## * Id. Notables

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

## * $f$ continua si:

- $C_1$ $\exists f(x_0)$
- $C_2$ $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ y es finito
- $C_3$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

## * INDETERMINACIONES

- $\frac{0}{0}$: factorizo y simplifico
- $\frac{\infty}{\infty}$: < exp. factorizo $\begin{cases} 0: \text{num} < \text{den} \\ \frac{a}{b}: \text{num} = \text{den} \\ \pm\infty: \text{num} > \text{den} \text{ (regla signos)} \end{cases}$
- $\infty - \infty$: Operar polinomios ó multiplicar por el conjugado
- $1^\infty$: $\lim_{x \to c} (f(x)^{g(x)}) = e^{\lim_{x \to c} [f(x)-1] \cdot g(x)}$
- $0 \cdot \infty$: Operar hasta llegar a $\frac{\infty}{\infty}$
- $\left.\begin{matrix} 0^0 \\ \infty^0 \end{matrix}\right\}: f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$
- (cualquier cosa dividido por $\infty$ es 0)

## * Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{sea } x \in \mathbb{R}$$

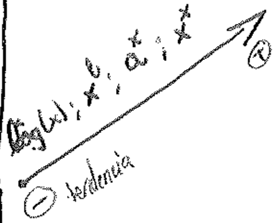
## * Propiedades del nº e y de los logaritmos:

- $a^b = e^{\log(a^b)} = e^{b \cdot \log(a)}$
- $e^{\log(x)} = x$
- $\log(e^x) = x$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}$
- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- $\log(x^y) = \log(x) \cdot y$
- $\log(x+y) = \log(x+y)$

## * Dominios de $f$:

- Polinómicas = $\mathbb{R}$
- $\sqrt{a}$ : $a \geq 0$
- $\log f$ : $f > 0$ $(\mathbb{R}^+)$
- Exponencial = $\mathbb{R}$
- Racional = $\frac{f}{g} \to \mathbb{R} \setminus \{g=0\}$
- Trigonométricas = $\mathbb{R}$

## * Escala de infinitos




## * Cálculo de imagen de $f$: (cont. y monót.)

- $f: [a,b] \to \nearrow = [f(a), f(b)] \to \searrow = [f(b), f(a)]$
- $f: [a,b[ \to \nearrow = [f(a), \lim_{x \to b} f(x)[ \to \searrow = ]\lim_{x \to b} f(x), f(a)]$
- $f: ]a,b[ \to \nearrow = ]\lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x)[$

## * Asíntotas (límites en el infinito)

- A. Vertical $\begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \end{cases}$
- A. Horizontal $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = L \end{cases}$

## * Teorema de ceros de BOLZANO (Comprobar raíces; sacar continuidad, a partir de esos valores hacer límites si salen $+\infty$ o $-\infty$)

Si una función $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$. $\} = \exists c \in \mathbb{R} : f(c) = 0$

## * Ecuación Recta Tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$
$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

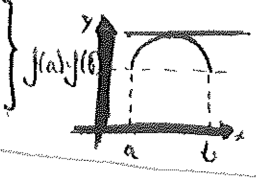
## * Teorema de WEIERSTRASS (compacidad)

Si una función $f$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la función alcanza su máx. abs y su mín. abs, en el intervalo $[a,b]$ $\} f([a,b]) = [m, M] = [f(x_0), f(y_0)]$

(cerrado y acotado; mín abs; máx abs)

## * Teorema de ROLLE:

Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Si $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$




## * Análisis de funciones:

1. DOMINIO (esq. sup dech)
2. SIMETRÍA:
   - $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Par
   - $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Impar
3. PTOS. CORTE $\begin{cases} x=0 \text{ (eje y)} \\ y=0 \text{ (eje x)} \end{cases}$
4. ASÍNTOTAS (centro)
5. MÁX/MÍN (MONOTONÍA)
   - $f'(x) = 0 \to \begin{cases} a \\ b \end{cases}$ (Posibles)
   - Tomamos valores en cada tramo y si el resultado sale $\begin{cases} + \to \text{crece} \\ - \to \text{decrece} \end{cases}$ $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ crece} \\ f'(x) < 0 \text{ decrece} \end{cases}$ $\begin{cases} f''(x) < 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}$
   - Máx en $a$, mín en $b$ (segunda coordenada sustituir en $f(x)$)

- Inyectiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Sobreyectiva: si su recorrido coincide con el conjunto $\mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
- Biyectiva: inyec + sobreyec.

6. CÁLCULO DE IMAGEN (al lado derecho de asíntotas)
7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

- * F. periódicas: $\exists T \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- * F. inversa: $f(x) = x^2$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ $\} y = x$

## * DERIVADAS

- Producto $\to f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$
- Cociente $\to \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{[g(a)]^2}$
- Potencial $\to f(x) = g(x)^b \Rightarrow f'(x) = b\, g(x)^{b-1} \cdot g'(x)$
- Exponencial $\to f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
- $f(x) = a^x = e^{x \log(a)} \Rightarrow f'(x) = e^{x \log(a)} \cdot \log(a)$
- $f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
- Logarítmica $\to f(x) = \log(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$
- $f(x) = \frac{n^o}{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{-n^o \cdot u'}{u^2}$
- $f(x) = \sqrt[2]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Trigonométricas
  - $f(x) = \mathrm{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
  - $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\mathrm{sen}(x)$
  - $f(x) = \mathrm{tg}(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$
  - $f(x) = \mathrm{arctg}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$
  - $f(x) = \mathrm{cotg}(x) \Rightarrow f'(x) = -(1 + \mathrm{cotg}^2(x))$
  - $f(x) = \mathrm{arcsen}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
  - $f(x) = \mathrm{arccos}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

# INTEGRALES

* Regla de Barrow:

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y F una primitiva de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

* Sea $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ continua y F una primitiva de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x)$$

* TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL (TFC)

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua y admite primitiva. Dado $a \in I$, se define $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \left(\text{integral definida de } f \text{ con origen en } a\right)$$

F es continua y derivable en I y $\left(\exists F'(x) = f(x),\ \forall x \in I\right) \Rightarrow \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

- Generalización del T.F.C:

1º (g derivable)

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' \overset{TFC}{=} f(g(x)) \cdot g'(x)$$

2º (h derivable)

$$\left(\int_{h(x)}^a f(t)\,dt\right)' = \left(-\int_a^{h(x)} f(t)\,dt\right)' \overset{TFC}{=} -f(h(x)) \cdot h'(x)$$

3º (g y h derivables)

$$\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = \left(\int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = \left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt + \int_{h(x)}^{a} f(t)\,dt\right)' \overset{TFC}{=}$$

$$\overset{TFC}{=} f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

* Resolución de integrales

- POR PARTES
  - → Orden de prioridad ALPES (para asignar u)
    - A: arcsen/arctg...
    - L: logaritmos
    - P: potenciales
    - E: exponenciales
    - S: sen/cos

$$\to \int \underbrace{u \cdot dv}_{\text{undía vi}} = \underbrace{u \cdot v}_{\text{un}} \ominus \underbrace{\int v \cdot du}_{\text{valiente soldadito vestido de uniforme}}$$

- TRIGONOMÉTRICAS
  - → Cambio de variable
  - → Racionales

  } Mix

- DESCOMPOSICIÓN (fracciones simples)
- CAMBIO DE VARIABLE

$$\to \int f(x) \cdot dx = \begin{bmatrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{bmatrix} = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

- RACIONALES

$$\to \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

* NOTA: División de polinomios

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = C(t) + \frac{R(t)}{Q(t)}$$

grado (R) < grado (Q)

* NOTA: Inmediatas:

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$$

$$\int \operatorname{tg}(x)\,dx = -\log|\cos(x)|$$

NOTA: Ley Fundamental Trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

* FÓRMULA GENERAL DEL POLINOMIO DE TAYLOR:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(f)$$

# FUNCIONES ELEMENTALES

- Potenciales $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^b$
  - Cont. y derivable: $f'(x) = bx^{b-1}$
  - $b > 0$: crece
  - $b < 0$: decrece
  - $b \neq 0$: Biyectiva

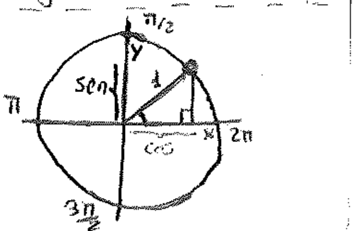
- Exponenciales de base a ($a \in \mathbb{R}^+$) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$
  - Cont. y derivable: $f'(x) = a^x \log(a)$
  - $a > 1$: Est. creciente
  - $a < 1$: Est. decreciente
  - $a \neq 1$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$: Biyectiva

- Exponencial $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
  - Cont. y derivable: $f'(x) = e^x \cdot 1$
  - Est. creciente
  - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \to$ Biyectiva
  - Prop. nº e: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; $e^{x \cdot y} = (e^x)^y$

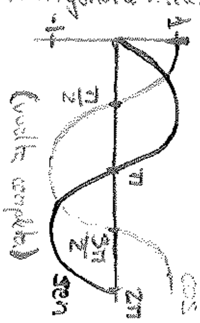
- Logaritmos en base a:
  - $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$
  - $a \neq 1$; $a > 0$
  - $\log_{10}(x,y) = \frac{\log(xy)}{\log(10)} = \frac{\log(x) + \log(y)}{\log(10)} = \log_{10}(x) + \log_{10}(y)$
  - Inyectiva

- Logarítmicas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \log(x)$ ($\ln(x)$)
  - Biyectiva
  - $\exists f^{-1} = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
  - Cont. y derivable: $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 1$, $\forall x > 0$
  - Est. creciente

| x | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cos(x) | 1 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $3/\sqrt{2}$ | 0 |
| sen(x) | 0 | $3/\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 1 |

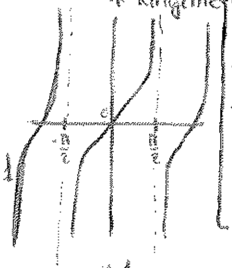


• F. Trigonométricas



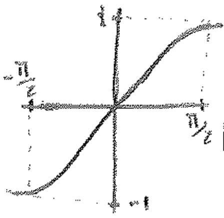

- Cont. y derivable: $(sen(x))' = cos(x)$ ; $(cos(x))' = -sen(x)$
- Periódicas con periodo $T = 2\pi$
- Cos → Par ; sen → Impar
- No tienen límite en $+\infty$
- Ley Fundamental de la Trigonometría: $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$
- $cos(x+y) = cos(x) \cdot cos(y) - sen(x) \cdot sen(y)$
  $sen(x+y) = sen(x) \cdot cos(y) - sen(y) \cdot cos(x)$

* Tangente



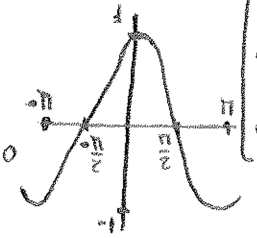

- $\frac{sen(x)}{cos(x)} = tan(x)$
- $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$
- Derivable: $1 + tan^2(x)$; $\frac{1}{cos^2(x)}$; $sec^2(x)$
- Periódica en $\pi$
- Asíntota vertical en $\frac{\pi}{2}$

* Arcoseno



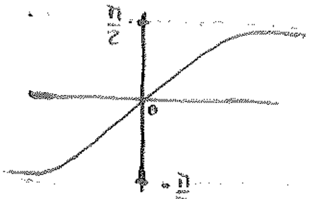

- Biyectiva
- $[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ : est. creciente
- $arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}$ ; $arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$ ; $arcsen(0) = 0$
- Derivable: $arcsen'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in ]-1,1[$

* Arcocoseno




- Estrictamente decreciente $[-1,1] \to [0,\pi]$
- Biyectiva
- $arccos(-1) = \pi$ ; $arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ ; $arccos(1) = 0$
- Derivable: $arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

* Arctangente




- Biyectiva
- Est. creciente: $\mathbb{R} \to ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- Derivable: $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- A. Horizontal $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} arctang(x) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \to -\infty} arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$
- $arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ; $arctan(0) = 0$ ; $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

## PROPIEDADES DE LA TRIGONOMETRÍA

- $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$ ; * $2cos^2(x) = 1 + cos(2x)$
- $cos(x+y)$ y $sen(x+y)$ = más arriba (igual la resta)
- * $tg(a+b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a) \cdot tg(b)}$ ; $tg(a-b) = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a) \cdot tg(b)}$

* $sen(2x) = 2\,sen(x)\,cos(x)$   * $tg(2x) = \frac{2\,tg(x)}{1 - tg^2(x)}$

* $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$

* $sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(x)}{2}}$   * $tg\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(x)}{1 + cos(x)}}$

* $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(x)}{2}}$

* $sen(a) + sen(b) = 2\,sen\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $sen(a) - sen(b) = 2\,cos\left(\frac{a+b}{2}\right) sen\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $cos(a) + cos(b) = 2\,cos\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $cos(a) - cos(b) = -2\,sen\left(\frac{a+b}{2}\right) sen\left(\frac{a-b}{2}\right)$

* $sen(a) \cdot cos(b) = \frac{1}{2}\left[sen(a+b) + sen(a-b)\right]$

* $cos(a) \cdot sen(b) = \frac{1}{2}\left[sen(a+b) - sen(a-b)\right]$

* $cos(a) \cdot cos(b) = \frac{1}{2}\left[cos(a+b) + cos(a-b)\right]$

* $sen(a) \cdot sen(b) = -\frac{1}{2}\left[cos(a+b) - cos(a-b)\right]$

# CÁLCULO

1. Discute para que valores es cierta la desigualdad $|x-3| \leq |x+1|$. ✓ (1.5 ptos.)

2. Estudia el número de soluciones de la ecuación $x\exp(x) - 2 = 0$. ✓ (1.5 ptos.)

3. Calcula los siguientes límites:

   *a)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}\right)^{\cot(x)}$. (1.5 ptos.)

   *b)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - \arctan(x)}{x^2}$. (1.5 ptos.)

4. Calcula el triángulo isósceles de mayor área inscrito en una circunferencia de radio 1. (2 ptos.)

5. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$. (2 ptos.)

   *a)* Calcula los polinomios de Taylor de orden 1 y 2 centrados en cero de $f$.

   *b)* Comprueba que $f''$ es monótona en $[0, 1]$.

   *c)* Acota el error obtenido al usar el polinomio de orden 1 para calcular $\log(3/2)$.

Granada a 2 de diciembre de 2016.

# Cálculo

## 1ºE Grado en Ingeniería Informática

## Primer Parcial (Tipo I)

## Curso 2014/2015

1. **(2.5 puntos)** Calcula:

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{e^x + e^{-x} - 1}{\cos^2(x)} \right)^{1/x^2} .$$

2. **(3 puntos)** Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

   *a*) ¿Existe algún $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

   *b*) ¿Es estrictamente monónota la función $f$?

   *c*) Calcula la imagen de $f$.

3. **(2.5 puntos)** Determina el número de soluciones reales de la ecuación:

$$3x^4 - 8x^3 = 24 .$$

4. **(2 puntos)** De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos sumen 10, halla las dimensiones de aquél cuyo perímetro sea mínimo.

*Granada, 28 de noviembre de 2014*

5) Sept 2013. Sea $f: ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log(x) - x + 2$.

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento; extremos relativos.

b) Calcula $f(]0,+\infty[)$

c) Determina el nº de soluciones de la ecuación $f(x)=0$ en $\mathbb{R}^+$ y localízalas en intervalos de longitud $1/2$.

a) Función continua y derivable, ya que está formada por funciones que también lo son.
Estudiamos la monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ (único punto crítico)}$$

Los intervalos de monotonía son: $]0,1[$ y $]1,+\infty[$

$x \in ]0,1[ \Longrightarrow f'(x) > 0 \to f$ es estrictamente creciente en $]0,1[$.

$x \in ]1,+\infty[ \Longrightarrow f'(x) < 0 \to f$ es estrictamente decreciente en $]1,+\infty[$.

Como consecuencia se alcanza un extremo relativo en $x=1$, que al ser el único se convierte en extremo absoluto

b). Conjunto imagen:

$$f(]0,+\infty[) = f(]0,1]) \cup f([1,+\infty[) = ]\lim_{x\to 0} f(x), f(1)] \cup ]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] \dots$$

- Calculamos los límites anteriores

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (\log(x) - x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\log(x) - x + 2) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\log(x)}{x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = -\infty$$

NOTA: Por la escala de infinitos

Por lo tanto, como $f(1) = 1$, tenemos que $f(]0,\infty[) = ]-\infty, 1]$

c) Según el teorema de Bolzano en el intervalo $]0,1[$ (hay cambio de signo de $f$, por tanto hay al menos un 0 de $f$ entre 0 y 1. Análogamente, en el intervalo $[1,+\infty[$ hay al menos otro 0 (raíz) de $f$ por encima de 1.

No existen más ceros de $f$ dado que $f'$ solo se anula una vez, y por el Teorema de Rolle sabemos que $f$ no se puede anular más de dos veces.

Por tanto, la ecuación dada tiene exactamente dos soluciones:

La primera solución se localiza en el intervalo $]0,\frac{1}{2}]$ y la segunda en $[e, e+\frac{1}{2}]$, ya que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$f(1/2) = -\log(2) + \frac{3}{2} = 0'8068 > 0$$

$$f(e) = 3 - e > 0$$

$$f(e+\tfrac{1}{2}) = \log(e+\tfrac{1}{2}) - e - \tfrac{1}{2} + 2 = -0'04943 < 0$$

2) Sept 2012

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)-x^2}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{\text{ind. L'Hô}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}-2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3}{3x^2(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{3(1+x^2)} = \frac{0}{12} = \underline{\underline{0}}$$

$$\left[ \left( \frac{\frac{2x}{1+x^2} - \frac{-2x-2x^3}{1+x^2}}{3x^2} \right) = \frac{\frac{-2x^3}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{-2x^3}{3x^2(1+x^2)} \right]$$

4) Sept 2012. Sea $m>0$. Determinar el número de soluciones de la ecuación:

$$mx - 1 + \frac{1}{x} = 2m, \text{ con } x>0$$
$$\hookrightarrow mx - 1 + x^{-1} - 2m = 0$$

Analizamos posibles puntos críticos igualando su primera derivada a 0.

$$f(x) = mx - 1 + \frac{1}{x} - 2m$$

$$f'(x) = m - x^{-2} = m - \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow m = \frac{1}{x^2};\ x^2 = \frac{1}{m};\ x = \sqrt{\frac{1}{m}};\ x = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Podemos afirmar, por el Teorema de Rolle, que como la función derivada sólo tiene un punto crítico, $f$ se puede anular como mucho en dos puntos. Comprobamos si es máximo o mínimo con la segunda derivada.

$$f''(x) = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3} \Longleftrightarrow f''\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) > 0 \quad \left(\tfrac{1}{\sqrt{m}} \text{ siempre positivo}\right)$$

Por tanto, tenemos un mínimo absoluto en $\frac{1}{\sqrt{m}}$, ya que es el único punto crítico. Evaluamos $f$ en dicho punto y calculamos los límites de $f$ en los extremos del dominio para concluir el ejercicio.

$$f(x) = mx - 1 + \frac{1}{x} - 2m \Longrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = m\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) - 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{m}}} - 2m = m\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) + \sqrt{m} - 2m - 1 = \frac{m}{\sqrt{m}} + \sqrt{m} - 2m - 1 =$$

$$= \sqrt{m} + \sqrt{m} - 2m - 1 = 2\sqrt{m} - 2m - 1 = 2(\sqrt{m} - m) - 1 < 0$$

Llegamos a la conclusión de que el valor de $f$ en el punto mínimo es negativo ya que si resolvemos la ecuación $2(\sqrt{m}-m)-1=0$; $2\sqrt{m} = 2m+1$; $4m = 4m^2+4m+1 \Longrightarrow 4m^2+1=0$, esta ecuación no tiene solución para $m \in \mathbb{R}$. Además, es fácil comprobar que para $m=1$, por ejemplo, el valor de $f$ en el mínimo es negativo; por tanto, sea quien sea $m>0$, el valor del mínimo de $f$ es siempre negativo.

Hay que añadir que la función, tanto en 0 como en $+\infty$, diverge a $+\infty$. Con todo esto concluimos que la función $f$ tiene dos ceros (uno antes de $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ y otro después).

Por tanto, la ecuación planteada tiene exactamente 2 soluciones en $\mathbb{R}^+$.

⑥ Sept 2013. Sea $f(x)=(x-a)\cos(x)$. Calcula el valor de $a$ sabiendo $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}-2$.

• Aplicando el método de integración por partes

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2}(x-a)\cos(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x-a \longrightarrow du=dx \\ dv=\cos(x)\,dx \longrightarrow v=\text{sen}(x)\end{array}\right] =$$

$$= \Big[(x-a)\,\text{sen}(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\text{sen}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}-a+\Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-a-1.$$

• Por tanto:

$$\frac{\pi}{2}-a-1=\frac{\pi}{2}-2 \Longrightarrow \underline{a=1}$$

② Sept 2014

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-tg(x)-1}{tg^2(x)} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+tg^2(x))}{2\,tg(x)(1+tg^2(x))} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+tg^2(x))}}_{1/2}\cdot\underbrace{\lim\frac{e^x-1-tg^2(x)}{tg(x)}}_{\frac{0}{0}\Rightarrow L'Hôp^*}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$: L'Hôp*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-tg^2(x)}{tg(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\,tg(x)(1+tg^2(x))}{1+tg^2(x)} = 1$$

Por lo tanto: $$\frac{1}{2}\cdot 1 = \underline{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-tg(x)-1}{tg^2(x)} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1+\text{sen}(x)-e^x}{arctg(x)} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^x}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)(\cos(x)-e^x) = 0$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\text{sen}(x)-e^x}{arctg(x)} = \underline{0}$$

⑦ Sept 2014

a) Estudiar la función: $f(x)=\dfrac{x\log^2(x)}{1+\log(x)}$, con $x>0$.

• Dominio: $1+\log(x)=0 \Leftrightarrow \log(x)=-1 \Longrightarrow x=e^{-1}$
Por lo que el dominio de $f$ es $\mathbb{R}^+\setminus\{e^{-1}\}$ } Función derivable y continua (por ser cociente de funciones que lo son) en este dominio.

• Monotonía: $$f'(x)=\frac{\left(\log^2(x)+2x\frac{1}{x}\log(x)\right)(1+\log(x))-\frac{1}{x}x\log^2(x)}{(1+\log(x))^2} = \frac{(\log^2(x)+2\log(x))(1+\log(x))-\log^2(x)}{(1+\log(x))^2} =$$

$$= \frac{\log^2(x)+2\log(x)+\log^3(x)+2\log^2(x)-\log^2(x)}{(1+\log(x))^2} = \frac{\log(x)(\log^2(x)+2\log(x)+2)}{(1+\log(x))^2}$$

los factores restantes son siempre positivos ← - - - ▷ La derivada sólo se anula cuando $\log(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ (único pto. crítico ya que el 2º factor del numerador no se anula)

Estudiamos los intervalos de monotonía de $f$ *(según $\log(x)$)

- Si $0<x<e^{-1} \Rightarrow \log(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \rightarrow$ est. decreciente
- Si $e^{-1}<x<1 \Rightarrow \log(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \rightarrow$ est. decreciente
- Si $1<x \Rightarrow \log(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \rightarrow$ est. creciente

} mínimo relativo en $x=1$

• Imagen de $f$: Los intervalos de monotonía de $f$ nos permiten descomponer el conjunto imagen como sigue:

$$f(\mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-1}\}) = f(]0, e^{-1}[) \cup f(]e^{-1}, 1]) \cup f([1, +\infty[)$$

Para determinar estos intervalos, calculamos los siguientes valores:

→ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (num → 0 ; denom → $-\infty$)

→ $\lim_{x \to e^{-1}_-} f(x) = -\infty$ (num → $e^{-1}$ (positivo) ; denom → 0 (negativo))

→ $\lim_{x \to e^{-1}_+} f(x) = +\infty$ ( " ; denom → 0 (positivo))

→ $f(1) = 0$

→ $\lim_{x \to +\infty} f(x) \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log^2(x) + 2x \frac{1}{x} \log(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x \log^2(x) + 2\log(x) = +\infty$

Por lo tanto, el conjunto imagen es:

$$f(\mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-1}\}) = ]-\infty, 0[ \cup [0, +\infty[ \cup [0, +\infty[ = \mathbb{R}$$

⑥ Sept 2014: Discute el número de soluciones de: $x^2 = \log(1/x)$ en $]1, +\infty[$.

$x^2 - \log(1/x) = 0$.

$f(x) = x^2 - \log\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - \log(1) + \log(x) = x^2 + \log(x)$ → (estrictamente creciente por ser suma de crecientes)

← comprobación.

$f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x+1}{x}$ → la derivada de $f$ es positiva en el intervalo $]1, +\infty[$, por lo que $f$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

Analizamos los extremos:

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

No tiene ningún cero, por lo tanto la ecuación no admite ninguna solución en $]1, +\infty[$

③ a) final 12-13

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \text{sen}(x) - \cos(x)}{(\log(1+x))^2} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) + \text{sen}(x)}{2\,\frac{\log(1+x)}{1+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)(e^x - \cos(x) + \text{sen}(x))}{2\log(1+x)} =$$

Descomponemos el límite en producto de 2: el 1º: $\frac{1}{2}$, el 2º: $\frac{0}{0}$ → L'H

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)}{2}}_{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) + \text{sen}(x)}{\log(1+x)}$$

$$\text{ind} = \frac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \text{sen}(x) + \cos(x)}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \to 0} (1+x)(e^x + \text{sen}(x) + \cos(x)) = 2$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \text{sen}(x) - \cos(x)}{(\log(1+x))^2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = 1$$

• Si $x \geq \frac{1}{3}$ los argumentos de los dos valores absolutos son mayores o iguales a 0.:

$$3x-1 < x^2-x-2 \iff x^2-4x-1>0$$

La ecuación $x^2-4x-1=0$ tiene soluciones $x=2-\sqrt{5}$ y $x=2+\sqrt{5}$. Por lo tanto:

$$x^2-4x-1>0 \text{ cuando } \begin{cases} x<2-\sqrt{5} \\ \text{ó} \\ x>2+\sqrt{5} \end{cases}$$

→ Como estamos interesados en soluciones en el intervalo $[\frac{1}{3},+\infty[$ nos queda entonces: $]2+\sqrt{5},+\infty[$

Sol: Uniendo las distintas soluciones que hemos obtenido tenemos que la desigualdad se cumple cuando:

$$x \in ]-\infty,-2-\sqrt{3}[ \cup ]2+\sqrt{5},+\infty]$$

① Primer Parcial 12-13: Calcula los números reales $x$ que verifican que:

$$\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq 3$$

→ La inecuación es equivalente a $|2x-1| \geq 3|x+3|$ (recordando que $x$ no puede ser $-3$). Diferenciaremos los siguientes casos:

• Si $x<-3$ entonces $x<\frac{1}{2}$ y la inecuación quedaría:

$$-(2x-1) \geq -3(x+3) \iff -2x+1 \geq -3x-9 \iff x \leq -10 \Rightarrow \text{Obtenemos } [-10,-3[$$

• Si $x<x\leq\frac{1}{2}$ entonces la inecuación queda:

$$-(2x-1) \geq 3(x+3) \iff -2x+1 \geq 3x+9 \iff 5x \leq -8 \iff x \leq \frac{-8}{5} \Rightarrow \text{Obtenemos } ]-3,\tfrac{-8}{5}]$$

• Si $x \geq \frac{1}{2}$ entonces la inecuación queda:

$$2x-1 \geq 3x+9 \iff x \leq -10 \Rightarrow \text{NO SOL cuando } x \geq 1/2$$

→ Uniendo los dos conjuntos que nos han salido como soluciones nos queda el conjunto solución:

$$[-10,\tfrac{-8}{5}] \setminus \{-3\}$$

③ i) Febrero 13-14: Calcula el límite: $\lim_{x\to0}\left(1+tg(x)+sen^2(x)+\frac{x^3}{3}-x\right)^{1/x^2} = 1^\infty \xrightarrow{\text{regla } n^\circ e} e^{\lim_{x\to\infty}[(f(x)-1)\cdot g(x)]}$

$$\to \lim_{x\to0}\frac{tg(x)+sen^2(x)+\frac{x^3}{3}-x}{x^2} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to0}\frac{tg^2(x)+2sen(x)\cos(x)+x^2}{2x} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2tg(x)(1+tg^2(x))+2\cos^2(x)-2sen^2(x)+2x}{2} = 1$$

→ Por tanto:

$$\lim_{x\to0}\left(1+tg(x)+sen^2(x)+\frac{x^3}{3}-x\right)^{1/x^2} = e^{1} = e$$

④ final 12-13: Demuestra que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que: $2x \operatorname{arctg}(x) \geq \log(1+x^2)$

· Analizamos el signo de la función: (tendremos que probar que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = 2x \operatorname{arctg}(x) - \log(1+x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2\operatorname{arctg}(x) + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg}(x)$$

· El único pto. crítico que obtenemos es el $x=0$, ya que la arcotangente se anula en ese punto. Analizando el cambio de signo:

- Si $x>0 \to \operatorname{arctg}(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0 \equiv$ estrictamente creciente en $]0,+\infty[$
- Si $x<0 \to \operatorname{arctg}(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \equiv$ estrictamente decreciente en $]-\infty,0[$

· Por tanto, en el punto $x=0$ se alcanza el mínimo absoluto por ser el único pto. crítico y vale $f(0)=0$. Concluimos:

$$f(x) \geq f(0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{(queda probada la desigualdad)}$$

⑤ final 12-13: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable que verifica que $f'(x) = xe^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(a) Encuentra los ptos críticos de $f$ y decide si se alcanza extremo relativo:

$f'(x) = x \cdot e^x = 0 \iff x=0$ (ya que la exp. nunca se anula)

$f''(x) = e^x + xe^x \to$ Evaluamos en el pto. crítico $x=0 \Rightarrow f''(0) = 1 > 0$.

Por tanto, en el pto $x=0$ se alcanza un mínimo relativo, pero por ser el único pto. treno de función, concluimos además que es su mínimo absoluto.

① Primer parcial 13-14: Calcula los nº reales $x$ que verifican:

$$|3x-1| < x^2 - |x+2|$$

→ La desigualdad depende de que los dos argumentos de los valores absolutos sean mayores o menores que 0:

$$3x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3}$$
$$x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

→ Consideramos los siguientes intervalos:

• Si $x \leq -2$, entonces $x \leq \frac{1}{3}$ también y los dos argumentos que aparecen son nº menores o iguales a 0:

$$1-3x < x^2+x+2 \iff x^2+4x+1 > 0$$

Si resolvemos la ecuación $x^2+4x+1=0$ obtenemos las soluciones $x=-2-\sqrt{3}$ y $x=-2+\sqrt{3}$. Por lo tanto

$$x^2+4x+1>0 \text{ cuando } \begin{cases} x < -2-\sqrt{3} \\ \text{ó} \\ x > -2-\sqrt{3} \end{cases}$$ → (Ya que estamos considerando $x \leq -2$)

Entonces obtenemos $\Rightarrow\ ]-\infty, -2-\sqrt{3}[$

• Si $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ entonces $x+2 \geq 0$ y $3x-1 \leq 0$ y la igualdad queda:

$$1-3x < x^2-x-2 \iff x^2+2x-3>0$$

Si resolvemos la ecuación $x^2+2x-3=0$ obtenemos $x=1$ y $x=-3$. Por lo tanto:

$$x^2+2x-3>0 \text{ cuando } \begin{cases} x<-3 \\ \text{ó} \\ x>1 \end{cases}$$ ⇒ No hay solución ya que nos estamos fijando en el intervalo $[-2, \frac{1}{3}]$. NO SOL

④ Febrero 13-14: Se considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=2x^3-3x^2-12x-m$. Estudia la monotonía, la imagen y el nº de ceros de la función $f$ en función del parámetro $m$.

* Monotonía:

→ $f$ derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)$$

→ los ptos. críticos de la $f$ son:

$$f'(x)=0 \iff x^2-x-2=0 \iff x=-1\ ;\ x=2$$

→ Como $f'(-2)>0$, $f'(0)<0$ y $f'(3)>0$:

- $f$ estrictamente creciente en $]-\infty,-1]$
- $f$ estrictamente decreciente en $[-1,2]$
- $f$ estrictamente creciente en $[2,+\infty[$

* Imagen y ceros: (calculamos su valor en los pts. críticos y en $\pm\infty$)

→ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ; $f(-1)=7-m$ ; $f(2)=-20-m$ ; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Por lo tanto la imagen de la función es $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

→ El nº de ceros depende del valor de la función en $-1$ y $2$. En concreto:

- Si $7-m<0$, o lo que es lo mismo $m>7$, la función solo se anula una vez y dicho cero se encuentra en el intervalo $]2,+\infty[$.
- Si $m=7$, la función tiene dos ceros: uno en $-1$ y otro en el intervalo $]2,+\infty[$
- Si $-20<m<7$, la función tiene tres ceros.
- Si $m=-20$, la función tiene dos ceros: uno en $2$ y otro en el intervalo $]-\infty,-1[$
- Si $m<-20$, la función tiene un único cero: en el intervalo $]-\infty,-1[$.

⑤ Febrero 13-14: Se considera la función $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{2}{x}$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en un pto $(a,f(a))$

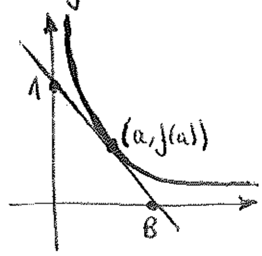
b) Calcula los ptos. de corte de la recta tangente del apartado anterior con los ejes de coordenadas

c) Consideremos el segmento cuyos extremos son los ptos de corte de la recta tangente con los ejes de coordenadas. ¿Para qué valor de $a$ dicho segmento tiene longitud mínima?

a) $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ → (ec. recta tg)

Como $f(x)=\frac{2}{x}$ y $f'(x)=-2/x^2$, la recta tangente es:

$$y=\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}(x-a)$$




b) Pto. corte OX $(y=0)$:

$$0=\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}(x-a) \iff x=\frac{2}{a}\cdot\frac{a^2}{2}+a=2a \Rightarrow \text{Corta en el pto } B=(2a,0)$$

Pto. corte OY $(x=0)$

$$y=\frac{2}{a}-\frac{2}{a^2}(0-a)=\frac{4}{a} \Rightarrow \text{Corta en el pto } A=\left(0,\frac{4}{a}\right)$$

c) La distancia entre ambos ptos es:

$$\text{dist}\left((2a,0),\left(0,\frac{4}{a}\right)\right)=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{4}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{a^4+4}}{a}$$ ; Por tanto estamos buscando el mínimo de la función $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida como

$$g(a)=\frac{2\sqrt{a^4+4}}{a}\xrightarrow{\text{Su derivada}} g'(a)=\frac{2a^4-8}{a^2\sqrt{a^4+4}}$$ ; que se anula en $a=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$.

Podemos comprobar que ese punto es el mínimo absoluto de varias formas:

- Es el único pto. crítico y $g''(\sqrt{2})>0$
- Como $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, la función $g$ es decreciente en $]0,\sqrt{2}]$ y creciente en $[\sqrt{2},+\infty[$

Esto justifica que la función alcanza su mínimo cuando $a=\sqrt{2}$.

EXAMEN FEBRERO 2014/2015

(1) Calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}\right)^{1/x^2} \overset{ind}{=} 1^{\infty} \xrightarrow[\text{Regla nºe}]{} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)\,x^2} \overset{ind}{=} \frac{0}{0}$$

Vamos lim en productos $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}-1\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-\cos^2(x)}{x^2}}_{\frac{0}{0}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2(x)}}_{1}$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{2x} \overset{ind}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\operatorname{sen}^2(x)+2\cos^2(x)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{\cos^2(x)}\right)^{1/x^2} = e^{2\cdot 1} = e^2$$

(2) Se considera la función $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=e^{\frac{1+x}{1-x}}$

a) ¿Existe algún $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

b) ¿Es estrictamente monótona la función $f$?

c) Calcula la imagen de $f$.

(a) Para que sea horizontal, la pendiente de la recta tangente debe ser igual a cero. Por lo tanto, analizamos la 1ª derivada

$f'(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow$ Es evidente que la derivada no se anula nunca, por lo que no existe ninguna recta tangente horizontal $\left(y - f(a) = \underbrace{f'(a)}_{\text{pendiente}}(x-a)\right)$

(b) La derivada de $f$ es positiva (ya que sus factores lo son). En consecuencia, la función es estrictamente creciente en $]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

(c) Para calcular la imagen descomponemos el dominio en la unión de $]-\infty,1[$ y $]1,+\infty[$

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = f(]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to 1^-}f(x)\right[ \cup \left]\lim_{x\to 1^+}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$$

↳ Aplicando la monotonía creciente y la continuidad.

Calculamos los límites planteados:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-}f(x) = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Por tanto, la imagen es:

$$\left]0,\frac{1}{e}\right[ \cup \left]\frac{1}{e},+\infty\right[ = \mathbb{R}^+\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}$$

V

③ Determina el número de soluciones de la ecuación: $3x^4 - 8x^3 = 24$
(Determinar el número de ceros de la función $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 24$) $= 3x^4 - 8x^3 - 24 = 0$

→ Al ser una ec. polinómica de grado par no tenemos garantías de que tenga algún cero. Analizamos la derivada:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2) = 0$$

Se anula en $x=0$ y $x=2$.

→ Aplicando el Teorema de Rolle sabemos entonces que $f$, a lo sumo tendrá 3 ceros.

→ Estudiamos los intervalos de monotonía determinados por los puntos críticos:

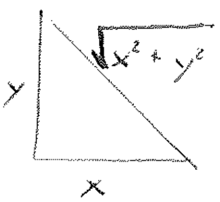
$x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \longrightarrow f$ estrictamente decreciente
$0<x<2 \Rightarrow f'(x)<0 \rightarrow f$ estrictamente decreciente
$x>2 \Rightarrow f'(x)>0 \longrightarrow f$ estrictamente creciente

Por tanto, en $x=2$ mínimo relativo y en $x=0$ no se alcanza extremo.

→ Además, $f(0) = -24$; y $f(2) = -40$. La función en $-\infty$ tiende a $+\infty$ y decrece a $-24$.
Aplicando el Teorema de Bolzano, aseguramos la existencia de un cero antes de $x=0$. Por otra parte, la función sigue decreciendo al mínimo (absoluto) en $x=2$, donde vale $-40$, y entonces comienza a crecer hasta $+\infty$. Por lo que, $f$ tiene otro cero después de $x=2$.

$f$ tiene dos ceros

④ De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10, haya las dimensiones de aquel cuyo perímetro sea mínimo.




$x + y = 10$ ; $y = 10 - x$

perímetro: $x + y + \sqrt{x^2+y^2} = 10 + \sqrt{x^2+(10-x)^2} = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$

Por lo tanto, la función a optimizar es:

$$f(x) = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

$x$ e $y$ representan dimensiones por lo que tendremos que tomar el dominio en el intervalo $[0,10]$.
Calculamos los puntos críticos en el interior:

$$f'(x) = \frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \in ]0,10[.$$

Para finalizar, evaluamos $f$ en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$$f(0) = 20 = f(10) > f(5) = 10 + \sqrt{50}$$

Por tanto, el mínimo absoluto de $f$ se alcanza en $x=5$.

Sol: los catetos del triángulo deben ser iguales a 5.

③ b Final 2012-2013: Calcula:

(b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt}{2x}\right)^{1/x}$$

→ 1º: Analizamos la base de la expresión $\left(\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt}{2x}\right)_{x\to 0} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt\right)'}{2}$

• T.F.C (para derivar numerador) $\Rightarrow \left(\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt\right)' = e^{-x^2}\cdot 1 + e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}+e^{-x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+e^{-x^2}}{2} = 1$$

→ 2º: Estamos ante una indeterminación $1^{\infty}$, por lo que aplicamos la regla del nº e: $\boxed{e^{\lim_{x\to 0}[f(x)-1]\cdot g(x)}}$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt}{2x}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt-2x}{2x^2} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}}$$

$$\xrightarrow[\text{L'Hôp}]{\text{T.F.C}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}+e^{-x^2}-2}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x^2}-2}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{2x} \overset{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}}$$

$$\xrightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0}\frac{-2x\,e^{-x^2}}{2} \underset{e}{=} 0$$

→ 3º Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt}{2x}\right)^{1/x} = e^0 = 1$$

⑤ Final 2012-2013: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable que verifica que $f'(x) = xe^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

(b) Calcula la expresión de $f$ sabiendo que dicha función alcanza su mínimo absoluto en 0 y $f(0)=0$.

→ Integramos por partes la expresión de $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int xe^x\,dx = \left[\begin{matrix} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^x \Rightarrow v=e^x\end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

→ Sabemos que $f(0)=0$

$$f(0) = -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = xe^x - e^x + 1$$

③ Final febrero 2013-2014: Calcular

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} \xRightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt + x e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cdot\cos(x)}^{\text{T.F.C} \to ?}}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$$

→ Resolvemos cada sumando por separado:

NOTA: $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\to 1$

1º $$\lim_{x\to 0}\frac{x e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cdot\cos(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

2º $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{2\operatorname{sen}(x)} \xRightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cdot\cos(x)}{2\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

NOTA: $\cos(0)=1$

→ Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

⑤ Final febrero 2012: Calcular

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\operatorname{tang}^2(x)} e^{-t^2}\,dt}{x^2} \stackrel{\text{ind}}{=} \frac{0}{0} \xRightarrow{\text{L'Hôp}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\operatorname{tg}^4(x)}\,2\operatorname{tg}(x)\left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right)}{2x} = 1$$

ya que $\begin{cases} \lim_{x\to 0} e^{-\operatorname{tg}^4(x)} = e^0 = 1 \\ \lim_{x\to 0} 1+\operatorname{tg}^2(x) = 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{\cos(x)} = 1 \end{cases}$

(b) $$\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

→ calculamos la derivada de $\log(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \left(= \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

→ Método de integración por partes:

$$\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx = \begin{bmatrix} u=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$$

⑤ Sept 2012

(a) Calcula: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x t\,\operatorname{arctg}(t)\,dt}{\operatorname{sen}^3(x)} \overset{ind}{=} \dfrac{0}{0} \xrightarrow[TFC]{L'Hôp} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\operatorname{arctg}(x)}{3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)} = \underbrace{\dfrac{1}{3\cos(x)} \cdot \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{sen}(x)}}_{\text{Estudiamos cada } \lim_{x\to 0} \text{ por separado}}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3\cos(x)} = \dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)} \overset{ind}{=} \dfrac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \overset{ind}{=} \dfrac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos(x)} = 1$

Por tanto, el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x t\,\operatorname{arctg}(t)\,dt}{\operatorname{sen}^3(x)} = \dfrac{1}{3}$

(b) Calcula: $\int_0^x t\,\operatorname{arctg}(t)\,dt$

→ Aplicamos el Método de Int. por Partes:

$$\int_0^x t\,\operatorname{arctg}(t)\,dt = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg}(t) \Rightarrow du = \dfrac{1}{1+t^2} \\ dv = t \Rightarrow v = \dfrac{t^2}{2} \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} t^2 \operatorname{arctg}(t)\Big]_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int_0^x 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2\operatorname{arctg}(x) - x + \operatorname{arctg}(x)\right)$$

1er parcial 2014-2015 (E2)

1) Se considera la función $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

a) ¿Existe algún $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

b) ¿Es estrictamente monótona?

c) Calcula la imagen.

a) Para que sea horizontal la pendiente debe ser 0. Por lo tanto buscamos un punto donde la función derivada se anule.

$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ; $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{\frac{(1-x)^2+1}{(1-x)^2}}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2+1}$ $\Longrightarrow$ La derivada no se anula nunca. Por lo tanto, no existe recta tangente horizontal en el dominio de la función.

b) La derivada de $f$ es positiva (todos sus factores lo son). En consecuencia la función es estrictamente creciente de $]-\infty,1[$ y también $]1,+\infty[$.

c) Descomponemos el dominio en la unión de $]-\infty,1[$ y $]1,+\infty[$.

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\})=f(]-\infty,1[)\cup f(]1,+\infty[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to1^-}f(x)\right[\cup\left]\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$$ (aplicando la continuidad y la monotonía creciente)

Calculamos los límites anteriores:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0 \quad;\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{\pi}{2} \quad;\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \quad;\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=-\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la imagen de $f$ es: $]0,\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2},0[=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.

2) De todos los rectángulos de perímetro 20, halla las dimensiones de aquel cuya diagonal es mínima.


$2x+2y=20$ ; $y=10-x$
$h=\sqrt{x^2+y^2}$

Por tanto la función a minimizar es:

$$f(x)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(10-x)^2}=\sqrt{x^2+100+x^2-20x}=$$
$$f(x)=\sqrt{2x^2-20x+100}$$

Consideramos el dominio de $f$ el intervalo $[0,10]$ dado que son dimensiones. Calculamos los puntos críticos en el interior.

$$f'(x)=\frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}=\frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20+100}}=0 \;;\; f'(x)=0 \iff x=5\in]0,10[.$$

Evaluamos $f$ en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$f(0)=10=f(10)>f(5)=\sqrt{50}$ Concluimos que el mínimo absoluto de $f$ se alcanza en $x=5$. Así que la solución del problema es que los lados del rectángulo (o mejor dicho, cuadrado) sean iguales a 5.

3) Prueba que para todo $x>0$, se verifica la desigualdad: $\frac{3}{2}x^2 - 6\log(x) > \frac{1}{2}$

Estudiamos la función: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6\log(x) - \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Tendremos que probar que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Calculamos su derivada y puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{6}{2}x - \frac{6}{x} = 3x - \frac{6}{x} = \frac{3x^2-6}{x} = 3\frac{(x^2-2)}{x} = 3\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x} = 0$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ (Nos quedamos con la solución positiva)

Intervalos de monotonía:

$0 < x < \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente.
$x > \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente.

Por tanto, en $x=\sqrt{2}$ se alcanza un mínimo relativo, que al ser el único pto. crítico de $f$ en $\mathbb{R}^+$ se convierte en mínimo absoluto.

En consecuencia, $f(\sqrt{2}) = \frac{5}{2} - 3\log(2)$ y es positivo, por lo que la imagen de la función verifica:

$f(x) \geq f(\sqrt{2}) > 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow$ Por lo que la desigualdad planteada es cierta.

1) Calcula: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{1+x^2}\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}$ $\xrightarrow{\text{Aplicamos regla } e} e^{\lim_{x\to 0}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{1+x^2}\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} \overset{\text{IND}}{=} 1^\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{1+x^2}-1\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-1-x^2}{(1+x^2)\operatorname{sen}^2(x)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)}}_{\text{tiende a } 1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-1-x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}}_{\text{Resolvemos a parte.}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-1-1-x^2}{\operatorname{sen}^2(x)} \overset{\text{IND}}{=} \frac{0}{0} \overset{\text{L'Hôp}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \overset{\text{IND}}{=} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôp}} \frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos^2(x)-2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-1}{1+x^2}\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = e^0 = 1$$