Pag 157 (64)

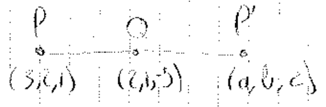
(64) Determina el punto simétrico a $P=(3,2,1)$ respecto de:

a) $Q=(2,1,-5)$

b) $r: (x,y,z) = (4,1,-2) + K(-2,2,3)$

c) $\pi: x+2y-z=0$

a)

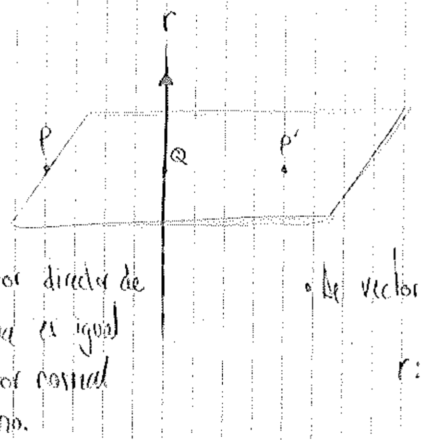


$\frac{3+a}{2} = 2 ;\ a = 4-3 ;\ a = 1$

$\frac{2+b}{2} = 1 ;\ b = 0$ $\qquad P' = (1, 0, -11)$

$\frac{1+c}{2} = -5 ;\ c = -11$

b)



el vector director de la recta es igual al vector normal del plano.

$\pi: -2x + 2y + 3z + \textcircled{D} = 0 \Rightarrow \underline{\pi: -2x+2y+3z-1}$

$-2(3) + 2(2) + 3(1) + D = 0 ;\ D = -1$

- De vectorial a continuas y de continuas a general (ecuaciones de la recta):

$$r: \left\{ \overbrace{\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{2}} = \frac{z+2}{3} \right\} \begin{array}{l|l} 2(x-4) = -2(y+1) & 2(z+2) = 3(y+1) \\ 2x-8 = -2y-2 & 2z+4 = 3y+3 \\ 2x+2y-6 & 2z-3y+1 \end{array}$$

$r: (x,y,z) = (4,-1,-2) + K(-2,2,3)$

$P = (3,2,1)$

$$r: \begin{cases} 2x+2y-6=0 \\ -3y+2z+1=0 \end{cases}$$

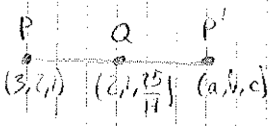
- Sistema de ecuaciones: resolución por Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} -2x+2y+3z = 1 \\ 2x+2y = +6 \\ -3y+2z = -1 \end{array}\right\} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right)}_{A'}$$

A

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -34$$

$$Q \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-68}{-34} = 2 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{-34}{-34} = 1 \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \dfrac{50}{-34} = \dfrac{25}{17} \end{array} \right\} Q = \left(2, 1, \frac{25}{17}\right)$$



$\frac{3+a}{2} = 2 ;\ a = 1$

$\frac{2+b}{2} = 1 ;\ b = 0$

$\frac{1+c}{2} = \frac{25}{17} ;\ 17+17c = 50 ;\ c = 2$

$$\boxed{P' = (1,0,2)}$$

c) 

P=(3,2,1)

π: x+2y-z=0

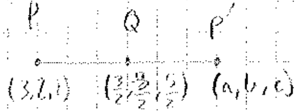
$n_\pi=(1,2,-1)$

$$s\equiv \overbrace{\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}}=\underbrace{\frac{z-1}{1}} \Rightarrow s:\begin{cases}2x-2y=2\\-x-z=-4\end{cases}$$

- Sistema de ecuaciones. Resolvemos por Cramer para averiguar el punto Q:

El vector director de la recta es igual al vector normal del plano.

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\2&-2&0&2\\-1&0&-1&-4\end{pmatrix}}_{A}}_{A'} \qquad |A|=8$$



$$Q\begin{cases}x=\dfrac{\begin{vmatrix}0&2&-1\\2&-2&0\\-4&0&-1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}\\[2ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&2&0\\-1&-4&-1\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{-12}{8}=\dfrac{-3}{2}\\[2ex] z=\dfrac{\begin{vmatrix}1&2&0\\2&-2&2\\-1&0&-4\end{vmatrix}}{|A|}=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}\end{cases} Q=\left(\frac{3}{2},\frac{-3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{3+a}{2}=\frac{3}{2};\ 6+2a=6;\ a=0$$

$$\frac{2+b}{2}=\frac{-3}{2};\ 4+2b=-6;\ b=-5$$

$$\frac{1+c}{2}=\frac{5}{2};\ 2+2c=10;\ c=4$$

$$\boxed{P'=(0,-5,4)}$$

Pág 157 (67)

(67) Halla el plano que contiene el punto A=(1,2,-3), es paralelo a r: x-3=y=z+1, y perpendicular al π: 2x-y+z-1=0.

A=(1,2,-3)

r: x-3=y=z+1

π: 2x-y+z-1=0

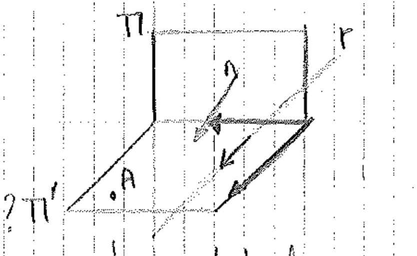
$\vec{n}_\pi=(2,-1,1) \perp (0,1,1)$ → Vector director del plano π'

$\vec{v}_r=(1,1,1)$ → Vector director del plano π'

$$\pi'=\begin{vmatrix}x-1&1&0\\y-2&1&1\\z+3&1&1\end{vmatrix}=(x-1+z+3+0)-(0+x-1+y-2)=$$

$$=\cancel{x}\cancel{-1}+z+3\cancel{-x}\cancel{+1}-y+2=z-y+5$$

$$\boxed{\pi'=-y+z+5=0}$$



El vector normal de plano π es perpendicular uno de los vectores directores del plano π'.
El vector director de la recta r es igual (ya que es paralela) a un vector director del plano π'.

Pag 157 (68)

(68) Halla la ecuación del haz de planos cuya arista contiene al punto $A=(3,0,0)$ y es perpendicular al plano de ecuación $\pi: x+2y-3z+2=0$.

Calculamos un plano que cumpla la primera condición y lo multiplicamos por α; calculamos otro plano que cumpla la segunda condición y lo multiplicamos por β. Ya tenemos el haz de planos.

*1ªC $2(3)-y-z-6=0 \Rightarrow 2x-y-z-6=0$

*2ªC $\vec{n}_\pi=(1,2,-3) \perp (0,3,2)$

$$\Downarrow$$

$$3y+2z=0$$

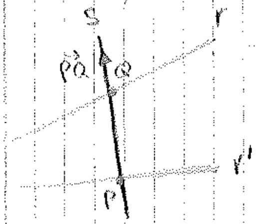
* Ecuación haz de planos: $\boxed{\alpha(2x-y-z-6)+\beta(3y+2z)}$

Pag 157 (63)

(63) Determina la perpendicular común de las rectas:

$r: (x,y,z)=(2,3,0)+t(1,1,-2)$ $\vec{u}=(1,1,-2)$ $Q=(2+t,3+t,-2t)$

$r': (x,y,z)=(2,-1,0)+k(3,2,-5)$ $\vec{v}=(3,2,-5)$ $P=(2+3k,-1+2k,-5k)$



• Después de calcular los puntos generales, calculamos el vector director de s:

$$\vec{PQ}=(t-3k,\,4+t-2k,\,-2t+5k)$$

En paramétricas para sacar el vector director de cada recta.

$$r: \begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \\ z=-2t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x=2+3k \\ y=-1+2k \\ z=-5k \end{cases}$$

• Como dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es 0:

* $\vec{PQ}\cdot\vec{u}=0$

$(1,1,-2)\cdot(t-3k,4+t-2k,-2t+5k)=0$

$t-3k+4+t-2k+4t-10k=0$

$-15k+4t+4=0$

* $\vec{PQ}\cdot\vec{v}=0$

$(3,2,-5)\cdot(t-3k,4+t-2k,-2t+5k)=0$

$3t-9k+8+2t-4k+10t-25k=0$

$-38k+15t+8=0$

• Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -15k-4t+4=0 \longrightarrow t=\dfrac{-4+15k}{-4} \\ -38k+15t+8=0 \longleftarrow \end{cases}$$

$-38k+15\left(\dfrac{-4+15k}{-4}\right)+8=0$; $\dfrac{-60+225k}{-4}=-8+38k$; $-60+225k=32-152k$

$-60-32=-225k-152k$; $-377k=-92$; $k=\dfrac{-92}{-377}=\dfrac{92}{377}$ $\Downarrow$

$-38\left(\dfrac{92}{377}\right)+15t+8=0$; $t=\dfrac{2986}{377}$

• Después se sustituye el valor t y K en el vector director $\vec{PQ}$ para que sea perpendicular a las rectas.

• Por último, para calcular la ecuación de la recta necesitamos el vector director y el punto (sustituido ya en K y t).

2º PROCEDIMIENTO (perpendicular común)

- Hallamos el vector $\vec{w}$, perpendicular a r y s:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1,1,-2)\times(3,2,-5)$$

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-5\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k})-(3\vec{k}-4\vec{i}-5\vec{j}) = \quad \vec{w} = (-1,-1,-1)$$

- Determinamos la ecuación de los planos π y π'. Obligamos a contener el punto en el plano, el vector (por lo tanto, la recta la obligamos a estar contenida) y a ser perpendicular con la otra recta (utilizando el vector perpendicular $\vec{w}$, perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$):

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ y-3 & 1 & -1 \\ z-0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-x+2-z+2y-6)-(-z+2x-4-y+3) = -x+2\cancel{-z}+2y-6\cancel{+z}-2x+4+y-3 =$$

$$= -3x+3y-5$$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -1 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z-0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-2x+4-3z+5y+5)-(-2z+5x-10-3y-3) = -\cancel{2x}+4-3\cancel{z}+5\cancel{y}+5+2z-5\cancel{x}+10+3\cancel{y}+3 =$$

$$= -7x+8y-z+12$$

- Expresamos la recta t (perpendicular común) como intersección de los dos planos:

$$t = \begin{cases} -3x+3y-5=0 \\ -7x+8y-z+12=0 \end{cases}$$

Pag 146 (ejemplo 12)

⑫ Calcula la distancia entre la recta $r: (x, y, z) = (2, 1, 3) + K(2, -1, 1)$ y la recta $r': (x, y, z) = (-1, -1, 4) + K(1, 3, -2)$.

- Determinamos su posición relativa comprobando si los vectores directores son linealmente dependientes:

$\vec{v} = (2, -1, 1)$ $\quad \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow$ r' y r se cortan o se cruzan.

$\vec{u} = (1, 3, -2)$

- Escogemos un punto A de r y un punto A' de r' y le hacemos el determinante a $\{\vec{u}, \vec{v}, \{\vec{AA'}\}\}$:

$A = (2, 1, 3)$ $\qquad \vec{AA'} = (-3, -2, 1)$

$A' = (-1, -1, 4)$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v} & \vec{u} & \vec{AA'} \end{array} \end{array} = 0 \Rightarrow \text{Rang}\{\vec{v}, \vec{u}, (\vec{AA'})\} = 2 \Rightarrow$$

las rectas se cortan por lo que $d\{r, r'\} = 0$.

ECUACIONES DE LA RECTA

* Vectorial

$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + K(v_1, v_2, v_3)$

* Paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1 + K v_1 \\ y = a_2 + K v_2 \\ z = a_3 + K v_3 \end{array}\right\}$$

* Continuas

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

* Implícitas o general

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array}\right\}$$

ECUACIONES DE UN PLANO

* Vectorial

$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$

* Paramétricas

$x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$

$y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$

$z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$

* General (a través del determinante de paramétricas):

$Ax + By + Cz + D = 0$

PERPENDICULAR COMÚN

$P(2+3K, -1+2K, -5K)$
$Q(2+t, 3+t, -2t)$

2 vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es 0.

$\vec{PQ} = (t-3K, 4+t-2K, -2t+5K)$

$r: \begin{cases} x = 2+3K \\ y = -1+2K \\ z = -5K \end{cases}$ $r': \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = -2t \end{cases}$

$\vec{PQ} = (t-3K, 4+t-2K, -2t+5K)$

① $\vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0$
② $\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0$

① $(3,2,-5) \cdot (t-3K, 4+t-2K, -2t+5K)$
$3(t-3K) + 2(4+t-2K) - 5(-2t+5K)$
$3t - 9K + 8 + 2t - 4K + 10t - 25K = 0$
$15t - 38K + 8 = 0$

② $(1,1,-2) \cdot (t-3K, 4+t-2K, -2t+5K)$
$\cancel{t} - 3K + 4 + \cancel{t} - 2K + 4t - 10K = 0$
$4t - 15K + 4 = 0$

$\begin{cases} 15t - 38K + 8 = 0 \rightarrow K = \dfrac{-8-15t}{-38} \\ 4t - 15K + 4 = 0 \end{cases}$

$4t - 15\left(\dfrac{-8-15t}{-38}\right) + 4 = 0$

$\dfrac{120 + 225t}{-38} = -4 - 4t$

$120 + 225t = 152 + 152t$

$377t - 32 = 0$

$t = \boxed{\dfrac{32}{377}}$ → Valor cuando el vector $\vec{PQ}$ es perpendicular a las rectas

Para calcular la ecuación de la recta cojo un punto y el vector director de la recta.

↑ Después

$(4,1,-2)\cdot(t-3k,\ \cancel{4+2k}\ 4+t-2k,\ -2t+5k)$

~~$t-3k+4\ 4t-2k\ +4t-10k$~~

$-15k-4t+4=0$

~~$3t-9k+8+2t-4k+10t-25k$~~

$15t-38k+8=0$

Clorexidina

Amoxicilina 1 G 1 cada 8 h

Flagyl 250 mg 20 1 cada 8 horas

cada 6 h Paracetamol o Nolotil

Crema

Alvogil crema

algodonato o Gasa

a demanda

Dolor

* Posición relativa de 2 rectas

Coincidentes → Rang M = Rang M' = 2
Paralelas → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3
Se cortan → Rang M = Rang M' = 3
Se cruzan → Rang M = 3 ≠ Rang M' = 4

* Posición relativa entre recta y plano.

Contenida → Rang M = Rang M' = 2
Paralelos → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3
Se cortan → Rang M = Rang M' = 3

* Posición relativa de 2 planos

Coincidentes → Rang M = Rang M' = 1
Paralelos → Rang M = 1 ≠ Rang M' = 2
Secantes → Rang M = Rang M' = 3

---

* 2 rectas

Coincidentes → Rang M = Rang M' = 2
Paralelas → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3
Secantes → Rang M = Rang M' = 3
Se cruzan → Rang M = 3 ≠ Rang M' = 4

* Recta y plano

Contenido → Rang M = Rang M' = 2
Paralelo → Rang M = 2 ≠ Rang M' = 3
Secante → Rang M = 3 = Rang M'

* 2 planos

Coincidentes → Rang M = Rang M' = 1
Paralelos → Rang M = 1 ≠ Rang M' = 2
Secantes → Rang M = Rang M' = 2

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ $3x = 2y$ $3x - 2y = 0$

$-y = 3z - 9$

$\left|\begin{matrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & +3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{matrix}\right|$ $\begin{matrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{matrix}$ $= (0 - 6 + 0) - (0 + 0 + 6)$

$\left|\begin{matrix} 3 & -1 \\ 6 & m \end{matrix}\right) = (3m - 6$

$\frac{2}{\sqrt{56}} \times \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{56}}$

$(0 - 6 + 0) - (0 + 0 - 18$

$(\sqrt{56})^2$

$(3 + 12 + 0) - (0 - 27 + 0) =$

$(3 + 12 + 0) - (0 - 27 + 0)$

$(27 + 0 + 0) - (0 + 9 + 0)$

$42a = 24$

$a = \frac{24}{42}$

$(3 + 36 + 0) - (0 - 81 + 0) =$

$42b = 36$ $b = \frac{36}{42}$

$126 + 42c = 240$

$42c = 240 - 126$

$c = \frac{114}{42}$