+$.

Sept 2014

Resolver los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \lg(x) - 1}{\lg^2(x)} = \dfrac{0}{0} \overset{L'Hô}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1+\lg^2(x))}{2\lg(x)\cdot(1+\lg^2(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2(1+\lg^2(x))} \cdot \dfrac{e^x - (1+\lg^2(x))}{\lg(x)} =$

$= \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2(1+\lg^2(x))}}_{\to 1/2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \lg^2(x)}{\lg(x)}$

$\hookrightarrow \dfrac{0}{0} \overset{L'Hô}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overset{\to 1}{e^x} - \overset{\to 0}{2\lg(x)(1-\lg^2(x))}}{\underbrace{(1-\lg^2(x))}_{\to 1}} = \dfrac{1}{1} = 1$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \lg(x) - 1}{\lg^2(x)} = \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\mathrm{sen}(x)-e^{x}}{\mathrm{arctg}(x)} = \dfrac{0}{0} \overset{L'Hô}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-e^{x}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)(\cos(x)-e^{x}) = 1\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$

) Sept 2014

c) Estudiar la función $f(x) = \dfrac{x\cdot \log^2(x)}{1+\log(x)}$, con $x>0$.

- Dominio: ¿Dónde se anula el denominador?

  $1+\log(x)=0$; $\log(x)=-1 \Rightarrow e^{\log(x)} = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1}$ (por las propiedades de los logaritmos)

  Entonces el $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-1}\}$

  Función continua y derivable en $\mathrm{dom}(f)$ ya que es cociente de funciones que lo son.

- Monotonía:

$$g'(x) = \frac{1}{\log(x)}$$

$$h'(x) = \log^2(x) + x\cdot\frac{2\log(x)}{x} = \log^2(x) + 2x\cdot\frac{1}{x}\log(x)$$

$$f'(x) = \frac{\left[\left(\log^2(x)+2x\cdot\frac{1}{x}\log(x)\right)\cdot(1+\log(x))\right] - \left[(x\cdot\log^2(x))\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{(1+\log(x))^2} =$$

$$= \frac{\left[(\log^2(x)+2\log(x))\cdot(1+\log(x))\right]-\left[\log^2(x)\right]}{(1+\log(x)^2)} = \frac{\cancel{\log^2(x)}+\log^3(x)+2\log(x)+2\log^2(x)-\cancel{\log^2(x)}}{(1+\log(x))^2}$$

$$= \frac{\log^3(x)+2\log(x)+2\log^2(x)}{(1+\log(x))^2} = \frac{\log(x)\left(\log^2(x)+2\log(x)+2\right)}{(1+\log(x))^2}$$

Por lo tanto, la derivada sólo se anula cuando $\log(x)=0 \Longleftrightarrow x=1$ (único pto. crítico ya que el 2º factor del numerador nunca se anula).

Sabiendo que $x>0$ siempre, estudiamos los intervalos de monotonía de f (según $\log(x)$):

- Si $0<x<e^{-1} \Rightarrow \log(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \to$ Est. decreciente
- Si $e^{-1}<x<1 \Rightarrow \log(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \to$ Est. decreciente
- Si $1<x \Rightarrow \log(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \to$ Est. creciente

} Mínimo relativo en $x=1$.

- Imagen de f: los intervalos de monotonía nos permiten descomponer el conjunto imagen de la siguiente manera

$$f(\mathbb{R}\setminus\{e^{-1}\}) = f(]0,e^{-1}[) \cup f(]e^{-1},1]) \cup f([1,+\infty[)$$

- Para determinar el valor de estos intervalos es necesario calcular:

  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{0}{-\infty} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to e^{-1}} f(x) = \lim\limits_{x\to e^{-1}_-} f(x) = \dfrac{e^{-1}\,(\text{pos})}{0\,(\text{neg})} = -\infty$

    $\lim\limits_{x\to e^{-1}_+} f(x) = \dfrac{e^{-1}\,(\text{pos})}{0\,(\text{pos})} = +\infty$
  - $f(1)=0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{L'Hô}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^2(x)+2x\frac{1}{x}\log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\log^2(x)+2\log(x)\right) = +\infty$

- Por lo tanto, el conjunto imagen de f es:

$$f(\mathbb{R}\setminus\{e^{-1}\}) =]-\infty,0[\cup [0,+\infty[\cup [0,+\infty[= \underline{\mathbb{R}}$$

1) Sept 2014

Acota el número de soluciones de $x^2 = \log\left(\frac{1}{x}\right)$ en el intervalo $]1,+\infty[$

$f(x)=x^2-\log\left(\frac{1}{x}\right)=0$;

$x^2-\log(1/x) = x^2-\log(1)-\log(x) = x^2+\log(x)$ → Est. creciente por ser suma de est crecientes en el intervalo $]1,+\infty[$.

Lo comprobamos:

$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x+1}{x}$ → la derivada de f es positiva en el intervalo $]1,+\infty[$, por lo que f es est. creciente en todo su dominio.

Analizamos los extremos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1\\[2mm] \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\end{array}\right\}$$

No tiene ningún cero, por lo tanto la ecuación no admite ninguna solución en el intervalo $]1,+\infty[$. (no cambia de signo en los extremos)

1) Final 12-13

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{(\log(1+x))^2}=\frac{0}{0}\overset{L'H\hat{o}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{2(\log(1+x))\cdot\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\frac{2\log(1+x)}{1+x}}=\lim\frac{(1+x)(e^x-\cos(x)+\operatorname{sen}(x))}{2\log(1+x)}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}{\log(1+x)}\to\frac{0}{0}\overset{L'H\hat{o}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\frac{1}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+\operatorname{sen}(x)+\cos(x))\cdot(1+x)}{1}=2\cdot 1=2$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{(\log(1+x))^2}=\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{2}{2}=1$

1) Final 12-13

Demuestra que para todo $x\in\mathbb{R}$ se verifica que: $2x\operatorname{arctg}(x)\geq\log(1+x^2)$.

- Analizaremos el signo de la función. Tendremos que probar que $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$f(x)=2x\operatorname{arctg}(x)-\log(1+x^2),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2\operatorname{arctg}(x)+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=2\operatorname{arctg}(x)$

• El único punto crítico que obtenemos es $x=0$, ya que $\operatorname{arctg}(0)=0$. Analizando el cambio de signo obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\cdot\ \text{Si } x>0\to\operatorname{arctg}(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\text{Estrictamente creciente }]0,+\infty[\\ \cdot\ \text{Si } x<0\to\operatorname{arctg}(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow\text{Estrictamente decreciente }]-\infty,0[\end{array}\right\}\text{Cambio de signo}$$

- Por lo tanto, el punto $x=0$ es el mínimo absoluto por ser el único punto crítico y vale $f(0)=0$.

- Concluimos:

$f(x)\geq f(0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (queda probada la desigualdad).

1) 1º Parcial 13 14.

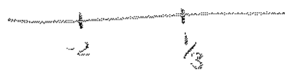
Calcula los números reales que verifican que $|3x-1| < x^2 - |x+2|$

· La desigualdad depende de que los dos valores absolutos (sus argumentos) sean mayores ó menores que 0:

$$3x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3}$$

$$x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

· Entonces consideramos los siguientes intervalos:



- Si $x \leq -2$, entonces $x \leq \frac{1}{3}$ también (lógicamente) y los dos argumentos son números menores o iguales a 0.

$$1-3x < x^2+x+2 \iff x^2+4x+1 > 0 \longrightarrow x^2+4x+1 ;$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \begin{cases} -2 \pm \sqrt{8 \cdot 2} = -2+\sqrt{6} \\ -2-\sqrt{6} \end{cases}$$

Obtenemos las soluciones $x=-2-\sqrt{6}$ y $x=-2+\sqrt{6}$. Por lo tanto;

$$x^2+4x+1 > 0 \text{ cuando } \begin{cases} x < -2-\sqrt{6} \to \text{Ya que estamos considerando } x \leq -2 \\ x > -2+\sqrt{6} \end{cases}$$

Entonces tenemos que: $]-\infty, -2-\sqrt{6}[$ cumplen la inecuación.

- Si $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ entonces $x+2 \geq 0$ y $3x-1 \leq 0$ y la igualdad queda:

$$1-3x < x^2-x-2 \iff x^2+2x-3 > 0$$

Si resolvemos la ecuación $x^2+2x-3=0$, $x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \begin{cases} \to \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \to \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$ Por lo que no hay solución ya que estamos en el intervalo $[-2, \frac{1}{3}]$ NO SOL

- Si $x \geq \frac{1}{3}$, los argumentos de los dos valores absolutos son mayores ó iguales a 0:

$$3x-1 < x^2-x-2 \iff x^2-4x-1 > 0$$

Si resolvemos la ecuación $x^2-4x-1=0$, $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-(-4)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \begin{cases} 2+\sqrt{10} \to \text{Ya que estamos considerando } x \geq \frac{1}{3} \\ \cancel{2-\sqrt{10}} \end{cases}$

Entonces, tenemos que: $]2+\sqrt{10}, +\infty[$ cumple la inecuación

· Sol: Uniendo las distintas soluciones obtenidas tenemos que la desigualdad se cumple sí y solo si:

$$x \in \left]-\infty, -2-\sqrt{6}\right[\cup \left]2+\sqrt{10}, +\infty\right[$$

· Final 12-13

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable que verifica que $f'(x) = xe^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra los puntos críticos de f y decide si se alcanza un extremo relativo.

$f'(x) = x \cdot e^x = 0 \iff x=0$ (ya que la exponencial nunca se anula.)

$f''(x) = e^x + xe^x \longrightarrow$ Evaluamos en el punto crítico $\Rightarrow f''(0) = 1 > 0$

Por tanto, en el punto $x=0$ se alcanza un mínimo relativo, pero por ser el único punto crítico (extremo de la función) concluimos además que es un mínimo absoluto

) Primer parcial 12-13

Calcula los números reales x que verifican que: $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq 3$

- La inecuación es equivalente a $\frac{|2x-1|}{|x+3|} \geq 3 \Rightarrow |2x-1| \geq 3|x+3|$. Evidentemente $x \neq -3$. Diferenciaremos los siguientes casos:

$x = \frac{1}{2}$ $x = -3$

- Si $x < -3$ entonces $x < \frac{1}{2}$ y la inecuación quedaría:

$$-(2x-1) \geq -3(x+3) \Leftrightarrow -2x+1 \geq -3x-9 \Leftrightarrow x \leq -10 \Rightarrow [-10,-3[\rightarrow \text{Es solución}$$

- Si $-3 < x < \frac{1}{2}$ entonces la inecuación queda:

$$-(2x-1) \geq 3(x+3) \Leftrightarrow -2x+1 \geq 3x+9 \Leftrightarrow 5x \leq -8 \Leftrightarrow x \leq \frac{-8}{5} \Rightarrow \left]-3, \frac{-8}{5}\right] \rightarrow \text{Es solución}$$

- Si $x \geq \frac{1}{2}$ entonces la inecuación queda:

$$2x-1 \geq 3x+9 \Leftrightarrow x \leq -10 \Rightarrow \text{NO SOL.}$$ ya que estamos considerando $x \geq \frac{1}{2}$

- Uniendo los dos conjuntos que nos han salido como soluciones nos queda el conjunto:

$$\left[-10, \frac{-8}{5}\right] \setminus \{-3\}$$

) Febrero 13-14

b) Calcula el límite: $\lim_{x\to 0} \left(1+tg(x)+sen^2(x)+\frac{x^3}{3}-x\right)^{1/x^2} = 1^{\infty} \xRightarrow{\text{regla n° e}} e^{\lim_{x\to 0}[(f(x)-1)\cdot g(x)]}$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+tg(x)+sen^2(x)+\frac{x^3}{3}-x-\cancel{1}}{x^2} = \frac{0}{0} \xRightarrow{L'Hô} \lim_{x\to 0} \frac{(1+tg^2(x)+2sen(x)\cdot cos(x)+x^2-1)}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{tg^2(x)+2sen(x)cos(x)+x^2}{2x} = \frac{0}{0} \xRightarrow{L'Hô} \lim_{x\to 0} \frac{2tg(x)\cdot(1+tg^2(x))+(2sen(x)(-sen(x))+2cos(x)cos(x))+2x}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2tg(x)(1+tg^2(x))+(2cos^2(x))-2sen^2(x)+2x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- Por tanto, $\lim_{x\to 0} \left(1+tg(x)+sen^2(x)+\frac{x^3}{3}-x\right)^{1/x^2} = e^1 = e$

1) Febrero 13-14.

Se considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x^3-3x^2-12x-m$. Estudia la monotonía, la imagen y el n° de ceros de f en función del parámetro m.

- Monotonía:
  - f derivable en $\mathbb{R}$: $f'(x) = 6x^2-6x-12 = 6(x^2-x-2)$
  - Los puntos críticos de la función son: $f'(x)=0$; $x^2-x-2=0$; $x = \frac{1\pm\sqrt{1-(-8)}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$
  - Intervalos de monotonía: -1 2

    - Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ Estrictamente creciente $]-\infty, -1]$
    - Si $-1 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ Estrictamente decreciente $[-1, 2]$
    - Si $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ Estrictamente creciente $[2, +\infty[$

- Imagen y ceros: Calculamos el valor de f en los extremos
  - $f(-1) = -2-3+12-m = 7-m$
  - $f(2) = 16-12-24-m = -20-m$
  - $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

- Por lo tanto, el número de ceros (soluciones, raíces) depende del valor de la función en -1 y 2. En concreto:

- Si $7-m<0$, o lo que es lo mismo, $m>7$, la función sólo se anula una vez y en el intervalo $]2,+\infty[$
- Si $m=7$, la función tiene 2 ceros → En -1
  → En $]2,+\infty[$
- Si $-20<m<7$, la función tiene 3 ceros
- Si $m=-20$, la función tiene 2 ceros: → En 2
  → $]-\infty,-1[$
- Si $m<-20$, la función tiene un único cero en el intervalo $]-\infty,-1[$

i) Febrero 13-14

Se considera la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{2}{x}$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto $(a,f(a))$.

b) Calcula los puntos de corte de la recta tangente del apartado anterior con los ejes de coordenadas

c) Consideremos el segmento cuyos extremos son los puntos de corte de la recta tangente con los ejes de coordenadas ¿Para qué valores de a dicho segmento tiene longitud mínima?

a) Ec. recta tangente → $\boxed{y=f(a)+f'(a)(x-a)}$

Como $f(x)=\frac{2}{x}$ y $f'(x)=-2x^{-2}=\frac{-2}{x^2}$, la recta tangente es: $y=\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}(x-a)$

$\frac{2}{x} = 2\cdot\frac{1}{x}=2x^{-1}$

b) Puntos de corte:

$OX\ (y=0) \Rightarrow 0=\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}(x-a) \Longleftrightarrow \frac{2}{a}-\frac{2x-2a}{a^2}=0$; $\frac{2}{a}=\frac{2x-2a}{a^2}$; $2a^2=2xa-2a^2$; $4a^2=2xa$;

$2a^2=xa \Longleftrightarrow \frac{2a^2}{a}=x \Longleftrightarrow x=2a \Rightarrow$ Corta en el punto $B=(2a,0)$

$OY\ (x=0) \Rightarrow y=\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}(0-a) \Longleftrightarrow y=\frac{2}{a}-\frac{2(0-a)}{a^2}$; $\frac{2}{a}+\frac{2a}{a^2}=\frac{2a+2a}{a^2}=\frac{4a}{a^2}\Leftrightarrow\frac{4}{a}=y$

$\Downarrow$ Corta en el punto $A=(0,\frac{4}{a})$

c) La distancia entre los dos puntos es: $\boxed{dist(A,B)=dist((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

$$dist\left((2a,0),(0,\tfrac{4}{a})\right)=\sqrt{(0-2a)^2+(0-\tfrac{4}{a})^2}=\sqrt{(-2a)^2+(-\tfrac{4}{a})^2}=$$

$$\sqrt{(2a)^2+(\tfrac{4}{a})^2}=\frac{2\sqrt{a^4+4}}{a}$$ → Por lo tanto estamos buscando el mínimo de la función $g(a)=\frac{2\sqrt{a^4+4}}{a}$

$g'(a)=\frac{2a^4-8}{a^2\sqrt{a^4+4}} \Rightarrow$ Se anula en $a=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$

Comprobaremos que ese punto $a=\sqrt{2}$ es el mínimo absoluto

- Es el único punto crítico y $g''(\sqrt{2})>0$
- Como $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, la función g es decreciente en $]0,\sqrt{2}[$ y creciente en $[\sqrt{2},+\infty[$

Esto justifica que la función g alcanza su mínimo cuando $a=\sqrt{2}$

) Febrero 14-15

Resuelve el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}\right)^{1/x^2} = 1^{\infty} \xRightarrow{\text{regla nº2}} e^{\lim_{x\to a}[(f(x)-1)\cdot g(x)]} = e^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}-1\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{x^2\cdot\cos^2(x)} = \frac{0}{0} \Longrightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{x^2}}_{0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}}_{1} \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{x^2} \xrightarrow{L'Hô} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2(\cos(x))\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{0}{0} \xRightarrow{L'H} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2(-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\overset{0}{}-\cos(x)\cdot\cos(x))}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{e^x+e^{-x}}^{2}\overbrace{+2\operatorname{sen}^2(x)}^{0}\overbrace{+2\cos^2(x)}^{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}\right)^{1/x^2} = e^2$

) Febrero 14-15

Se considera la función $f: \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=e^{\frac{1+x}{1-x}}$

a) ¿Existe algún $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

b) ¿Es estrictamente monótona la función f?

c) Calcula la imagen de f.

a) Para que sea horizontal, la pendiente de la recta tangente debe ser igual a 0. Por lo tanto, analizamos la primera derivada:

$$f'(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1(1-x)+1(1+x)}{(1-x)^2} = e^{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} \Longrightarrow$$

$(1-x)^2$ se anularía en $x=1$, pero dado que la función no está definida en dicho punto, podemos afirmar que la derivada no se anula nunca, por lo tanto no existe ninguna recta tangente horizontal a $f(x)$.

NOTA:

$$y-f(a) = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Pendiente}}}{f'(a)}\,(x-a)$$

b) La derivada de f es positiva (ya que sus factores lo son). En consecuencia, la función es estrictamente creciente en $]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

c) Para calcular la imagen descomponemos el dominio en la unión de $]-\infty,1[$ y $]1,+\infty[$:

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = f(\,]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to 1^-}f(x)\right[\ \cup\ \left]\lim_{x\to 1^+}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$$

→ Aplicando la monotonía y la continuidad.

$$\cdot\ \lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad \left(\frac{-\infty+1}{+\infty-1}=-1\right)$$

$$\cdot\ \lim_{x\to 1^+}f(x) = e^{-\infty} = 0$$

$$\cdot\ \lim_{x\to+\infty}f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\cdot\ \lim_{x\to 1^-}f(x) = +\infty$$

Por lo tanto, la imagen es: $f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \left]0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e},+\infty\right[= \mathbb{R}^+\setminus\{\frac{1}{e}\}$

) Febrero 14-15

Determinar el número de soluciones de la ecuación: $3x^4 - 8x^3 = 24$

Determinar el número de ceros de la función $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 24$

- Al ser una ecuación polinómica de grado par no tenemos garantía de que haya algún cero. Analizamos la derivada:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12(x^3 - 2x^2) = 12x^2(x-2) = 0$$

$\rightarrow x = 2$, $x = 0$ } Se anula para estos valores.

- Aplicando el Teorema de Rolle sabemos que f a lo sumo tendrá 3 ceros
- Estudiamos los intervalos de monotonía determinados por los puntos críticos:

$\searrow 0 \searrow 2 \nearrow$

- Si $x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f$ es estrictamente decreciente
- Si $0<x<2 \Rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f$ es estrictamente decreciente
- Si $x>2 \Rightarrow f'(x)>0 \rightarrow f$ es estrictamente creciente

} Por tanto, en $x=2$ se alcanza un mínimo relativo y en $x=0$ no se alcanza extremo.

- Además $f(0) = -24$ y $f(2) = -40$.

$\lim_{x\to -\infty} 3x^4 - 8x^3 - 24 = +\infty$, y decrece a -24 en $f(0)$. || $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

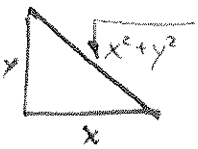
- Por el Teorema de Bolzano, aseguramos la existencia de un cero en el intervalo $]-\infty, 0[$ (antes de $x=0$, ya que cambia de signo de $+\infty$ a -24).

Por otra parte, la función sigue decreciendo hasta el mínimo (absoluto) en $x=2$, donde vale -40, y entonces comienza a crecer hasta $+\infty$, por lo que f tiene otro cero después de $x=2$, en el intervalo $]2, +\infty[$.

- f tiene 2 ceros, por lo que la ecuación tiene 2 soluciones.

) Febrero 14-15

De todos los triangulos rectángulos cuyos catetos suman 10, halla las dimensiones de aquel cuyo perímetro sea mínimo.



$x + y = 10$ catetos suman $10 \rightarrow y = 10 - x$ ← sustituimos

$x + y + \sqrt{x^2+y^2}$ perímetro $\rightarrow x + 10 - x + \sqrt{x^2 + (10-x)^2} = 10 + \sqrt{x^2 + 100 + x^2 - 20x} = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$

- Por lo tanto, la función a optimizar es:

$$f(x) = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

- x e y representan dimensiones por lo que tomar el dominio en el intervalo $[0,10]$.
- Calculamos los puntos críticos en el interior:

$$f'(x) = \frac{4x - 20}{2\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0;\ x = 5 \in]0,10[$$

$\rightarrow$ Nunca se anula ya que $x \in]0,10[$

- Para finalizar, evaluamos f en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$$f(0) = 20 = f(10) > f(5) = 10 + \sqrt{50}$$

- Por tanto, el mínimo absoluto de f se alcanza en $x=5$.
- Sol: los catetos del triángulo deben ser iguales a 5.

3^{er} parcial 14-15 (E2)

Se considera la función $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

a) Existe algún $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

b) ¿Es estrictamente monótona?

c) Calcula la imagen de f.

a) Para que sea horizontal la pendiente de la recta tangente ($y - f(a) = f'(a)(x-a)$) debe ser 0. Por lo tanto, buscamos un punto donde la función derivada se anule:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \operatorname{arctg}\left((1-x)^{-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x)^2+1}{\cancel{(1-x)^2}}\cdot \cancel{(1-x)^2}} = \frac{1}{(1-x)^2+1}$$

Observamos que la derivada no se anula nunca. Por lo tanto, no existe recta tangente horizontal en el dominio de la función.

b) La derivada de f es positiva (ya que todos sus factores lo son). En consecuencia, la función es estrictamente creciente desde $]-\infty,1[$ y $]1,+\infty[$

c) Descomponemos el dominio en la unión de $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$. Por consiguiente:

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = f(]-\infty,1[\cup]1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 1_-} f(x)\right[\cup \left]\lim_{x\to 1_+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

↳ Aplicando la continuidad y la monotonía creciente.

· Calculamos los límites necesarios:

- $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{0}\right) = 0$ - $\lim_{x\to 1_-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right) = +\frac{\pi}{2}$

- $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{0}\right) = 0$ - $\lim_{x\to 1_+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

· Por lo tanto, $Im(f)$:

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \left]0, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]+\frac{\pi}{2}, 0\right[= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$$

) 1^{er} parcial 14-15

Prueba que para todo $x>0$, se verifica la desigualdad: $\frac{3}{2}x^2 - 6\log(x) > \frac{1}{2}$

· $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6\log(x) - \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Tendremos que probar que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

· Calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{6}{2}x - \frac{6}{x} = 3x - \frac{6}{x} = \frac{3x^2-6}{x} = 3\frac{(x^2-2)}{x} = 3\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ → Nos quedamos con la solución positiva dado que $x>0$.

· Calculamos los intervalos de monotonía:

0 $\sqrt{2}$

- Si $0 < x < \sqrt{2}$ → $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente
- Si $x > \sqrt{2}$ → $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Por tanto, como hay cambio de signo, en $x=\sqrt{2}$ se alcanza un mínimo relativo, que al ser el único extremo de f se convierte en mínimo absoluto.

· En consecuencia, $f(\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\cdot 2 - 6\log(2^{1/2}) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{6}{2} - \frac{6}{2}\log(2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} - 3\log(2) = f(\sqrt{2})$ y es positivo, por lo que $Im(f)$ verifica:

$f(x) \geq f(\sqrt{2}) > 0$, $\forall x>0 \Rightarrow$ Por lo que la desigualdad planteada es cierta.

) 1er parcial 14-15 (E2)

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{1+x^2}\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = 1^\infty \xrightarrow{\text{refinación}} e^{\left[\left(\lim_{x\to0} f(x)-1\right)\cdot g(x)\right]} = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{1+x^2}-1\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1-1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2-x^2}{(1+x^2)\operatorname{sen}^2(x)} = \underbrace{\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+x^2)}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2-x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}}_{\frac{0}{0}\overset{L'H}{\Rightarrow}\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}=\frac{0}{0}}$$

$$\overset{L'H}{\Rightarrow}\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos(x)\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)} = \frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos^2(x)-2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{1+x}\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = e^0 = 1$$

1) Sea f desconocida, cuyo polinomio de Taylor de grado 3 ($P_3(x)$) centrado en 0 es:

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Longrightarrow f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

- Calcula P_3 en 0 de la función $g(x) = x\cdot f(x)$

$$P_3(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = 0 + 1x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$$

$g(0) = 0\cdot f(0) = 0$

$g'(0) = f(0) + xf'(0) = 1$

$g''(0) = f'(0) + f'(0) + xf''(0) = 2$

$g'''(0) = f''(0) + f''(0) + f''(0) + xf'''(0) = 3 \circ 6?$

) 1er parcial 14-15 (E2)

Todos los rectángulos de perímetro 20, haya las dimensiones de aquel cuya diagonal es mínima.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ h = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\}$$ Por lo tanto, la función a minimizar es:

$$f(x) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(10-x)^2} = \sqrt{x^2+100+x^2-20x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x^2-20x+100}$$

- Consideramos el dominio de f el intervalo $[0,10]$ dado que son dimensiones. Calculamos los puntos críticos en el interior

$$f'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}} = 0 \Longleftrightarrow 2x-10=0 \Leftrightarrow x=5 \in]0,10[$$

- Evaluamos f en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$$f(0) = 10 = f(10) > f(5) = \sqrt{50}$$

- Con esto concluimos que el mínimo absoluto se alcanza en $x=5$. Por lo tanto, la solución del problema es que los lados del rectángulo (o mejor dicho, cuadrado) son iguales a 5.

ejercicios para el examen final.

·) Sept 2013

a. $f(x)=(x-a)\cos(x)$. Calcula el valor de a sabiendo $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}-2$.

- Aplicando el método de integración por partes:

ALPES

$$\int_0^{\pi/2}(x-a)\cos(x)\,dx=\begin{bmatrix} u=(x-a)\longrightarrow du=dx\\ dv=\cos(x)\,dx\longrightarrow v=\operatorname{sen}(x)\end{bmatrix}\Rightarrow \int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Big[(x-a)\cdot\operatorname{sen}(x)\Big]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx=\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot 1-(-a\cdot 0)\right)-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-a-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx=\frac{\pi}{2}-a-\Big[-\cos(x)+C\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-a+\Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-a+(0-1)=\frac{\pi}{2}-a-1\Longrightarrow\frac{\pi}{2}-a-1=\frac{\pi}{2}-2\Leftrightarrow -a-1=-2\Leftrightarrow \underline{a=1}$$

·) Final 12-13

b) Calcula: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt}{2x}\right)^{1/x}$

Importante:

TFC:

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)}f(t)\,dt\right)'=$$

$$f(g(x))\cdot g'(x)-f(h(x))\cdot h'(x)$$

· 1°) Analizamos la base de la expresión $\left(\dfrac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt}{2x}\right)_{x\to0}\overset{ind}{=}\dfrac{0}{0}\xrightarrow{L'Hôp}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt\right)'}{2}$$

- TFC para derivar numerador $\Rightarrow\left(\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt\right)=e^{-x^2}\cdot1-e^{-(-x)^2}\cdot(-1)=$

$$=e^{-x^2}+e^{-x^2}$$

- Por lo tanto, nos quedaría el límite:

$$\lim_{x\to0}\frac{\overset{\to1}{e^{-x^2}}+\overset{\to1}{e^{-x^2}}}{2}=\frac{2}{2}=1\Longrightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{\overbrace{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt}^{\to1}}{2x}\right)^{\overset{\to\infty}{1/x}}\overset{ind}{=}1^{\infty}$$

· 2°) Dado que el límite estaba elevado a $1/x$ estamos ante una indeterminación 1^∞, por lo que aplicando la regla del número e:

NOTA:

$\lim\limits_{x\to c}[(f(x)-1)\cdot g(x)]$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt}{2x}-1\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt-2x}{2x^2}\right)\overset{ind}{=}\frac{0}{0}\xrightarrow[TFC]{L'Hôp}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}+e^{-x^2}-2}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{-x^2}-2}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-1}{2x}\overset{ind}{=}\frac{0}{0}\xrightarrow{L'Hôp}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-2x\cdot e^{-x^2}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

- Por lo que nos quedaría:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\int_{-x}^{x}e^{-t^2}dt}{2x}\right)^{1/x}=e^0=\underline{1}$$

) Final 12-13

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable que verifica que $f'(x) = x \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

i) Calcular la expresión de f sabiendo que dicha función alcanza su mínimo absoluto en 0 y que $f(0)=0$

• Integramos por partes:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \left[\begin{matrix} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \to v = e^x \end{matrix}\right] \Rightarrow x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + C = f(x)$$

• Sabemos que $f(0)=0$:

$$f(0) = -1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1 \Longrightarrow f(x) = xe^x - e^x + 1$$

Final febrero 2013-2014

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{1 \cdot \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt + x \cdot e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}$$

→ derivada del producto

NOTA: TFC → $x \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}dt$

$e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \cos(x) - e^{0} \cdot 0 = e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \cos(x)$

• Resolvemos cada sumando por separado:

2º) $$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^{-\operatorname{sen}^2(x)}}{2\operatorname{sen}(x)} \xrightarrow{\text{como } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}^2(x)}}{2\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1}} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

1º) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \cos(x)}{2\cos(x)}$$

$\hookrightarrow \cos(0) \to 1$

• Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

) Final febrero

) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{tg}^2(x)} e^{-t^2}\,dt}{x^2} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{tg}^4(x)} \cdot 2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}{2x} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\,\cos(x)} \to 1 = 1$$

NOTA: TFC → $\int_0^{\operatorname{tg}^2(x)} e^{-t^2}\,dt$

$e^{-\operatorname{tg}^4(x)} \cdot 2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x)) - e^{0} \cdot 0$

ii) Calcular: $\int \log(x + \sqrt{x^2+1})\,dx$

1º) Calculamos la derivada de $\log(x+\sqrt{x^2+1})$:

$$\left(\log(x+\sqrt{x^2+1})\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2º) Método de integración por partes:

$$\int \log(x+\sqrt{x^2+1})\,dx = \left[\begin{matrix} u = \log(x+\sqrt{x^2+1}) \longrightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ dv = dx \longrightarrow v = x \end{matrix}\right] = x \cdot \log(x+\sqrt{x^2+1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= x \cdot \log(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C$$

3) Sept 2012

1) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x t\cdot arctg(t)\,dt}{sen^3(x)} \overset{ind}{=} \dfrac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \underbrace{\dfrac{x\cdot arctg(x)}{3sen^2(x)\cos(x)}}_{\frac{1}{3\cos(x)}\cdot\frac{x}{sen(x)}\cdot\frac{arctg(x)}{sen(x)}}$

NOTA: TFC → $\int_0^x t\cdot arctg(t)\,dt$

$\cdot\ arctg(x) \to 0$

· Estudiamos cada límite por separado:

$$\left.\begin{array}{l}
\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{3\cos(x)} = \dfrac{1}{3} \\
\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{sen(x)} \overset{ind}{=} \dfrac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos(x)} = 1 \\
\lim_{x\to 0} \dfrac{arctg(x)}{sen(x)} \overset{ind}{=} \dfrac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos(x)} = 1
\end{array}\right\} \text{Por lo tanto, } \lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x t\cdot arctg(t)\,dt}{sen^2(x)} = \dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$$

2) Calcula: $\int_0^x t\cdot arctg(t)\,dt$

· Aplicando el método de integración por partes:

$$\int_0^x t\cdot arctg(t)\,dt \left[\begin{array}{l} u = arctg(t) \longrightarrow du = \frac{1}{1+t^2}dt \\ dv = t\,dt \longrightarrow v = \frac{t^2}{2} \end{array}\right] \Longrightarrow \frac{1}{2}\Big[t^2\cdot arctg(t)\Big]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot arctg(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}t^2\cdot arctg(t) - \frac{1}{2}\int_0^x 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\cdot arctg(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctg(x) = \underline{\frac{1}{2}\left(x^2 arctg(x) - x + arctg(x)\right)}$$

3) Calcula: (descomposición en fracciones ~~s~~ simples)

$$\int\left(\frac{5}{\cos^2(x)} - \frac{2}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx = \underbrace{\int \frac{5}{\cos^2(x)}\,dx}_{A_3} - \underbrace{\int \frac{2}{x}\,dx}_{A_2} + \underbrace{\int \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx}_{A_1}$$

$$A_1 \Rightarrow 5\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 5\int \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = 5\int \frac{2}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 5\cdot 2\int \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 10x^{\frac{1}{2}}$$

$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$

$$A_2 \Rightarrow 2\int \frac{1}{x}\,dx = 2\ln(x)$$

$$A_3 \Rightarrow 5\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = 5\tan(x)$$

4) Calcula: (cambio de variable)

$x\cdot \underbrace{\ln(e)}_{\to 1} = \ln(t)$

$$\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2+e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} e^x = t \longleftrightarrow x = \log(t) \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \end{array}\right] = \int \frac{t+3t^2}{2+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t(1+3t)}{2+t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{3t+1}{t+2}\,dt =$$

$$= \int 3\,dt - 5\int \frac{1}{t+2}\,dt = 3t - 5\log|t+2| + C = 3e^x - 5\log(e^x+2) + C$$

$$3 - \frac{5}{t+2} = \begin{array}{r|l} 3t+1 & t+2 \\ -3t-6 & 3 \\ 0\ -5 & \end{array}$$

0) Calcula: (racionales I $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$)

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx \xrightarrow[\text{ruffini}]{\text{productos notables}} (x+2)(x-2)$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(x-2)} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x+2)}{\cancel{(x+2)(x-2)}}$$

$$2x+1 = A_1(x-2)+A_2(x+2)\ ;\ 2x+1 = A_1x-2A_1+A_2x+2A_2\ ;$$

$$2x+1 = x(A_1+A_2)+(-2A_1+2A_2)$$

Sacamos sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2 &= A_1+A_2 \\ 1 &= -2A_1+2A_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x2)\ 4 = 2A_1+2A_2 \\ &1 = -2A_1+2A_2 \\ \hline &5 = 0+4A_2 \\ &A_2 = \tfrac{5}{4} \end{aligned} \qquad 2 = 2A_1+\frac{5}{4}\ ;\ 2-\frac{5}{4} = A_1\ ;\quad A_1 = \frac{3}{4}$$

· Por lo tanto:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4}\,dx = \int\left(\frac{3/4}{(x+2)}+\frac{5/4}{(x-2)}\right)dx = \frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx + \frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx = \frac{3}{4}\ln(x+2)+\frac{5}{4}\ln(x-2)+C$$

1) Calcula: (racionales II)

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-9x^2+27x-27}\,dx \xrightarrow[\text{ruffini}]{}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ 3 & & 3 & -18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \\ 3 & & 3 & -9 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$\frac{x^2+2}{(x-3)^3} = \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{A_3}{(x-3)^3} = \frac{A_1(x-3)^2 \text{[redacted]} + A_2(x-3) + A_3}{(x-3)^3}$$

· Entonces tenemos que:

$$x^2+2 = A_1(x-3)^2+A_2(x-3)+A_3\ ;\ x^2+2 = A_1x^2-9A_1+A_2x-3A_2+A_3$$

$$\underset{1}{x^2} + \underset{0}{0\cdot x} + \underset{2}{2} = \underset{1}{A_1x^2} + \underset{0}{x(A_2-6A_1)} + \underset{2}{(9A_1-3A_2+A_3)}$$

$A_1 = 1$

$A_2-6A_1 = 0\ ;\ A_2 = 6$

$9A_1-3A_2+A_3 = 2\ ;\ A_3 = 11$

· Por lo que tenemos:

$$\int \frac{x^2+2}{x^3-9x^2+27x-27}\,dx = \int\frac{1}{(x-3)}\,dx + \int\frac{6}{(x-3)^2}\,dx + \int\frac{11}{(x-3)^3}\,dx \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}} \begin{bmatrix}(x-3)=t \\ dx = dt\end{bmatrix} \Longrightarrow \int\frac{1}{t}\,dt + \int\frac{6}{t^2}\,dt + \int\frac{11}{t^3}\,dt =$$

$$= \ln t + 6\int t^{-2}dt + 11\int t^{-3}dt = \ln t + 6(-1)\int -t^{-2}dt + 11\int\frac{-2}{-2}t^{-3}dt = \ln t - 6\cdot\frac{1}{t} - \frac{11}{2}t^{-2} \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}}$$

$$\ln(x-3) + \frac{6}{(x-3)} - \frac{11}{2}(x-3)^{-2} + C$$

2) Calcula: (funciones trigonométricas)

$$\int \frac{1}{sen(x)}dx = \int \frac{sen(x)}{sen^2(x)}dx = \int \frac{sen(x)}{1-cos^2(x)}dx \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}} \begin{bmatrix} cos(x)=t \\ -sen(x)dx=dt \end{bmatrix} \Longrightarrow \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{1}{t^2-1}dt \xrightarrow{\text{racionales}}$$

$$(t^2-1)=(t-1)(t+1) \longrightarrow \frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{t^2-1} \rightarrow 1 = A(t+1)+B(t-1) \longrightarrow$$ Ahora le damos a t los valores de las ceros del denominador

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} t=1 \rightarrow 1=2A\ ;\ A=\frac{1}{2} \\ t=-1 \rightarrow 1=-2B\ ;\ B=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \frac{1}{t^2-1} = \frac{1/2}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1};$$

Por lo que tenemos:

$$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}dt = \frac{1}{2}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|t+1| = \frac{1}{2}\log\frac{|t-1|}{|t+1|} \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}} \frac{1}{2}\log\frac{|cos(x)-1|}{|cos(x)+1|}+C$$

) Sept 2015

1) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{x-\int_0^{2\sqrt{x}} sen(sen(t))dt}{x} \underset{ind}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0}\frac{1-sen(sen(2\sqrt{x}))\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{1} =$

TFC: $\int_0^{2\sqrt{x}} sen(sen(t))dt$

$sen(sen(2\sqrt{x}))\cdot\frac{2}{2\sqrt{x}} =$ ($0\cdot$ [illegible] $+2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$)

$= sen(sen(2\sqrt{x}))\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-sen(sen(2\sqrt{x}))}{\sqrt{x}} = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{sen(sen(2\sqrt{x}))}{\sqrt{x}} \underset{ind}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos(sen(2\sqrt{x}))\cdot cos(2\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{cos(sen(2\sqrt{x}))\cdot cos(2\sqrt{x})}{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\cos(sen(2\sqrt{x}))\cdot cos(2\sqrt{x}) = 2$$

Por lo tanto el límite pedido es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^{2\sqrt{x}} sen(sen(t))}{x}dt = 1-2 = -1$$

) Febrero 2015

1) Calcula: $\int \frac{sen^3(x)}{\sqrt{cos(x)}}dx \rightarrow$ Integral trigonométrica: Cambio de variable $\rightarrow t=cos(x) \Longrightarrow dt=-sen(x)dx$

$$\int\frac{sen^3(x)}{\sqrt{cos(x)}}dx = \int\frac{sen^2(x)\cdot sen(x)}{\sqrt{cos(x)}}dx = \int\frac{(1-cos^2(x))\,sen(x)}{\sqrt{cos(x)}}dx \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}} -\int\frac{(1-t^2)\,dt}{\sqrt{t}} = \int\frac{t^2-1}{\sqrt{t}}dt =$$

para quedar positivo cambio el signo del numerador

$$= \int t^{-\frac{1}{2}}\cdot(t^2-1)\,dt = \int(t^{3/2}-t^{-1/2})\,dt = \int t^{3/2}dt - \int t^{-1/2}dt = \frac{t^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} - \int t^{-1/2}dt =$$

$$= \frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2t^{5/2}}{5} - 2t^{1/2} = \frac{2}{5}t^{5/2} - 2\sqrt{t} + C \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}} \frac{2}{5}cos^{5/2}(x) - 2\sqrt{cos(x)} + C$$

) Sept 2015

.) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función cuyo Polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero es $P_2(x) = 1 + x - x^2$. Calcule el Polinomio de Taylor de igual orden y centro de la función $g(x) = \log(f(x))$

* Polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero de f:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x - x^2$$

- Igualando los coeficientes obtenemos:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -2 \text{ (ya que es } -x^2\text{, entonces } \frac{f''(0) \to -2}{2} = -1 \to -x^2)$$

* Polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero de g:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2$$

- Calculamos $g(0)$, $g'(0)$ y $g''(0)$:

$$g(x) = \log(f(x)) \Longrightarrow g(0) = \log(f(0)) = \log(1) = 0$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \Longrightarrow g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)\cdot f(x) - f'(x)f'(x)}{f(x)^2} \Longrightarrow g''(0) = \frac{-2-1}{1} = -3$$

- Por lo tanto, el polinomio pedido es:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 = x - \frac{3}{2}x^2$$

) Febrero 2015

) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función $f(x) = \int_x^{x^2} \cos(t^2)\,dt$

- Nos piden el Polinomio de Taylor en el origen ($a = 0$) de orden 2, por lo que tenemos que calcular:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

- Calculamos los coeficientes:

$$f(0) = \int_0^0 \cos(t^2)\,dt = 0$$

$$f'(x) \overset{TFC}{=} \cos(x^4)\cdot 2x - \cos(x^2) \Longrightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = 2\cos(x^4) + 2x(-\operatorname{sen}(x^4))4x^3 - (-\operatorname{sen}(x^2))2x = 2\cos(x^4) - 8x^4\cdot\operatorname{sen}(x^4) + 2x\cdot\operatorname{sen}(x^2) \Longrightarrow f''(0) = 2$$

- Por tanto, el polinomio pedido es:

$$P_2(x) = 0 - x + \frac{2}{2!}x^2 = -x + x^2 = x^2 - x$$

4) Sept 2015

Se considera $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$

a) Calcula una primitiva, F, de f.

Aplicando la integración por partes obtenemos F(x): un [illegible]

$$F(x) = \int x^2 e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x} \end{bmatrix} \Rightarrow x^2\cdot(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\cdot 2x\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\underbrace{\int x e^{-x}\,dx}$$

Nos vuelve a quedar otra integral que resolveremos por partes $\int x e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + (-e^{-x}) = -xe^{-x} - e^{-x}$$

Por tanto, tenemos que:

$$F(x) = \int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -x^2e^{-x} - 2(xe^{-x} + e^{-x}) = -e^{-x}\underline{(x^2+2x+2)}$$

ALGUNAS INTEGRALES INMEDIATAS

a) $\int 7\,dx = 7x + C$ b) $\int x^6\,dx = \frac{x^7}{7} + C$ c) $\int 7x^3\,dx = \frac{7x^4}{4} + C$ d) $\int x^{2/3}dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} = \frac{x^{5/3}}{5/3} = \frac{3x^{5/3}}{5} = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} + C$

e) $\int \frac{3}{x^4}\,dx = \int 3x^{-4}\,dx = \frac{3x^{-3}}{-3} = -x^{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$ f) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3x^{4/3}}{4} = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/3}\,dx = \frac{x^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1} = \frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} = 3x^{1/3} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$

i) $\int \frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}}\,dx = \int x^{-2}\cdot x^{-2/5}\,dx = \int x^{-12/5}\,dx = \frac{x^{-12/5+1}}{-\frac{12}{5}+1} = \frac{x^{-7/5}}{-7/5} = \frac{5x^{-7/5}}{7} + C = -\frac{5}{7\sqrt[5]{x^7}}$

) $\int (x^4 - 6x^2 - 2x + 4)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} - x^2 + 4x + C$

) $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{10}{x^6}\right)dx = \int (3x^{1/2} + 10x^{-6})\,dx = \frac{3x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{10x^{-6+1}}{-6+1} = \frac{3x^{3/2}}{3/2} + \frac{10x^{-5}}{-5} = \frac{6x^{3/2}}{3} - \frac{10}{5x^5} = 2x\sqrt{x^3} - \frac{2}{x^5} + C$

) $\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{x^{2/3}}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^2\cdot x^{-1/2} + x^{2/3}\cdot x^{-1/2})\,dx = \int (x^{3/2} + x^{1/6})\,dx = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{7/6}}{\frac{7}{6}} =$

$= \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + C \overset{?}{=} \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{6x\sqrt[6]{x}}{7} + C$

) $\int \left(\sqrt{5x} + \sqrt{\frac{5}{x}}\right)dx = \int (\sqrt{5}\cdot x^{1/2} + \sqrt{5}\cdot x^{-1/2})\,dx = \sqrt{5}\int (x^{1/2} + x^{-1/2})\,dx = \sqrt{5}\left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right) =$

$= \sqrt{5}\left(\frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2}\right) + C = \sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}\right) + C$ m) $\int \operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) + C$

n) $\int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\sqrt{2+\cos(3x)}}\,dx = -\frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\cdot(-3)\cdot(2+\cos(3x))^{-1/2} = -\frac{2}{3}\sqrt{2+\cos(3x)} + C$

emplos "principio de inducción"

) $x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dada esta sucesión, comprobar si es convergente (= tiene límite? = monótona y acotada?)

$x_1=1$, $x_2=\sqrt{3x_1}=\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3x_2}=\sqrt{3\sqrt{3}}$, $x_4=\sqrt{3x_3}=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ . . . . (los números cada vez son más grandes)

¿Convergente? = ¿Monótona y acotada? = ¿Tiene límite?

1º) Comprobamos si es monótona creciente $\longrightarrow$ ¿(x_n) es creciente? = ¿$x_n\leq x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$?

$A=\{n\in\mathbb{N} : x_n\leq x_{n+1}\}$

① $x_1\leq x_2$? $\longleftrightarrow$ $x_1=1\leq\sqrt{3}=x_2$

② Si $x_n\leq x_{n+1}\Rightarrow$ ¿$x_{n+1}\leq x_{n+2}$? $\longleftrightarrow$ Supongamos que $x_n\leq x_{n+1}$, entonces $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}\leq\sqrt{3x_{n+1}}=x_{n+2}$

En consecuencia, x_n es creciente

*IMPORTANTE: Principio de Inducción
Sea $A\subset\mathbb{N}$, supongamos que:
1º) $1\in A$
2º) Si $n\in A\Rightarrow n+1\in A$
Entonces $A=\mathbb{N}$ (queda probado)

2º) Comprobamos que está acotada $\longrightarrow$ ¿(x_n) está acotada?

· Sabemos que $x_n\geq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ por lo que al ser creciente, está acotada inferiormente (c. inf = 1)

· ¿Está acotada superiormente? $\rightarrow$ Buscamos cualquier cota superior $\rightarrow$ ¿$x_n\leq 17$, $\forall n\in\mathbb{N}$?

$A=\{n\in\mathbb{N} : x_n\leq 17\}$

① ¿$x_1\leq 17$? $\longrightarrow$ $x_1=1\leq 17$

② Si $x_n\leq 17\Rightarrow$ ¿$x_{n+1}\leq 17$? $\longrightarrow$ Si $x_n\leq 17\Rightarrow x_{n+1}=\sqrt{3x_n}\leq\sqrt{3\cdot 17}\leq 17$

En consecuencia, x_n está acotada.

Es convergente.

¿Cuál es el límite? $\longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$

*IMPORTANTE:
Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=L\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=L$

$$x_{n+1}=\sqrt{3x_n}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$L=\sqrt{3L}\iff L^2=3L$$

$\cancel{L=0}$ $\rightarrow$ No está en la sucesión (no puede tender a 0 ya que es creciente)

$L=3$ $\rightarrow$ ya que es creciente

Examen

Considera la sucesión definida por recurrencia por $x_1=1$ y $x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}$ para $n\in\mathbb{N}$. Estudia si es convergente y en caso afirmativo, calcula el límite

$x_1=1$, $x_2=\sqrt{5}$, $x_3=\sqrt{2\sqrt{5}+3}$, $x_4=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{5}+3}+3}$ . . . . (los números cada vez son más grandes)

1º) ¿(x_n) monótona creciente? $\rightarrow$ ¿$x_n\leq x_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$?

$A=\{n\in\mathbb{N} : x_n\leq x_{n+1}\}$

① $x_1=1\leq\sqrt{5}=x_2$

② Supongamos que $x_n\leq x_{n+1}\Rightarrow$ ¿$x_{n+1}\leq x_{n+2}$? $\rightarrow$ Supongamos que $x_n\leq x_{n+1}$, entonces $x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}\leq\sqrt{2x_{n+1}+3}=x_{n+2}$

En consecuencia, x_n es creciente.

2º) ¿(x_n) acotada?

· Sabemos que $x_n\geq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ está acotada inferiormente por ser creciente

· ¿Está acotada superiormente? $\longrightarrow$ Si tuviera límite, ¿cuál sería?

· Si estuviera acotada, ¿cuál sería su límite?

$$x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$L=\sqrt{2L+3}\iff L^2=2L+3\Longrightarrow L=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$

$L=3$

$\cancel{L=-1}$ no, ya que es creciente

¿$x_n\leq 3$, $\forall n\in\mathbb{N}$?

① $x_1=1\leq 3$

② Si $x_n\leq 3\Rightarrow$ ¿$x_{n+1}\leq 3$? $\longrightarrow$ $x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}\leq\sqrt{2\cdot 3+3}\leq 3$

- $L=3$ $\rightarrow$ valor con el que probamos para cota superior

En consecuencia x_n está acotada.

Por tanto, x_n es convergente y el límite es 3.

) Examen

a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n
b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente
c) Calcula su límite

a) Lo demostramos por inducción (acotada)

① $x_1 = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{5} < x_1 < \frac{4}{5}$ ✓

② Supongamos que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ entonces
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} > \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{1}{5} \left(\text{si } x_n = \frac{1}{5} \Rightarrow ¿x_{n+1} \geq \frac{1}{5}?\right) ✓ \\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{4}{5} \left(\text{si } x_n = \frac{4}{5} \Rightarrow ¿x_{n+1} < \frac{4}{5}?\right) ✓ \end{cases}$$

Queda probado

b) Lo demostramos por inducción (decreciente)

① $x_1 = \frac{1}{2} \geq \frac{41}{100} = x_2$ ✓

② Supongamos que $x_n \geq x_{n+1} \Rightarrow ¿x_{n+1} \geq x_{n+2}?$ → Entonces, $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} \geq x_{n+1}^2 + \frac{4}{25} = x_{n+2}$ ✓ (ya que la función "elevar al cuadrado" conserva el orden de los positivos)

$\hookrightarrow \left(x_n^2 + \frac{4}{25}\right)^2 + \frac{4}{25}$

Queda probado

c) Del apartado a y b llegamos a la conclusión de que la sucesión es convergente

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$L = L^2 + \frac{4}{25} \Rightarrow -L^2 + L - \frac{4}{25} = 0 \Rightarrow L = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16/25}}{-2} \begin{cases} L = \frac{1}{5} \\ L = \frac{4}{5} \end{cases}$$

No, ya que la sucesión es decreciente

jemplos "criterios de convergencia de series de números positivos"

) Son convergentes las siguientes series? (criterio de la raíz)

*Criterio de la raíz: Sea a_n una sucesión de positivos
1º) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente
2º) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ no convergente

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\frac{n+1}{3n-1}}^{\text{mismo grado}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{Es convergente}$$

b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1 \Rightarrow \text{Es convergente}$$

c) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} = \sum \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2/n} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \overset{\text{ind}}{=} 1^\infty \xrightarrow{\text{regla nº e}} e^L \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} -n\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = L = -1$$

es convergente $\Leftarrow 1 > e^{-1} = \frac{1}{e}$

1) ¿Son convergentes las siguientes series? (criterio del cociente)

> * Criterio del cociente: Sea (a_n) sucesión de positivos
> 1º) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1 \Rightarrow$ Convergente
> 2º) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1 \Rightarrow$ No convergente

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{2^n}{\underbrace{2^{n+1}}_{2^n\cdot 2}}}_{1/2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Convergente}$$

b) $\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\overset{2^n\cdot 2}{2^{n+1}} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\frac{n^n}{(n+1)^n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \overset{\text{ind}}{=} 1^\infty \xrightarrow{\text{regla del nº e}} e^L \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = L \Longrightarrow 2\cdot e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

$\Downarrow$ convergente

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n-n-1}{n+1}\right) = -1$$

c) $\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}$

$$\frac{2}{1} + \frac{2}{1}\cdot\frac{5}{5} + \frac{2}{1}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{8}{9} + \ldots$$

> *NOTA:
> $3n-1 \rightarrow 3(n+1)-1 = 3n+3-1 = 3n+2$
> $4n-3 \rightarrow 4(n+1)-3 = 4n+4-3 = 4n+1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots\cancel{(3n-1)}(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots\cancel{(4n-3)}(4n+1)}}{\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots\cancel{(3n-1)}}{1\cdot 5\cdot 9\ldots\cancel{(4n-3)}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{Convergente}$$

2) ¿Son convergentes las siguientes series? (criterio de comparación por paso al límite)

> * Criterio de comparación por paso al límite:
> Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números positivos
> 1º) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\underset{\to +\text{grande}}{b_n}} = 0$, $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$
> 2º) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}^*$, $\sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum b_n < \infty$
> (a las dos series les pasa lo mismo)
> 3º) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to +\text{grande}}{a_n}}{b_n} = +\infty$, $\sum a_n < \infty \Rightarrow \sum b_n < \infty$

a) $\sum \frac{1}{n^2+2n-7} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+2n-7}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2n-7} = \frac{1}{1} = 1$

- Comparamos con $\sum\frac{1}{n^2} \to$ convergente ya que $2 > 1$

Por el segundo punto del criterio de comparación, sabemos que las dos hacen lo mismo. Son convergentes

b) $\sum\frac{1}{n+3} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3} = \frac{1}{1} = 1$

- Comparamos con $\sum\frac{1}{n} \longrightarrow$ No convergente ya que $1 \not> 1$

Por el 2º punto del criterio de comparación sabemos que las dos hacen lo mismo. No son convergentes

c) $\sum\frac{1}{2n^2+3} \longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n^2+3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$

- Comparamos con $\sum\frac{1}{n^2} \to$ Convergente ya que $2 > 1$

Por el 2º punto del criterio de comparación sabemos que las dos hacen lo mismo. Convergentes

d) $\sum\frac{2n-7}{3n^3+2n-1} \to \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-7}{3n^3+2n-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2n-7)}{3n^3+2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-7n^2}{3n^3+2n-1} = \frac{2}{3}$

- Comparamos con $\sum\frac{1}{n^2} \to$ Convergente ya que $2 > 1$

Por el 2º punto. Convergentes

> *NOTA:
> - $\sum r^n$ son convergentes $\Leftrightarrow r \in]-1,1[$
> En ese caso $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$
> - $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ es convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$
> - Criterio del cociente y de la raíz

> * Progresiones geométricas:
> $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, si $|x| < 1$

$$\text{:)}\ \sum \frac{1}{2^n - n}$$

- Si comparamos con $\sum \frac{1}{n}$ $\longrightarrow$ Mala comparación dado que no nos da ninguna información ya que nos dice que es un poco más pequeña que $+\infty$ (parte 1 criterio compa.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{n/2^n}^{\to 0}}{\underbrace{2^n/2^n}_{1} - \underbrace{n/2^n}_{0}} = \frac{0}{1} = 0$$

- Si comparamos con $\sum \frac{1}{2^n}$ $\longrightarrow$ Convergente ya que la razón es $\frac{1}{2} \in]-1,1[$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n - n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \frac{1}{1} = 1$$

$\Longrightarrow$ Por el 2º punto del criterio de comparación a las dos series les pasa lo mismo. Por lo que son convergentes.

$$)\ \sum \frac{1}{n^2 \log(n)} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2\log(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\cdot\log(n)} = 0$$

Por lo tanto, por el primer punto del criterio de comparación, el numerador es menor que el denominador. Si los números más grandes se pueden sumar entonces los números más pequeños también se pueden sumar. Por tanto, las dos son convergentes.

- Comparamos con $\sum \frac{1}{n^2}$ $\rightarrow$ Convergente ya que $2>1$

) Examen

studia el carácter de las siguientes series

$$a)\ \sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$$

$$b)\ \sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$$

a) Aplicando el criterio de la raíz tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n} \overset{\text{ind}}{=} 1^\infty \xrightarrow{\text{regla } e} e^L = e^{-2} < 1 \Longrightarrow \text{Convergente}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1-(2n+5)}{2n+5}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n}{2n+5} = \frac{-4}{2} = -2$$

b) Aplicando el criterio del cociente tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1+\log(n)}{n^n}} = \frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{1+\log(n)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

Calculamos el límite: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)}}_{1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{1^\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{0} = 0 < 1 \Longrightarrow$ Convergente

$$\text{regla } e \rightarrow n\left(\frac{n}{n+1} - 1\right) = n\left(\frac{n-(n+1)}{n+1}\right) = \frac{-n}{n+1} = -1 \Longrightarrow e^{-1}$$

3) Exámen

Estudiar según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$ $\rightarrow$ Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que para $a = 1$ es la serie armónica, que no converge, y para $a > 1$ el término general no converge a 0.

Entonces para $0 < a < 1$, aplicando el criterio de la raíz obtenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^a}} = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n^a}} = 0 < 1 \Rightarrow \text{Convergente}$$

b) $\sum a^n n^a$ $\rightarrow$ Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que para $a \geq 1$ el término general no converge a 0. Entonces para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n \cdot n^a} = \lim_{n \to \infty} a \cdot \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \to \infty} a \cdot n^{\overset{\to 0 \cdot \infty^0 \cdot 1}{a/n}} = 0 \Rightarrow \text{Convergente}$$