1 NÓMINAS

CONTEXTO

El salario de un trabajador está normalmente integrado por diferentes conceptos: sueldo base, antigüedad en la empresa, complementos específicos del puesto, horas extraordinarias, etc. La suma de todas estas cantidades constituye el llamado *sueldo bruto* que figura normalmente en las ofertas de trabajo o negociaciones que establecen las empresas y trabajadores.

Como es conocido, el trabajador no cobra materialmente la totalidad del sueldo bruto. Por exigencia legal, el pagador está obligado a descontar diversas cantidades que reducen lo percibido al *sueldo neto*. Dos son los principales capítulos que configuran dichos descuentos: el impuesto sobre la renta de las personas físicas (IRPF) y las cotizaciones a la Seguridad Social (SS).

El IRPF tiene carácter progresivo, es decir, su importe depende del nivel de renta anual del sujeto: a más renta, más impuesto. Se rige por una amplia normativa que contempla una extensa casuística. Por lo que se refiere a los sueldos de los trabajadores, las empresas tienen la obligación de retener al trabajador, y traspasar a la hacienda pública, un porcentaje del sueldo bruto como cantidad *"a cuenta"* del resultado de la liquidación anual del IRPF que venga obligado a presentar dicho trabajador. Dicho porcentaje de retención depende no sólo del importe bruto del sueldo, sino también de la situación personal y familiar del trabajador.

Entre las principales cotizaciones sociales se cuentan las denominadas *contigencias comunes*, *desempleo* y *formación profesional*. Todas ellas se calculan como un porcentaje de una cantidad mensual denominada *base de cotización* que depende de circunstancias como la categoría profesional del trabajador, el tipo de contrato de trabajo, u otras. En general, dicha base de cotización es el resultado de dividir el sueldo bruto anual entre los doce períodos mensuales de cotización, aunque debe encontrarse entre ciertos límites mínimo y máximo. Actualmente, la base mensual mínima es de 753.00 euros y la máxima de 3,597.00 euros.

Habitualmente, el sueldo anual se recibe en 14 pagas, una por cada mes del año más dos pagas extraordinarias que suelen abonarse en el mes de junio y diciembre respectivamente. La retención a cuenta del IRPF se calcula sobre el importe bruto de la parte del sueldo que realmente se ha percibido cada mes.

Conceptos retributivos	Euros	Descuentos	Euros
Sueldo	▦	Ctg. comunes (4.70 %)	▦
Trienios	▦	Desempleo (1.60 %)	▦
Cp. general	▦	Formación (0.10 %)	▦
Cp. personal	14.08	IRPF (14 %)	207.93
Total	▦	Total	▦
		Importe líquido total a percibir	▦

Tabla 6.1: Nómina de un trabajador, con errores en la impresión.

La tabla 6.1 es una copia de la nómina de un trabajador con errores en la impresión. En las dos primeras columnas figuran los distintos conceptos retributivos de la nómina y sus importes correspondientes: sueldo (s), trienios (t), complemento general (g) y complemento personal (p). Únicamente se ve claro el dato que se refiere al complemento personal (14.08 euros). Llamaremos R al conjunto de conceptos retributivos, es decir, $R = \{s, t, g, p\}$. En las dos últimas columnas figuran los conceptos de descuento y el importe resultante: contigencias comunes (c), desempleo (d), formación (f) e IRPF (i). Sólo se ve claro en el caso del IRPF (207.93 euros). Llamaremos D al conjunto de descuentos, es decir, $D = \{c, d, f, i\}$. Llamaremos $\mathscr{U}$ al conjunto universal que incluye todos los elementos que configuran la nómina, es decir, $\mathscr{U} = \{s, t, g, p, c, d, f, i\}$.

Como se ha indicado anteriormente, el descuento del IRPF se hace sobre los ingresos totales de la nómina. En cambio, los otros tres descuentos correspondientes a la SS, se calculan como un porcentaje de la base imponible mensual, que se obtiene como la duodécima parte de los ingresos brutos anuales. Dichos ingresos brutos resultan de sumar las doce pagas ordinarias, como la que recoge la tabla 6.1, más dos pagas extra.

El trabajador que percibe la nómina de la tabla 6.1 sabe que las pagas extras son ligeramente inferiores a las ordinarias, pues se diferencian de éstas en la cantidad del complemento personal, 14.08 euros, que no se percibe en ninguna de las dos extras.

ACTIVIDADES

1.1 Sea $C = \{c, d, f\}$ el conjunto formado por los descuentos que integran las llamadas cotizaciones sociales que se retienen del sueldo de un trabajador y sea D el conjunto de todos los descuentos. ¿Cuál de las siguientes notaciones describe con precisión la relación existente entre C y D?

a) $C \leq D$.
b) $C \in D$.
c) $C \subset D$.

1.2 Sea $S = \{s, t\}$ el conjunto formado por los conceptos retributivos básicos y $P = \{g, p\}$ el conjunto de conceptos retributivos que corresponden a complementos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) $P \subset S$.
b) $P \cap S = \emptyset$.
c) $P \cup S = \mathscr{U}$.

1.3 Sea $F = \{s, t, g\}$ el conjunto integrado por los conceptos retributivos que incluyen todas las nóminas del año y $P = \{g, p\}$ el conjunto de conceptos retributivos que corresponden a complementos. Entonces, la notación correcta para representar por enumeración la intersección de estos dos conjuntos es

a) $F \cap P = g$.
b) $F \cap P = \{g\}$.
c) $F \cap P = \{\{g\}\}$.

1.4 Sean R y D el conjunto de conceptos retributivos y el conjunto de descuentos del salario de un trabajador, indicados en el enunciado. Entonces se cumple:

a) $\#(R) < \#(D)$.
b) $\#(R) = \#(D)$.
c) $\#(R) > \#(D)$.

1.5 Sean R y D el conjunto de conceptos retributivos y el conjunto de descuentos del salario de un trabajador, indicados en el enunciado. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Entre R y D no se puede establecer ninguna aplicación biyectiva.
b) Entre R y D se puede establecer una aplicación biyectiva y una sola.
c) Entre R y D se pueden establecer varias aplicaciones biyectivas distintas.

1.6

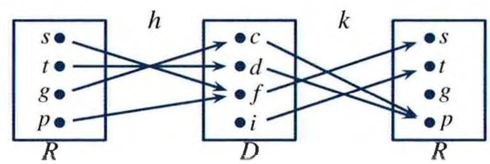
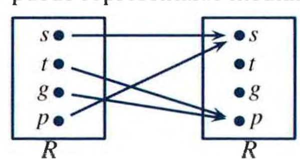


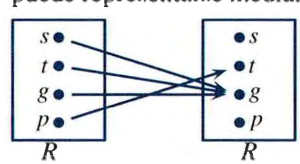
Figura 6.1: Representación de las aplicaciones $h : R \mapsto D$ y $k : D \mapsto R$.

Sean R y D el conjunto de conceptos retributivos y el conjunto de descuentos del salario de un trabajador, indicados en el enunciado. Sean $h : R \mapsto D$ y $k : D \mapsto R$ las aplicaciones definidas en la figura 6.1. Entonces la composición de las dos aplicaciones, es decir, la aplicación $k \circ h$

a) puede representarse mediante la figura



b) puede representarse mediante la figura



c) no está definida, puesto que hay elementos que no tienen imagen.

1.7 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. La cantidad que debe figurar como suma total de los conceptos retributivos

a) es 1,471.13 euros.
b) es 1,485.21 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.8 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. La cantidad que debe figurar como suma total de los conceptos retributivos de una paga extra

a) es 1,471.13 euros.
b) es 1,485.21 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.9 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El sueldo bruto total, sin descuentos, percibido a lo largo de un año es

a) es 20,764.78 euros.
b) es 20,792.94 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.10 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. La base de cotización mensual para calcular las cuotas de la Seguridad Social

a) es 1,732.74 euros.
b) es 1,730.40 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.11 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al descuento por contingencias comunes

a) es 81.33 euros.
b) es 80.78 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.12 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al descuento por desempleo

a) es 27.50 euros.
b) es 27.69 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.13 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al descuento por formación

a) es 1.73 euros.
b) es 17.30 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.14 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe que debe figurar en la casilla correspondiente al total de descuentos

a) es 126.32 euros.
b) es 318.68 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.15 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El importe líquido total a percibir

a) es 1,183.13 euros.
b) es 1,166.53 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.16 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. Después de consultar con un compañero, el trabajador ha conseguido averiguar que el complemento general que corresponde a su categoría asciende a 546.12 euros. Entonces la cantidad que debe figurar en la casilla correspondiente a sueldo

a) es 880.96 euros.
b) es 925.01 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.17 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. El trabajador ha averiguado que el complemento general que corresponde a su categoría asciende a 546.12 euros y también que la retribución adicional por cada trienio es igual a un 5 % del sueldo. Haciendo memoria de cuando fue contratado, calcula que ha cumplido ya un trienio. Entonces la cantidad que debe figurar en la casilla correspondiente al sueldo

a) es 880.96 euros.
b) es 925.01 euros.
c) no se puede calcular con los datos disponibles.

1.18 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. Supongamos que en lugar de percibir el complemento personal, al trabajador se le ofrece la posibilidad de realizar horas extraordinarias, a razón de un

0.5 % del sueldo bruto, excluido el complemento personal, por cada hora trabajada. ¿Cuántas horas extraordinarias debe realizar el trabajador, como mínimo, para que le compense económicamente el cambio.

a) 2.
b) 5.
c) 10.

1.19 Consideremos la nómina representada en la tabla 6.1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

a) Por cada 50 euros de sueldo bruto total, se descuentan 7 euros en concepto de IRPF.
b) Por cada 100 euros de sueldo bruto total, se descuentan más de 7 euros en concepto de cotizaciones a la SS.
c) Por cada 10 euros de sueldo bruto total, se descuentan más de 2 euros en concepto de IRPF y cotizaciones a la SS.

1.20 Llamemos S al sueldo base mensual actual de un trabajador, sin considerar trienios ni complementos. Supongamos que cada trienio equivale a un 5 % del sueldo base vigente y que el trabajador tiene una antigüedad equivalente a 1 trienio. Supongamos también que en el próximo mes el sueldo base S va a incrementarse un 2 % y además el trabajador cumple un nuevo trienio. Entonces el porcentaje de aumento correspondiente a la parte del salario integrada por el sueldo base más la antigüedad es

a) 6.42 %.
b) 6.86 %.
c) 7.00 %.

1.21 Consideremos los siguientes intervalos de números reales: $I_1 = (-\infty, 753)$, $I_2 = (3597, \infty)$. Según el enunciado, si x es el número real que da, en euros, la base mensual de cotización a la Seguridad Social de un trabajador se tiene que cumplir:

a) $x \in I_1 \cup I_2$.
b) $x \subset I_1 \cap I_2$.
c) $x \subset I_1^c \cap I_2^c$.

2 EL RECIBO DEL AGUA

CONTEXTO

El servicio de agua corriente es uno de los servicios básicos que precisan los núcleos de población. Habitualmente lo proporciona una empresa que se ocupa de la gestión del suministro en colaboración con entidades públicas como las comunidades autónomas y los ayuntamientos.

En la tarifa del agua intervienen diversos conceptos relacionados con el ciclo del agua:

- *Abastecimiento:*
  - *Aducción:* captación, embalse, conducción por arterias o tuberías primarias, tratamiento y depósito.
  - *Distribución:* transporte del agua desde los depósitos de los municipios hasta las acometidas particulares a través de las redes de tuberías.
- *Saneamiento:*
  - *Alcantarillado:* recogida de aguas residuales y pluviales, y su evacuación a los distintos puntos de vertido.
  - *Depuración:* devolución del agua a los cauces o medios receptores, una vez que ha sido convenientemente depurada.

Los servicios se suelen facturar bimestralmente e incluyen una *cuota fija de servicio* y una *parte variable*.

La cuota fija garantiza la disponibilidad del servicio y que se factura independientemente de que exista o no consumo. Se definen para períodos de consumo de 60 días, debiéndose ajustar al número de días reales que conforman el período a facturar. Su importe es función del diámetro del contador D expresado en milímetros, el número N de viviendas abastecidas por la toma y el número DP de días de servicio durante el período facturado. Para su cálculo se utilizan las expresiones siguientes:

- *Aducción:*

$$0.0178(D \times D + 225N) \times (DP/60)$$

- *Distribución:*

$$0.0081(D \times D + 225N) \times (DP/60)$$

- *Depuración:*

$$(3.1433 \times N) \times (DP/60)$$

Por su parte, el servicio de *alcantarillado* no incluye coste fijo.

La parte variable es función del consumo realizado en el bimestre. Se calcula multiplicando el número de metros cúbicos realmente consumidos por un coeficiente, expresado en euros por metro cúbico, que es diferente según distintos tramos de volumen de consumo, como se indica en la tabla 6.2. Como se puede apreciar, el servicio de aducción presenta también variación estacional.

	Aducción	
Consumo	Invierno (resto del año)	Verano (1-jun a 30-sep)
Hasta 25m^3	$0.2971€/m^3$	$0.2971€/m^3$
De 25 a 50m^3	$0.5496€/m^3$	$0.6869€/m^3$
Más de 50m^3	$1.3176€/m^3$	$1.9766€/m^3$

	Distribución	Depuración
Consumo	Precio m^3	Precio m^3
Hasta 25m^3	$0.1337€/m^3$	$0.3121€/m^3$
De 25 a 50m^3	$0.2107€/m^3$	$0.3564€/m^3$
Más de 50m^3	$0.5021€/m^3$	$0.5436€/m^3$

Tabla 6.2: Cuotas de la parte variable de los distintos servicios, según el nivel de consumo y período del año.

En algunas poblaciones, el servicio de *alcantarillado* es prestado directamente por los servicios municipales. En este caso, la empresa suministradora actúa como simple recaudadora y traspasa al ayuntamiento el importe proporcional.

Como se ha indicado anteriormente, el servicio de *alcantarillado* sólo se compone de parte variable, a razón de $0.2240€/m^3$ por cada metro cúbico de consumo.

Todos los servicios están sujetos al impuesto del valor añadido (IVA), con un tipo del 10 %, excepto el servicio de alcantarillado que está exento de IVA.

Denotaremos con $C = \{a_1, d_1, a_2, d_2\}$ al conjunto cuyos elementos son los conceptos que figuran en la factura del agua: a_1 = *aducción*, d_1 = *distribución*, a_2 = *alcantarillado* y d_2 = *depuración*. Denotaremos con $P = \{s, u\}$ al conjunto de perceptores de dichos conceptos: s = *empresa suministradora* y u = *ayuntamiento*.

ACTIVIDADES

2.1 Consideremos los siguientes subconjuntos de C:

$$A = \{a_1, d_1\}, S = \{a_2, d_2\}, E = \{a_1, d_1, d_2\}, Y = \{a_2\}$$

Entonces se cumple:

a) $E - S = A$.
b) $E - S = Y$.
c) $E - S = A \cap Y$.

2.2 Consideremos los siguientes subconjuntos de C:

$$A = \{a_1, d_1\}, S = \{a_2, d_2\}, E = \{a_1, d_1, d_2\}, Y = \{a_2\}$$

Entonces se cumple:

a) $(E \cap S)^c = A$.
b) $(E \cap S)^c = Y$.
c) $(E \cap S)^c = A \cup Y$.

2.3 Consideremos los siguientes subconjuntos de C:

$$A = \{a_1, d_1\}, S = \{a_2, d_2\}, E = \{a_1, d_1, d_2\}, Y = \{a_2\}$$

Entonces se cumple:

a) $(A \cap S) \cup (E \cap Y) = C$.
b) $(A \cap S) \cup (E \cap Y) = \emptyset$.
c) $(A \cap S) \cup (E \cap Y) = (A \cap S)^c \cap (E \cap Y)^c$.

2.4 Sea $f : C \mapsto P$ la aplicación que, según la información proporcionada por el enunciado, asigna cada concepto a su correspondiente perceptor definida en la figura 6.2.

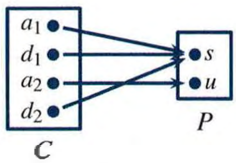


Figura 6.2: Representación de la aplicación f que asigna cada concepto de la factura de suministro de agua a su correspondiente perceptor.

Consideremos el subconjunto de C formado por los conceptos relativos al abastecimiento, $A = \{a_1, d_1\}$. Entonces

a) $f(A) = s$.
b) $f(A) = \{s\}$.
c) $f(A)$ no está definido, pues A es un subconjunto.

2.5 Sea $f : C \mapsto P$ la aplicación definida en la figura 6.2 que asigna cada concepto a su correspondiente perceptor, según la información proporcionada por el enunciado. Entonces

a) $f^{-1}(\{u\}) = \emptyset$.
b) $f^{-1}(\{u\}) = a_2$.
c) $f^{-1}(\{u\}) = \{a_2\}$.

2.6 La aplicación $f : C \mapsto P$ definida en la figura 6.2 que asigna cada concepto a su correspondiente perceptor, según la información proporcionada el enunciado

a) es inyectiva.
b) es sobreyectiva.
c) es biyectiva.

2.7 Una compañía de servicio de suministro de agua corriente quiere recoger información sobre el nivel de satisfacción de los usuarios del servicio. Para ello, facilita una lista de clientes a dos encuestadores independientes para que, a lo largo de una semana, contacten con todas las personas de la lista que puedan localizar. Uno de los encuestadores entrega 284 encuestas, mientras que el otro entrega 223. Al cotejar los datos de identificación, la compañía constata que hay bastantes coincidencias, por lo que el número de personas distintas realmente encuestadas sólo asciende a 458. ¿Cuántas personas fueron entrevistadas por ambos encuestadores?

a) 61.
b) 49.
c) Con los datos proporcionados no se puede saber con exactitud.

2.8 Según la información proporcionada por el enunciado, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) El porcentaje de IVA, aproximado con una cifra decimal, con que viene cargado el importe de distribución es el 10.0 %.
b) El porcentaje de IVA, aproximado con una cifra decimal, con que viene cargado el importe de alcantarillado es el 0.0 %.
c) El porcentaje de IVA, aproximado con una cifra decimal, con que viene cargado el importe total de la factura de suministro de agua es el 10.0 %.

2.9 Según los datos de la tabla 6.2, el incremento del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de aducción en verano con respecto al invierno, en el tramo de consumo correspondiente al intervalo $[25, 50)$

a) es aproximadamente igual al 0.00 %.
b) es aproximadamente igual al 25.00 %.
c) es aproximadamente igual al 50.00 %.

2.10 Según los datos de la tabla 6.2, el incremento del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de aducción en verano con respecto al invierno, en el tramo de consumo correspondiente al intervalo $[50, \infty)$

a) es aproximadamente igual al 0.00 %.
b) es aproximadamente igual al 25.00 %.
c) es aproximadamente igual al 50.00 %.

2.11 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de aducción, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 7.84.
b) 7.59.
c) 8.81.

2.12 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de distribución, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 7.84.
b) 3.56
c) 1.53.

2.13 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de depuración, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 7.84.
b) 3.57.
c) 3.52.

2.14 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la cuota fija del servicio de alcantarillado, IVA incluido, que debe figurar en la factura

a) es igual a 7.84.
b) es igual a 7.39.
c) no se puede calcular pues faltan datos.

2.15 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 33 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la parte variable del servicio de aducción, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 14.21
b) 11.82
c) 13.00

2.16 El propietario de una vivienda unifamiliar, cuyo contador del agua tiene un diámetro de 13 mm, recibe la factura correspondiente al período 11-Octubre-20XX al 11-Diciembre-20XX, en la cual se indica que ha realizado un consumo de 53 m^3. Entonces, de acuerdo con la información proporcionada en el enunciado, el importe de la parte variable del servicio de distribucción, IVA incluido, que debe figurar en la factura es igual a

a) 11.13
b) 15.27
c) 29.27

2.17 La función $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, representada en la figura 6.3, que a cada valor real le asigna el coeficiente multiplicador para el cálculo del coste del servicio de aducción en la temporada de invierno en función de los tramos de consumo de un determinado período

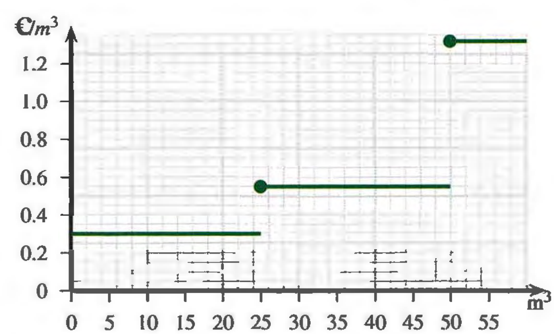
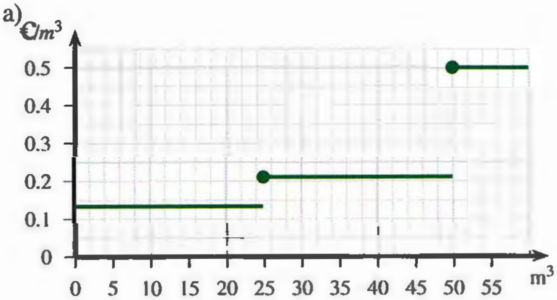
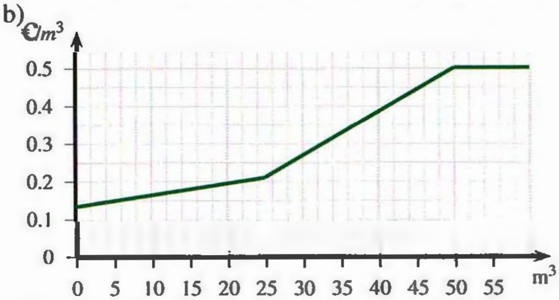


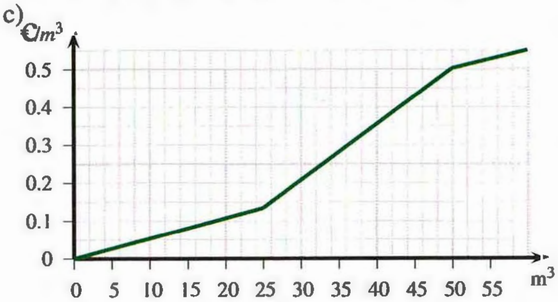
Figura 6.3: Gráfica del valor del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de aducción en temporada de invierno según los distintos tramos de consumo.

a) es creciente en el intervalo $[0, \infty)$.
b) es decreciente en el intervalo $[0, \infty)$.
c) no es ni creciente, ni decreciente, en el intervalo $[0, \infty)$.

2.18 Según los datos de la tabla 6.2, ¿cuál de las siguientes gráficas representa mejor la función que da el valor del coeficiente, en €/m^3, con el cual se calcula en el recibo la parte variable del servicio de distribución, según los diferentes tramos de consumo del período?

a)


b)


c)


2.19 La función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, representada en la figura 6.4, que a cada valor real le asigna el coeficiente de coste del servicio de depuración en función de los tramos de consumo de un determinado período

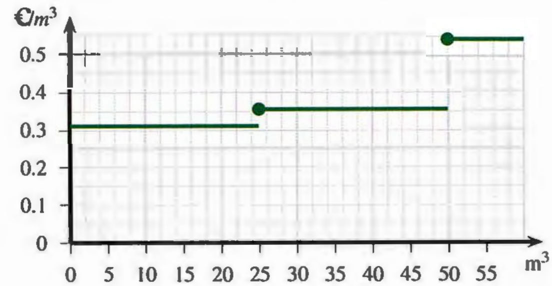


Figura 6.4: Gráfica del valor del coeficiente multiplicador para el cálculo del coste variable del servicio de depuración según los distintos tramos de consumo.

a) es continua en todos los puntos del intervalo $[0, \infty)$.
b) es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 25)$.
c) es continua en todos los puntos del intervalo $[0, 50)$.

2.20 En la figura 6.5 se representa la gráfica una función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ que asigna a cada número de metros cúbicos consumidos el importe en euros de un determinado servicio incluido en la factura del agua. ¿De qué servicio se trata?

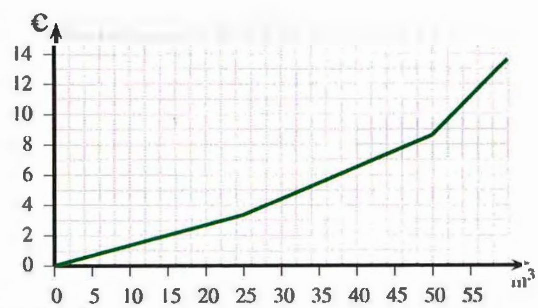


Figura 6.5

a) El servicio de aducción en temporada de invierno.
b) El servicio de distribución.
c) El servicio de alcantarillado.

3 CENTROS COMERCIALES

CONTEXTO

Las grandes superficies comerciales forman parte de nuestra vida cotidiana. Son lugares de compras, ocio y encuentro con los amigos. Se accede fácilmente con nuestros propios vehículos, pues disponen de cómodos aparcamientos. Algunos, incluso están bien comunicados mediante transporte público. Dan respuesta, en un espacio reducido, a la mayoría de nuestras demandas relativas a la economía doméstica: supermercados, tiendas de ropa y calzado, menaje del hogar, aparatos, oficinas de servicios, restaurantes, salas de cine y esparcimiento, etc. Sus mensajes publicitarios nos asedian e inducen al consumo. Constantemente anuncian tentadoras ofertas y dan oportunas facilidades de pago.

La figura 6.6 representa un esquema del plano de un gran centro comercial. Se aprecian las diferentes zonas en que se agrupan las tiendas y lo servicios: supermercados, grandes almacenes, cines, aparcamientos, etc. En los pasillos y escaparates encontramos numerosos carteles publicitarios con diferentes esloganes. Los supermercados nos ofrecen cupones de oferta, y en las colas de los cines se escuchas discusiones amistosas sobre qué película ver.

Sin duda, para sacar provecho de la visita a un centro comercial es imprescindible disponer de un buen bagaje de conocimientos matemáticos.

ACTIVIDADES

3.1 ¿Cuál de los siguientes eslóganes es una proposición lógica?

a) ¡Sumérgete en el verano!
b) ¡Te esperamos!
c) ¡Que no te lo cuenten!

3.2 ¿Cuál de los siguientes eslóganes no es una proposición lógica?

a) La elegancia del geométrico estampa tu verano.
b) La moda brilla bajo el sol.
c) ¿Por qué no te quedas a comer?

3.3 El eslogan *"abrir una lata no es cocinar"*

a) Es una proposición lógica simple.
b) Es una proposición lógica compuesta.
c) No es una proposición lógica.

3.4 El razonamiento: *"Cuando es verano, los precios están rebajados. Si hace calor es verano. Hoy no hace calor. Luego, los precios no están rebajados.*

a) Es lógicamente válido.
b) Es una falacia.
c) Sin añadir otras premisas no se puede decidir si es lógicamente válido o es una falacia.

3.5 Las tiendas de un centro comercial se agrupan en sectores, según el tipo de productos que se pueden encontrar en cada una. Uno de ellos es el sector *Cultura, Multimedia y Tecnología.* Este sector, a su vez, se divide en lo siguientes subsectores: E = *Electrónica*, L = *Libros, música y multimedia* y T = *Telefonía e internet.* En el plano del centro comercial leemos qué tiendas pertenecen a cada subsector:

E = {Apple, Corte Inglés Ocio, FNAC, Infosonido, MediaMarkt}

L = {Corte Inglés Ocio, FNAC, Game, Game Stop, MediaMarkt}

T = {All Cell,Fonoespacio, Internity Vodafone, Ono, Orange I, Orange II, Telandcom, The Phone House, Yoigo}

¿Cuál de las afirmaciones siguientes está equivocada?

a) $E \cap L = \emptyset$.
b) $E \cap T = \emptyset$.
c) $L \cap T = \emptyset$.

3.6 Las tiendas de un centro comercial se agrupan en sectores, según el tipo de productos se que pueden encontrar en cada una. Uno de ellos es el sector *Cultura, Multimedia y Tecnología.* Este sector, a su vez, de divide en lo siguientes subsectores: E = *Electrónica*, L

Figura 6.6: Plano esquemático de un centro comercial.

= *Libros, música y multimedia* y T = *Telefonía e internet*. En el plano del centro comercial leemos qué tiendas pertenecen a cada subsector:

$$\begin{aligned}
E &= \{\text{Apple, Corte Inglés Ocio, FNAC, Infosonido,} \\ &\quad \text{MediaMarkt}\} \\
L &= \{\text{Corte Inglés Ocio, FNAC, Game, Game Stop,} \\ &\quad \text{MediaMarkt}\} \\
T &= \{\text{All Cell, Fonoespacio, Internity Vodafone,} \\ &\quad \text{Ono, Orange I, Orange II, Telandcom,} \\ &\quad \text{The Phone House, Yoigo}\}
\end{aligned}$$

Se verifica que

a) $\#(E \cup L) = 7$.
b) $\#(E \cup T) = 12$.
c) $\#(L \cup T) = 12$.

3.7 Compramos una impresora PrintJet PRO que tiene un precio de venta al público de 199.95€. Pedimos que nos hagan una factura con el IVA desglosado. Entonces en la factura tiene que poner:

a)

Impresora PrinJet PRO	......	157.96€
IVA (21 %)	......	41.99€
Total	......	199.95€

b)

Impresora PrinJet PRO	......	165.25€
IVA (21 %)	......	34.70€
Total	......	199.95€

c)

Impresora PrinJet PRO	......	165.25€
IVA (21 %)	......	41.99€
Total	......	199.95€

3.8 Un bolso de piel tiene un precio de 89.95 euros en plena temporada. En las rebajas, lo consigo por 49.95 euros. Entonces, el porcentaje de variación en el precio ha sido

a) 44.47 %.
b) −80.08 %.
c) −44.47 %.

3.9 Un centro comercial ofrece un vale de regalo de 10 euros en las siguientes condiciones: si una compra supera los 50 euros, se obtiene el vale que se puede usar en la próxima compra, siempre que ésta también supere los 50 euros. Hicimos una primera compra por un total de 85.50 euros, por lo que se nos obsequió con el vale. En la segunda compra, que ascendió a 152.25 euros, utilizamos el vale, por lo cual sólo hubo que abonar 142.25 euros. ¿Qué porcentaje de descuento se obtuvo en total?

Figura 6.7: Bono descuento de un centro comercial.

a) 20 %.
b) 4.39 %.
c) 4.21 %.

3.10 Según las estadísticas, de cada 5 personas que visitan un centro comercial, 3 son mujeres. Asimismo, se sabe que dos de cada tres mujeres visitantes pueden calificarse de asiduas, pues acceden al centro con frecuencia. En cambio, los hombres visitantes que pertenecen al grupo de no asiduos son 7 de cada 11. Si las estadísticas no mienten, ¿cuál de las siguientes conclusiones elaboradas por el grupo de marketing del centro está en lo cierto?

a) Más de la mitad de los visitantes del centro comercial puede calificarse de asiduos.
b) Más de las tres cuartas partes de los visitantes del centro comercial puede calificarse de asiduos.
c) Menos de un diez por ciento de los visitantes del centro comercial puede calificarse de no asiduos.

3.11 Un grupo de amigos se reúne para cenar en un restaurante de un centro comercial. Piden una botella de vino de tres cuartos de litro que piensan repartirse por igual. A punto de iniciar la cena, se une al grupo una pareja. Alguno sugiere pedir una botella adicional de vino, pero se impone el criterio de moderar la bebida para no correr riesgos con los eventuales controles de alcoholemia. En consecuencia, se reparten una única botella por igual, resultando entonces que cada miembro del grupo ampliado toca a una cantidad que viene a ser las tres cuartas partes de lo que pensaba beber cada integrante del grupo inicial. ¿Cuántas personas formaban el grupo inicial?

a) 4.
b) 6.
c) 8.

3.12 Un supermercado hace gala en su publicidad de mantener los precios estables, aunque anuncia con frecuencia interesantes ofertas que suponen jugosos descuentos. Un cliente habitual compra un paquete de azúcar, un paquete de café y un paquete de galletas y abona un total de 5.80 euros. A la semana siguiente, al café le alcanza la conocida oferta *"compre tres y pague dos"*, con lo cual el cliente adquiere tres paquetes de café, uno de azúcar y uno de galletas, resultando un ticket de 8.75 euros. En una tercera semana, los productos en oferta han cambiado: ahora son las galletas quienes se benefician de la oferta del *"tres por dos"*, por lo cual el cliente compra un paquete de azúcar, uno de café y tres de galletas, pagando un total de 7.75 euros. Con respecto al precio ordinario de cada producto, ¿cuál de las tres afirmaciones siguientes está equivocada?

a) El café es el producto más caro.
b) El precio de un paquete del café es mayor que el precio de un paquete de azúcar más uno de galletas.
c) Un paquete de galletas vale exactamente 1.90 euros.

3.13 Una pareja decidió pasar la tarde en un centro comercial. Puesto que no llevaban ni un euro encima, lo primero que hicieron fue sacar dinero del cajero. Ella se compró unos zapatos y un jersey; él se compró unos vaqueros y una camisa. Luego fueron al cine. Al salir, entraron en un restaurante para cenar. Lo más caro, fueron los zapatos: por lo que costó el par se hubiesen podido comprar 2 vaqueros, ó 3 camisas, ó 3 jerseys. Además, el precio de los zapatos fue el doble de lo que costó la cena. Asimismo, por el precio de los zapatos hubiesen podido ir cuatro veces al cine. Al finalizar la jornada todavía llevaban 25 euros en la cartera. De regreso a casa, ella comentaba: *teniendo en cuenta lo que nos sobró, si no hubiéramos ido al cine, el dinero que has sacado del cajero hubiese alcanzado para comprar además otra camisa para ti y otro jersey para mí.* ¿Cuánto dinero sacaron del cajero?

a) 200 euros.
b) 250 euros.
c) 300 euros.

3.14 El equipo directivo de un centro comercial planea renovar el pavimento del parking verde, cuya forma y medidas se aprecian en la figura 6.8. El coste de reparación se estima en unos 5 euros el metro cuadrado. ¿A cuánto ascenderá el presupuesto?

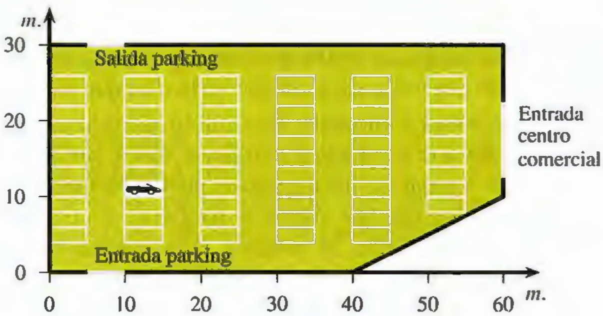


Figura 6.8: Plano del parking verde.

a) 8,000.00€.
b) 8,500.00€.
c) 9,000.00€.

3.15 El plano del parking verde de un centro comercial se representa en la figura 6.8, referido a un sistema de coordenadas cartesiano. Supongamos que un cliente aparca en la plaza cuyo punto medio tiene coordenadas $(12.5, 12.5)$ y puede ir caminando en línea recta sin obstáculos hasta el punto medio de la entrada al centro que tiene de coordenadas $(60, 15)$. Entonces la distancia recorrida es aproximadamente

a) 50.06 metros.
b) 57.55 metros.
c) 47.57 metros.

3.16 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. Como se puede apreciar, la fachada noroeste de la zona de moda sigue la dirección de una recta que pasa por los puntos (0,0) y (27.5,22.5). La ecuación de dicha recta es

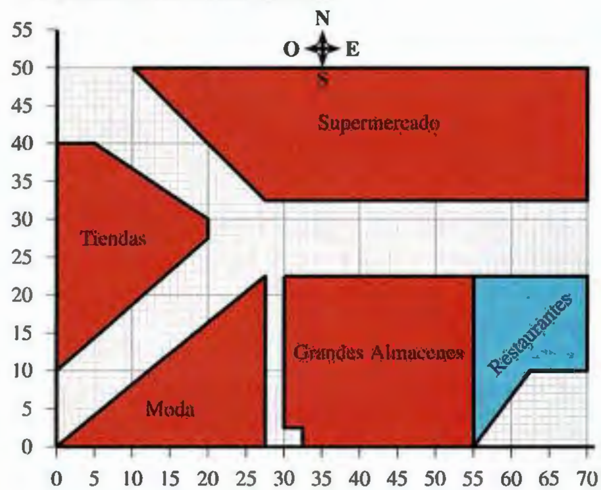


Figura 6.9: Plano del área roja del centro comercial.

a) $-9y - 11x = 0$.
b) $11y - 9x = 0$.
c) $11y + 9x = 0$.

3.17 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. Como se puede apreciar, la zona de moda tiene forma triangular con vértices en los puntos (0,0), (27.5,0) y (27.5,22.5). Si entendemos que las distancias del plano vienen expresadas en metros, entonces el área ocupada por la zona de moda

a) mide 309.38 m^2.
b) mide 618.75 m^2.
c) no se puede calcular sin más datos.

3.18 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. La fachada norte de los *grandes almacenes* está sobre la recta de ecuación

a) $x = 22.5$.
b) $x + y = 22.5$.
c) $y = 22.5$.

3.19 El plano del área roja del centro comercial se representa en la figura 6.9. La zona de restaurantes y los grandes almacenes comparten una pared que se extiende a lo largo de la recta de ecuación

a) $x = 55$.
b) $y = 55$.
c) $x + y = 55$.

3.20 Un cliente entra en un centro comercial por el área roja y camina a lo largo del pasillo que le conduce a la zona de restaurantes. Su recorrido puede describirse como una curva en un plano cartesiano definida por la función $f(x) = 0.01x^2 - x + 50$, representada en la figura 6.10. En su camino pasa por el punto de coordenadas

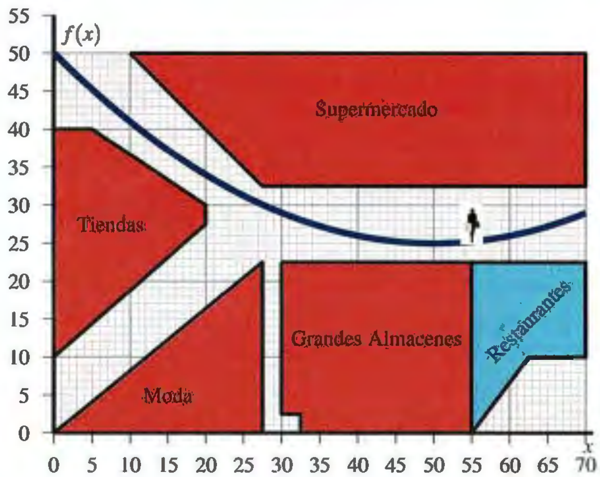


Figura 6.10: Recorrido de un cliente por el área roja del centro comercial.

a) (55,30.0).
b) (55,25.25).
c) (55,22.1).

3.21 Un cliente entra en un centro comercial por el área roja y camina a lo largo del pasillo que le conduce a la zona de restaurantes. Su recorrido puede describirse como una curva en un plano cartesiano definida por la función $f(x) = 0.01x^2 - x + 50$, representada en la figura 6.10. El punto en que estuvo a menor distancia de los *grandes almacenes* fue el punto

a) (50,22.5).
b) (50,25).
c) (55,25).

3.22 Un cliente entra en un centro comercial por el área roja y camina a lo largo del pasillo que le conduce a la zona de restaurantes. Su recorrido puede describirse como una curva en un plano cartesiano definida por la función $f(x) = 0.01x^2 - x + 50$, representada en la figura 6.10. Podemos afirmar que la curva descrita por el cliente

a) es cóncava.
b) es convexa.
c) no es cóncava, ni convexa.

3.23 Una pareja suele ir al cine con frecuencia. A ella le gusta más el cine americano que el europeo, mientras que a él le ocurre lo contrario. Por experiencia saben que cuando elige ella, de cada diez películas que ven, 8 son americanas y 2 europeas. En cambio, él suele elegir de tal forma que por cada 6 europeas, ven 4 americanas. Como a pesar de sus diferentes gustos prefieren ir juntos, cada vez que van al cine se juegan a cara o cruz quién elige la película. A primera vista, parece claro que verán más películas americanas que europeas, pero les gustaría cuantificar esta apreciación. ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida sea americana?

a) $\frac{2}{3}$.
b) $\frac{3}{5}$.
c) $\frac{5}{8}$.

3.24 Una pareja suele ir al cine con frecuencia. A ella le gusta más el cine americano que el europeo, mientras que a él le ocurre lo contrario. Por experiencia saben que cuando elige ella, de cada diez películas que ven, 8 son americanas y 2 europeas. En cambio, él suele elegir de tal forma que por cada 6 europeas, ven 4 americanas. A pesar de sus diferentes gustos prefieren ir juntos al cine. Antes se jugaban a cara o cruz quién elegía la película, pero resultaba que acababan viendo más películas americanas que europeas. Por ello, han acordado que él debe tener ventaja a la hora de elegir. Así pues, ¿por cada vez que elija ella, cuántas veces ha de elegir él para que los dos tipos de películas tengan la misma probabilidad de ser elegida?

a) 2.
b) 3.
c) 4.

3.25 Las tiendas de un centro comercial se agrupan en sectores. Uno de ellos es el sector *Cultura, Multimedia y Tecnología.* Dentro de este sector, consideramos la variable estadística cuyas modalidades son el subsector en que se encuadra la tienda. La tabla siguiente recoge la distribución de frecuencias absolutas de dicha variable.

Electrónica	5
Libros, música y multimedia	5
Telefonía e internet	9

La frecuencia relativa de la modalidad *telefonía e internet*

a) es igual a 0.32.
b) es igual a 0.47.
c) no se puede calcular, pues no conocemos el número de tiendas del sector *Cultura, Multimedia y Tecnología.*

3.26 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Alimentación	154.80	189.15	265.40	210.75
Bebidas	65.35	80.40	75.90	50.25
Droguería	40.30	125.45	90.80	70.30
Hogar	250.40	125.75	75.30	190.75

Tabla 6.3: Gastos mensuales en diferentes sectores de la economía doméstica.

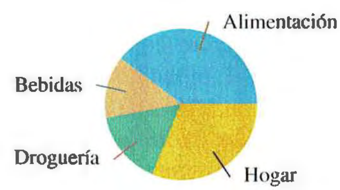
El porcentaje de variación del gasto total del mes de abril con respecto al gasto total del mes de enero fue

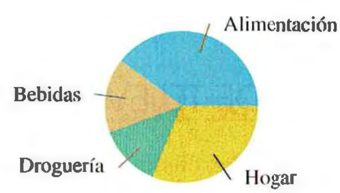
a) 2.19 %.
b) 2.15 %.
c) −2.19 %.

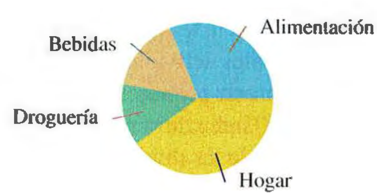
3.27 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. Si consideramos el gasto total de los cuatro meses, ¿cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

a) Más de la mitad del gasto se hizo en alimentación y bebidas.
b) El gasto en el sector hogar fue superior al gasto conjunto en bebidas y droguería.
c) El gasto en el sector hogar supuso más de un tercio del gasto total.

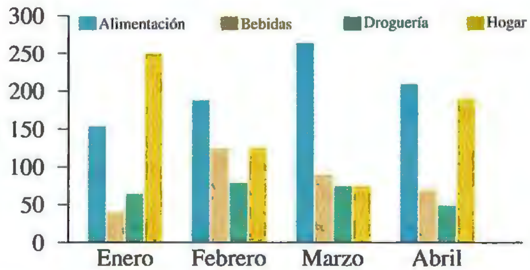
3.28 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. ¿Cuál de los siguientes diagramas de sectores representa de manera más exacta el reparto del gasto total por sectores en que se incurrió en los cuatro meses?

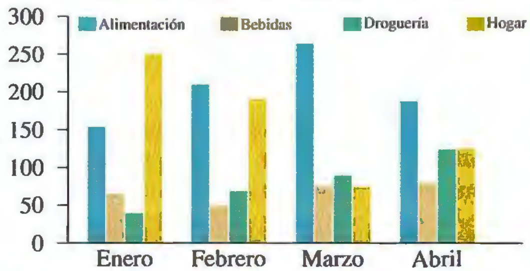
a)


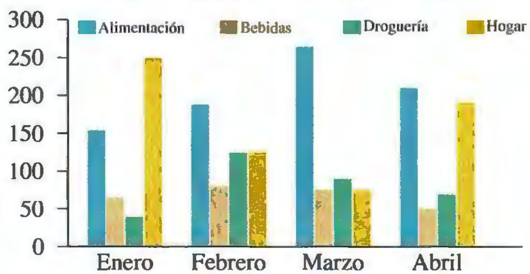
b)


c)


3.29 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. ¿Cuál es el diagrama de barras que representa con mayor exactitud los datos de dicha tabla?

a) 

b) 

c) 

3.30 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. El gasto medio mensual en *alimentación* fue aproximadamente igual a

a) 286.58.
b) 205.03.
c) 127.71.

3.31 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. Entonces la dispersión del gasto total mensual, medida mediante la desviación típica

a) es 39.37 euros.
b) es 6.27 euros.
c) no se puede calcular a partir de los datos de la tabla.

3.32 La tabla 6.3 muestra el resumen cuatrimestral del importe, en euros, de las compras por internet que solicitamos a un supermercado. Si medimos la variabilidad de los gastos en cada sector mediante el coeficiente de variación, ¿cuál de los siguientes sectores presentó mayor variabilidad a lo largo del cuatrimestre?

a) Alimentación.
b) Bebidas.
c) Droguería.

4 APARATOS DE TELEVISIÓN

CONTEXTO

En la sociedad moderna la televisión se ha convertido en una de las principales actividades de muchos individuos que le dedican una proporción importante de su tiempo. Sin embargo, antes de sentarse a disfrutar o padecer la programación de las diversas cadenas un día cualquiera, hay que resolver un buen número de cuestiones técnicas que comienzan con la decisión del modelo de aparato que se ha de instalar.

ESPECIFICACIONES TÉCNICAS

Hoy en día el formato de las televisiones se ha estandarizado en la relación $< 16 : 9 >$, lo cual significa que todas las pantallas tiene 9 unidades de alto por cada 16 unidades de ancho. Anteriormente lo habitual era la relación $< 4 : 3 >$ que también es muy frecuente en los formatos de fotografía; por esa razón, cuando se emite actualmente una antiguo programa, se producen bandas negras a ambos lados de la imagen.

Por tradición el tamaño de un televisor se expresa como la medida D de la diagonal del rectángulo de la pantalla y se mide usualmente en pulgadas (designadas por el símbolo "). Aunque hay televisores de muy diversos tamaños, lo más habitual son las medidas: 24", 32", 37", 42", 55" y 65"; aunque se pueden encontrar modelos de hasta 84". La pulgada es una medida de longitud anglosajona que equivale, en centímetros, a 2.54 cm.

Figura 6.11: Dimensiones de un televisor.

A fin de que el ojo humano perciba una imagen continua, la imagen de un televisor (o de una pantalla de ordenador) está compuesta de diminutos rectángulos, denominados *píxels*. Cuanto más pequeños sean los píxels, más precisa es la representación de la imagen; tal y como muestra la figura 6.12.

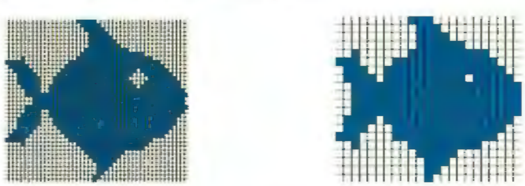


Figura 6.12: Representación de una imagen según el tamaño de los pixels.

La *resolución* de la pantalla se indica por el número de columnas y filas de píxels con los que se forma la imagen. Hoy en día la alta definición dispone de resoluciones habituales de 1280×720 (etiquetado muchas veces como *HD ready*) y 1920×1080 píxels, a lo que corresponde la etiqueta *Full HD*. Ello significa que la imagen se forma con 720 líneas y 1080 líneas respectivamente y el número correspondiente de columnas. Inicialmente la televisión emitía con las 625 líneas que dieron incluso nombre a algún antiguo programa de televisión. Es frecuente expresar la resolución en *megapíxels* –o sea, millones de píxeles contenidos en la pantalla– expresado usualmente sin decimales o a lo sumo con uno sólo.

Hay que tener en cuenta que para una resolución fija –por ejemplo 1920×1080– cuanto mayor sea el tamaño de la pantalla mayor es el tamaño de los píxels, lo cual aumenta la "granularidad" de la imagen. Esa es la razón por la cual se aprecia una menor definición en las pantallas muy grandes cuando se observan de cerca. El tamaño de los píxels puede calcularse, dividiendo el ancho de la pantalla por el número de columnas y su alto por el número de filas; con mucha frecuencia, el resultado es el mismo, lo que indica que los píxels son cuadrados. Sin embargo, sus dimensiones son tan pequeñas que, en vez de expresarlas directamente, lo usual es expresar el número de píxels por pulgada (*PPP* o *PPI* en inglés). La página web *www.sven.de/dpi/* proporciona un calculador del número de píxels por pulgada para la resolución y el tamaño que se fije.

Los mismos criterios se usan para las pantallas de ordenadores, teléfonos móviles, cámaras fotográficas digitales, etc. Sin embargo, los formatos, los tamaños y las resoluciones son, en este caso, mucho más variadas. Así, un teléfono móvil puede tener una pantalla de formato $< 3:2 >$, de tamaño 9" y resolución de 3.5 megapíxels (la resolución de la pantalla suele ser distinta de la resolución de la cámara fotográfica incorporada).

DISTANCIA AL TELEVISOR

Por supuesto el tamaño del televisor conveniente depende de la distancia a la que los usuarios se sienten a ver los programas. En Internet se pueden encontrar diversas recomendaciones:

a) Una de ellas indica situarse a una distancia igual a 0.5 metros por cada 10", más 0.5 metros extra. Lo cual permite calcular el tamaño del televisor en función de la distancia a la que se vaya a situar el televisor del sofa.

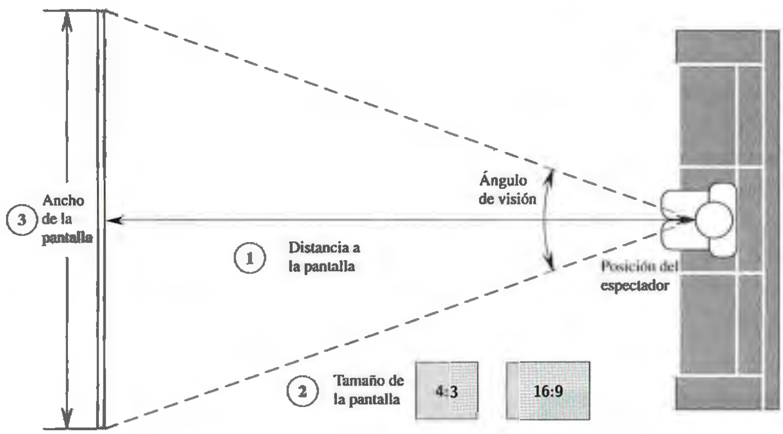


Figura 6.13: Recomendación sobre el tamaño óptimo del televisor en función de la distancia de visión.

b) La *Society of Motion Picture and Televisión Engineers* es más flexible con las preferencias del espectador y sólo recomienda que la distancia mínima al televisor sea el doble de su ancho y la máxima distancia no supere cinco veces su ancho.

c) En la figura 6.13 se indica otra recomendación en el sentido de que el ángulo de visión, definido como el ángulo del triángulo cuyo vértice es el espectador y cuya base es el televisor, sea de 30°.

ACTIVIDADES

4.1 Si x e y son respectivamente el ancho y el alto de una pantalla de televisor de formato $< 16:9 >$, se puede afirmar que

a) $\frac{x}{16} = \frac{y}{9}$.
b) $\frac{x}{9} = \frac{y}{16}$.
c) $16x = 9y$.

4.2 Si x e y son respectivamente el ancho y el alto de un televisor de formato $< 16:9 >$, en función de y el ancho x se expresa

a) $x = \frac{9}{16}y$.
b) $x = 1.\overset{\frown}{7}y$.
c) $x = 0.5625y$.

4.3 Si un televisor de formato $< 16:9 >$ tiene un ancho de 81.91 cm se puede afirmar que

a) Su alto es 49 cm.
b) Su ancho son 34.2".
c) Es un televisor de 37".

4.4 Para instalar en un mueble un televisor de 42" y formato $< 16:9 >$, ¿de cuánto espacio horizontal hay que disponer?

a) Más de 1.034 metros.
b) Más de 92.98 cm.
c) Más de 42".

4.5 Si un televisor con formato $< 16:9 >$ y de 32" se apoya en una peana de 10cm. de altura, ¿cuál es el espacio vertical necesario para colocarlo entre dos baldas de una librería?

a) 49.85 cm.
b) 55.16ccm.
c) 45.35 cm.

4.6 El ancho x de una pantalla de formato $< 16:9 >$ en función de la medida D de la diagonal se expresa:

a) $\frac{9 \cdot D}{256}$.
b) $\frac{16}{\sqrt{9 \cdot D}}$.
c) $\frac{16 \cdot D}{\sqrt{337}}$.

4.7 El aumento en centímetros del ancho de una pantalla de televisión de formato $< 16:9 >$, por cada pulgada de aumento de la diagonal, es

a) $\frac{40.64}{\sqrt{256}}$ cm.
b) 2.21 cm.
c) $\frac{16}{\sqrt{337}}$ cm.

4.8 El perímetro de la pantalla de un televisor de 65", con formato $< 16:9 >$, es

a) 449.68 cm.
b) 368.8 cm.
c) 632.46 cm.

4.9 El área de la pantalla de un televisor de 65", con formato $< 16:9 >$, es

a) $0.92\ m^2$.
b) $1.42\ m^2$.
c) $1.16\ m^2$.

4.10 En un televisor de formato $< 16:9 >$ se visualiza un programa antiguo de formato $< 4:3 >$, ajustando la imagen para que ocupe la totalidad del alto de la pantalla. Del ancho de la pantalla, las bandas negras que aparecen en los laterales de la imagen ocupan una proporción de

a) $3/8$, es decir $3/16$ a cada lado.
b) $1/4$, es decir $1/8$ a cada lado.
c) $3/16$, es decir $3/32$ a cada lado.

4.11 Disponemos de un televisor cuyo formato es $< 16:9 >$ y tiene resolución 1280×720. La fracción $\frac{1280}{720}$ es equivalente a

a) $\frac{177}{100}$.
b) $\frac{16}{9}$.
c) $\frac{54}{30}$.

4.12 Un televisor tiene resolución 1920×1080. La fracción $\frac{1920}{1080}$ es equivalente a

a) $\frac{16}{9}$.
b) $\frac{54}{30}$.
c) $\frac{17}{10}$.

4.13 La resolución de una pantalla de 1920×1080 se puede expresar

a) 1.5 megapíxels.
b) 2 megapíxels.
c) 2.5 megapíxels.

4.14 La resolución de una pantalla de 1280×720 es de

a) 1 megapíxels.
b) 2 megapíxels.
c) 2.5 megapíxels.

4.15 Si una cámara fotográfica de formato $< 4:3 >$ tiene una resolución de 5.5 megapíxels, ¿de cuántas columnas y filas de píxels se compone la imagen?

a) 2548×1911
b) 2708×2031
c) 3252×2439

4.16 El tamaño de los píxels de una pantalla de 65" con resolución de 1280×720 es

a) 2.3 mm.
b) 1.12 mm.
c) 0.72 mm.

4.17 El número de píxels por pulgada de una pantalla de 32", con resolución 1920×1080, es

a) 68.84 *PPP*.
b) 72.15*PPP*.
c) 84.68 *PPP*.

4.18 Siguiendo la recomendación (a), la distancia al televisor debe ser 0.5 metros por cada 10" más 0.5 metros extra. Midiendo la diagonal D en pulgadas, la función que expresa la distancia recomendada es

a) $f(D) = 0.5 + 0.5 \cdot D$ metros.
b) $f(D) = 5 \cdot D + 0.5$ metros.
c) $f(D) = 0.05 \cdot D + 0.5$ metros.

4.19 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser 0.5 metros por cada 10" más 0.5 metros extra, ¿cuál es el tamaño de televisor adecuado si se va a situar a 2 metros del lugar habitual desde donde se ve?

a) 30".
b) 37".
c) 24".

4.20 Según la recomendación (b), la distancia mínima al televisor debe ser el doble de su ancho. Para un televisor de formato $< 16:9 >$ y tamaño D", la función que expresa la distancia mínima en metros al televisor es

a) $f(D) = 0.12D$ metros.
b) $f(D) = 0.0443D$ metros.
c) $f(D) = 0.086D$ metros.

4.21 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser por lo menos el doble de su ancho, la distancia mínima a la que debe observarse un televisor de 37" es

a) 2.18 metros.
b) 1.92 metros.
c) 1.64 metros.

4.22 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser por lo menos el doble de su ancho, un televisor que se va a ver desde una distancia de 1.5 metros debe tener un tamaño máximo de

a) 28".
b) 34".
c) 40".

4.23 Según la recomendación (b), la distancia máxima al televisor debe ser cinco veces su ancho. Para un televisor de formato $< 16:9 >$ y tamaño D", la función que expresa la distancia máxima en metros al televisor es

a) $f(D) = 0.11D$ metros.
b) $f(D) = 0.21D$ metros.
c) $f(D) = 0.16D$ metros.

4.24 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser a lo sumo cinco veces su ancho, la distancia máxima a la que debe observarse un televisor de 24" es

a) 2.18 metros.
b) 2.64 metros.
c) 3.14 metros.

4.25 Si se acepta que la distancia al televisor debe ser a lo sumo cinco veces su ancho, un televisor que se va a ver desde una distancia de 2 metros debe tener un tamaño mínimo de

a) 28".
b) 18".
c) 32".

4.26 La recomendación de que un televisor de tamaño D" debe verse a una distancia de 0.5 metros por cada 10", más 0.5 metros extra, es compatible con la recomendación de que la distancia máxima al televisor sea 5 veces su ancho para los televisores de tamaño D superior a

a) 8.33".
b) 12.5".
c) 16".

4.27 La recomendación de que un televisor de tamaño D" debe verse a una distancia de 0.5 metros por cada 10", más 0.5 metros extra, es compatible con la recomendación de que la distancia mínima al televisor sea 2 veces su ancho,

a) para televisores de tamaño D superior a 18".
b) para televisores de tamaño inferior a 42".
c) para cualquier televisor.

4.28 Para un televisor de formato $< 16:9 >$, la recomendación de que el ángulo de visión del televisor sea de 30° expresa la distancia en metros al televisor en función de su tamaño D", mediante la función

a) $f(D) = 0.056D$ metros.
b) $f(D) = 0.049D$ metros.
c) $f(D) = 0.041D$ metros.

5 METALES PRECIOSOS

CONTEXTO

Se acostumbra a calificar como *preciosos* a ciertos metales que son escasos y relativamente inalterables por los agentes físicos o químicos, lo que causa que puedan encontrarse en estado puro en la naturaleza, y que poseen un brillo y una apariencia que los hace deseables a la vista, como el oro, la plata, el platino o el paladio. Por su apariencia atrayente y su durabilidad, desde la antigüedad se han empleado en joyería o han sido, como el oro y la plata, una forma de dinero. Hoy día, todos, excepto el oro, tienen más importancia en la industria que en joyería; así, la plata tiene propiedades de conducción de la electricidad únicas y el platino y el paladio son indispensables en la fabricación de catalizadores.

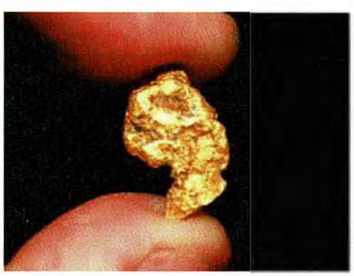


Figura 6.14: Pepita de oro puro.

Una de las características físicas de estos metales es ser muy densos o como suele decirse "ser muy pesados"; es decir, que la masa de un volumen dado de metal es grande en comparación con el resto de los metales. Las densidades de los principales metales preciosos se muestran en la tabla 6.4.

Densidades de los principales metales preciosos en g/cm^3			
Plata	Paladio	Oro	Platino
10.50	12.02	19.32	21.45

Tabla 6.4: Densidades de algunos metales preciosos.

Por ejemplo, para tener una referencia de lo densos que son estos metales, consideremos que la densidad del plomo, que tradicionalmente es considerado como un elemento muy pesado, es de $11.35\ g/cm^3$, de suerte que la plata, que es el más ligero de los metales preciosos, es casi tan denso como el plomo, mientras que el platino es casi dos veces más pesado que el plomo.

Los metales preciosos en su uso en joyería y en acuñación de moneda se suelen *alear* con otros metales, para darles un color determinado o mejorar sus resistencia al uso. La pureza de una aleación de metales preciosos, en especial el oro, se acostumbra a medir en *quilates*. Un quilate equivale a la veinticuatroava parte de la masa total de oro puro; por ejemplo, una moneda de oro de veinticuatro quilates tiene una pureza en oro de $24/24$, es decir se considera compuesta de oro puro, mientras que un anillo de oro de 18 quilates tiene una riqueza en oro igual a $18/24$, lo que significa que está compuesto de $18/24 = 0.75$ partes de oro puro y $6/24$ partes de otros metales; dicho de otra manera, que el 75 % de la masa del anillo es oro puro. Por ejemplo, un anillo de oro de 18 quilates, cuyo peso total sea de 6 g contiene $6 \cdot 0.75 = 4.5$ g de oro.

No debe confundirse el quilate empleado como unidad de pureza de una aleación preciosa con el quilate unidad de masa que se usa en Gemología, para medir la masa de las piedras preciosas, el *quilate actual* o *quilate métrico* es igual a 0.2 gramos; así, un diamante de cinco quilates pesa 1 g.

La masa de los metales preciosos se acostumbra a medir en las unidades del sistema métrico decimal, por ejemplo, gramos, kilogramos o toneladas, pero también es frecuente emplear la *onza troy*, medida que proviene del sistema de medidas romano. Una onza troy es igual a 31.1034768 g, aunque se suele simplificar a considerarla igual a 31.10 g.

Una *aleación* metálica es una combinación de dos o más metales. Las aleaciones son extremadamente útiles porque al combinar los metales se mejoran las propiedades de algunos o todos ellos. Por ejemplo, el latón es una combinación de cobre y zinc, el bronce es una aleación de cobre y estaño y la adición de molibdeno al hierro le hace inoxidable y muy resistente a la corrosión por agentes químicos. En las actividades que plantearemos a continuación consideraremos únicamente los aspectos relacionados con los metales que se combinan sin tener en cuenta las proporciones de cada uno de los metales que intervienen, esto es, la composición cualitativa de la aleación.

ACTIVIDADES

5.1 Teniendo en cuenta los datos de la tabla 6.4, la proposición *"si la plata es más densa que el oro, entonces el oro es más denso que el platino"* es

a) falsa.
b) verdadera.
c) su valor de verdad depende del valor de verdad de la proposición *"el oro es más denso que el platino"*.

5.2 ¿Cuál de las siguientes oraciones no es una proposición lógica?

a) *"¿Dónde está mi anillo de oro?"*.
b) *"Tiene un corazón de oro"*.
c) *"No es oro todo lo que reluce"*.

5.3 Si p es la proposición *"es de oro macizo"* y q es la proposición *"es barato"*, entonces la proposición *"si es de oro macizo, no es barato"* se representa por

a) $p \to q$.
b) $\neg p \to q$.
c) $p \to \neg q$.

5.4 Si p es la proposición *"es un objeto de oro"* y q es la proposición *"es un objeto que reluce"*, la proposición *"No es cierto que si un objeto reluce, entonces sea de oro"* es

a) $q \wedge \neg p$.
b) $p \to q$.
c) $q \to \neg p$.

5.5 De la información sobre los metales preciosos relatada al comienzo se desprende que la proposición *"Si el anillo de oro de Juan tiene más quilates que el anillo de oro de María, entonces el anillo de Juan contiene más oro que el de María"* cumple

a) es siempre verdadera.
b) es siempre falsa.
c) su valor de verdad depende de la masa de los anillos.

5.6 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, el oro es más denso que el platino".
"La plata es más densa que el oro".

$\therefore$ *"El oro es más denso que el platino".*

a) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens*.
b) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus tollendo tollens*.
c) Es una falacia.

5.7 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, el oro es más denso que el platino".
"El oro no es más denso que el platino".

$\therefore$ *"La plata no es más densa que el oro".*

a) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens.*
b) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus tollendo tollens.*
c) Es una falacia.

5.8 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, el oro es más denso que el platino".
"La plata no es más densa que el oro".

$\therefore$ *"El oro no es más denso que el platino".*

a) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens.*
b) Es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus tollendo tollens.*
c) Es una falacia.

5.9 El razonamiento:

"Si la plata es más densa que el oro, entonces el paladio es más denso que el platino".
"Si el paladio es más denso que el platino, entonces el oro es más denso que el paladio".

$\therefore$ *"Si la plata es más densa que el oro, entonces el oro es más denso que el paladio".*

a) es lógicamente válido por ser un caso particular del *modus ponendo ponens.*
b) es lógicamente válido por ser un caso particular de la *ley del silogismo hipotético.*
c) es una falacia.

5.10 El razonamiento:

"El paladio es más denso que el oro o el paladio es más denso que la plata".
"El paladio no es más denso que el oro".

$\therefore$ *"El paladio es más denso que la plata".*

a) es lógicamente válido.
b) es un caso particular del silogismo hipotético.
c) es una falacia.

5.11 El conjunto de metales

$$A = \{\text{plata}, \text{paladio}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

está definido

a) por enumeración.
b) por descripción.
c) por inclusión.

5.12 Si A es el conjunto de lo metales preciosos y

$$B = \{\text{plata}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

se cumple

a) $A \subset B$.
b) $B \subset A$.
c) $B \subset A^c$.

5.13 Si A es el conjunto de los metales preciosos y B es el conjunto de los metales, se cumple

a) $B \subset A$.
b) $A^c \subset B^c$.
c) $B^c \subset A^c$.

5.14 El conjunto de composiciones distintas posibles de las aleaciones de dos metales pertenecientes al conjunto

$$A = \{\text{plata}, \text{paladio}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

tiene

a) 4 elementos.
b) 6 elementos.
c) 8 elementos.

5.15 Designemos por $\mathscr{A}$ al conjunto de todas las aleaciones posibles de los metales del conjunto A.

$$A = \{\text{plata}, \text{paladio}, \text{oro}, \text{platino}\}$$

La transformación, $f\colon \mathscr{A} \mapsto \mathscr{P}(A)$, que a cada aleación le asocia el subconjunto formado por los metales que componen dicha aleación es

a) Aplicación inyectiva.
b) Aplicación sobreyectiva.
c) No es aplicación.

5.16 María tiene dos anillos, uno es de oro de 23 quilates y pesa 5 g, el otro es de oro de 20 quilates y pesa 10 g. Si los lleva al joyero para que los funda y fabrique un nuevo anillo con el material de ambos, ¿cuántos quilates tendrá el oro del nuevo anillo?

a) 21.
b) 21.5.
c) 22.

5.17 ¿Qué contiene mayor cantidad de oro, una moneda de 10 g de oro de 20 quilates o una moneda de media onza troy de 18 quilates?

a) La moneda de 10 g.
b) La moneda de media onza.
c) Contienen la misma cantidad de oro.

5.18 Para fabricar un anillo de oro de 22 quilates con una masa total de 9 g, ¿qué cantidad de oro hay que emplear?

a) 8.75 gramos.
b) 8.50 gramos.
c) 8.25 gramos.

5.19 Vamos a vender una moneda de oro de 22 quilates y un peso total de 15 g y un anillo de oro de 18 quilates y un peso total de 12 g. Si pagan las piezas a razón de 30 euros el gramo de oro, ¿qué cantidad recibiremos?

a) 810 euros.
b) 682.25 euros.
c) 575.75 euros.

5.20 Juan quiere comprar unas monedas de plata para regalar a sus tres sobrinos el día de Navidad. Con el dinero que lleva encima, si pagara por cada moneda el precio que aparece en el escaparate sólo podría comprar dos monedas y le sobrarían 50 euros. Entra el la tienda y explica al dependiente que necesita tres monedas, una para cada sobrino, éste le ofrece una rebaja del 10 % del precio marcado en el escaparate si compra tres monedas. Con este trato, Juan ha podido comprar tres monedas y todavía le han sobrado 8 euros. ¿Cuál era el precio de las monedas en el escaparate?

a) 120 euros.
b) 30 euros.
c) 60 euros.

5.21 Juan quiere comprar unas monedas de plata para regalar a sus tres sobrinos el día de Navidad. Entra en la tienda y pregunta el precio de una moneda; tiene dinero suficiente para comprar tres monedas. Juan se pregunta, ¿cuánto deberían rebajar el precio de para que por el mismo dinero que me cuestan tres monedas pudiera comprar cuatro?

a) un 20 %.
b) un 25 %.
c) un 33.33 %.

5.22 Una moneda de una onza de plata y dos monedas de media onza de oro cuestan en total 1100 euros. Dos monedas de una onza de plata y una moneda de media onza de oro cuestan en total 595 euros; ¿cuánto cuesta una moneda de una onza de plata?

a) 30 euros.
b) 35 euros.
c) 75 euros.

5.23 Entre marzo y julio de 2011, el Banco de España vendió 4.3 millones de onzas troy de oro de las que formaban su reserva, esas ventas suponían del 32 % de la reserva total de oro que tenía el banco. ¿Cuántas onzas de oro había en la reserva antes de producirse las ventas?

a) 4.62 millones de onzas.
b) 12.45 millones de onzas.
c) 13.44 millones de onzas.

5.24 Entre marzo y julio de 2011, el Banco de España vendió 4.3 millones de onzas troy de oro de las que formaban su reserva, esas ventas suponían del 32 % de la reserva total de oro que tenía el banco. Desde julio de 2011 no se han comunicado nuevas ventas de oro de la reserva del Banco de España. Si el precio actual de la onza de oro es de 1050 euros, ¿cuál es el valor del oro que actualmente tiene en su reserva el Banco de España?

a) 4515 millones de euros.
b) 8545.42 millones de euros.
c) 9594.37 millones de euros.

6 COTIZACIÓN DE LAS MONEDAS Y LINGOTES DE INVERSIÓN

CONTEXTO

El precio que cobran los comerciantes de oro para inversión, tanto en monedas como en lingotes es una función de la cotización del oro en el mercado de metales de Londres que tiene dos componentes, uno fijo y otro variable que depende de la cotización del oro en ese momento. Supongamos que x es la cotización de la onza de oro de Londres en una unidad monetaria dada, normalmente dólares americanos, y sea el precio $f(x)$ de un lingote o una moneda que contiene una onza de oro es de la forma

$$f(x) = (1+r)x + c$$

donde c es un coste fijo de manufactura y transporte del lingote y r es una *prima* o porcentaje que añade o carga el comerciante. Puesto que no tiene sentido una cotización negativa, consideraremos $f(x)$ definida para los valores $x > 0$; es claro que $f(x)$ está medida en las mismas unidades monetarias que x y c. Por ejemplo, si suponemos que $c = 1.5$ y que la prima del comerciante es del 5 % de la cotización del oro, entonces $r = 0.05$ y el precio de venta en función de la cotización viene dado por la función $f(x) = 1.05x + 1.5$. La gráfica del precio $f(x)$ es la recta que se muestra en la figura 6.15.

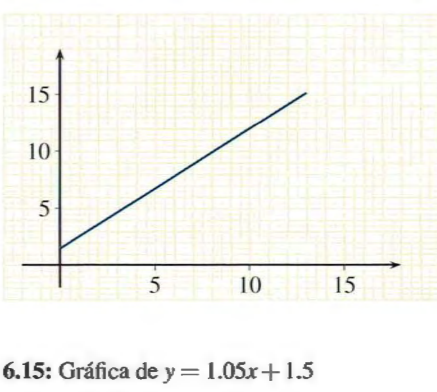


Figura 6.15: Gráfica de $y = 1.05x + 1.5$

Observemos que la ordenada en el origen de la recta es igual el coste fijo de la pieza c, y que la pendiente de la recta es igual a $1 + r$, donde r es el porcentaje que recibe el comerciante.

Figura 6.16: Lingote de platino certificado por el fundidor.

ACTIVIDADES

6.1 El coste fijo de manufactura y transporte de un lingote de una onza de oro es de 5.5 dólares; si el comerciante añade un porcentaje del 6 %. ¿Cuál será el precio de venta del lingote cuando la cotización del oro en Londres sea de 1300 dólares la onza?

a) 1383.83.
b) 2085.5.
c) 1383.5.

6.2 Cuando la cotización de la onza de oro era de 1000 dólares el precio de venta del lingote de una onza de oro era de 1054 dólares; ahora que la cotización es 1200 dólares, el precio de venta es 1264 dólares, ¿cuál es el coste fijo de la pieza?

a) 4 dólares.
b) 5 dólares.
c) 6 dólares.

6.3 Cuando cuando la cotización de la onza de oro era de 1100 dólares el precio de venta del lingote de una onza de oro era de 1149 dólares; ahora que la cotización es 1300 dólares, el precio de venta es 1357 dólares, ¿cuál es la prima que añade el comerciante?

a) el 4 % de la cotización.
b) el 5 % de la cotización.
c) el 6 % de la cotización.

6.4 Cuando cuando la cotización de la onza de oro era de 1000 dólares El precio de venta del lingote de una onza de oro era de 1054 dólares, y, ahora que la cotización es 1200 dólares, el precio de venta es 1264 dólares. Si la cotización del oro sube hasta 1300 dólares, ¿cuál será el precio de venta del lingote?

a) 1310 dólares.
b) 1365 dólares.
c) 1369 dólares.

6.5 El precio de venta de un lingote de una onza es una función de la cotización del oro dada por $f(x) = 1.045x + 4$; su derivada es:

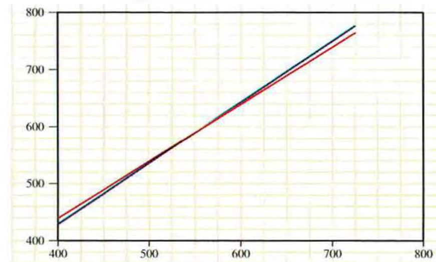
a) 4.
b) 1.045.
c) $1.045x$.

6.6 El comerciante A vende las piezas de una onza de oro a un precio función de la cotización dado por $f_A(x) = 1.04x + 5$. El comerciante B ha decidido cambiar el modo de tarifar los lingotes, y cobra el precio oficial x más una cantidad fija que incluye los costes de manufactura y transporte más su comisión, el precio al que vende es $f_B(x) = x + 35$. ¿Qué valor de la cotización hace que ambos precios sean iguales?

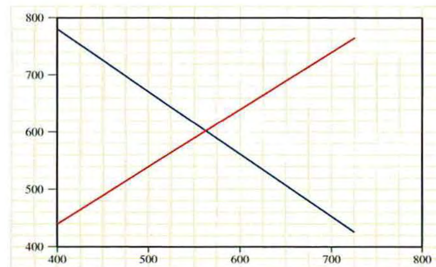
a) 650.
b) 700.
c) 750.

6.7 El comerciante A vende las piezas de una onza de oro a un precio que depende de la cotización x, dado por $f_A(x) = 1.06x + 5$. El comerciante B cobra el precio oficial x más una cantidad fija que incluye los costes de manufactura, de transporte y su comisión; su precio en función de la cotización es $f_B(x) = x + 40$. ¿Cuál de las figuras siguientes representa las gráficas de ambos precios en función de la cotización x?

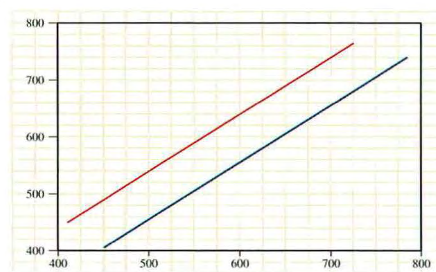
a)



b)



c)



6.8 La figura 6.17 representa una moneda de media onza de oro. Su diámetro mide 28 mm. Entonces su contorno mide aproximadamente

Figura 6.17: Moneda de oro de media onza.

a) 175.93 mm.
b) 87.96 mm.
c) 43.98 mm.

7 SUMINISTRO Y CONSUMO ANUAL DE ORO

CONTEXTO

El oro tiene dos fuentes principales de suministro: la denominada *producción primaria* y el *reciclaje*. Se considera de producción primaria el metal producido por extracción de las minas, bien siendo el oro el producto principal, bien como subproducto de la explotación de otros metales como cobre, plata o zinc. Metal procedente del reciclado es el que se extrae de objetos que contienen oro, como los teléfonos móviles desechados o las joyas usadas sin valor artístico especial, que se venden a los comerciantes de segunda mano. En el año 2013 la producción primaria fue, aproximadamente, de 2770 toneladas, mientras que el suministro de oro reciclado fue de unas 600 toneladas.

En 2013, los principales países productores de oro de producción primaria fueron los que aparecen en la tabla 6.5, que muestra los ocho países que produjeron más de 100 toneladas ese año.

Producción primaria de oro en 2013	
China	420
Australia	255
USA	227
Rusia	220
Perú	150
Sudáfrica	145
Canadá	120
México	100
Otros	1133

Producciones en toneladas. Fuente: World Gold Council

Tabla 6.5: Países productores de oro de producción primaria.

La producción de un país es muy variable en el tiempo. El agotamiento de los yacimientos causa una tendencia a la disminución de la producción que sólo podría ser compensada con mayores inversiones en explotación; el éxito de esas exploraciones depende no sólo de la geología de la región, sino de factores económicos externos como el coste relativo de la explotación de los nuevos yacimientos respecto de los costes de la competencia y la cotización del metal. Aquí aparece dos importantes conceptos relativos a la minería en general, la idea de *recurso* y la idea de *reserva*. Se entiende por recurso la cantidad de metal que está depositado en el subsuelo, mientras que reserva significa la cantidad de metal que bajo las condiciones económicas actuales, precios del metal y el coste de explotación, es rentable extraer.

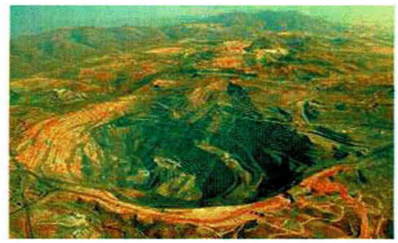


Figura 6.18: Mina de oro Goldstrike en Nevada (USA)

Un interesante ejemplo de la influencia de estos factores en la producción es el caso de Sudáfrica. Desde que en 1880 se inició la explotación de oro, el país ha dispuesto de una fabulosa riqueza en mineral de oro, hasta el punto que el World Gold Council estima que hasta finales de 2012 se habían extraído en todo el mundo 175000 toneladas de oro y que la mitad de ese oro procedía de las minas sudafricanas. Sin embargo, su producción lleva más de cuarenta años disminuyendo. Esta disminución se debe no sólo al agotamiento de los filones conocidos, sino a la dificultad de su extracción que debe hacerse de forma manual, lo que encarece las operaciones frente a los yacimientos a cielo abierto completamente mecanizados. La tabla 6.6 muestra la evolución de la producción de Sudáfrica desde 1970.

1970	**1975**	**1980**	**1985**	**1990**
1000.4	713.4	674.0	670.8	605.4
1995	**2000**	**2005**	**2010**	
523.8	428.3	296	189	

Producción de oro de Sudáfrica en toneladas.

Tabla 6.6: Producción de oro de Sudáfrica.

En cuanto al consumo, el World Gold Council diferencia entre cuatro sectores: *joyería, tecnología, inversión* y *demanda de los bancos centrales*.

Por joyería se entiende la fabricación de objetos de adorno personal. Éste es un uso que el hombre ha dado al oro desde el principio de los tiempos.

Tecnología es un epígrafe que incluye las aplicaciones del oro a la electrónica, a la medicina y a la ingeniería avanzada. En forma de minúsculas partículas denominadas nanopartículas, el oro se aplica en la detección de la malaria y en ciertos tratamientos contra el cáncer. Tampoco es muy conocido que contribuye a una mejor reflexión de los rayos infrarrojos por lo que una capa finísima de oro en una ventana refleja el calor, ayudando a mantener los edificios frescos en verano y calientes en invierno. Por ejemplo, las 14.000 ventanas del edificio Royal Bank Plaza de Toronto están cubiertas con 70kg de oro puro.

El epígrafe de inversión se refiere al oro demandado en forma de lingotes o monedas para formar parte del patrimonio o del ahorro de particulares o empresas.

Por último, la demanda de los bancos centrales se refiere al oro comprado en forma de barras para formar parte de las reservas de los países.

El consumo de oro por sectores en el primer trimestre de 2013 y de 2014 se muestra en la tabla 6.7.

Consumo de oro en el primer trimestre				
Año	Joyería	Tecnología	Inversión	Bancos centrales
2013	554.7	103.5	288.1	130.8
2014	570.7	99.0	282.3	282.5

Datos del World Gold Council.

Tabla 6.7: Consumo de oro por sectores durante los primeros trimestres de 2013 y 2014.

ACTIVIDADES

7.1 De acuerdo con los datos del World Gold Council, ¿qué porcentaje de la producción primaria mundial de oro procedió de China en 2013?

a) Faltan datos para calcularlo.
b) El 25.65%.
c) El 15.16%.

7.2 De acuerdo con los datos del World Gold Council, ¿cuánto tendría que incrementarse la producción de USA en 2014 respecto de su producción en 2013 para tener la misma producción que tuvo Australia en 2013?

a) Faltan datos para calcularlo, ya que depende de la producción que tenga Australia en 2014.
b) El 12.33%.
c) El 18.24%.

7.3 De acuerdo con los datos y estimaciones del World Gold Council, como consecuencia de la producción primaria de 2013, la cantidad de oro extraído en el mundo se incrementó en un porcentaje igual a

a) 1.58%.
b) 15.83%.
c) 0.15%.

7.4 De acuerdo con los datos de producción de oro en Sudáfrica de la tabla 6.6, ¿cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?

a) En 2010, la producción había disminuido un 81.11% respecto de 1970.
b) En 2010, la producción había disminuido un −81.11% respecto de 1970.
c) La producción de 1970 fue un 81.11% mayor que la producción de 2010.

7.5 De acuerdo con los datos de producción de oro en Sudáfrica de la tabla 6.6, ¿cuál de las proposiciones siguientes es verdadera?

a) De los nueve valores de producción de la tabla 6.6, cuatro son mayores que su media y cinco son menores.
b) De los nueve valores de producción de la tabla 6.6, cinco son mayores que su media y cuatro son menores.
c) De los nueve valores de producción de la tabla 6.6, alguno es mayor que el doble de su media.

7.6 La media de los nueve datos de producción de la tabla 6.6 es $\overline{x} = 566.79$, ¿cuál es su varianza?

a) 373515.76.
b) 52264.86.
c) 3361641.85.

7.7 De acuerdo con los datos de consumo de oro en el primer trimestre de 2014, ver tabla 6.7, ¿cuál de las tablas siguientes muestra los porcentajes del consumo total del trimestre que corresponden a cada uno de los sectores, donde **A** es el sector *joyería*, **B** es el sector *tecnología*, **C** es el sector *inversión* y **D** es el sector de *bancos centrales*.

a)

Porcentaje de cada sector en el consumo total primer trimestre de 2014			
A	**B**	**C**	**D**
46.23 %	8.02 %	22.87 %	22.88 %

b)

Porcentaje de cada sector en el consumo total primer trimestre de 2014			
A	**B**	**C**	**D**
51.50 %	9.61 %	26.75 %	12.14 %

c)

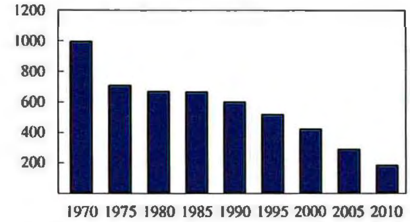
Porcentaje de cada sector en el consumo total primer trimestre de 2014			
A	**B**	**C**	**D**
26.23 %	28.02 %	22.87 %	22.88 %

7.8 Consideramos los datos de porcentajes de consumo total de cada sector en cada trimestre, ver tabla 6.7, ¿cuál de las proposiciones siguientes es verdadera?

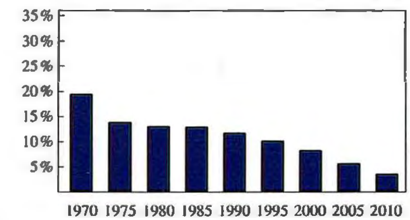
a) El porcentaje consumo de oro debido a la inversión o los bancos centrales ha disminuido en el primer trimestre de 2014 respecto del que tuvo en el mismo trimestre de 2013.
b) El porcentaje consumo de oro debido a los bancos centrales se ha más que duplicado en el primer trimestre de 2014 respecto del que tuvo en el mismo trimestre de 2013.
c) El porcentaje consumo de oro debido a la joyería ha disminuido en el primer trimestre de 2014 respecto del que tuvo en el mismo trimestre de 2013.

7.9 ¿Cuál de los histogramas siguientes permite comparar de manera inmediata los datos de producción de oro en Sudáfrica de la tabla 6.6?

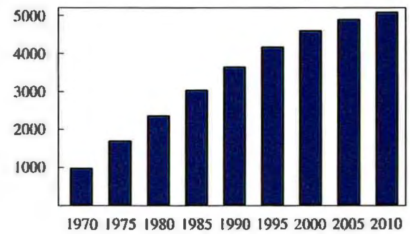
a)



b)

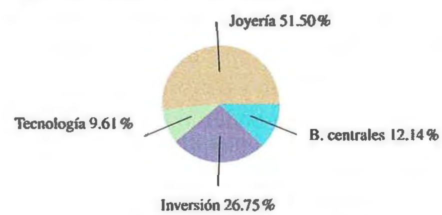


c)

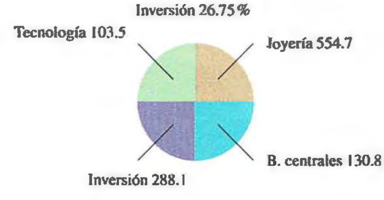


7.10 Consideremos los datos de consumos de oro de la tabla 6.7, ¿cual de los diagramas siguientes representa los porcentajes de consumo por sectores, respecto del total, en el primer trimestre de 2013.

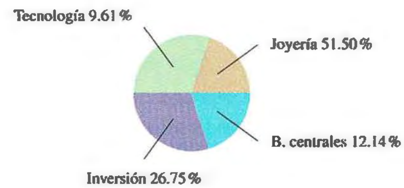
a)



b)



c)



CONTEXTO

Desde un punto de vista físico el tiempo transcurre uniformemente sin ninguna característica que distinga unos instantes de otros. La medida del tiempo se realiza siempre a través de algún tipo de movimiento, bien sea la caída de cierta cantidad de arena, la oscilación de un péndulo, la vibración de los cristales de cuarzo o bien, incluso, el propio movimiento del Sol en los relojes que utilizan la sombra de una varilla para señalar la hora.

No obstante, para la sociedad humana es fundamental poder fechar los acontecimientos de acuerdo con ciertos patrones de medida, que permitan a las personas comunicar el instante en que tienen lugar los sucesos. Además, para el hombre, el tiempo transcurre en dos ciclos que gobiernan su vida:

- la sucesión de los días y las noches que se repiten periódicamente, debido al giro de la Tierra sobre su eje, que hace que el movimiento aparente del Sol de Este a Oeste se repita cada día de forma casi idéntica al anterior.
- la sucesión de cuatro estaciones de características muy marcadas, ocasionadas por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, que tiene por efecto que los rayos solares incidan en cada región más perpendicularmente y durante más horas en verano y de forma más oblicua y menos prolongada en invierno.

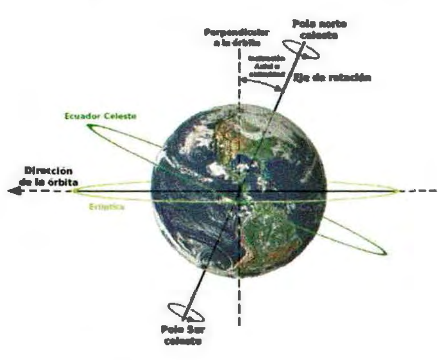


Figura 6.19: El globo terrestre.

Ello es debido a que el eje de giro de la Tierra tiene una cierta inclinación respecto al plano en que describe su órbita alrededor del Sol como se indica en la figura 6.19.

Figura 6.20: Invierno en el hemisferio norte y verano en el hemisferio sur.

En la figura 6.20 se observa las consecuencias de dicha inclinación sobre la incidencia de los rayos del Sol en la Tierra. Como el Sol está a la izquierda, la imagen corresponde a un día de invierno en el hemisferio norte. En cambio, si el Sol estuviese a la derecha de la imagen se tendría un día de verano en España.

Los dos fenómenos anteriores han dado lugar a sendas unidades para medir el tiempo.

EL DÍA

En cualquier lugar, un **día** es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano del lugar, que es la línea imaginaria que lo une con los polos terrestres. En cada lugar es **mediodía** cuando el Sol atraviesa dicha línea. Desde la antigüedad fue fácil distinguir cuando ocurre el mediodía, observando el momento en que un palo clavado en el suelo proyecta la sombra más corta.

El día se divide en 24 **horas**, de las cuales las 12 anteriores al mediodía se designan por a.m. (*ante meridiem*) y las 12 posteriores por p.m. (*post meridiem*); aunque también es frecuente contar las horas de 0 a 24, situando en las 12 el mediodía. El convenio es que el cambio de fecha local se produce a **medianoche**: 12 horas después del mediodía, se pasa al día siguiente.

Tras fijar un origen en un acontecimiento cultural notable, como el nacimiento de Jesucristo, con sólo el día como unidad de medida, es posible fechar todos los acontecimientos. Por ejemplo, como no hubo año cero, el primer día del siglo XXI, fue el 1 de Enero del año 2001; pero fue, también, el día 730486 d. C. (después de Cristo o, más exactamente, tras el 1 de Enero del año 1). La batalla de Guadalete, acaecida el 19 de Julio de 711, podría fecharse el día 259892 d.C.

A su vez la hora se divide en 60 **minutos** y el minuto en 60 **segundos**, como reliquia del sistema de numeración sexagesimal utilizado en Babilonia y, más tarde, en el califato Omeya. Pero, muchas veces en la indicación de las horas se mezclan los sistemas de numeración; por ejemplo, al designar las "seis y cuarto" (6+1/4 de hora), en vez de 6 horas 15 minutos (abreviadamente 6:15) o bien en forma decimal 6.25 horas. En cambio, siempre se dice las "ocho y veinte" (8 horas y 20 minutos o 8:20), en lugar de las "ocho y un tercio" (8+1/3 de hora) o, en forma decimal, $8.\widehat{3}$ horas.

Según lo indicado, el día consta de $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ segundos, así que la definición tradicional del segundo era la fracción $1/86400$ de la duración del día. Ahora bien, por diferentes razones (entre las cuales, sobre todo, el efecto de las mareas y de los movimientos sísmicos que redistribuyen la masa de la Tierra), la duración del día no es totalmente estable y, actualmente, el segundo se define mediante la referencia a relojes atómicos extraordinariamente precisos. De todas formas, organismos internacionales vigilan la discrepancia entre la progresión de los relojes atómicos y la rotación de la Tierra e introducen 1 segundo intercalar (*leap second*, en ingés) cuando es necesario para eliminar las diferencias. Desde 1972 ha sido necesaria la introducción de 25 segundos intercalares, en 25 años distintos. El gobierno de Estados Unidos ofrece, en la página web: *time.gov*, la hora oficial corregida por los organismos internacionales.

Naturalmente, el Sol pasa por el meridiano de un lugar después de haber pasado por el meridiano de los lugares situados más al Este y antes de pasar por los meridianos de los lugares situados más al Oeste. Esto hace que la hora no sea la misma en lugares de diferente longitud geográfica: es más tarde al Este de un punto y más temprano al Oeste. Por consiguiente, la superficie de la Tierra se divide en 24 husos horarios, centrados en el meridiano de Greenwich (o meridiano 0) y en los 23 meridianos en los que el mediodía se produce $1,2,3,\dots,12$ horas antes o $1,2,3,\dots 11$ horas después. Sin embargo, los husos horarios están adecuadamente modificados para que la hora sea común en diversos territorios nacionales. El mapa de la figura 6.21 muestra los husos horarios reales.

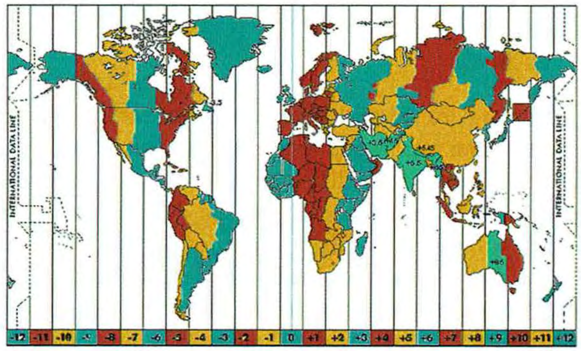


Figura 6.21: Los husos horarios.

La hora solar en el meridiano de Greenwich se designa por *UTC* o *Tiempo Universal Coordinado*, sustituyendo a la denominación antigua *GMT* o *Tiempo Medio de Greenwich*. La hora en el resto de los otros husos horarios es $UTC+1, UTC+2, \dots$ o bien $UTC-1, UTC-2, \dots$ La política de ciertos Gobiernos de llevar una hora de adelanto, o dos en el horario de verano, respecto a la hora solar introduce perturbaciones de la hora "legal" respecto a la hora solar. Por ejemplo, como los países árabes conservan la hora solar, respecto a la hora legal española, en Marruecos es una hora menos en invierno y dos en verano, aún perteneciendo al mismo huso horario. Cabe señalar también que los husos horarios no se consideran en las regiones polares, ya que el Polo Norte y el Polo Sur, donde se cortan todos los meridianos, pertenecen a todos los husos horarios.

La *línea de cambio de fecha internacional* es el centro del huso horario $UTC+12$. Cuando allí es medianoche, termina la fecha x y comienza la fecha $x+1$. A poca distancia a su Oeste falta poco para que empiece el día $x+1$, pero a poca distancia el Este, faltan muchas horas para que termine la fecha x. Por eso, después de navegar en las primeras horas del día x hacia el Este, los barcos que atraviesan la línea de cambio de fecha internacional cuentan todavía con las últimas horas del día x para continuar su viaje. A efectos sociales, "han ganado un día", como les ocurre a los protagonistas de la novela de Julio Verne *"La vuelta al mundo en ochenta días"*.

En cambio, si el viaje es hacia el Oeste y se aproximan a la citada línea a las 17:30 horas del día x, al cruzarla están a las 17:31 horas del día $x+1$; con lo cual "han perdido un día".

EL AÑO

Por su parte, el **año** es el tiempo que tarda la Tierra en completar una vuelta alrededor del Sol. Aunque en este caso resulta más difícil averiguar cuando se completa el giro, la inclinación del eje de rotación de la Tierra, respecto a su órbita alrededor del Sol, produce fenómenos notables. De hecho, desde la antigüedad se observó que hay dos días al año en que el periodo de luz diurna y de obscuridad nocturna duran lo mismo. Son los llamados *equinoccios* de primavera y de otoño, en los que el Sol se encuentra en el plano del ecuador terrestre. Tras el equinoccio de primavera, la luz diurna se alarga, hasta llegar al *solsticio de verano*, que corresponde al día de máxima duración de la luz diurna y la noche más corta. En esa fecha el Sol se encuentra, a mediodía, en su punto más alto sobre el horizonte; esto es, en el hemisferio Norte, en la vertical del Trópico de Cancer. Después, la noche se alarga y, tras el equinoccio de otoño, la luz diurna sigue disminuyendo hasta el *solsticio de invierno*, día de mayor duración de la noche, en el que el Sol de mediodía está en su punto más bajo sobre el horizonte; corresponde, para el hemisferio Norte, a que el Sol esté en la vertical del Trópico de Capricornio. La tradición ha asociado con ambos solsticios fiestas de celebración en muchas culturas, que se han hecho coincidir actualmente con la Navidad y la noche de San Juan. En la figura 6.22 se representa el movimiento anual del Sol, visto desde la Tierra; los equinoccios corresponden a las posiciones del Sol dentro del plano ecuatorial y los solsticios a los extremos de la órbita –la eclíptica–, con el Sol en su posición más alta y más baja sobre el plano ecuatorial.

Contando el número de días entre los sucesivos equinoccios de primavera, o entre los sucesivos solsticios de verano, los astrónomos egipcios y mesopotámicos atribuyeron al año una duración aproximada de 365.25 días, es decir 365 días y 6 horas. Sobre esa base, en el año 46 a.C, Julio César instauró en el Imperio Romano el **calendario Juliano** que establecía que hubiese un ciclo de tres años de 365 días, seguido de un año bisiesto con 366 días. Eran bisiestos, por tanto, todos los años múltiplos de 4. Y, de esta manera, cada cuatro años se compensaba el efecto del 1/4 de día de exceso de la duración del año respecto a los 365 días de un año normal.

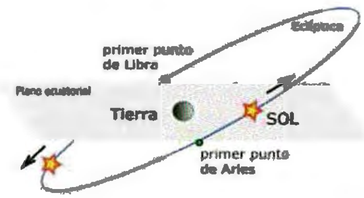


Figura 6.22: Movimiento anual del sol.

Sin embargo, la duración del año es ligeramente inferior a la estimación indicada; de manera que, tras cada ciclo de cuatro años, el comienzo oficial de la primavera se retrasaba algunos minutos respecto a su comienzo efectivo. Con el tiempo, los errores se fueron acumulando y, si no se hubiese producido una corrección, la primavera habría terminado por empezar oficialmente en plena canícula, lejos del día con igual duración de la luz diurna y de la noche. Para 1582, el error acumulado era más o menos de 10 días; así que el Papa Gregorio XIII encargó a dos astrónomos (Luis Lilio y Crístobal Clavio) una reforma que se conoce como **calendario Gregoriano**. Consta de un ciclo de 400 años, de los cuales son bisiestos los múltiplos de 4, excepto si son múltiplos de 100 y no son múltiplos de 400. Así, con dicha modificación del calendario Juliano, no fueron bisiestos los años 1700, 1800 y 1900, mientras que sí lo fueron el año 1600 y el 2000. La duración media del año, a lo largo del ciclo de 400 años establecido, resulta ser de 365.2425 días (véanse las cuestiones 23 y 24), mientras que la estimación actual de la longitud del año es de 365.242189 días. Todavía existe una pequeña diferencia de 0.000311 días de más por año de lo que debería ser; lo cual equivale a 26.87 segundos de exceso y producirá un error de un día completo cada 3215 años. Previsiblemente, para compensar el error será necesario suprimir un año bisiesto en torno al año 4797. No obstante, hay que tener en cuenta que la velocidad de giro de la Tierra sobre su eje va disminuyendo progresivamente, por efecto sobre todo de las mareas que produce la atracción Lunar; de forma que la duración del día es cada vez un poco mayor. En consecuencia el reajuste deberá ser estudiado en su momento de acuerdo con los datos disponibles en esa época.

La instauración del calendario Gregoriano tuvo que recuperar el desfase que se había producido hasta 1582 con el calendario Juliano. De hecho, en los países católicos que primero implantaron el nuevo sistema (Italia, España y Portugal), el día siguiente al 4 de Octubre de 1582 fue el 15 de Octubre, suprimiendo 10 días del calendario. El ajuste se produjo en fechas distintas en cada país. Francia saltó del 9 de Diciembre de 1582 al 20 de Diciembre. En Inglaterra y sus colonias, hasta 1752 no se decretó que al 2 de Septiembre le sucedería el 14 de Septiembre, saltando ya 11 días. En Grecia el ajuste se demoró hasta 1923 y el 1 de Marzo fue el día siguiente al 15 de Febrero.

De forma convencional, aunque influido por el ciclo lunar de 29 y pico días, el año se divide en 12 **meses**. Lo más simple sería intercalar 5 meses de 31 días entre los restantes 7 meses de 30 días, añadiendo un día a algún mes de 30 días los años bisiestos. Sin embargo, por razones históricas los meses tienen la duración que nos resulta habitual, en la que tienen 30 días Abril, Junio, Septiembre y Noviembre, mientras que Febrero consta de 29 o 28 según que sea bisiesto o no.

Desde el punto de vista laboral y religioso, tiene mucha importancia la **semana**, compuesta de 7 días consecutivos, que coinciden relativamente con las fases de la Luna. Un año no bisiesto consta de 52 semanas y un día; razón por la cual, cada fecha que un año cae en determinado día de la semana (Jueves, por ejemplo) cae al año siguiente en el siguiente día de la semana (Viernes, en este caso). La regla se altera con los años bisiestos, puesto que constan de 52 semanas y dos días, siendo el día adicional el 29 de Febrero.

Es la existencia de los siete días de la semana, entre los cuales es festivo el domingo (en nuestra cultura), la que obliga cada año a cambiar las hojas del calendario, para facilitar, sin hacer cálculos, el día de la semana en la que cae cada fecha del año. Sin embargo, no es difícil diseñar un calendario perpetuo que calcule automáticamente el día de la semana de cualquier fecha. La página web: ***http://www.gabilos.com/textocalendario.htm*** ofrece uno de ellos.

ACTIVIDADES

8.1 Si un reloj de péndulo se atrasa 8 minutos al día y nunca se pone en hora, volverá a marcar la hora exacta después de

a) 45 días.
b) 90 días.
c) 120 días.

8.2 Si un reloj de péndulo se adelanta 7 minutos al día y nunca se pone en hora, volverá a marcar la hora exacta después de

a) 102 días, 20 horas, 34 minutos y 17.13 segundos.
b) 102 días, 20 horas, 38 minutos y 42.24 segundos.
c) 102 días, 21 horas, 17 minutos y 14.52 segundos.

8.3 Entre las 18:22 horas del Martes y las 10:50 el Viernes siguiente, transcurren

a) 4342 minutos.
b) 3918 minutos.
c) 3868 minutos.

8.4 Entre las 7:40 horas del 14 de Marzo y las 16:15 del 19 de Marzo, transcurren

a) $128.58\widehat{3}$ horas.
b) 128.538 horas.
c) 127.835 horas.

8.5 Si a las 22:50 se emprende un viaje de 4 horas 46 minutos de duración, durante el cual no se cambia de huso horario, la hora de llegada serán las

a) 2:46 del día siguiente.
b) 3:36 del día siguiente.
c) 4:04 del día siguiente.

8.6 Según *Google Maps*, el trayecto en automóvil de Zagreb a Atenas dura 15 horas y 52 minutos. Atenas está en el huso horario anterior al de Zagreb. Saliendo a las 8:30 de Zagreb, la hora local al llegar a Atenas será

a) 1:22.
b) 0:22.
c) 11:22.

8.7 Según *Google Maps*, el trayecto en automóvil de Atenas a Zagreb dura 16 horas y 1 minuto. Atenas está en el huso horario anterior al de Zagreb. Saliendo a las 16:30 de Atenas, la hora local al llegar a Zagreb será

a) 6:31.
b) 7:31.
c) 8:31.

8.8 Los horarios de los vuelos se indican siempre en la hora local. Iberia ofrece un vuelo que sale de Madrid a las 11:40 y llega a Río de Janeiro a las 17:15, pero se sabe que en Brasil es 5 horas más temprano que en España; entonces la duración del vuelo es

a) 5 horas y 35 minutos.
b) 9 horas y 35 minutos.
c) 10 horas y 35 minutos.

8.9 Air France tiene un vuelo que sale de París a las 12:35 y llega a Hong Kong a las 10:30 (del día siguiente), ambos en horario local. Entre París y Hong Kong hay una diferencia horaria de 6 horas. El vuelo dura

a) 15 horas y 55 minutos.
b) 13 horas y 55 minutos.
c) 12 horas y 55 minutos.

8.10 Un vuelo sale de Nueva York a las 21:50 y tarda 7 horas y 20 minutos en llegar a París. Dado que en Nueva York son seis horas menos que en París, llega al día siguiente a la hora local

a) 11:10.
b) 9:10.
c) 8:10.

8.11 El vuelo de regreso sale de París a las 19:10 y tarda 8 horas y 5 minutos en llegar a Nueva York. Dado que en Nueva York son seis horas menos que en París, la hora local a la que se llega a Nueva York es

a) 0:15 del día siguiente.
b) 23:15.
c) 21:15.

8.12 Un tren sale de Málaga a las 8:00 y viaja hacia Barcelona a velocidad constante de 90 km/h. A las 10:20 sale un tren de Barcelona y viaja hacia Málaga a velocidad constante de 120 km/h. Si la vía entre ambas ciudades tiene una longitud de 900 kilómetros, ambos trenes se cruzan a las

a) 12:54:28.
b) 13:37:08.
c) 13:56:12.

8.13 Un coche sale de Valencia a las 12:30 y viaja hacia Bilbao a velocidad constante de 110 km/h. A las 14:00 sale otro coche de Bilbao en dirección a Valencia a velocidad constante de 90 km/h. La distancia por carretera entre Valencia y Bilbao es de 612 kilómetros. Cuando ambos coche se crucen estarán a una distancia de Valencia de

a) 410.85 kilómetros.
b) 372.62 kilómetros.
c) 324.28 kilómetros.

8.14 La diferencia de longitud geográfica entre los extremos de cada huso horario teórico es de

a) 12°.
b) 15°.
c) 18°.

8.15 Sabiendo que el radio de la Tierra mide 6375 kilómetros, la anchura de los husos horarios teóricos en el ecuador terrestre es de

a) 1215 kilómetros.
b) 1488 kilómetros.
c) 1669 kilómetros.

8.16 Un navegante solitario parte de Sudáfrica y atraviesa el océano Índico, el Pacífico y el Atlántico, para regresar al punto de partida. Empieza su viaje al mediodía de cierta fecha y recorre 5° de longitud geográfica cada día. La duración del viaje y el número de veces

que habrá visto pasar al Sol sobre su cabeza antes de llegar a su destino son respectivamente

a) 72 días y 72 veces.
b) 72 días y 73 veces.
c) 72 días y 71 veces.

8.17 Un navegante solitario parte de Sudáfrica y atraviesa el océano Atlántico, el Pacífico y el Índico, para regresar al punto de partida. Empieza su viaje al mediodía de cierta fecha y recorre 8° de longitud geográfica cada día. La duración del viaje y el número de veces que habrá visto pasar al Sol sobre su cabeza antes de llegar a su destino son respectivamente

a) 45 días y 44 veces.
b) 45 días y 45 veces.
c) 45 días y 46 veces.

8.18 La figura 6.23 muestra, en azul, la duración de la luz diurna en Madrid, durante los distintos días del año 2011. Los equinoccios corresponden a los puntos marcados con

a) A y B.
b) A y C.
c) B y D.

8.19 La figura 6.23 muestra, en azul, la duración de la luz diurna en Madrid, durante los distintos días del año 2011. Los solsticios corresponden a los puntos marcados con

a) A y B.
b) A y C.
c) B y D.

8.20 En la figura 6.23 aparecen representadas, en verde y naranja respectivamente, la hora de la salida y la puesta del Sol en Madrid, durante los sucesivos días del año 2011. Las discontinuidades o saltos que se aprecian en ambas curvas son debidas a

a) los pasos del Sol por el ecuador terrestre.
b) la influencia de la Luna.
c) la introducción y supresión del horario de verano.

8.21 El primer día del siglo II fue el

a) 1 de Enero del año 100.
b) 1 de Enero del año 101.
c) 1 de Enero del año 200.

8.22 El primer día del tercer milenio fue el

a) 1 de Enero del año 2001.
b) 1 de Enero del año 2000.
c) 1 de Enero del año 200.

8.23 Según el calendario Gregoriano, en cada ciclo de 400 años el número de años bisiestos es

a) 100.
b) 97.
c) 96.

8.24 Según el calendario Gregoriano, la duración media del año es

a) 365.2425 días.
b) 365.2422 días.
c) 365.24219 días.

8.25 En la noche del 31 de Diciembre del año 406, las tribus bárbaras del Norte de Europa atravesaron el Rin, que estaba congelado, para invadir las Galias, dando lugar al comienzo de la caída del Imperio Romano. Contando desde el comienzo de nuestra era (1 de enero del año 1), habían transcurrido

a) 138 190 días.
b) 148 190 días.
c) 148 291 días.

8.26 El 14 de Julio de 1789 se produjo la toma de la Bastilla, inicio de la Revolución Francesa. Desde el comienzo de nuestra era (1 de enero del año 1) habían transcurrido

a) 653 249 días.
b) 566 807 días.
c) 532 304 días.

8.27 Con una jornada laboral de 8 horas cinco días a la semana, la proporción de tiempo semanal trabajado es

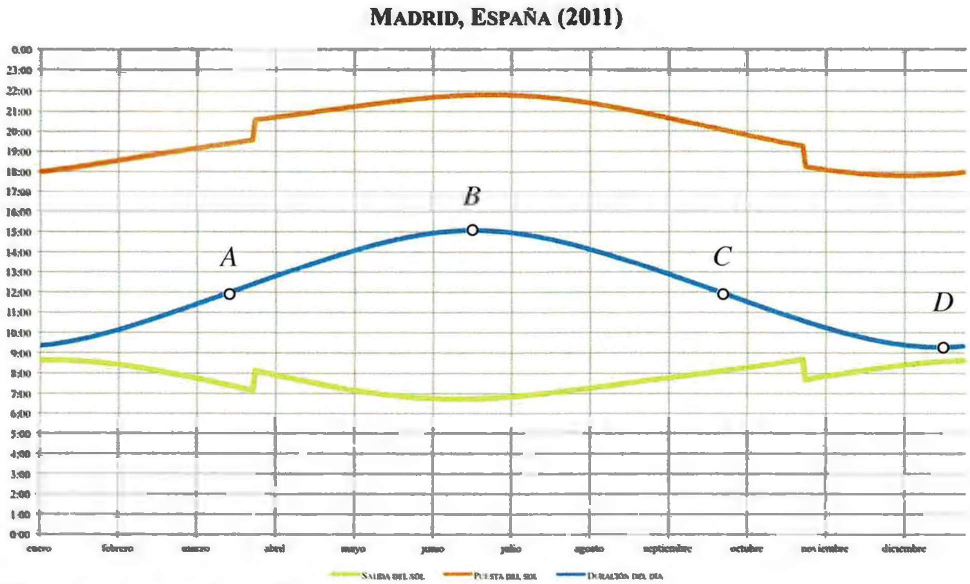


Figura 6.23: Ciclo del sol en Madrid (2011).

a) 26.32 %.
b) 24.18 %.
c) 23.81 %.

8.28 En un mes de 31 días, sin más festivos que los fines de semana y que empieza un Jueves, una jornada laboral de 8 horas cinco días a la semana, supone una proporción de tiempo mensual trabajado del

a) 23.66 %.
b) 26.24 %.
c) 28.48 %.

8.29 Entre los años 2001 y 2400, el número de calendarios (con distinta disposición de los días) que será necesario imprimir es

a) 7.
b) 14.
c) 400.

8.30 Si el 6 de Mayo de 2014 es Martes, el 6 de Mayo de 2018 será

a) Domingo.
b) Lunes.
c) Viernes.

8.31 Si el 4 de Febrero de 2015 cae en Miércoles, el 4 de Febrero de 2020 será

a) Lunes.
b) Martes.
c) Sábado.

8.32 Si un 29 de Febrero a mediados de siglo cae en Sábado, el 29 de Febrero siguiente será

a) Martes.
b) Jueves.
c) Viernes.

9 EL MUNDO DEL FÚTBOL

CONTEXTO

El fútbol es un deporte muy popular en todo el mundo. Mueve multitudes, dinero, emociones, pasiones que a pocos dejan indiferentes. Los medios de comunicación prestan gran atención a las diferentes competiciones. El público sigue con gran interés las declaraciones de los principales protagonistas: entrenador, jugadores destacados, presidentes del club y periodistas especializados. Además, los medios tecnológicos actuales hacen posible la elaboración de numerosos conjuntos de datos estadísticos relativos a los encuentros y torneos.

El fútbol, llamado también balompié, se juega con un balón esférico cuya circunferencia no puede ser superior a 70 centímetros ni inferior a 68 cm. El encuentro enfrenta a dos equipos de 11 jugadores, dirigidos por su entrenador. El juego consiste en que los jugadores de cada equipo desplacen el balón con el pie, haciéndolo circular entre sus compañeros, al objeto de lograr introducirlo en la meta que defiende el equipo contrario, lo cual representa un gol. Gana el equipo que mete más goles, si bien el encuentro puede terminar en empate, salvo en algunos partidos concretos de determinadas competiciones. Normalmente, el partido dura dos tiempos de 45 minutos, con un descanso intermedio de 15 minutos. Si durante el transcurso del encuentro se producen interrupciones significativas se puede añadir a cada tiempo unos minutos de prolongación.

En el equipamiento de los jugadores, se destaca el dorsal o número personal de identificación en el campo. Actualmente, las plantillas de un club oscilan entre los 20 y 25 jugadores, admitiéndose como dorsal cualquier número entre 1 y 99, el cual debe mantenerse a lo largo de toda la temporada de juego. Uno de los jugadores ejerce de capitán en representación de sus compañeros.

El desarrollo del juego se rige por unas determinada reglas. El árbitro del encuentro tiene la facultad de sancionar las eventuales infracciones, o faltas, previstas por el reglamento. En su cometido, el árbitro está auxiliado por dos jueces de línea y un cuarto, e incluso un quinto, árbitro. Las faltas más repetidas consisten en zancadillear, agarrar o dar patadas a un contrario. Por otra parte, ningún jugador puede tocar el balón con la mano, excepto uno de ellos que se denomina guardameta o portero. La pena máxima, con la que se castigan determinadas faltas que ocurren en el área penal, se denomina penalti. La ejecuta un jugador mediante un tiro libre directo desde el punto de penal, sin más defensor que el guardameta del equipo sancionado. Determinadas faltas pueden acarrear también una sanción disciplinaria, en forma de tarjeta amarilla con el significado de amonestación, o roja que conlleva la expulsión del partido del jugador castigado.

Los encuentros de fútbol entre los diferentes equipos se organizan en forma de competiciones. Las más habituales son la liga y la copa.

En la liga todos los equipos juegan contra todos, habitualmente a doble vuelta una vez en el campo de cada contendiente. La victoria suma tres puntos al equipo ganador y el empate representa un punto para cada uno. Al final de la temporada, el equipo que haya logrado más puntos es el campeón de la liga. Para jugar la liga, los equipos se clasifican en divisiones: primera o división de honor, segunda o división de plata, etc. Cada división suele tener alrededor de 20 equipos. Al final de temporada se produce el ascenso de los equipos mejor clasificados en una división a la división superior, con el consiguiente descenso de otros tantos equipos a la división que abandonan los ascendidos.

En el sistema de copa, los equipos se enfrentan por parejas, organizadas según determinadas reglas e incluso contando con la intervención del azar al efectuar por sorteo los emparejamientos. Habitualmente, se juega también a doble vuelta con sendos partidos en el campo de cada uno de los contendientes. El ganador de la eliminatoria es el equipo que contabilice más goles en total, con la peculiaridad de que, en caso de empate en el cómputo global, los goles obtenidos en el campo contrario computan el doble. Si esta regla no permite deshacer el empate, se acude al lanzamiento de tandas de penalties, cinco por cada equipo, hasta el momento en que uno resulte vencedor. En el argot del fútbol a este sistema para decidir el vencedor se le suele llamar la "lotería de los penalties". De esta forma, los equipos ganadores van avanzando a las sucesivas fases: dieciseisavos, octavos, cuartos, semifinales, hasta llegar a la ansiada final que se juega a un solo partido. Sólo puede haber un ganador de la copa, por lo que si después de los 90 minutos de juego que marca el reglamento, el resultado es de empate, se juega una prórroga de 30 minutos. De persistir el empate, se acude a la citada lotería de penalties.

El torneo de fútbol más importante es la *Copa Mundial de la FIFA (Fédération Internationale de Football Association)*, o simplemente "mundial", que se celebra cada cuatro años. En ella participan las selecciones nacionales de los países de mayor nivel futbolístico entre las diferentes confederaciones geográficas que forman la FIFA. En el año 2010, el mundial se celebró en Sudáfrica y la campeona fue la selección española. La FIFA ha publicado varias estadísticas sobre esta competición que se encuentran en la web http://es.fifa.com/tournaments/archive/worldcup/ southafrica2010/index.html.

El terreno de juego

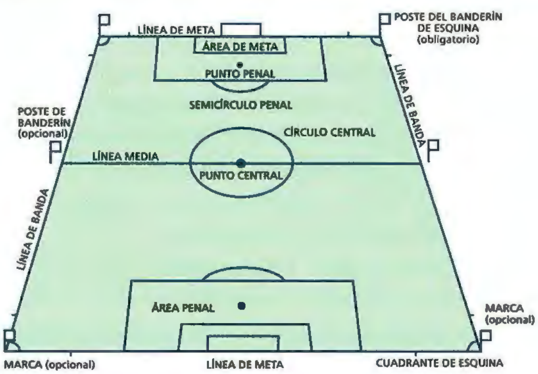


Figura 6.24: Esquema del terreno de juego de un campo de fútbol.

La figura 6.24 representa un esquema del terreno de juego de un campo de fútbol, con la descripción de sus principales elementos: las metas, o porterías, las líneas de banda y meta, la línea media, los postes y cuadrantes de esquina, las áreas de meta, las áreas de penal, el círculo central, los puntos de penal y el punto central. Como se puede apreciar, algunos elementos son opcionales y no figuran en todos los campos.

La figura 6.25 incluye las medidas que definen cada una de los elementos, zonas y puntos del campo. Hay que observar que el reglamento no exige una longitud y anchura estrictos para las dimensiones del propio terreno de juego, sino que permite cualquier medida comprendida entre los límites indicados en la figura 6.25, de forma que la longitud de la línea de banda tiene que tener un mínimo de 90 metros y un máximo de 120, mientras que la anchura, o sea la longitud de la línea de meta, tiene que tener un mínimo de 45 metros y un máximo de 90.

Medidas métricas

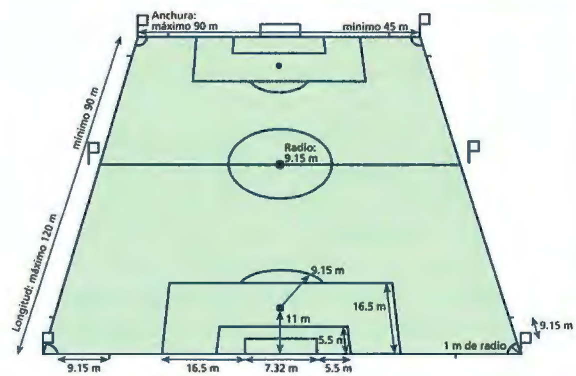


Figura 6.25: Medidas del terreno de juego de un campo de fútbol.

No obstante, la mayoría de los campos suelen tener las medidas recomendadas por los organismos internacionales: 105 metros de longitud y 68 metros de anchura (ver figura 6.27).

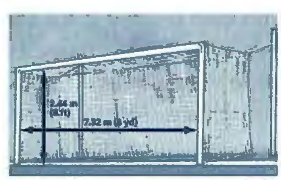


Figura 6.26: Dimensiones de la meta, o portería, de un campo de fútbol.

Las dimensiones de las porterías vienen indicadas en la figura 6.26: ancho 7.32 metros y alto 2.44 metros. Expresados en el sistema imperial británico, los valores anteriores corresponden a 8 yardas de ancho y 8 pies de alto.

En la figura 6.27 se encuentra una representación del terreno de juego en un plano cartesiano. El origen de coordenadas es el punto central, o centro del campo,

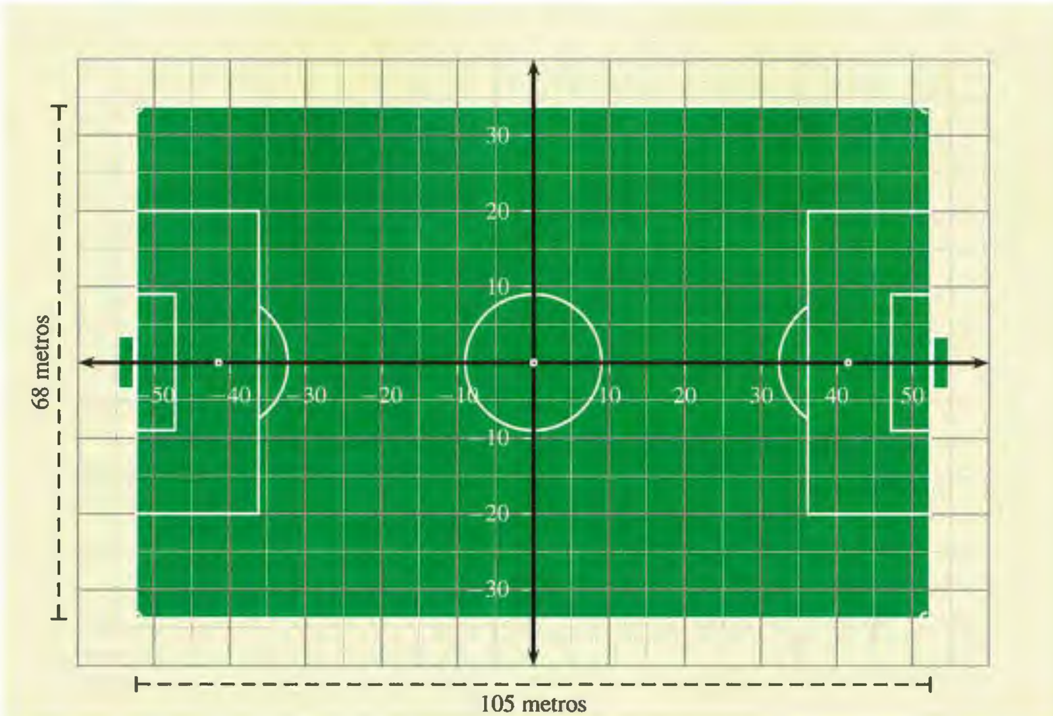


Figura 6.27: Representación en el plano cartesiano del terreno de juego de un campo de fútbol.

el eje de ordenadas coincide con la línea media, el eje de abscisas es la recta perpendicular a la línea media por el punto central, y la unidad de medida en cada eje es el metro.

ACTIVIDADES

9.1 Próximo a celebrarse un partido de máxima trascendencia de cara a la clasificación final de la liga, la prensa recogía las siguientes declaraciones del entrenador del Sport Club de Fútbol:

- *El próximo partido es muy importante para nosotros. Necesitamos el apoyo de la afición. ¡Ojalá acuda mucha gente al estadio!*

Las palabras del entrenador pueden expresarse como las siguientes oraciones: $p =$ *el próximo partido es muy importante para nosotros*, $q =$ *necesitamos el apoyo de la afición*, $r =$ *¡ojalá acuda mucha gente al estadio!*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) p y q son proposiciones lógicas, pero r no es una proposición lógica.
b) q y r son proposiciones lógicas, pero p no es una proposición lógica.
c) p y r son proposiciones lógicas, pero q no es una proposición lógica.

9.2 Al ser preguntado por la posible alineación de su equipo, el entrenador del Sport Club de Fútbol manifestó a los medios de comunicación: *"Si Bieito se recupera de su lesión entonces no jugará Joao"*. La alineación fue: *Manoel, Walter, Rocha, Renato, Souza, Crislan, Joao, Gilberto, Emerson, Fabricio, Claudinei*. Suponiendo que el entrenador dijo la verdad, podemos deducir que *Bieito no se recuperó de su lesión* al aplicar la regla de inferencia denominada

a) *Modus ponendo ponens.*
b) *Modus tollendo tollens.*
c) *Modus tollendo ponens.*

9.3 En una rueda de prensa, el entrenador del Sport C.F. respondió a la pregunta de un reportero: *"Nuestro rival es un equipo muy combativo o tiene mucha suerte".*

- *O las dos cosas*, añadió el periodista.

- *En efecto, o las dos cosas*, concedió el entrenador.

El partido finalizó 0-1 a favor el equipo rival, tanto marcado en una jugada desgraciada del Sport C.F. Todos los periodistas deportivos convinieron en afirmar que la supuesta combatividad del rival había brillado por su ausencia. Suponiendo que el comentario del entrenador es cierto y que, en efecto, el rival no había mostrado su combatividad en modo alguno, podemos deducir que *el rival tiene mucha suerte* al aplicar la regla de inferencia denominada

a) *Modus ponendo ponens.*
b) *Modus tollendo tollens.*
c) *Modus tollendo ponens.*

9.4 En vista de que las previsiones meteorológicas anunciaban que el día del encuentro sería soleado, el entrenador del Sport C. F. razonaba a su equipo técnico: *"A nosotros nos conviene que el terreno de juego esté húmedo. Así pues, si el día del partido no llueve, funcionará la manguera y se regará el campo".* El día del partido amaneció soleado y no cayó ni una sola gota de agua. Entonces podemos afirmar que *funcionó la manguera y se regó el campo* si aplicamos la regla de inferencia denominada

a) *Modus ponendo ponens.*
b) *Modus tollendo tollens.*
c) *Modus tollendo ponens.*

9.5 De camino hacia el campo para asistir a un encuentro al final de la temporada dos amigos comentaban:

- *"Si ganamos este partido nos clasificamos para la* champions league", decía uno.

- *"Si nos clasificamos para la* champions league, *salvamos la temporada"*, apostillaba el otro.

Ya en la tribuna, dirigiendo la mirada hacia el palco presidencial, reflexionaban: *"Si ganamos este partido salvamos la temporada".* Esta última reflexión

a) es consecuencia lógica de los dos comentarios anteriores al aplicar la regla de razonamiento denominada *Modus ponendo ponens.*
b) es consecuencia lógica de los dos comentarios anteriores al aplicar la regla de razonamiento denominada *Ley del silogismo hipotético.*
c) no se deduce necesariamente de los dos comentarios anteriores.

9.6 Al finalizar un encuentro, el jugador *Bieito* del Sport Club de Fútbol razonó del siguiente modo ante los micrófonos de la televisión: *No jugamos bien pero ganamos el partido; puesto que ganamos el partido sumamos tres puntos; si sumamos tres puntos seremos campeones; luego, no jugamos bien pero seremos campeones.*

a) El razonamiento del jugador es lógicamente válido.
b) El razonamiento del jugador es una falacia.
c) Sin disponer de más premisas no es posible decidir si el razonamiento del jugador es válido o es una falacia.

9.7 Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos de la forma siguiente:

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 90\}\quad B=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 120\}$$

Para que x sea una longitud reglamentaria de un campo de fútbol tiene que ocurrir necesariamente que

a) $x\in A\cup B$.
b) $x\in A\cap B$.
c) $x\in A^c\cap B^c$.

9.8 Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos de la forma siguiente:

$$C = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 45\} \quad D = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 90\}$$

Para que y sea una anchura reglamentaria de un campo de fútbol tiene que ocurrir necesariamente que

a) $y \in C \cup D$.
b) $y \in C \cap D$.
c) $y \in C^c \cap D^c$.

9.9 Si x es un número real que representa la longitud de un campo de fútbol con medidas reglamentarias entonces se cumple necesariamente que

a) $x \in [90, 120]$.
b) $x \in (90, 120]$.
c) $x \in (90, 120)$.

9.10 Si y es un número real que representa la anchura de un campo de fútbol con medidas reglamentarias entonces se cumple necesariamente que

a) $y \in (45, 90)$.
b) $y \in (45, 90]$.
c) $y \in [45, 90]$.

9.11 Sea ℓ el número real que representa la longitud de la circunferencia de un balón de fútbol reglamentario. Entonces

a) $\ell \in (-\infty, 68) \cap (70, \infty)$
b) $\ell \in (-\infty, 68) \cup (70, \infty)$
c) $\ell \in (-\infty, 68)^c \cap (70, \infty)^c$

9.12 Un club de fútbol tiene una plantilla integrada por 23 jugadores. Sea A el conjunto formado por los nombres de los jugadores y $B = \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$ el conjunto de los 99 primeros números naturales. Consideremos la aplicación $f : A \mapsto B$ que asigna a cada jugador el número del dorsal que lo identifica en el campo a lo largo de la temporada de juego. Entonces podemos afirmar que

a) f es un aplicación sobreyectiva.
b) f es un aplicación inyectiva.
c) f es un aplicación biyectiva.

9.13 De las medidas de la meta establecidas en el enunciado

a) se deduce que una yarda es igual 3 pies.
b) se deduce que un pie es igual $\frac{1}{8}$ yardas.
c) no es posible deducir la equivalencia entre la yarda y el pie.

9.14 De las medidas de la meta establecidas en el enunciado

a) se deduce que una yarda es igual 1.0929 metros.
b) se deduce que una yarda es igual 0.915 metros.
c) no es posible deducir la equivalencia entre la yarda y el metro.

9.15 De las medidas de la meta establecidas en el enunciado

a) se deduce que un pie es igual 0.305 metros.
b) se deduce que un pie es igual 3.2787 metros.
c) no es posible establecer la equivalencia entre el pie y el metro.

9.16 La suma de las longitudes de los dos palos de una meta más el larguero superior que los une es igual a

a) 43 pies.
b) 17.08 metros.
c) 12.2 metros.

9.17 En el campo representado en la figura 6.27 el espacio entre los palos de una portería es una fracción de la longitud de la línea de meta

a) igual a $\frac{1}{10}$.
b) menor que $\frac{1}{10}$.
c) mayor que $\frac{1}{10}$.

9.18 La dimensión mayor del rectángulo formado por un área de meta es igual a

a) 12.82 metros.
b) 18.32 metros.
c) 16.5 metros.

9.19 La dimensión mayor del rectángulo formado por un área penal es igual a

a) 23.82 metros.
b) 40.32 metros.
c) 33 metros.

9.20 El perímetro del terreno de juego representado en la figura 6.27 es igual a

a) 173 metros.
b) 346 metros.
c) 210 metros.

9.21 De la figura 6.25 se deduce que el perímetro del rectángulo que forma un área de meta es igual a

a) 47.64 metros.
b) 54.92 metros.
c) 51.28 metros.

9.22 De la figura 6.25 se deduce que el perímetro del rectángulo que forma un área penal es igual a

a) 76.92 metros.
b) 113.64 metros.
c) 95.28 metros.

9.23 La superficie del terreno de juego representado en la figura 6.27 es igual a

a) 7,140 metros cuadrados.
b) 346 metros cuadrados.
c) 9,600 metros cuadrados.

9.24 La superficie del rectángulo que forma un área penal es igual a

a) 816.75 metros cuadrados.
b) 362.34 metros cuadrados.
c) 665.28 metros cuadrados.

9.25 La superficie del rectángulo que forma un área de meta es igual a

a) 110.77 metros cuadrados.
b) 120.78 metros cuadrados.
c) 100.76 metros cuadrados.

9.26 La superficie de una portería es igual a

a) 9.76 metros cuadrados.
b) 17.86 metros cuadrados.
c) 35.72 metros cuadrados.

9.27 Con respecto a la superficie del terreno de juego de la figura 6.27, la superficie de una portería supone

a) el 0.25 %.
b) el 0.75 %.
c) el 0.08 %.

9.28 ¿Qué porcentaje del área penal está ocupada por el área de meta?

a) 18.15 %.
b) 15.15 %.
c) 16.65 %.

9.29 La ecuación que representa la circunferencia que delimita el círculo central

a) es $x^2 + y^2 = 9.15$.
b) es $x^2 + y^2 = 83.72$.
c) no puede calcularse porque el enunciado no proporciona los datos necesarios para ello.

9.30 La longitud de la circunferencia que delimita el círculo central

a) mide aproximadamente 263.02 metros.
b) mide aproximadamente 57.49 metros.
c) no puede calcularse porque el enunciado no proporciona los datos necesarios para ello.

9.31 La superficie del círculo central

a) mide aproximadamente 263.02 metros cuadrados.
b) mide aproximadamente 57.49 metros cuadrados.
c) no puede calcularse porque el enunciado no proporciona los datos necesarios para ello.

9.32 En la representación cartesiana de la figura 6.27 la ecuación de la recta que une el punto central con uno cualquiera de los puntos de penal es

a) $y = 0$.
b) $y = 1$.
c) $y = 11$.

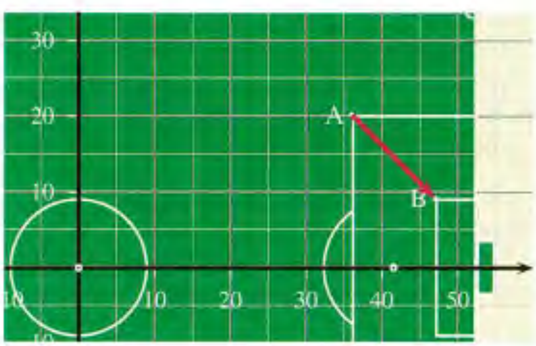
9.33 En la representación cartesiana de la figura 6.27 la ecuación de la recta perpendicular al eje de abscisas por el punto de penal con abscisa positiva es

a) $x = 11$.
b) $x = 41.5$.
c) $y = 41.5$.

9.34 En la representación cartesiana de la figura 6.27 la ecuación de la recta que une el punto central con el punto en que se coloca el poste del banderín de la esquina superior derecha del campo es

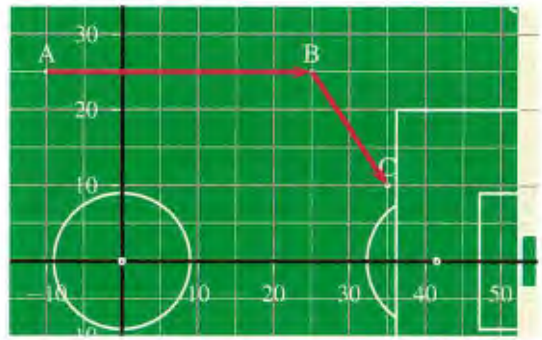
a) $y = \frac{52.5}{34}x$.
b) $105y + 68x = 0$.
c) $105y - 68x = 0$.

9.35 La distancia entre los puntos A y B de la figura mide aproximadamente



a) 20.51 metros.
b) 18.98 metros.
c) 15.56 metros.

9.36 En el minuto 89 del encuentro, el jugador *Bieito* se hace con el balón en el punto A de coordenadas (-10,25), corre con el balón controlado hasta el punto B de coordenadas (25,25), momento en que le obstaculiza un contrario al cual regatea y avanza hasta el punto C de coordenadas (35,10), desde donde chuta el balón logrando el tanto que supone la victoria de su equipo. Al redactar la crónica del partido, ¿cuál de los siguientes titulares puede considerarse más riguroso?

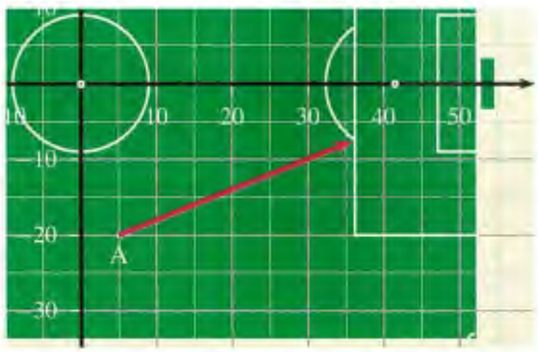


a) *Tras una cabalgada de 50 metros,* Bieito *marca el tanto que dio el triunfo a su equipo.*
b) *Tras una cabalgada de más de 50 metros,* Bieito *marca el tanto que dio el triunfo a su equipo.*
c) *Tras una cabalgada de casi 50 metros,* Bieito *marca el tanto que dio el triunfo a su equipo.*

9.37 Partiendo del punto A de coordenadas (5,-20), el jugador *Bieito* corre en diagonal hacia la meta contraria siguiendo la recta que tiene pendiente igual a $\frac{2}{5}$. Suponiendo que nadie obstaculiza su camino, el punto en el que pisa al área penal tiene coordenadas

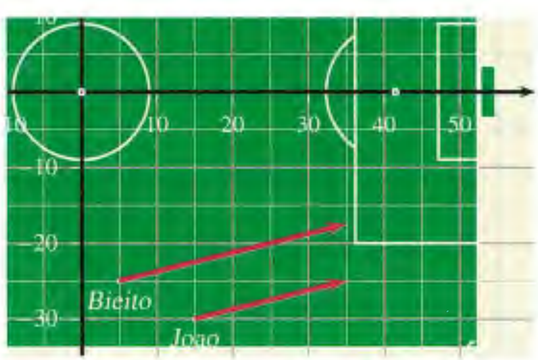
a) $(36, -7.6)$.
b) $(36, 16.5)$.
c) $(36, -5.5)$.

9.38 Partiendo del punto A de coordenadas (5,-20), El jugador *Bieito* corre en diagonal hacia la meta contraria siguiendo la recta que tiene pendiente igual a $\frac{2}{5}$, como se ve en la figura. La ecuación de la recta que sigue *Bieito* es



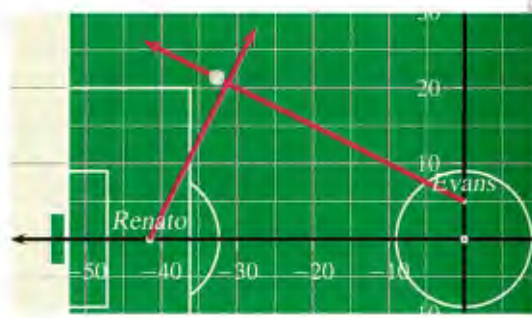
a) $-2x+5y=105$.
b) $y=2x+70$.
c) $-2x+5y=-110$.

9.39 El jugador *Bieito* corre con el balón controlado hacia la meta contraria siguiendo la recta $-x+4y=105$, como se indica en la figura. A su derecha se encuentra su compañero *Joao*, en el punto de coordenadas (15,-30), quien, para acompañarle en la jugada, comienza también a correr siguiendo una dirección paralela a la recta que sigue *Bieito*. La ecuación de la recta a lo largo de la cual se desplaza *Joao* es



a) $-x+4y=-135$.
b) $y=x+135$.
c) $-2x+8y=-110$.

9.40 Al comienzo del segundo tiempo, el atacante *Evans* corre desde el círculo central hacia un balón "dividido" que se encuentra por la zona del lateral izquierdo del área penal del equipo defensor. En su carrera, *Evans* sigue la ruta marcada por la recta de ecuación $x+2y=10$, como se indica en la figura. Al cruce sale el defensor *Renato*, partiendo del punto de penal de su área y corriendo en dirección perpendicular a la ruta de *Evans*. Entonces, la ecuación de la recta que recorre *Renato* es



a) $y=2x+83$.
b) $2x+y=-83$.
c) $x+2y=-20.75$.

9.41 Unos minutos antes de finalizar el primer tiempo, el guardameta del equipo visitante realiza una falsa salida que es aprovechada por *Bieito* para tocar de vaselina el balón de tal forma que, después de describir la curva dada por la función $f(x)=3-0.1(x-41.5)^2$, el esférico se coló suavemente en la meta logrando un tanto muy celebrado por el público. ¿Para qué valor de x alcanzó el balón su máxima altura?

a) Para $x=36$.
b) Para $x=41.5$.
c) no se puede saber, pues es preciso conocer la fuerza con que el jugador golpeó el balón.

9.42 Unos minutos antes de finalizar el primer tiempo, el guardameta del equipo visitante realiza una falsa salida que es aprovechada por *Bieito* para tocar de vaselina el balón de tal forma que, después de describir la curva dada por la función $f(x)=3-0.1(x-41.5)^2$, el esférico se coló suavemente en la meta logrando un tanto muy celebrado por el público. La altura máxima a que ascendió el balón

a) fue de 3 metros.
b) fue de 4 metros.
c) no se puede saber, pues es preciso conocer la fuerza con que el jugador golpeó el balón.

9.43 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$, ¿para qué valor de x el balón alcanza la máxima altura?

a) Para $x = 60$.
b) Para $x = 30$.
c) Depende de la fuerza con que el guardameta golpee el balón.

9.44 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$, ¿cuál es la altura máxima que alcanza el balón en su recorrido?

a) 5 metros.
b) 3 metros.
c) Depende de la fuerza con que el guardameta golpee el balón.

9.45 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$, ¿a qué distancia del punto de saque se encuentra el punto en que el que cae el balón al campo?

a) 60 metros.
b) 30 metros.
c) Depende de la fuerza con que el guardameta golpee el balón.

9.46 Al sacar de portería, el guardameta coloca el balón en un punto del área de meta y lo golpea con fuerza en dirección perpendicular a la línea de medio campo. Si admitimos que, en un determinado saque, la altura del esférico sobre el terreno de juego viene definida por la curva $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$ y no le toca ningún jugador antes de caer de nuevo al terreno de juego

a) podemos asegurar que el balón cae al suelo sin cruzar la línea de medio campo.
b) podemos asegurar que el balón cae al suelo habiendo cruzado la línea de medio campo.
c) no podemos saber si el balón cae antes o después de la línea de medio campo, pues precisamos conocer la fuerza con que fue golpeado.

9.47 Antes comenzar un encuentro y en presencia de ambos capitanes, el árbitro sortea a cara o cruz el equipo que realizará el saque inicial. *Manoel*, capital del Sport Club de Fútbol, siempre elige cara. Le gustaría saber qué probabilidad tiene de obtener alguna cara en los dos partidos de una eliminatoria de copa. Dicha probabilidad es

a) $\frac{2}{4}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $\frac{2}{3}$.

9.48 *Manoel*, como capitán del equipo, siempre pide "*cara*" en el sorteo de campo que realiza el árbitro antes de comenzar un encuentro. En una semana del año hay tres encuentros de liga: domingo, miércoles y sábado. *Manoel* quiere saber qué probabilidad tiene de obtener alguna cara en los tres sorteos. Dicha probabilidad es

a) $\frac{2}{3}$.
b) $\frac{3}{4}$.
c) $\frac{7}{8}$.

9.49 Después de ganar la eliminatoria de cuartos de la copa, el entrenador del Sport C.F. está calculando las posibilidades que tiene de ganar la semifinal. Su próximo rival será el vencedor del enfrentamiento entre el Internacional F.C. y el Bahía Club. Las apuestas entre estos equipos están 1:1, es decir, ambos tienen la misma probabilidad, igual a 0.5, de pasar a enfrentarse con el Sport C.F. El entrenador cree que la probabilidad de

ganar al Bahía asciende al 0.8, mientras que considera al Internacional un rival más difícil, calculando que solo tiene 4 posibilidades entre 10 de vencerle. Si las estimaciones del entrenador son correctas, ¿cuál será la probabilidad de que el Sport F.C. gane la semifinal?

a) 0.52.
b) 0.65.
c) 0.60.

9.50 Cumplido el tiempo reglamentario y la prórroga, un partido de copa finaliza con empate. Para determinar el vencedor, se procede a lanzar una tanda de penalties. Para ello, el entrenador del equipo A designa a los jugadores A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5. Atendiendo a las estadísticas de cada jugador, los expertos determinan la siguiente tabla de probabilidades de acierto en la ejecución del penalti.

Jugador	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Probabilidad	0.90	0.85	0.88	0.92	0.95

Suponiendo que cada jugador acierta independientemente de los demás, ¿cual es la probabilidad de que los cinco lanzamientos se transformen en gol?

a) 0.59.
b) 0.41.
c) 0.85.

9.51 Cumplido el tiempo reglamentario y la prórroga, un partido de copa finaliza con empate. Para determinar el vencedor, se procede a lanzar una tanda de penalties. Para ello, el entrenador del equipo A designa a los jugadores A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5. Atendiendo a las estadísticas de cada jugador, los expertos determinan la siguiente tabla de probabilidades de acierto en la ejecución del penalti.

Jugador	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Probabilidad	0.90	0.85	0.88	0.92	0.95

Suponiendo que cada jugador acierta independientemente de los demás, ¿cual es la probabilidad de se produzca al menos un fallo?

a) 0.59.
b) 0.41.
c) 0.15.

9.52 En el mundial celebrado en Sudáfrica en el año 2010 participó un cierto número de equipos. El campeonato se desarrolló en dos fases. En la primera, se organizaron varios grupos y en cada uno de ellos se celebró un torneo por el sistema de liga. Pasaron a la segunda fase los dos primeros de cada grupo, resultando un número igual a la mitad del total de participantes. En la segunda fase los equipos se enfrentaron por parejas a un único partido. En la primera eliminatoria se redujo a la mitad el número de clasificados de la primera fase. Seguidamente, los supervivientes se enfrentaron por parejas en una segunda eliminatoria, quedando reducido de nuevo a la mitad el número de equipos en competición. Finalmente, se eliminaron una vez más por parejas hasta quedar únicamente dos equipos privilegiados que disputaron la final. ¿Cuántos equipos iniciaron el campeonato?

a) 32.
b) 64.
c) No se puede saber pues es necesario conocer el número de grupos.

9.53 En un mundial participa un cierto número de equipos. El campeonato se desarrolla en dos fases. En la primera, se organizan varios grupos, todos con igual número de equipos, y en cada grupo se celebra un torneo por el sistema de liga a una sola vuelta, es decir, cada equipo se enfrenta con todos los de su grupo una única vez. En la primera fase se jugaron un total de 48 partidos. Entonces:

a) Se puede asegurar con certeza que el número total de equipos que jugaron la primera fase fue 32.
b) Se puede asegurar con certeza que el número total de equipos que jugaron la primera fase fue 48.
c) Con los datos que proporciona el enunciado no se puede asegurar con certeza cuántos equipos jugaron la fase.

9.54 La variable estadística *"nacionalidad de un jugador que participa en un campeonato de fútbol"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.55 La variable estadística *"número de goles marcados por un jugador a lo largo de un campeonato"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.56 La variable estadística *"número de partidos jugados por un futbolista a lo largo de un campeonato mundial"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.57 La variable estadística *"distancia recorrida por un jugador en el campo a lo largo de un partido"* es un variable

a) cualitativa.
b) cuantitativa discreta.
c) cuantitativa continua.

9.58 Según las estadísticas de la FIFA, 96 jugadores marcaron algún gol a lo largo del mundial de 2010. La tabla siguiente muestra la distribución de la variable *"número de goles marcados por cada uno de los goleadores"* y la frecuencia absoluta de goleadores que anotó cada número.

Número de goles marcados (x_i)	Frecuencia absoluta de goleadores (F_i)
1	71
2	14
3	4
4	3
5	4

A la vista de los datos anteriores, podemos asegurar que

a) El porcentaje de goleadores que consiguieron un único gol no alcanzó el 72 %.
b) Más del 25 % de los goleadores consiguieron más de un gol.
c) El porcentaje de goleadores que anotó cinco goles superó el 5 %.

9.59 Según las estadísticas de la FIFA, el número de partidos jugados en el mundial de 2010 por cada uno de los seleccionados españoles viene dado en la tabla 6.8. Consideremos la variable estadística *"número de partidos jugados por cada seleccionado del equipo español en el mundial de 2010"*. Entonces la frecuencia relativa correspondiente al valor 7

Jugador	Partidos	Jugador	Partidos	Jugador	Partidos
Casillas	7	Torres	7	Arbeloa	1
Albiol	0	Cesc	4	Pedro	5
Piqué	7	Capdevila	7	Llorente	1
Marchena	3	Valdés	0	J. Martínez	1
Puyol	7	Mata	1	Silva	2
Iniesta	6	Alonso	7	Navas	3
Villa	7	Ramos	7	Reina	0
Xavi	7	Busquets	7		

Tabla 6.8: Número de partidos jugados por cada uno de los seleccionados españoles en el mundial de 2010.

a) vale aproximadamente 0.3043.
b) vale aproximadamente 0.4348.
c) no se puede calcular porque hay seleccionados que no jugaron ningún partido.

9.60 Según las estadísticas de la FIFA, el número de partidos jugados en el mundial de 2010 por cada uno de los seleccionados españoles viene dado en la tabla 6.8. Consideremos la variable estadística *"número de partidos jugados por cada seleccionado del equipo español en el mundial de 2010"*. Entonces la frecuencia relativa acumulada correspondiente al valor 3

a) vale aproximadamente 0.3043.
b) vale aproximadamente 0.4348.
c) no se puede calcular porque hay seleccionados que no jugaron ningún partido.

9.61 Según las estadísticas de la FIFA, la altura en centímetros de cada uno de los jugadores del equipo español que participaron en el mundial de 2010 viene dada en la tabla 6.9. Entonces la altura media del equipo era igual a

Jugador	Altura	Jugador	Altura	Jugador	Altura
Casillas	184	Torres	181	Arbeloa	184
Albiol	187	Cesc	175	Pedro	169
Piqué	192	Capdevila	182	Llorente	194
Marchena	182	Valdés	183	J. Martínez	190
Puyol	178	Mata	174	Silva	177
Iniesta	170	Alonso	183	Navas	172
Villa	175	Ramos	183	Reina	187
Xavi	170	Busquets	189		

Tabla 6.9: Altura en centímetros de los jugadores del equipo de España que participaron en el mundial de Sudádrica.

a) 180.91 cm.
b) 182.43 cm.
c) 179.38 cm.

9.62 Según las estadísticas de la FIFA, la altura en centímetros de cada uno de los jugadores del equipo español que participaron en el mundial de 2010 viene dada en la tabla 6.9. El rango de la variable *altura*

a) es igual a 25cm.
b) es igual a 194 cm.
c) no se puede calcular a partir de los datos de la tabla.

9.63 Un campeonato mundial de futbol se jugó en dos fases. A la segunda fase pasaron 16 equipos que se eliminaron por el sistema de copa a partido único, enfrentándose por parejas en rondas sucesivas hasta determinar el campeón. Se jugó además un encuentro adicional para decidir el tercer y cuarto puesto. El número de goles marcados en todo el campeonato fue exactamente el doble del número de partidos de la primera fase. Además, en media se marcaron 1.5 goles por partido en todo el campeonato. En todos los encuentros, salvo en uno, hubo jugadores amonestados con tarjeta amarilla. Si en dicho encuentro el árbitro hubiese enseñado tarjeta amarilla a todos y cada uno de los jugadores de uno de los dos equipo, las estadísticas de todo el campeonato hubiesen informado de que el número medio de tarjetas amarillas por partido ascendería exactamente a 4. ¿Cuántas tarjetas amarillas hubo efectivamente en el mundial?

a) 245
b) 145
c) con los datos proporcionados no se puede saber.

9.64 Según las estadísticas de la FIFA, en la tabla 6.10 viene dada la distribución del número de tarjetas amarillas mostradas en los encuentros jugados en el mundial del 2010. Entonces el número medio de tarjetas amarillas por partido fue

Número de tarjetas amarillas (x_i)	Número de encuentros (F_i)
0	2
1	5
2	11
3	11
4	12
5	14
6	4
7	2
8	1
9	1
12	1

Tabla 6.10: Número de tarjetas por partido en el mundial de 2010.

a) 3.62.
b) 4.32.
c) 4.

9.65 Según las estadísticas de la FIFA, en la tabla 6.10 viene dada la distribución del número de tarjetas amarillas mostradas en los encuentros jugados en el mundial del 2010. Entonces la dispersión del número de tarjetas amarillas mostradas, medida por la desviación típica fue

a) 4.42.
b) 2.10.
c) no se puede calcular pues es necesario conocer la media.

9.66 La figura 6.28 muestra la distribución geográfica de los equipos que participaron en el mundial de la FIFA de 2010. El diagrama de sectores que representa con mayor exactitud la distribución de frecuencias del número de países pertenecientes a cada continente es

Figura 6.28: Distribución geográfica de los equipos que participaron en el mundial de la FIFA de 2010.

a) 

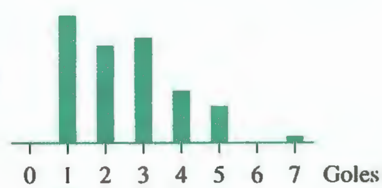
b) 

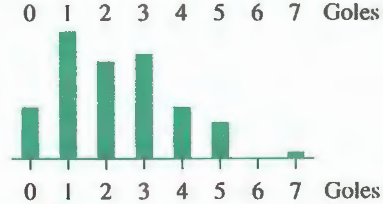
c) 

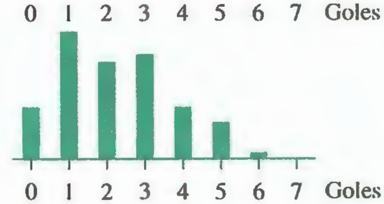
9.67 Según las estadísticas de la FIFA, la distribución del número total de goles al final del encuentro, en los partidos jugados en el mundial de 2010, se muestra en la tabla siguiente.

Número total de goles (x_i)	Número de partidos (F_i)
0	7
1	17
2	13
3	14
4	7
5	5
6	0
7	1

¿Cuál es el diagrama de barras que representa con mayor exactitud dicha distribución?

a) 

b) 

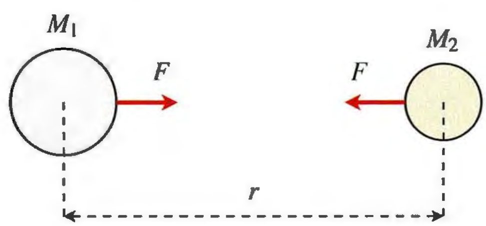
c) 

CONTEXTO

Todos hemos observado que las cosas se caen si nada las soporta. Pero el propósito de la Ciencia es explicar cómo y por qué ocurren los fenómenos que se observan. Así que, en este caso, se trata de entender cómo y por qué se caen las cosas.

En 1687, Isaac Newton, en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, enunció la *Ley de gravitación universal*, según la cual:

> Cualquier par de objetos con masa se atraen con fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos.



$$F = G\,\frac{M_1 M_2}{r^2}$$

La figura ilustra el enunciado y la fórmula expresa el valor de la fuerza. En esta última, M_1 y M_2 son las masas de ambos objetos, medidas en kilogramos (kg), r es la distancia en metros (m) entre los centros de gravedad de ambos y G es la *constante de gravitación universal.*

Según la mecánica de Newton, una fuerza es todo aquello capaz de modificar el estado de movimiento de un cuerpo. En concreto, de acuerdo con la *segunda ley de Newton*:

> Un cuerpo de masa M, sometido a una fuerza F, sufre una aceleración a que verifica
>
> $$F = M\,a.$$

Es decir, cuando una fuerza F actúa sobre un cuerpo de masa M, éste se ve sometido a una aceleración a; o, dicho de otro modo, si la fuerza actúa durante un tiempo t, su velocidad inicial, v_0, pasa a ser

$$v = v_0 + at.$$

La unidad de fuerza es el *Newton* (N) que se define como la fuerza capaz de imprimir una aceleración $a = 1\ m/s^2$ a cualquier cuerpo de masa 1 kg. Con esta unidad, la constante de gravitación universal ha sido medida en diversos experimentos y tiene el valor

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,Nm^2/kg^2.$$

Dicho de otra forma: dos cuerpos de 1 kg de masa cada uno, separados por una distancia de 1 m, se atraen con una fuerza de $6.67 \cdot 10^{-11}\ N$. En el vacío y en ausencia de cualquier otra fuerza, cada uno de los cuerpos sufriría una aceleración de $6.67 \cdot 10^{-11}\ m/s^2$.

Lo pequeña que es la constante G explica por qué, al situar dos cuerpos sobre una mesa, no apreciamos ninguna fuerza entre ellos; la resistencia del aire y el rozamiento contra la mesa son suficientes para vencer la atracción que indica de la *Ley de gravitación universal*. Pero, en sentido contrario, la fuerza de la gravedad está presente de manera permanente en nuestras vidas. De hecho, la Tierra tiene una masa enorme, del orden de $5.968 \cdot 10^{24}$ kilogramos, y atrae a cualquier cuerpo con una fuerza apreciable. En concreto, como el radio de la Tierra es de 6371 km, un objeto de masa 1 kg situado a 10 m del suelo, es atraído por la Tierra con una fuerza

$$F = G\,\frac{5.968 \cdot 10^{24} \cdot 1}{(6371000 + 10)^2} = 9.81\,N$$

y produce sobre el objeto una aceleración $a = 9.81\ m/s^2$ en dirección al centro de la Tierra. En consecuencia, el objeto cae, acelerando a $9.81\ m/s^2$, hasta que tropieza con el suelo.

La fuerza de la gravedad nos mantiene adheridos al suelo e impide que flotemos en el aire. También permite que nuestra báscula indique nuestro *peso*; aunque esté graduada en kilogramos, lo que mide es la fuerza que ejercen nuestros pies al subirse a ella. Si nuestra masa es de 75 kg, en la Tierra ejercemos sobre la báscula una fuerza $F = 9.81 \cdot 75 = 735.75\ N$ que la graduación muestra como 75 kg. Pero, la misma báscula, usada en la Luna, cuya masa y fuerza de la gravedad son mucho menores, daría una lectura muy inferior, a pesar de que nuestra masa siga siendo la misma.

Asimismo es la fuerza de la gravedad, en este caso del Sol, la que mantiene a la Tierra en su órbita, haciéndola girar en torno a él. De hecho, fueron las observaciones de los movimientos de los planetas, realizadas fundamentalmente por el astrónomo Kepler a finales del siglo XVI, las que permitieron a Newton establecer su *Ley de gravitación Universal*. También la fuerza de gravedad de la Luna provoca las mareas y la atracción gravitatoria entre las partículas dispersas por el espacio condensa los gases interestelares para formar las estrellas.

Volviendo a la caída de los cuerpos, es claro que, en nuestro entorno, la altura de un objeto sobre el suelo afecta muy poco a la fuerza con la que la Tierra lo atrae. Por tanto, se puede suponer que un cuerpo en caída libre está sometido a una aceleración constante $a = 9.81\ m/s^2$. Así, partiendo de su valor inicial v_0, su velocidad cambia, de tal forma que, al cabo de un tiempo t, tiene el valor

$$v = v_0 - 9.81 \cdot t\ m/s.$$

Aquí se considera negativa la dirección vertical hacia abajo; de forma que, si el cuerpo se ha lanzado hacia arriba con una velocidad v_0 positiva, va frenando hasta alcanzar una altura máxima, para volver a caer a continuación. En cambio, si se lanza hacia abajo, con una velocidad v_0 negativa, cada vez cae con más velocidad.

Dado que la velocidad es la derivada del espacio recorrido, la altura sobre el suelo de un cuerpo en caída libre es

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

donde y_0 es la altura inicial desde la que cae y v_0 la velocidad con la que se movía inicialmente, contadas otra vez como positivas hacia arriba y negativas hacia abajo. De hecho, al derivar la última expresión respecto a t, se obtiene como velocidad instantánea $v_0 - 9.81 \cdot t$.

Lo anterior describe el movimiento exclusivamente vertical de un cuerpo sometido a la atracción terrestre. Sin embargo, es muy frecuente que un tal movimiento vertical se combine con un movimiento uniforme horizontal, porque, a la vez que se imprime una velocidad vertical v_0 al objeto, se le dota también de una velocidad inicial horizontal w_0. En tal caso, el objeto se mueve en el plano (x,y) formado por la dirección vertical, junto con la dirección horizontal en que se ha realizado en lanzamiento. Ignorando los rozamientos con el aire, el movimiento horizontal no se ve frenado por ninguna causa, mientras que el movimiento vertical tiene las peculiaridades indicadas (una aceleración negativa de 9.81 m/s^2). En consecuencia, las dos coordenadas (x,y) de objeto, en el instante t, responden a las ecuaciones

$$\begin{cases} x = x_0 + w_0 \cdot t \\ y = y_0 + v_0 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2 \end{cases}$$

Normalmente el origen se fija en la posición inicial, de modo que $x_0 = y_0 = 0$. Con el único dato de las velocidades iniciales, v_0 y w_0, es entonces posible determinar múltiples características del movimiento. Por ejemplo, despejando de la primera ecuación $t = x/w_0$, y sustituyendo en la segunda, se obtiene

$$y = \frac{v_0}{w_0} - 9.81 \cdot \frac{x^2}{2w_0^2}.$$

Esta ecuación muestra que el objeto describe una parábola dentro del plano (x,y) y el sistema de ecuaciones anterior es la descripción de lo que se denomina *tiro parabólico*.

ACTIVIDADES

10.1 Un objeto de 50 kg de masa se sitúa a 10 cm de otro de 1000 kg. Según la *Ley de gravitación universal*, la fuerza con la que se atraen es de

a) 0.0062 Newtons.
b) 0.00335 Newtons.
c) 0.00033 Newtons.

10.2 Si un objeto de 50 kg de masa se sitúa a 10 cm de otro de 1000 kg, se atraen con una fuerza de 0.00033 N. En ausencia de ninguna otra fuerza, el objeto de 50 kg se moverá hacia el otro con una aceleración de

a) $6.6 \cdot 10^{-6}\, m/s^2$.
b) $6.6 \cdot 10^{-4}\, m/s^2$.
c) $6.6 \cdot 10^{-3}\, m/s^2$.

10.3 Si un objeto de 50 kg de masa se sitúa a 10 cm de otro de 1000 kg, se atraen con una fuerza de 0.00033 N. En ausencia de ninguna otra fuerza, el objeto de 1000 kg se moverá hacia el otro con una aceleración de

a) $3.3 \cdot 10^{-7}\, m/s^2$.
b) $3.3 \cdot 10^{-5}\, m/s^2$.
c) $3.3 \cdot 10^{-4}\, m/s^2$.

10.4 Un avión de 50 toneladas de masa, acelera para alcanzar al cabo de 3 minutos una velocidad de 900 Kilómetros por hora. Durante ese tiempo, los motores han ejercido una fuerza de

a) 52 200 N.
b) 69 500 N.
c) 85 000 N.

10.5 La Luna tiene una masa de $7.368 \cdot 10^{22}\, kg$ y un radio de 1740 kilómetros. En su superficie, la fuerza de la gravedad sobre un objeto de 1 kg es de

a) 9.81 N.
b) 3.54 N.
c) 1.62 N.

10.6 Un astronauta de 75 kg de masa ha llevado a la Luna su báscula casera. Pesándose en la Luna, donde la fuerza de la gravedad es de 1.62 N por kilogramo, verá que su peso es

a) 12.385 kg.
b) 32.450 kg.
c) 41.320 kg.

10.7 Una piedra cae desde 20 m de altura sobre el suelo. La altura al cabo de 1 segundo será

a) 10.5 metros.
b) 15.1 metros.
c) 17.2 metros.

10.8 Una piedra cae desde 20 m de altura sobre el suelo. El tiempo que tarda en llegar al suelo es

a) 2.02 segundos.
b) 2.8 segundos.
c) 3.22 segundos.

10.9 Una piedra cae desde 20 m de altura sobre el suelo. La velocidad con la que llega al suelo es

a) 92.56 km/h.
b) 86.45 km/h.
c) 71.28 km/h.

10.10 Una piedra, que cae al suelo desde una cierta altura, lo golpea a una velocidad de 36 m/s. La altura desde la que ha caído la piedra es de

a) 80 metros.
b) 66 metros.
c) 54 metros.

10.11 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. Al cabo de 5 segundos la pelota estará a una altura de

a) 86.725 metros.
b) 67.75 metros.
c) 48.125 metros.

10.12 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. Al cabo de 5 segundos la pelota está

a) subiendo.
b) bajando.
c) inmóvil.

10.13 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. El tiempo que permanecerá subiendo la pelota es

a) 3.75 segundos.
b) 4.25 segundos.
c) 6.1 segundos.

10.14 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. La altura máxima hasta la que sube la bola es

a) 68.4 metros.
b) 74.6 metros.
c) 89.5 metros.

10.15 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. El tiempo que tarda la pelota en caer al suelo es

a) 7.8 segundos.
b) 8.52 segundos.
c) 9.16 segundos.

10.16 Al tratar de devolver una pelota, un tenista golpea la bola a 1 metro del suelo y le imprime una velocidad vertical hacia arriba de 150 km/h. La velocidad con la que la pelota bota en el suelo es

a) 150.88 km/h.
b) 152.24 km/h.
c) 156.8 km/h.

10.17 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Un segundo después estará a una altura de

a) 15.525 metros.
b) 12.585 metros.
c) 10.695 metros.

10.18 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Un segundo después estará

a) subiendo a 0.25 m/s.
b) bajando a 9.21 m/s.
c) bajando a 5.85 m/s.

10.19 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Tarda en caer al suelo

a) 1.81 segundos.
b) 2.3 segundos.
c) 2.82 segundos.

10.20 Un ascensor sube a 0.6 m/s y, cuando está a 15 metros del suelo, el cable se rompe. Llega al suelo con una velocidad de

a) 81.18 km/h.
b) 72.24 km/h.
c) 61.78 km/h.

10.21 Un arquero dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La velocidad total que el arco imprime a la flecha es

a) 273.72 km/h.
b) 315 km/h.
c) 225 km/h.

10.22 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. Al cabo de 2 segundos, la flecha se encuentra a una altura

a) 4.75 metros.
b) 5.38 metros.
c) 6.34 metros.

10.23 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. Al cabo de 2 segundos, la flecha se encuentra a una distancia horizontal del punto del disparo igual a

a) 150 metros.
b) 120 metros.
c) 90 metros.

10.24 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. Al cabo de 2 segundos, la flecha se encuentra a una distancia total del punto del disparo igual a

a) 155.38 metros.
b) 152.45 metros.
c) 150.1 metros.

10.25 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. En la dirección vertical, al cabo de 2 segundos la flecha

a) baja con velocidad 9.7 m/s.
b) baja con velocidad 7.12 m/s.
c) sube con velocidad 2.1 m/s.

10.26 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La flecha cae al suelo al cabo de

a) 2.548 segundos.
b) 3.256 segundos.
c) 4.152 segundos.

10.27 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La distancia a la que cae la flecha es

a) 88.7 metros.
b) 137.5 metros.
c) 191.1 metros.

10.28 Un arquero, tumbado en el suelo, dispara una flecha imprimiéndole una velocidad horizontal de 270 km/h y una velocidad vertical de 45 km/h. La altura máxima alcanzada por la flecha es

a) 6.58 metros.
b) 7.96 metros.
c) 9.18 metros.

10.29 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, al cabo de 6 segundos, su altura será

a) 523.42 metros.
b) 412.68 metros.
c) 324.35 metros.

10.30 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, al cabo de 6 segundos, su velocidad vertical será de

a) 96.8 km/h.
b) 166.5 km/h.
c) 211.9 km/h.

10.31 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, caerá al suelo al cabo de

a) 11.946 segundos.
b) 12.712 segundos.
c) 14.482 segundos.

10.32 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, la distancia a la que caerá al suelo es

a) 2.323 kilómetros.
b) 1.856 kilómetros.
c) 1.482 kilómetros.

10.33 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, la velocidad vertical con la que llega al suelo es

a) 468.55 km/h.
b) 421.88 km/h.
c) 389.77 km/h.

10.34 Un avión vuela horizontalmente a 700 metros de altura y a 700 km/h. Si las alas se desprenden, la velocidad total con la que llega al suelo es

a) 769.4 km/h.
b) 817.3 km/h.
c) 856.7 km/h.

11 PRUEBAS DIAGNÓSTICAS

CONTEXTO

En la década los ochenta del siglo XX, motivados por el miedo que había provocado la extensión del SIDA (síndrome de inmunodeficiencia adquirida), algunos estados de Norteamérica (Illinois y Louisiana entre otros) impusieron la obligación de realizar un test de detección del síndrome para poder solicitar una licencia de matrimonio.

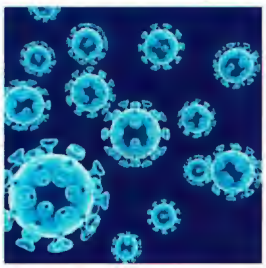


Figura 6.29: Imagen en el microscopio electrónico del virus VIH causante del SIDA.

El test de la sangre para la detección del virus del SIDA, aprobado en 1985 por el Departamento de salud, era denominado ELISA, producido por la casa Abbott. De acuerdo con los datos del trabajo de DIRK PETERSON[1], los resultados de 100000 análisis de solicitantes de la licencia fueron los que aparecen en la tabla que se muestra a continuación.

	Estado del individuo		
	Infectado	No infectado	Total
Test positivo	28	220	248
Test negativo	2	99750	99752
Total	30	99970	100000

Tabla 6.11: Resultados de 100000 análisis

ACTIVIDADES

11.1 Si elegimos una de las 100000 personas analizadas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su análisis haya resultado positivo?

a) 0.00028.
b) 0.00248.
c) 0.00030.

11.2 Si elegimos al azar un análisis que haya resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona que se analizó no esté infectada?

a) 0.887.
b) 0.113.
c) 0.99970.

11.3 Elegimos al azar una de las personas no infectadas que hay entre las 100000 analizadas; la probabilidad de que su test sea negativo es

a) 0.00030.
b) 0.99970.
c) 0.997799.

11.4 Se denomina *sensibilidad* del un test al porcentaje de individuo infectados que resultan positivos, la sensibilidad es una medida de la capacidad del test para detectar casos positivos entre los que deben ser positivos. A la vista de los resultados, la sensibilidad del test ELISA es igual a

a) 0.028 %.
b) 93.33 %.
c) $2/30 \cdot 100\,\%$.

11.5 Una buena cualidad de un test es su *capacidad para descubrir infectados*, se suele medir por el porcentaje de individuos infectados que hay entre los que resultan positivos. En el caso del test ELISA ese porcentaje es

[1] *For Better or for Worse? Mandatory AIDS Testing for Marriage License Applicants*, Journal of Urban and Contemporary Law, vol 38, 1990, 159–182.

a) 93.33 %.
b) 88.71 %.
c) 11.29 %.

11.6 Un posible error de cualquier test son los *falsos positivos*, es decir los casos en que el test resulta positivo pero el individuo no está infectado. Supongamos que elegimos un individuo al azar entre los 100000 analizados, la probabilidad de que no esté infectado un individuo cuyo test ha resultado positivo es

a) 0.8871.
b) 0.1129.
c) 0.9333.

11.7 Otro error de cualquier test son los *falsos negativos*, es decir los casos en que el test resulta negativo pero el individuo está infectado. Supongamos que elegimos un individuo al azar entre los 100000 analizados, la probabilidad de que un individuo cuyo test ha resultado negativo esté infectado es

a) 0.00002005.
b) 0.1129.
c) 0.9333.

11.8 Supongamos que elegimos un individuo al azar entre los 100000 analizados, la probabilidad de que un individuo esté infectado y resulte positivo es

a) 0.9333.
b) 0.00028.
c) 0.1129.

11.9 La proposición: "si un test tiene una sensibilidad del 100 %, entonces un individuo que resulte positivo en el test, está infectado" es

a) verdadera.
b) falsa.
c) indecible.

11.10 La proposición: "si un test no tiene falsos positivos, entonces un individuo infectado siempre resulta positivo" es

a) verdadera.
b) falsa.
c) indecible.

12 CÓDIGOS

CONTEXTO

En español, la palabra código tiene dos significados bien distintos, casi opuestos.

Por una parte, se denominan *códigos* a los sistemas de cifrado de mensajes, es decir a los sistemas para transmitir un mensaje encriptado de suerte que sólo quién posea la *clave* del código pueda *descifrarlo* e interpretarlo. El objeto principal de estos códigos es lograr la confidencialidad del mensaje; es decir, que la información transmitida sólo pueda ser conocida por el emisor y la persona a quién va dirigido, permaneciendo oculto su significado a terceras personas que puedan interceptarlo. La ciencia que estudia la creación de esta clase de códigos se denomina Criptografía, palabra que proviene del griego κρύπτοζ (criptos), que significa oculto o secreto y γράφειν (grafein), que significa escritura. La Criptografía es la ciencia que estudia los sistemas que permiten mantener cierta información secreta, como nuestras contraseñas bancarias o nuestros mensajes personales a la vista de los espías, como posibles ladrones y estafadores o los funcionarios de la NSA norteamericana.

Por otra parte, también denominamos códigos a los sistemas que sirven garantizar que una información enviada llega a su receptor íntegra pese a los posibles errores en la transmisión que puedan ocurrir. Estos códigos permiten detectar si ha ocurrido algún error e incluso corregirlos cuando se trata de unos pocos errores. Estos códigos están presentes continuamente en nuestra vida y aquí veremos algunos ejemplos y las matemáticas que subyacen tras ellos. La ciencia que estudia estos códigos se denomina Teoría de la codificación.

Para comprender mejor el objeto de la Teoría de la codificación conviene tener presente que toda transmisión de información está sujeta a errores, es lo que los ingenieros denominaron *ruido*, palabra que nos sugiere una conversación en un ambiente ruidoso donde es difícil entender las palabras de nuestro interlocutor. La analogía entre la transmisión de la información y una conversación en un medio ruidoso va más allá de una simple imagen y nos sugiere los métodos que la tecnología ha empleado para resolver o paliar la dificultad. Cuando mantenemos una conversación en un medio ruidoso, nuestro primer reflejo es hablar al oído de nuestro interlocutor y mucho más alto, aumentar el el volumen de nuestros sonidos y concentrarlos; así se hizo en los primeros años de las telecomunicaciones, el problema del ruido se solventaba aumentando la intensidad de la señal y empleando señales de pequeño espectro. Sin embargo, si el nivel de ruido es muy superior a la máxima intensidad de nuestra voz, o si por alguna razón no podemos gritar, probablemente nos haremos entender mediante con las manos, emplearemos un código de signos visuales, incluso repetiremos varias veces la misma información para estar seguros de que nuestro mensaje ha sido entendido. Esta fue la situación que se dio en telecomunicaciones durante la Segunda guerra mundial, cuando se trataba de ocultar las señales de comunicaciones y era preciso emplear señales de baja intensidad y amplio espectro que pasaran desapercibidas, o cuando los primeros satélites fueron lanzados al espacio, ya que un satélite no puede disponer de la cantidad de energía suficiente para enviar señales de alta intensidad. En estas condiciones, para lograr una comunicación fiable, es necesario codificar la información enviada de manera que podamos detectar e incluso corregir los posibles errores. Gracias a estos códigos, en nuestros días todas las transmisiones se realizan mediante señales de baja intensidad y, como sabemos bien por la telefonía móvil, son completamente efectivas.

La primera idea para lograr esa comunicación fiable es similar a nuestra reacción al conversar en un medio ruidoso: enviar repetido el mensaje varias veces; esta estrategia se denomina *añadir redundancia al mensaje*, esto es completar el mensaje con símbolos o caracteres que no aportan un significado adicional, sino que sirven de comprobación de la exactitud de los restantes. Pero enviar repetido el mensaje varias veces no es procedimiento económico, ya que significa duplicar, triplicar o cuadruplicar el número de bits enviados. La Teoría de la codificación ha logrado códigos mucho más eficientes donde con un pequeño porcentaje de símbolos redundantes se puede lograr una correcta transmisión.

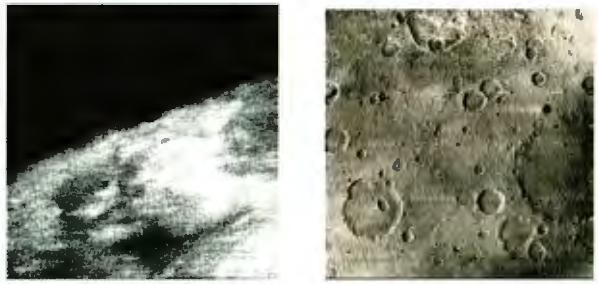


Imagen del Mariner IV (1964) sin codificar

Imagen del Mariner VI (1969) con un código Reed-Muller

Figura 6.30: Imágenes de Marte de las sondas Mariner.

La figura 6.30 muestra dos imágenes de la Luna tomadas por las sondas Mariner IV y VI. La imagen de la izquierda corresponde a los datos enviado por el Mariner IV sin codificar, la imagen de la derecha es el resultado de detectar los errores y corregirlos mediante un código denominado de Reed-Muller.

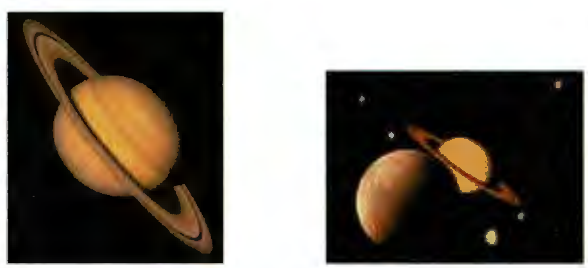


Figura 6.31: Imágenes en color del Voyager (1971) enviadas en código de Golay.

En la figura 6.31 podemos ver una imagen del planeta Saturno enviada por la nave Voyager, la información se codificó con un código que detecta y corrige errores denominado de Golay en honor a su creador Marcel J. E. Golay.

EL DÍGITO DEL CONTROL DEL DNI

En España, a cada Documento nacional de identidad se le asigna un número de 8 cifras. Desde 2007, además del número, tienen una letra final. Esa letra no se asigna de manera caprichosa, sino mediante una regla que veremos a continuación, letra que sirve para validar la coherencia de los restantes números. El objeto de añadir la letra de control no es impedir el fraude, ya que conociendo la regla de asignación se puede hallar otros números válidos, sino evitar los errores mecanográficos inconscientes que ocurren al incorporar un número de DNI a un sistema computerizado. Cualquier base de datos bien diseñada que tenga el número de DNI como uno de los campos de identificación, valida automáticamente el número introducido para detectar si el operador se ha equivocado al pulsar alguna tecla.

El procedimiento de asignación de la letra está basado en los restos de la división del número del documento entre 23. Sabemos que, al dividir cualquier entero entre 23, el resto de la división es un número entero que varía entre 0 y 22, ambos inclusive. La letra final se asocia de acuerdo con la correspondencia definida en la tabla 6.12.

Resto	0	1	2	3	4	5	6	7
Letra	T	R	W	A	G	M	Y	F
Resto	8	9	10	11	12	13	14	15
Letra	P	D	X	B	N	J	Z	S
Resto	16	17	18	19	20	21	22	
Letra	Q	V	H	L	C	K	E	

Tabla 6.12: Asignación de letras en el DNI.

Las letras I, Ñ, O y U no se utilizan. Las letras O e I se han descartado para evitar confusiones con los caracteres numéricos 0 y 1, y la letra Ñ para evitar confusiones con la N.

CÓDIGOS DE CUENTAS DE CLIENTES

En la mayor parte de los países, los números que las entidades financieras emplean para identificar las cuentas de sus clientes están estandarizados. En España, constan de veinte dígitos divididos en cuatro bloques con la estructura siguiente

$$EEEE \quad OOOO \quad DD \quad NNNNNNNNNN$$

El primer bloque $EEEE$ son el código de la entidad, cuatro dígitos que coinciden con el número de registro que la entidad tiene en el Banco de España. El segundo bloque $OOOO$ son cuatro dígitos que identifican la oficina de la entidad. Él tercer bloque DD son dos dígitos de control, que sirven para validar la corrección de los restantes. Los últimos diez dígitos $NNNNNNNNNN$ son el número de la cuenta propiamente dicho.

El primer dígito de control valida la información de los primeros ocho dígitos, esto es la información relativa a la entidad y a la oficina. Para calcularlo, supongamos que

$$x_1x_2x_3x_4 \; x_5x_6x_7x_8$$

son los ocho primeros dígitos del código de la cuenta. Primero hallaremos el número

$$\begin{aligned} M \; = \; & 2^2 \cdot x_1 + 2^3 \cdot x_2 + 2^4 \cdot x_3 + 2^5 \cdot x_4 \\ & + 2^6 \cdot x_5 + 2^7 \cdot x_6 + 2^8 \cdot x_7 + 2^9 \cdot x_8 \end{aligned}$$

A continuación, se calcula el resto, r, de la división de M entre 11. Si $r = 0$, el primer dígito de control es igual a 0; si $r = 1$, el primer dígito de control es igual a 1; en otro caso, si $r \neq 0$ y $r \neq 1$, el primer dígito de control es igual a la diferencia entre $11 - r$. Por ejemplo, si $M = 6320$, entonces el resto de la división por 11 es $r = 6$, ya que $6320 = 574 \cdot 11 + 6$, y el primer dígito de control es igual a $11 - r = 11 - 6 = 5$.

El segundo dígito valida la información de los últimos diez dígitos correspondientes al número de cuenta. Para calcularlo, supongamos que

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$$

son los últimos diez dígitos de código de la cuenta. Primero hallaremos el número

$$\begin{aligned} N \; = \; & 2^0 \cdot x_1 + 2^1 \cdot x_2 + 2^2 \cdot x_3 + 2^3 \cdot x_4 + 2^4 \cdot x_5 \\ & + 2^5 \cdot x_6 + 2^6 \cdot x_7 + 2^7 \cdot x_8 + 2^8 \cdot x_9 + 2^9 \cdot x_{10} \end{aligned}$$

A continuación, se calcula el resto, s, de la división de N entre 11. Si $s = 0$, el segundo dígito de control es igual a 0; si $s = 1$, el segundo dígito de control es igual a 1; en otro caso, si $s \neq 0$ y $s \neq 1$, el segundo dígito de control es igual a la diferencia entre $11 - s$. Por ejemplo, si $N = 5512$, entonces el resto de la división por 11 es $s = 1$, ya que $5512 = 501 \cdot 11 + 1$, y el segundo dígito de control es igual a 1.

ACTIVIDADES

12.1 La aplicación definida por la tabla 6.12 entre el conjunto $\{0,1,2,\ldots,22\}$ y el conjunto A de todas las letras del alfabeto que asocia una letra a cada resto de la división entera por 23 es

a) biyectiva.
b) inyectiva.
c) sobreyectiva.

12.2 Sea A es el conjunto de letras del alfabeto y R el conjunto de los restos de la división entera por 23. Consideremos la correspondencia $f: A \mapsto R$ que asocia a cada letra un resto de acuerdo con la tabla 6.12 de asignación de letras del DNI. La correspondencia f

a) es una aplicación inyectiva.
b) es una aplicación sobreyectiva.
c) no es aplicación.

12.3 ¿Qué letra corresponde a un DNI cuyo número sea 02693750?

a) F.
b) V.
c) J.

12.4 El DNI con número 95362431 tiene asignada la letra S, ¿qué letra tendrá asignada el DNI con número 95362432?

a) Q.
b) W.
c) D.

12.5 ¿La secuencia 95362441W es un código de DNI válido?

a) sí.
b) no.
c) depende del portador del documento.

12.6 Una cuenta corriente está abierta en la oficina 0001 de una entidad cuyo número de registro es 5432, su primer dígito de control debe ser igual a

a) 5.
b) 6.
c) 1.

12.7 La proposición *"el número*

5432 1001 81 4202597001

es un código válido de cuenta" es

a) verdadera.
b) falsa.
c) indecible.

RESPUESTAS DE LAS ACTIVIDADES

1 NÓMINAS

1.1 *Respuesta correcta: c*

Puesto que C es un subconjunto de D, la relación que une el conjunto C con el conjunto de todos los descuentos D es la relación de inclusión $\subset$. No se trata de un elemento de D como indica la alternativa b), ni tiene sentido utilizar el signo "$\leq$" que se establece entre números.

1.2 *Respuesta correcta: b*

Claramente la intersección de los dos conjuntos es el conjunto vacío. P no está contenido en S. Tampoco su unión es el conjunto universal.

1.3 *Respuesta correcta: b*

La intersección de F y P es un conjunto. Su único elemento es g. Por tanto la representación por enumeración de este conjunto es $\{g\}$.

1.4 *Respuesta correcta: b*

El cardinal de un conjunto es el número de elementos que lo forman. Tanto el conjunto R como el conjunto D tienen 4 elementos. Por tanto el cardinal de ambos conjuntos es el mismo.

1.5 *Respuesta correcta: c*

Puesto que R y D tienen el mismo número de elementos podemos asegurar que entre ellos es posible establecer alguna aplicación que sea biyectiva. Por ejemplo, la aplicación $h : R \mapsto D$ representada en la figura 6.32 es biyectiva.

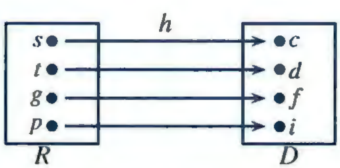


Figura 6.32: Representación de la aplicación $h : R \mapsto D$ biyectiva.

Ahora bien, dicha aplicación no es la única aplicación biyectiva que se puede establecer entre R y D. Por ejemplo, la aplicación $k : R \mapsto D$ representada en la figura 6.33 también es biyectiva y es distinta de h.

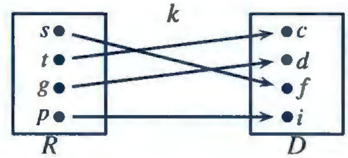


Figura 6.33: Representación de la aplicación $k : R \mapsto D, k \neq h$ y k biyectiva.

1.6 *Respuesta correcta: a*

Según de deduce de la figura tenemos:

$$(k \circ h)(s) = k(h(s)) = k(f) = s.$$
$$(k \circ h)(t) = k(h(t)) = k(d) = p.$$
$$(k \circ h)(g) = k(h(g)) = k(c) = p.$$
$$(k \circ h)(p) = k(h(p)) = k(f) = s.$$

1.7 *Respuesta correcta: b*

Llamemos T al total bruto de ingresos que debe figurar en la nómina. Puesto que el IRPF se calcula sobre esta cantidad, y el porcentaje de este impuesto es el 14%, tenemos que $207.93 = \frac{14}{100} T$, es decir, $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} =$ 1,485.21 euros.

1.8 *Respuesta correcta: a*

Sea T el sueldo bruto de una nómina ordinaria como la de la tabla 6.1. Puesto que el IRPF que figura en la tabla es el 14% de esta cantidad, se tiene $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Según indica el enunciado, la paga extra no incluye el concepto *complemento personal* que, como vemos en la tabla 6.1, es igual a 14.08. Por tanto el sueldo bruto de una paga extra es $T - 14.08 = 1{,}485.21 - 14.08 = 1{,}471.13$ euros.

1.9 *Respuesta correcta: a*

Sea T el sueldo bruto de una nómina ordinaria como la de la tabla 6.1. Entonces $T = \frac{207.93 \cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Una paga extra supone $T - 14.08 = 1{,}471.13$ euros. Puesto que percibe 12 pagas ordinarias y 2 pagas extras, el sueldo anual bruto asciende a

$$12 \cdot 1{,}485.21 + 2 \cdot 1{,}471.13 = 20{,}764.78 \text{ euros}$$

1.10 *Respuesta correcta: b*

Sea T el sueldo bruto de una nómina ordinaria como la de la tabla 6.1. Entonces $T = \frac{207.93\cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Una paga extra supone $T - 14.08 = 1{,}471.13$ euros. Las 12 pagas ordinarias y las 2 extras suponen 20,764.78 euros. La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es la duodécima parte de esta cantidad, es decir, $\frac{20{,}764.78}{12} = 1{,}730.40$.

1.11 *Respuesta correcta: a*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto la cuota por contingencias comunes es $1{,}730.40 \cdot \frac{4.70}{100} = 81.33$ euros.

1.12 *Respuesta correcta: b*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto la cuota por desempleo es $1{,}730.40 \cdot \frac{1.60}{100} = 27.69$ euros.

1.13 *Respuesta correcta: a*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto la cuota por formación es $1{,}730.40 \cdot \frac{0.1}{100} = 1.73$ euros.

1.14 *Respuesta correcta: b*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto las cuotas son: *contingencias comunes*, 81.33; *desempleo*, 27.69; *formación profesional*, 1.73. Entonces las cotizaciones a la Seguridad Social suman un total de 110.75, lo cual, junto con el porcentaje correspondiente al IRPF hacen un total de 318.68 euros.

1.15 *Respuesta correcta: b*

La base de cotización para calcular las cuotas de la Seguridad Social es 1,730.40. Por tanto las cuotas son: *contingencias comunes*, 81.33; *Desempleo*, 27.69; *formación profesional*, 1.73. Entonces las cotizaciones a la Seguridad Social suman un total de 110.75, lo cual, junto con el porcentaje correspondiente al IRPF hacen un total de 318.68 euros. Por otra parte, el total de ingresos es 1,485.21. Por tanto, el importe líquido total a percibir es

$$1{,}485.21 - 318.68 = 1{,}166.53 \text{ euros}$$

1.16 *Respuesta correcta: c*

El importe correspondiente al total T de ingresos se calcula a partir del importe del IRPF, de la forma $T = \frac{207.93\cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Si tenemos en cuenta el dato que figura en la tabla respecto del complemento personal, 14.08 euros, y añadimos el nuevo dato conocido correspondiente al complemento general, 546.12 euros, podemos escribir

$$\text{Sueldo } + \text{Trienios } + 546.12 + 14.08 = 1{,}485.21$$

De esta igualdad podemos deducir que

$$\begin{aligned} \text{Sueldo } + \text{Trienios} &= 1{,}485.21 - 546.12 - 14.08 \\ &= 925.01 \end{aligned}$$

pero no podemos saber a cuánto asciende el sueldo solamente.

1.17 *Respuesta correcta: a*

Sabemos que el importe que figura en el total de ingresos es $T = \frac{207.93\cdot 100}{14} = 1{,}485.21$ euros. Si tenemos en cuenta el complemento personal, 14.08 euros, y añadimos el nuevo dato conocido correspondiente al complemento general, 546.12 euros, tenemos

$$\text{Sueldo } + \text{Trienios } + 546.12 + 14.08 = 1{,}485.21$$

Ahora sabemos que el trabajador ha cumplido un trienio y que este hecho le supone un incremento del sueldo base en un 5 %, es decir

$$\begin{aligned} \text{Sueldo} + \text{Trienios} &= \text{Sueldo} + 0.05 \cdot \text{Sueldo} \\ &= 1.05 \cdot \text{Sueldo} \end{aligned}$$

Entonces

$$1.05 \cdot \text{Sueldo } + 546.12 + 14.08 = 1{,}485.21$$

Al despejar

$$\text{Sueldo} = \frac{1}{1.05}\,(1{,}485.21 - 546.12 - 14.08) = 880.96$$

De paso, podemos calcular también que

$$\text{Trienios} = 0.05 \cdot \text{Sueldo} = 0.05 \cdot 880.96 = 44.05$$

1.18 *Respuesta correcta: a*

El sueldo bruto sin complemento personal es $T = \frac{207.93}{0.14} - 14.08 = 1{,}471.13$. Por tanto el importe de una hora extraordinaria es igual a $1{,}471.13 \cdot 0.005 = 7.36$. Así pues, si realiza 2 horas extraordinarias cobra $2 \cdot 7.36 = 14.71$ euros, con lo cual ya compensa el importe del complemento personal.

1.19 *Respuesta correcta: b*

El descuento de IRPF es el 14%. Puesto que $0.14 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$, podemos afirmar que a) es correcta. Los descuentos en las cotizaciones a la Seguridad Social suman en conjunto $4.70 + 1.60 + 0.10 = 6.40\%$. Esto quiere decir que los descuentos en cotizaciones a la SS suponen 6.40 euros de cada 100, por lo cual deducimos que b) es incorrecta. Finalmente, comprobamos que c) es correcta. El porcentaje total de descuentos es $14.00 + 4.70 + 1.60 + 0.10 = 20.40 > 20$. Esto significa que de cada 100 euros, se descuentan más de 20, o lo que es lo mismo, de cada 10 euros se descuentan más de 2.

1.20 *Respuesta correcta: b*

Sea S la cantidad correspondiente al sueldo base actual. Según el enunciado, la cantidad actual correspondiente a la antigüedad es $T = 0.05\ S$. El salario actual correspondiente a estos dos conceptos es $S + T = S + 0.05S = 1.05S$. El nuevo sueldo base será $S' = (S + 0.02\ S) = 1.02\ S$. Por otra parte, el nuevo incremento debido a la antigüedad será $T' = 2 \cdot 0.05\ S' = 2 \cdot 0.05 \cdot 1.02\ S = 0.102\ S$. El nuevo salario será $S' + T' = 1.02\ S + 0.102\ S = 1.122\ S$. Entonces el porcentaje de incremento es $\frac{1.122\ S - 1.05\ S}{1.05\ S} \cdot 100 = 6.86\,\%$.

1.21 *Respuesta correcta: c*

Según el enunciado la base mensual de cotización a la SS mínima es 753 y la máxima 3597, es decir,

$$753 \leq x \leq 3597.$$

De ello, deducimos que $x \in [753, 3597]$. Este intervalo es igual a la intersección de los intervalos $[753, \infty)$ y $(-\infty, 3579]$, es decir,

$$[753, 3597] = [753, \infty) \cap (-\infty, 3579]$$

Ahora bien, $[753, \infty) = I_1^c$ y $(-\infty, 3579] = I_2^c$.

2 EL RECIBO DEL AGUA

2.1 *Respuesta correcta: a*

$E - S = \{a_1, d_1, d_2\} - \{a_2, d_2\} = \{a_1, d_1\} = A.$

2.2 *Respuesta correcta: c*

$E \cap S = \{d_2\}$, por lo que $(E \cap S)^c = \{a_1, d_1, a_2\}$. Por otra parte $A \cup Y = \{a_1, d_1, a_2\}$.

2.3 *Respuesta correcta: b*

Tenemos: $A \cap S = \emptyset$ y $E \cap Y = \emptyset$. Por tanto,

$$(A \cap S) \cup (E \cap Y) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

La alternativa c) no es correcta porque $(A \cap S)^c = C$ y $(E \cap Y)^c = C$, por lo cual $(A \cap S)^c \cap (E \cap Y)^c = C$.

2.4 *Respuesta correcta: b*

La imagen del subconjunto $A \subset C$ es el subconjunto de P formado por los elementos que son imagen de algún elemento de A. En este caso, $f(a_1) = s$ y $f(d_1) = s$. Por tanto $f(A) = \{s\}$. Observemos que la alternativa a) no es correcta, porque s es un elemento de P, mientras que $f(A)$ es un subconjunto, es decir, no es lo mismo el elemento $s \in P$ que el subconjunto de P cuyo único elemento es s, $\{s\} \subset P$.

2.5 *Respuesta correcta: c*

La imagen inversa del subconjunto $\{u\} \subset P$ es el subconjunto de C formado por los elementos que cuya imagen pertenece a $\{u\}$. El único elemento de C cuya imagen es $u \in \{u\} \subset P$ es a_2. Por tanto $f^{-1}(\{u\}) = \{a_2\}$. Observemos que la alternativa b) no es correcta porque $f^{-1}(\{u\})$ es un conjunto y no un elemento.

2.6 *Respuesta correcta: b*

f es una aplicación sobreyectiva porque todos los elementos de P son imagen de alguno de C. No es inyectiva porque que hay elementos de C que tienen la misma imagen. Por tanto, no es tampoco biyectiva.

2.7 *Respuesta correcta: b*

Llamemos C_1 al conjunto de personas que entrevista el primer encuestador y C_2 al conjunto de entrevistados por el segundo encuestador. Entonces $\#(C_1) = 284$ y $\#(C_1) = 223$. El conjunto de personas entrevistadas por alguno de los encuestadores es $C_1 \cup C_2$, mientras que el conjunto de personas que fueron entrevistadas por ambos encuestadores es $C_1 \cap C_2$. Entonces

$$\begin{aligned} \#(C_1 \cap C_2) &= \#(C_1) + \#(C_2) - \#(C_1 \cup C_2) \\ &= 284 + 223 - 458 = 49 \end{aligned}$$

2.8 *Respuesta correcta: c*

El servicio de distribución está sujeto al IVA del 10 % por lo que a) es cierta. El alcantarillado está exento de IVA por lo que b) es cierta. Veamos que c) es falsa. Si llamamos $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{d}_1, \hat{d}_2$ a los importes de los servicios, entonces el importe base de la factura es la suma $\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{d}_1 + \hat{d}_2$. El 10 % de esta cantidad es $0.1(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{d}_1 + \hat{d}_2)$. El importe del IVA de la factura es $0.1(\hat{a}_1 + \hat{d}_1 + \hat{d}_2)$. Si hay consumo $\hat{a}_2 > 0$, por lo cual $0.1(\hat{a}_1 + \hat{d}_1 + \hat{d}_2)) < 0.1(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{d}_1 + \hat{d}_2)$.

2.9 *Respuesta correcta: b*

Según los datos de la tabla 6.2 el porcentaje de variación correspondiente al tramo de consumo $[25, 50)$ es

$$\frac{0.6869 - 0.5496}{0.5496} \times 100\,\% = 25\,\% \approx 25.00\,\%$$

2.10 *Respuesta correcta: c*

El porcentaje de variación correspondiente al intervalo $[50, \infty)$ es

$$\frac{1.9766 - 1.3176}{1.3176} \times 100\,\% = 50\,\% \approx 50.00\,\%$$

2.11 *Respuesta correcta: a*

Según los datos facilitados, el diámetro del contador es $D = 13$, el número de viviendas es $N = 1$, pues se trata de una vivienda unifamiliar, y el número de días transcurridos es $DP = 61$ (21 correspondientes al mes de octubre, 30 al mes de noviembre y 10 al mes de diciembre). Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de servicio de aducción resulta:

$$\begin{aligned} \text{Cuota} &= 0.0178(D \times D + 225N) \times (DP/60) \\ &= 0.0178 \times (13 \times 13 + 225 \times 1) \times (61/60) \\ &= 7.13 \end{aligned}$$

Puesto que el servicio de aducción está sujeto a un IVA del 10 %, el importe que debe figurar en la factura es igual a

$$\text{Cuota Aducción} = 7.13 + 0.71 = 7.84$$

2.12 *Respuesta correcta: b*

Según los datos facilitados, el diámetro del contador es $D = 13$, el número de viviendas es $N = 1$, pues se trata de una vivienda unifamiliar, y el número de días transcurridos es $DP = 61$ (21 correspondientes al mes de octubre, 30 al mes de noviembre y 10 al mes de diciembre). Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de servicio de distribución resulta:

$$\begin{aligned} \text{Cuota} &= 0.0081(D \times D + 225N) \times (DP/60) \\ &= 0.0081 \times (13 \times 13 + 225 \times 1) \times (61/60) \\ &= 3.24 \end{aligned}$$

Puesto que el servicio de distribución está sujeto a un IVA del 10 %, el importe que debe figurar en la factura es igual a

$$\text{Cuota Distribución} = 3.24 + 0.32 = 3.56$$

2.13 *Respuesta correcta: c*

Según los datos facilitados, el número de viviendas es $N = 1$, pues se trata de una vivienda unifamiliar, y el número de días transcurridos es $DP = 61$ (21 correspondientes al mes de octubre, 30 al mes de noviembre y

10 al mes de diciembre). Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de servicio de depuración resulta:

$$\begin{aligned}\text{Cuota} &= (3.1433 \times N) \times (DP/60) \\ &= (3.1433 \times 1) \times (61/60) \\ &= 3.20\end{aligned}$$

Puesto que el servicio de depuración está sujeto a un IVA del 10 %, el importe que debe figurar en la factura es igual a

$$\text{Cuota Depuración} = 3.20 + 0.32 = 3.52$$

2.14 *Respuesta correcta: b*

Según los datos facilitados, el consumo del período es igual a 33 m^3. Entonces al aplicar la fórmula de la cuota de alcantarillado resulta:

$$\text{Cuota} = 0.2240 \times 33 = 7.39$$

Puesto que el servicio de alcantarillado no está sujeto a un IVA, en la factura debe figurar el importe anterior.

2.15 *Respuesta correcta: c*

El consumo ha sido de 33 m^3. Puesto que estamos en temporada de invierno, los primeros 25 m^3 se han de facturar a razón de 0.2971 euros por m^3. Los $33-25=8$ restantes pertenecen al segundo tramo por lo que se facturan a razón de 0.5496 euros por m^3. En total, resulta

$$25 \times 0.2971 + 8 \times 0.5496 = 11.82$$

Al importe anterior hay que sumarle el 10 % de IVA correspondiente Por tanto, el importe total con impuestos es $11.82 + 1.18 = 13.00$.

2.16 *Respuesta correcta: a*

El consumo ha sido de 53 m^3. Los primeros 25 m^3 se facturan a razón de 0.1337 euros por m^3. Los 25 siguientes, hasta llegar a 50, pertenecen al segundo tramos, por lo cual se facturan a razón de 0.2107 euros por m^3. Los 3 restantes, que pertenecen al último tramo, se facturan a razón de 0.5021 euros por m^3. En total,

$$25 \times 0.1337 + 25 \times 0.2107 + 3 \times 0.5021 = 10.12$$

Al importe anterior hay que sumarle el 10 % de IVA correspondiente Por tanto, el importe total con impuestos es $10.12 + 1.01 = 11.13$.

2.17 *Respuesta correcta: a*

La función es creciente en todo el intervalo $[0,\infty)$. Observemos que cualesquiera que sean los valores x, $y \in [0,\infty)$ tales que $x < y$ entonces siempre se cumple que $f(x) \leq f(y)$.

2.18 *Respuesta correcta: a*

La función que da el coeficiente para calcular el coste variable del servicio de distribucion está definida para valores no negativos de la abscisa, que se expresa en m^3. Según el enunciado en el intervalo $[0,25)$ el coeficiente es constante y vale 0.1337. La representación gráfica de esta función constante es una recta paralela al eje de abscisas. En el intervalo $[25,50)$ el coeficiente cambia al valor 0.2107, comenzando este valor en el extremo inferior del intervalo. Por tanto, la gráfica presenta un salto y se mantiene constante hasta llegar al valor 50. En este punto, la gráfica presenta un nuevo salto, tomando en el intervalo $[50,\infty]$ el valor constante 0.5021.

2.19 *Respuesta correcta: b*

Como se aprecia en la figura 6.4, la función f es discontinua en los puntos $x = 25$ y $x = 50$. Por tanto, a) no es cierta ya que $25,50 \in [0,\infty)$. Asimismo, c) tampoco es cierta porque $25 \in [0,50)$. En cambio, f es continua en todos los puntos del intervalo $[0,25)$, puesto que $25 \notin [0,25)$. Observemos que la función es constante en todo el intervalo $[0,25)$, puesto que $f(x) = 0.3121$ para $x \in [0,25)$.

2.20 *Respuesta correcta: b*

La gráfica de la figura consta de tres tramos: de 0 a 25, de 25 a 50 y de 50 en adelante. Por tanto, no puede corresponder al servicio de alcantarillado, pues este servicio solo tiene un tramo de facturación. Para resolver la duda sobre si se trata del servicio de aducción o el servicio de distribución, nos fijamos en los puntos de abscisa 25 ó 50. Para la distribución sería $f(25) \approx 25 \times 0.1337 = 3.3425$. Para la aducción en temporada de invierno sería $f(25) \approx 25 \times 0.2971 = 7.4275$. Se aprecia en la figura que $f(25)$ es aproximadamente 3.3425. Más claro se ve en el punto $x = 50$. Para la distribución, sería $f(50) = (25 \times 0.1337) + (25 \times 0.2107) \approx 8.6100$, mientras que para la aducción el valor sería $f(50) = (25 \times 0.2971) + (25 \times 0.5496) \approx 21.1675$ que claramente estaría fuera de la figura representada.

3 CENTROS COMERCIALES

3.1 *Respuesta correcta: b*

La única oración que enuncia algo que pueda valorarse como verdadero o falso es *te esperamos*. La oración *sumérgete en el verano* expresa una orden, mientras que la oración *que no te lo cuenten* expresa un deseo.

3.2 *Respuesta correcta: c*

La oración *¿por qué no te quedas a comer?* es una interrogación sobre la cual no puede decidirse si es cierta o falsa, por lo que no es una proposición lógica. Las oraciones de las otras alternativas, enuncian algo sobre lo que se puede estar o no de acuerdo, es decir, se puede decidir acerca de su verdad o falsedad. Por tanto, son proposiciones lógicas.

3.3 *Respuesta correcta: b*

La oración *"abrir una lata no es cocinar"* enuncia algo sobre lo que se puede opinar si es cierto o falso. Por tanto es una proposición lógica. La oración se entiende como *si se abre una lata entonces no se cocina*, es decir, es una proposición lógica compuesta.

3.4 *Respuesta correcta: b*

Llamemos $p =$ *"es verano*, $q =$ *"los precios están rebajados* y $r =$ *"hace calor"*. Entonces el razonamiento se puede simbolizar de la forma siguiente:

	$p \to q$	*"cuando es verano los precios están rebajados".*
	$r \to p$	*"si hace calor es verano".*
	$\neg r$	*"no hace calor".*
$\therefore$	$\neg q$	*"los precios no están rebajados".*

La tabla de verdad del razonamiento es la siguiente:

			Premisas			*Conclusión*
p	q	r	$p \to q$	$r \to p$	$\neg r$	$\neg q$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

En el segundo y sexto caso las premisas son ciertas y la conclusión falsa; entonces el razonamiento es una falacia.

3.5 *Respuesta correcta: a*

La intersección de los conjuntos E y L no es el conjunto vacío porque $E \cap L = \{\text{Corte Inglés Ocio}, \text{FNAC}, \text{MediaMarkt}\}$.

3.6 *Respuesta correcta: a*

En general, el cardinal de la unión de conjuntos es igual a la suma de los cardinales de cada uno de ellos menos el cardinal de la intersección. Tenemos $\#(E) = 5$, $\#(L) = 5$, $\#(T) = 9$. Por otra parte, puesto que $E \cap L = \{\text{Corte Inglés Ocio}, \text{FNAC}, \text{MediaMarkt}\}$, $E \cap T = \emptyset$ y $L \cap T = \emptyset$, tenemos $\#(E \cap L) = 3$, $\#(E \cap T) = 0$, $\#(L \cap T) = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\#(E \cup L) &= \#(E) + \#(L) - \#(E \cap L) = 5 + 5 - 3 = 7 \\
\#(E \cup T) &= \#(E) + \#(T) - \#(E \cap T) = 4 + 9 - 0 = 13 \\
\#(L \cup T) &= \#(L) + \#(T) - \#(L \cap T) = 5 + 9 - 0 = 14
\end{aligned}$$

3.7 *Respuesta correcta: b*

El precio sin IVA de la impresora es $\frac{199.95}{1.21} = 165.25$, y el IVA es el 21 % de esta cantidad, es decir 34.70.

3.8 *Respuesta correcta: c*

El porcentaje de variación es $\frac{49.95-89.95}{89.95}\,100 = -44.47\,\%$.

3.9 *Respuesta correcta: c*

Se obtuvo un descuento sobre el importe total de las dos compras que ascendió a 237.75. Entonces el porcentaje de descuento fue $\frac{10}{237.75} \cdot 100 = 4.21\,\%$.

3.10 *Respuesta correcta: a*

La fracción de mujeres que visita el centro es $\frac{3}{5}$. Puesto que dos de cada tres mujeres son visitantes asiduas, podemos deducir que la fracción de todos los visitantes que son mujeres y son asiduas es $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$. En cuanto a los hombres, sabemos que representan una fracción igual a $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ de todos los visitantes. También sabemos que del colectivo de hombres son visitantes asiduos una fracción igual a $1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$. Así pues, la contribución de los hombres a los visitantes asiduos representa una fracción igual a $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{55}$ de todos los visitantes. Entonces, la fracción total de asiduos, tanto mujeres como hombres, es $\frac{2}{5} + \frac{8}{55} = \frac{30}{55} = 0.55$. Entonces podemos afirmar solamente que un poco más de la mitad de los visitantes son asiduos.

3.11 *Respuesta correcta: b*

Llamemos n al número de personas que formaban el grupo inicial. En principio, tocaban a $\frac{3/4}{n}$ litros de vino cada uno. Si se añaden dos personas al grupo, entonces le corresponde a cada uno $\frac{3/4}{n+2}$. Según afirma el enunciado, ésta última cantidad es igual a las tres cuartas partes de la primera, es decir, $\frac{3}{4}\,\frac{3/4}{n} = \frac{3/4}{n+2}$. Al simplificar la expresión anterior resulta la ecuación $\frac{3}{4n} = \frac{1}{n+2}$. Puesto que $n \neq 0$, la ecuación anterior es equivalente a $3(n+2) = 4n$ y, al resolver, llegamos a que $n = 6$.

3.12 *Respuesta correcta: c*

Llamemos x al precio ordinario de paquete de azúcar, y al precio ordinario del paquete de café y z al precio ordinario del paquete de galletas. Entonces, de la compra de la primera semana se sigue que $x+y+z = 5.80$. En la segunda semana se compran 3 paquetes de café, pero sólo se pagan 2, por lo cual la cuenta es $x+2y+z = 8.75$. En la tercera semana, el beneficio le alcanza a las galletas, por lo que el ticket de esta semana es $x+y+2z = 7.75$. Este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se resuelve de manera muy sencilla. La segunda ecuación se puede poner de la forma siguiente $x+y+z+y = 8.75$. Puesto que sabemos que $x+y+z = 5.80$, resulta $5.80+y = 8.75$, de donde $y = 8.75 - 5.80 = 2.95$, es decir, el precio del paquete del café es 2.95 euros. De manera similar, la tercera ecuación se puede poner de la forma siguiente: $x+y+z+z = 7.75$. Al sustituir el valor de la compra de la primera semana, resulta $5.80+z = 7.75$, por lo cual $z = 7.75 - 5.80 = 1.95$ es el precio del paquete de galletas. Si sustituimos los precios que hemos encontrado en la ecuación de la primera semana, tenemos: $x + 2.95 + 1.95 = 5.80$, por lo que $x = 5.80 - 2.95 - 1.95 = 0.90$, es decir, el precio del paquete de azúcar es 0.90 euros. Así pues, la alternativa a) es cierta, ya que el precio del café es 2.95 y es el mayor de los tres. La alternativa b) también es cierta, ya que el precio del café es mayor que la suma de los otros dos juntos. La única alternativa que no es correcta es la c) porque el precio del paquete de galletas es 1.95 euros.

3.13 *Respuesta correcta: a*

Llamemos d a la cantidad de dinero que retiraron del cajero y z al precio de los zapatos. Según los datos, los sucesivos gastos son: z euros, los zapatos; $\frac{z}{3}$ euros, el jersey; $\frac{z}{2}$ euros, los vaqueros; $\frac{z}{3}$ euros, la camisa; $\frac{z}{2}$ la cena y $\frac{z}{4}$ euros, el cine. Así pues, el gasto total supuso

$$z + \frac{z}{3} + \frac{z}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{2} + \frac{z}{4} = \frac{35}{12}z \text{ euros}$$

Si restamos esta cantidad del dinero retirado del cajero, resultan los 25 euros sobrantes, $d - \frac{35}{12}z = 25$. Por otra parte, una camisa y un jersey adicionales hubiesen costado $\frac{z}{3} + \frac{z}{3} = \frac{2z}{3}$. Esta cantidad ha de ser igual al importe del cine más el dinero sobrante, es decir, $\frac{2z}{3} = \frac{z}{4} + 25$. Si resolvemos esta ecuación resulta $\frac{2z}{3} - \frac{z}{4} = \frac{5z}{12} = 25$, es decir, $z = 60$ que es el precio de los zapatos. Si utilizamos la ecuación que da el gasto total encontramos la solución de la pregunta planteada $d = 25 + \frac{35}{12}z = 25 + \frac{35}{12}\,60 = 200$.

3.14 *Respuesta correcta: b*

Como se aprecia en la figura, el parking tiene forma rectangular salvo una esquina en forma de triángulo. Las medidas del rectángulo son 60 metros de largo y 30 de ancho, por lo que su área es 1800 metros cuadrados. Por su parte, la base del triángulo mide 20 metros y su altura 10. Por tanto su área es igual a $\frac{20\cdot 10}{2} = 100$ metros cuadrados. Así pues, la superficie del parking es $1800 - 100 = 1700$ metros cuadrados. El presupuesto asciende, por tanto, a $1700 \cdot 5 = 8{,}500$ euros.

3.15 *Respuesta correcta: c*

Podemos entender que la distancia recorrida por el cliente es aproximadamente la distancia desde el punto (12.5,12.5) al punto (60,15). Esta distancia es $\sqrt{(60-12.5)^2+(15-12.5)^2} = 47.57$ metros.

3.16 *Respuesta correcta: b*

La ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,0) y (27.5,22.5) es

$$\begin{aligned} y &= \frac{22.5-0}{27.5-0}(x-0)+0 \\ &= \frac{9}{11}x \end{aligned}$$

La igualdad anterior es equivalente a la ecuación $11y - 9x = 0$.

3.17 *Respuesta correcta: a*

La longitud b de la base del triángulo que forma la zona de moda viene dada por la distancia entre los puntos (0,0) y (27.5,0), es decir, $b = \sqrt{(27.5-0)^2+(0-0)^2} = 27.5$. Por su parte, la altura h viene dada por la distancia entre los puntos (27.5,0) y (27.5,22.5), es decir, $h = \sqrt{(27.5-27.5)^2+(22.5-0)^2} = 22.5$ Así pues, el área buscada vale

$$A = \frac{b\,h}{2} = \frac{27.5\cdot 22.5}{2} = \frac{618.75}{2} = 309.38\, m^2$$

3.18 *Respuesta correcta: c*

La fachada norte de los *grandes almacenes* está sobre una recta que es paralela al eje de abscisas. Por tanto, su ecuación tiene que ser de la forma $x = a$. Observando la figura 6.9, comprobamos que es la ecuación $y = 22.5$. Además, la forma de las ecuaciones de las otras dos alternativas impiden que puedan ser la ecuación de la recta buscada, independientemente de los coeficientes de las variables y el término independiente.

3.19 *Respuesta correcta: a*

La pared común entres los grandes almacenes y la zona de restaurantes se extiende a lo largo de una recta perpendicular al eje de abscisas que corta a dicho eje en el punto $x = 55$. Por tanto la ecuación de dicha recta es $x = 55$.

3.20 *Respuesta correcta: b*

La gráfica de l curva está formada por los puntos de las forma $(x, f(x))$. Cuando $x = 55$ resulta $f(x) = 0.01\cdot 55^2 - 55 + 50 = 25.25$.

3.21 *Respuesta correcta: b*

Como se ve en la figura 6.10, los *grandes almacenes* tienen una forma que es prácticamente rectangular con dos de sus lados paralelos al eje x. Entonces hay que buscar el punto de la curva que dista menos de la fachada superior de dicha tienda. Como se aprecia en la figura 6.10, dicho punto es el punto en que se alcanza el mínimo de la función $f(x)$. Para encontrarlo, calculamos la primera derivada e igualamos a cero la ecuación que resulta.

$$f'(x) = 2\cdot 0.01\,x - 1 = 0$$

Al despejar, tenemos $\hat{x} = \frac{1}{0.02} = 50$. El valor que toma la función en este punto es: $f(50) = 0.01\cdot 50^2 - 50 + 50 = 25$. Por tanto el punto buscado tiene coordenadas $(50, 25)$. Como podemos observar en la figura 6.10, la fachada de los *grandes almacenes* está sobre la recta de ecuación $y = 22.5$, es decir, el caminante pasa una distancia igual a 25-22.5 = 2.5 metros de dicha fachada.

3.22 *Respuesta correcta: b*

La primera derivada de la función es $f'(x) = 2\cdot 0.01\,x - 1$ y la segunda derivada es $f''(x) = 0.02$. Dado que $f''(x) > 0$ para todos los valores de x, la función $f(x)$ es convexa.

3.23 *Respuesta correcta: b*

Sea A el suceso *"la película elegida es americana"*, E el suceso *"elige ella"* y E^c el suceso *"elige él"*. Según el enunciado $P(E) = P(E^c) = \frac{1}{2}$, pues elige ella o él, según salga cara o cruz. Entonces

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A|E)P(E) + P(A|E^c)P(E^c) \\
&= \frac{8}{10}\frac{1}{2} + \frac{4}{10}\frac{1}{2} \\
&= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

3.24 *Respuesta correcta: b*

Sea A el suceso *"la película elegida es americana"*, E el suceso *"elige ella"* y E^c el suceso *"elige él"*. Se pretende que la probabilidad $P(A) = \frac{1}{2}$, ya que ésta es la condición para que los tipos de películas tengan la misma probabilidad de ser elegidas. Debemos buscar un valor $P(E)$ para el cual se cumpla esta condición. Dado que $P(E^c) = 1 - P(E)$, tenemos la siguiente ecuación

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} = P(A) &= P(A|E)P(E) + P(A|E^c)P(E^c) \\
&= \frac{8}{10}P(E) + \frac{4}{10}(1 - P(E)) \\
&= \frac{4}{10} + \frac{4}{10}P(E)
\end{aligned}
$$

Al despejar, resulta $P(E) = \frac{1}{4}$. De aquí, $P(E^c) = \frac{3}{4}$. Así pues, por cada vez que elija ella, él tiene que elegir 3 veces.

3.25 *Respuesta correcta: b*

La frecuencia relativa del subsector *telefonía e internet* es $\frac{9}{5+5+9} = \frac{9}{19} = 0.47$.

3.26 *Respuesta correcta: a*

El gasto total del mes de enero fue

$$E = 154.80 + 65.35 + 40.30 + 250.40 = 510.85$$

mientras que el gasto total del mes de abril fue

$$A = 210.75 + 50.25 + 70.30 + 190.75 = 522.05$$

Por tanto el porcentaje de variación del gasto de abril con respecto a enero fue

$$\frac{522.05 - 510.85}{510.85} \cdot 100\% = 2.19\%$$

3.27 *Respuesta correcta: c*

El gasto total de cada sector en los cuatro meses fue el siguiente:

Alimentación	= 154.80+ 189.15+ 265.40 + 210.75	= 820.10
Bebidas	= 65.35 + 80.40+ 75.90 + 50.25	= 271.90
Droguería	= 40.30 + 125.45 + 90.80 + 70.30	= 326.85
Hogar	= 250.40 + 125.75 + 75.30 + 190.75	= 642.20

El gasto total fue

$$Total = 820.10 + 271.90 + 326.85 + 642.20 = 2{,}061.05$$

El porcentaje de gasto correspondiente a cada sector es

$$
\begin{aligned}
\text{Alimentación} &= \frac{820.10}{2{,}061.05} \cdot 100\% &= 39.79\% \\
\text{Bebidas} &= \frac{271.90}{2{,}061.05} \cdot 100\% &= 13.19\% \\
\text{Droguería} &= \frac{326.85}{2{,}061.05} \cdot 100\% &= 15.86\% \\
\text{Hogar} &= \frac{642.20}{2{,}061.05} \cdot 100\% &= 31.16\%
\end{aligned}
$$

Entonces el gasto conjunto en alimentación y bebidas fue igual a $39.79 + 13.19 = 52.98\%$ que supone más de la mitad del gasto. Por tanto, la afirmación a) es cierta. El gasto conjunto en bebidas y droguería fue $13.19 + 15.86 = 29.05\%$ que resulta inferior al gasto en hogar, por tanto b) es también cierta. Claramente, resulta falsa c) porque el gasto en hogar no llegó al 33.33%.

3.28 *Respuesta correcta: a*

El gasto total de cada sector en los cuatro meses fue el siguiente: alimentación, 820.10; bebidas, 271.90; droguería, 326.85; hogar, 642.20. El gasto total fue 2,061.05. El porcentaje de gasto correspondiente a cada sector fue: alimentación, 39.79%; bebidas, 13.19%; droguería, 15.86%; hogar, 31.16%. Al representar los porcentajes anteriores en un diagrama de sectores se obtiene la figura a).

3.29 *Respuesta correcta: c*

La opción a) es incorrecta: todos los meses confunde los datos de bebidas con los de droguería y viceversa. La opción b) es incorrecta pues cambia los datos de febrero por los del mes de abril y viceversa. La única opción que representa adecuadamente los datos es la c).

3.30 *Respuesta correcta: b*

El gasto medio mensual en *alimentación* fue

$$\overline{A} = \frac{154.80 + 189.15 + 265.40 + 210.75}{4} = 205.03$$

3.31 *Respuesta correcta: b*

El gasto total de cada mes fue:

Enero	= 154.80+65.35+ 40.30+250.40	= 510.85
Febrero	= 189.15+ 80.40+ 125.45+ 125.75	= 520.75
Marzo	= 265.40+75.90+90.80+75.30	= 507.40
Abril	= 210.75+ 50.25+70.30+190.75	= 522.05

El gasto medio mensual fue

$$\overline{Gasto} = \frac{510.85 + 520.75 + 507.40 + 522.05}{4} = 515.26$$

Entonces, la varianza del gasto mensual es

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{4}[(510.85-515.26)^2 + (520.75-515.26)^2 \\ &\quad +(507.40-515.26)^2 + (522.05-515.26)^2] \\ &= 39.37 \end{aligned}$$

La desviación típica es $s = \sqrt{39.37} = 6.27$.

3.32 *Respuesta correcta: c*

A lo largo del cuatrimestre, la media del los gastos en cada uno de los tres sectores fue: alimentación, 205.03; bebidas, 67.97; droguería, 81.71. Por su parte, la desviación típica fue: alimentación, 40.16; bebidas, 11.60; droguería, 30.99. Por tanto, el coeficiente de variación de cada sector fue: alimentación, $\frac{40.16}{205.03} = 0.20$; bebidas, $\frac{11.60}{67.97} = 0.17$; droguería, $\frac{30.99}{81.71} = 0.38$. Así pues el sector de mayor variabilidad fue el de droguería.

4 APARATOS DE TELEVISIÓN

4.1 *Respuesta correcta: a*

En un televisor de formato $< 16 : 9 >$, el cociente del ancho dividido por el alto es $16/9$. Es decir $\frac{x}{y} = \frac{16}{9}$ o bien $\frac{x}{16} = \frac{y}{9}$.

4.2 *Respuesta correcta: b*

Es $x = \frac{16}{9}y$ o bien $x = 1.\widehat{7}y = 1.777\ldots y$. En cambio $y = \frac{9}{16}x = 0.5625x$.

4.3 *Respuesta correcta: c*

El televisor tiene de alto $y = \frac{9}{16}\,81.91 = 46.074$ cm.; luego, según el teorema de Pitágoras, su diagonal mide $D = \sqrt{81.91^2 + 46.074^2} = 93.979$ cm. o bien $D = 93.979/2.54 = 37$ pulgadas.

4.4 *Respuesta correcta: b*

En un televisor de 42" $= 42 \cdot 2.54 = 106.68$ cm., con formato $< 16 : 9 >$, su ancho x y su alto $y = \frac{9}{16}x$, según el teorema de Pitágoras, cumplen $x^2 + y^2 = 106.68^2$ o bien $(1 + 0.5625^2)x^2 = 106.68^2$; de donde $x^2 = \frac{106.68^2}{1+0.5625^2} = 8645.22$ y $x = 92.98$ cm. El ancho del marco de la pantalla suele ser muy reducido en los televisores modernos y no se ha tenido en cuenta.

4.5 *Respuesta correcta: a*

La diagonal de un televisor de 32" mide 81.28 cm. Al ser el formato $< 16 : 9 >$, su alto y y su ancho $x = \frac{16}{9}y$ cumplen, según el teorema de Pitágoras: $y^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 y^2 = 81.28^2$, es decir $4.16y^2 = 6606.44$; luego $y^2 = \frac{6606.44}{4.16} = 1588.09$ e $y = 39.85$ cm. Contando con la altura de la peana, es necesario disponer de al menos 49.85 cm.

4.6 *Respuesta correcta: c*

El alto de la pantalla es $y = \frac{9}{16}x$. Como $x^2 + y^2 = D^2$ o bien $x^2(1 + (9/16)^2) = D^2$, resulta

$$x^2 = \frac{D^2}{(1+(9/16)^2)} = \frac{16^2 \cdot D^2}{16^2 + 9^2} = \frac{16^2 \cdot D^2}{337}$$

y, en definitiva, $x = \frac{16 \cdot D}{\sqrt{337}}$. El resultado vale tanto si D y x se expresan en pulgadas, como si se expresan en centímetros; si D se mide en pulgadas y x en centímetros, hay que multiplicar por 2.54, o sea $x = \frac{40.64 \cdot D}{\sqrt{337}}$.

4.7 *Respuesta correcta: b*

Midiendo el ancho x en centímetros y la diagonal D en pulgadas, $x = \frac{40.64}{\sqrt{337}} \cdot D$. Es una función lineal de D que crece $\frac{40.64}{\sqrt{337}} = 2.21$ centímetros por cada pulgada de aumento de D.

4.8 *Respuesta correcta: a*

En centímetros la diagonal de la pantalla mide 165.1 cm. Su ancho x y su alto $y = \frac{9}{16}x$ deben cumplir $x^2 + y^2 = 165.1^2$, es decir $x^2(1 + 0.5625^2) = 165.1^2$; por tanto $x^2 = \frac{165.1^2}{1+0.5625^2} = 20706.38$ y $x = 143.9$ cm. En consecuencia, $y = 0.5625 \cdot 143.9 = 80.94$ cm. y el perímetro de la pantalla mide $2x + 2y = 449.68$ cm.

4.9 *Respuesta correcta: c*

La diagonal de la pantalla mide 65", luego su ancho x y su alto $y = 0.5625x$, medidos en pulgadas, verifican $x^2 + 0.5625^2 x^2 = 65^2$; por tanto $x = \sqrt{\frac{4225}{1.316}} = 56.65$" e $y = 0.5625 \cdot 56.65 = 31.87$". El área de la pantalla mide pues $x \cdot y = 56.65 \cdot 31.87 = 1805.44$ pulgadas cuadradas. En cm^2, hay que multiplicar por 2.54^2; con lo cual el área es $1805.44 \cdot 2.54^2 = 11647.97$ cm^2 o 1.16 m^2 aproximadamente.

4.10 *Respuesta correcta: b*

Sean x e y el ancho y el alto de la pantalla, mientras que x' e y' son el ancho y el alto de la imagen. Con el formato $< 16:9 >$ del televisor será $y = 0.5625x$, mientras que la imagen de formato $< 4:3 >$ tiene una altura $y' = 3/4x' = 0.75x'$. Como se ajusta la imagen para que sea $y = y'$, resulta $0.5625x = 0.75x'$ o bien $x' = \frac{0.5625}{0.75}x = 0.75x$. Así pues el ancho de la imagen es $x' = 3/4x$ y el resto de la pantalla, $1/4x$, aparece en sendas bandas negras en los laterales de la imagen.

4.11 *Respuesta correcta: b*

Puede comprobarse que $1280 \cdot 9 = 720 \cdot 16 = 11520$. También $1280 = 16 \cdot 80$ y $720 = 9 \cdot 80$. Al ser el cociente del número de columnas de píxels, dividido por el de filas, equivalente a $16/9$ resulta que los píxels son cuadrados.

4.12 *Respuesta correcta: a*

Como $1920 = 16 \cdot 120$ y $1080 = 9 \cdot 120$, la fracción $\frac{1920}{1080}$ es equivalente a $\frac{16}{9}$. Nuevamente las pantallas de resolución 1920×1080 se componen de píxels cuadrados.

4.13 *Respuesta correcta: b*

Basta observar que $1920 \times 1080 = 2073600$ píxels o, abreviadamente, 2 megapíxels.

4.14 *Respuesta correcta: a*

Como $1280 \times 720 = 921600$ píxels, puede enunciarse la resolución como 1 megapíxel o, con una precisión inusual, 0.92 megapíxels.

4.15 *Respuesta correcta: b*

Si x es el número de columnas e y el número de filas, el formato $< 4:3 >$ indica que $y = \frac{3}{4}x$. Por tanto $x \cdot y = \frac{3}{4}x^2$ tiene el valor aproximado de $5.5 \cdot 10^6$ (5.5 megapíxels) y resulta $x \simeq \sqrt{4 \cdot 5.5 \cdot 10^6/3} = 2708.01$. Como x es un número entero, será $x = 2708$ e $y = 2031$. De hecho, la resolución 2708×2031 equivale a 5.4999 megapíxels.

4.16 *Respuesta correcta: b*

El formato de la pantalla es $\frac{1280}{720} = \frac{16}{9}$; o técnicamente $< 16:9 >$. Con una diagonal de 65", su ancho x y su alto $y = 0.5625x$ cumplen $x^2 + 0.5625^2 x^2 = 65^2$, de modo que $x^2 = \frac{65^2}{1+0.5625^2} = 3209.5$ y $x = 56.652$ pulgadas. El tamaño de los píxels es pues $\frac{56.652}{1280} = 0.04426$" o bien $0.04426 \cdot 2.54 = 0.112$cm. $= 1.12$mm. El mismo resultado se obtiene dividiendo el alto $y = 0.5625 \cdot 56.652 = 31.867$" por el número de filas: $\frac{31.867}{720} = 0.4426$".

4.17 *Respuesta correcta: a*

El formato de la pantalla es $\frac{1920}{1080} = \frac{16}{9}$; o técnicamente $< 16:9 >$. Con 32" de diagonal, su ancho x y su alto $y = 0.5625x$ verifican $x^2 + 0.5625^2 x^2 = 32^2$, de donde $x^2 = \frac{32^2}{1+0.5625^2} = 777.88$ y $x = 27.89$". El número de píxels por pulgada es pues $\frac{1920}{27.89} = 68.84$. Igualmente, como el alto es $y = 0.5625 \cdot 27.89 = 15.69$, es $\frac{1080}{15.688} = 68.84$ *PPP*. El inverso $\frac{1}{68.84} = 0.0145$" es el tamaño de los píxels en pulgadas, que equivale a 0.0368cm. = 0.368mm.

4.18 *Respuesta correcta: c*

0.5 metros por cada 10" significa 0.05 metros por pulgada, de modo que la distancia en metros al televisor debe ser $0.05 \cdot D + 0.5$.

4.19 *Respuesta correcta: a*

La regla indica que la distancia a un televisor de tamaño D debe ser $0.05 \cdot D + 0.5$ metros. Si se va a ver a 2 metros de distancia, el tamaño debe ser $0.05 \cdot D + 0.5 = 2$, con lo cual $D = \frac{1.5}{0.05} = 30$".

4.20 *Respuesta correcta: b*

Sea x el ancho de la pantalla e $y = \frac{9}{16}x$ su alto. Como $x^2 + y^2 = D^2$, resulta $x^2 = \frac{D^2}{1+0.5625^2} = \frac{D^2}{1.3164}$ o bien $x = \frac{D}{1.147}$ pulgadas. La distancia mínima al televisor debe ser pues $2 \cdot \frac{D}{1.147} 2.54 = 4.43D$ centímetros o $f(D) = 0.0443D$ metros.

4.21 *Respuesta correcta: c*

Según la respuesta del ejercicio anterior, la distancia mínima al televisor debe ser $f(D) = 0.0443\,D$ metros. Para $D = 37$", resulta que un televisor de 37" no debe observarse a menos de $f(37) = 0.0443 \cdot 37 = 1.64$ metros.

4.22 *Respuesta correcta: b*

La distancia mínima a un televisor de tamaño D viene dada por $f(D) = 0.0443\,D$ metros. Para una distancia de 1.5 metros, cumplen $f(D) \leq 1.5$ los televisores de tamaño $D \leq \frac{1.5}{0.0443} = 33.86$". Dicho de otra manera, lo televisores de tamaño superior a 33.86" deben verse a más de 1.5 metros.

4.23 *Respuesta correcta: a*

Sea x el ancho de la pantalla e $y = 0.5625x$ su alto. Como $x^2 + y^2 = D^2$, resulta $x^2 = \frac{D^2}{1+0.5625^2} = \frac{D^2}{1.3164}$ o bien $x = \frac{D}{1.147}$ pulgadas. La distancia máxima al televisor debe ser pues $5 \cdot \frac{D}{1.147} 2.54 = 11\,D$ centímetros o $f(D) = 0.11\,D$ metros.

4.24 *Respuesta correcta: b*

Según la respuesta del ejercicio anterior, la distancia máxima al televisor debe ser $f(D) = 0.11\,D$ metros. Para $D = 24$", resulta que un televisor de 24" no debe observarse a más de $f(24) = 0.11 \cdot 24 = 2.64$ metros.

4.25 *Respuesta correcta: b*

La distancia máxima a un televisor de tamaño D viene dada por $f(D) = 0.11\,D$ metros. Para una distancia de 2 metros, cumplen $f(D) \geq 2$ los televisores de tamaño $D \geq \frac{2}{0.11} = 18.18$". Dicho de otra manera, lo televisores de tamaño inferior a 18.18" deben verse a menos de 2 metros.

4.26 *Respuesta correcta: a*

Según se ha visto, la primera recomendación expresa la distancia a un televisor de tamaño D" mediante la función $f(D) = 0.05\,D + 0.5$ metros. En cambio la distancia máxima al televisor se recomienda que sea $0.11\,D$ metros. Se cumple $0.05\,D + 0.5 < 0.11\,D$ siempre que sea $0.06D > 0.5$ o bien $D > 8.33$". Dado que los televisores son siempre de tamaño superior al indicado, ambas recomendaciones son siempre compatibles.

4.27 *Respuesta correcta: c*

Según se ha visto, la primera recomendación expresa la distancia a un televisor de tamaño D" mediante la función $f(D) = 0.05\,D + 0.5$ metros. En cambio la distancia mínima al televisor se recomienda que sea $0.0443\,D$ metros. Se cumple $0.05\,D + 0.5 > 0.0443\,D$ para cualquier televisor (de tamaño $D > 0$).

4.28 *Respuesta correcta: c*

El ancho x de la pantalla y su alto $y = 0.5625x$ cumplen $x^2 + y^2 = D^2$, luego $x\sqrt{1 + 0.5625^2} = D$ o bien $x = 0.87D$"; en metros $x = \frac{0.87 \cdot 2.54}{100} D$ metros. Si d designa la distancia en metros al televisor, el triángulo rectángulo de catetos d y $x/2$ debe formar en el espectador un ángulo de 15°, cuya tangente es 0.268. Por tanto $\frac{x/2}{d} = \operatorname{tg} 15°$, es decir $\frac{0.011\,D}{d} = 0.268$ o bien $d = \frac{0.011\,D}{0.268} = 0.041\,D$ metros. Se trata de una distancia ligeramente inferior a la distancia mínima de la recomendación (b).

5.1 *Respuesta correcta: b*

La proposición *"Si la plata es más densa que el oro, entonces el oro es más denso que el platino"* es un condicional que podemos simbolizar por $p \rightarrow q$, donde p es la proposición *"La plata es más densa que el oro"* y q es la proposición *"El oro es más denso que el platino"*. De acuerdo con los datos de la tabla 6.4, la proposición p es falsa, luego la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera cualquiera que sea el valor de verdad de q

5.2 *Respuesta correcta: a*

La oración *"¿Dónde está mi anillo de oro?"* es una interrogación y no afirma algo que pueda ser juzgado verdadero o falso. La oración *"Tiene un corazón de oro"* afirma un hecho que puede ser juzgado como verdadero o falso según a quién se aplique y es una proposición lógica. La oración *"No es oro todo lo que reluce"*. niega que si un objeto reluce, sea de oro y este hecho también puede ser considerado verdadero o falso, luego es una proposición lógica

5.3 *Respuesta correcta: c*

La proposición $p \rightarrow q$ enuncia que *"si es de oro macizo, entonces es barato"*; la proposición $\neg p \rightarrow q$ enuncia que *"si no es de oro macizo, entonces es barato"*; la respuesta correcta es $p \rightarrow \neg q$.

5.4 *Respuesta correcta: a*

En términos de p y q, la proposición *"No es cierto que si un objeto reluce, entonces sea de oro"* se representa por $\neg(q \rightarrow p)$, es decir es la proposición $\neg(\neg q \vee p) = q \wedge \neg p$.

5.5 *Respuesta correcta: c*

Aplicado a los metales preciosos, el quilate no es una unidad de masa, sino de la riqueza de la aleación. La cantidad de oro de cada anillo depende de la pureza del oro (los quilates que tiene) y la masa total del anillo; con los datos del enunciado no puede saberse si un anillo contendrá más o menos gramos de oro que el otro, tan sólo que el anillo de Juan contiene más oro por gramo que el de María.

5.6 *Respuesta correcta: a*

El razonamiento es un caso particular del *modus ponendo ponens*. Otra vez, observemos que la validez del razonamiento no tiene que ver con la verdad o falsedad de la conclusión. La proposición *"El oro es más denso que el platino"* es falsa, pero el razonamiento es lógicamente válido.

5.7 *Respuesta correcta: b*

El razonamiento es un caso particular del *modus tollendo tollens*.

5.8 *Respuesta correcta: c*

Designemos la proposición *"La plata es más densa que el oro"* por p y la proposición *"El oro es más denso que el platino"* por q; con símbolos, el razonamiento anterior se traduce en

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & \neg q \end{array}$$

La tabla de verdad del razonamiento es:

		Premisas		Conclusión
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Como puede apreciarse hay un caso en que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa. Por tanto, el razonamiento es una falacia.

5.9 *Respuesta correcta: b*

Designemos la proposición *"La plata es más densa que el oro, entonces el paladio es más denso que el platino"* por p, la proposición *"El paladio es más denso que el platino"* por q y la proposición *"El oro es más denso *que el paladio"* por r; con símbolos, el razonamiento anterior se traduce en

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & q \rightarrow r \\ \hline \therefore & p \rightarrow r \end{array}$$

luego es un caso particular de la Ley del silogismo hipotético.

5.10 *Respuesta correcta: a*

Designemos la proposición *"El paladio es denso que el oro"* por p y la proposición *"El paladio es más denso que la plata"* por q; con símbolos, el razonamiento anterior se traduce en

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

La tabla de verdad del razonamiento es:

		Premisas		*Conclusión*
p	q	$p \vee q$	$\neg p$	q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Como puede apreciarse, siempre que las premisas son verdaderas la conclusión también lo es, luego el razonamiento es lógicamente válido pero no es un caso particular de la Ley del silogismo hipotético ya que el razonamiento no tiene premisas condicionales.

5.11 *Respuesta correcta: a*

El conjunto está definido por una enumeración de los metales que lo componen.

5.12 *Respuesta correcta: b*

Todos los metales del conjunto B son preciosos, luego el conjunto B es un subconjunto de A.

5.13 *Respuesta correcta: c*

Todos los metales preciosos son metales pero no todos los metales son preciosos, luego $A \subset B$ y, en consecuencia, $B^c \subset A^c$. La respuestas a y b no son ciertas ya que hay metales que no son preciosos.

5.14 *Respuesta correcta: b*

La composición de una aleación de dos metales se puede interpretar como un subconjunto de dos metales. El conjunto A tiene seis subconjuntos formados por dos elementos

$$\begin{array}{ccc} \{\text{plata}, \text{paladio}\} & \{\text{plata}, \text{oro}\} & \{\text{plata}, \text{platino}\} \\ \{\text{paladio}, \text{oro}\} & \{\text{paladio}, \text{platino}\} & \{\text{oro}, \text{platino}\} \end{array}$$

luego hay seis composiciones posibles de aleaciones de dos metales de A.

5.15 *Respuesta correcta: a*

A cada aleación le corresponde un subconjunto, luego es aplicación; además, es inyectiva, ya que dos aleaciones con distintas tienen composiciones distintas y se transforman den distintos subconjuntos. La transformación no es sobreyectiva, ya que los subconjuntos de A que sólo tienen un elemento no tienen preimagen, ya que se considera aleación a la combinación de dos o más metales.

5.16 *Respuesta correcta: a*

Para hallar los quilates del nuevo anillo es necesario calcular la fracción de su masa que es oro y reducir esa fracción a denominador 24; el numerador de esa fracción es el número de quilates.

El primer anillo es de 23 quilates, luego el oro que contiene es igual a la $\frac{23}{24}$ partes de la masa total; así, contiene $\frac{23}{24} \cdot 5$ gramos de oro. El segundo anillo contiene $\frac{20}{24} \cdot 10$ gramos de oro. El nuevo anillo tendrá un peso de 15 gramos y contendrá $\frac{23}{24} \cdot 5 + \frac{20}{24} \cdot 10$ gramos de oro. La proporción de oro en su masa es igual al cociente del contenido de oro entre la masa total.

$$\frac{\frac{23}{24} \cdot 5 + \frac{20}{24} \cdot 10}{15} = \frac{23 + 40}{3 \cdot 24} = \frac{21}{24}$$

Luego el nuevo anillo es de oro de 21 quilates.

5.17 *Respuesta correcta: b*

La moneda de 10 g contiene

$$\frac{20}{24} \cdot 10 = \frac{200}{24} \approx 8.33$$

gramos de oro; la moneda de media onza contiene

$$\frac{18}{24}\cdot\frac{31.1}{2}\approx 11.66$$

gramos de oro.

5.18 *Respuesta correcta: c*

El contenido en oro de un anillo de oro 22 quilates y 9 g de masa es $\frac{22}{24}\cdot 9=8.25$ g.

5.19 *Respuesta correcta: b*

El peso del oro contenido en la moneda es $\frac{22}{24}\cdot 15=13.75$ g. El peso del oro que contiene el anillo es $\frac{18}{24}\cdot 12=9$ g. Luego el contenido total de oro es $13.75+9=22.75$ g por el que pagarán $22.75\cdot 30=682.5$ euros.

5.20 *Respuesta correcta: c*

Designemos por x el precio marcado en el escaparate y por d la cantidad de dinero que lleva. Puesto que si compra dos monedas al precio x le sobrarán 50 euros, podemos poner $2x+50=d$. Por otra parte, si le rebajan un 10 % el precio, cada moneda valdrá $0.9x$ y, puesto que ha comprado tres monedas rebajadas y le han sobrado 8 euros, podemos poner $3\cdot 0.9x+8=d$. Las condiciones del enunciado se traducen en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 50 & = & d \\ 2.7x & + & 8 & = & d \end{array}\right\}$$

Si restamos la primera ecuación a la segunda, resulta $0.7x-42=0$; luego $x=42/0.7=60$.

5.21 *Respuesta correcta: b*

Designemos por x el precio marcado en el escaparate. Si le rebajan el precio un r%, cada moneda pasará a costar $(1-\frac{r}{100})x$. El coste de tres monedas sin rebaja es $3x$; el coste de cuatro monedas rebajadas un r% es $4(1-\frac{r}{100})x$. Para que tres monedas al precio original cuesten igual que cuatro rebajadas debe cumplirse

$$3x=4\left(1-\frac{r}{100}\right)x$$

es decir $3=4-4\frac{r}{100}$, o bien $4r=100$, luego $r=25$; la rebaja debe ser del 25 %.

5.22 *Respuesta correcta: a*

Designemos por x el precio de la onza de plata y por y el precio de la media onza de oro. De la primera condición se tiene $x+2y=1100$ y de la segunda $2x+y=595$. Para resolver el sistema de dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1100 \\ 2x & + & y & = & 595 \end{array}\right\}$$

restamos a la segunda ecuación el doble de la primera y resulta

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1100 \\ & & -3y & = & -1605 \end{array}\right\}$$

luego $y=2705/3=535$; si reemplazamos este valor en la primera ecuación, resulta $x+1070=1100$, luego $x=1100-1070=30$.

5.23 *Respuesta correcta: c*

Designemos por x el número de onzas, en millones, que había en la reserva antes de realizar la venta; si el 32 % de x es igual a 4.3 millones de onzas, se tiene $0.32x=4.3$, luego $x=4.3/0.32=13.44$ millones de onzas.

5.24 *Respuesta correcta: c*

Designemos por x el número de onzas, en millones, que había en la reserva antes de realizar la venta. Si no se han realizado nuevas ventas, la reserva actual contiene el 68 % de las onzas de oro que había en 2011, es decir $0.68x$; el valor de la reserva es $1050\times 0.68x$ millones de euros. Puesto que el 32 % de x es igual a 4.3 millones, se tiene $0.32x=4.3$ y, en millones de euros, el valor de la reserva actual es

$$1050\times 0.68x=1050\times 0.68\frac{4.3}{0.32}=\frac{3070.2}{0.32}=9594.37$$

6.1 *Respuesta correcta: c*

El coste fijo c es igual a 5.5y el porcentaje añadido por el comerciante del 6%, es decir $r = 0.06$, el precio es igual a $f(x) = (1+r)x+c$, donde x es la cotización de la onza de oro. En este caso, $f(x) = 1.06x+5.5$. Si $x = 1300$, entonces $f(x) = 1.06 \times 1300+5.5 = 1383.5$.

6.2 *Respuesta correcta: a*

Puesto que la gráfica de función precio es una recta, basta hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1,y_1) = (1000,1054)$ y $(x_2,y_2) = (1200,1264)$.

$$y-1054 = \frac{1264-1054}{1200-1000}(x-1000)$$

se sigue $y-1054 = 1.05(x-1000)$, o bien $y-1054 = 1.05x-1050$, es decir $y = 1.05x+4$. Luego el coste fijo de la pieza es $c = 4$.

6.3 *Respuesta correcta: a*

Puesto que la gráfica de función precio es una recta, basta hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1,y_1) = (1100,1149)$ y $(x_2,y_2) = (1300,1357)$.

$$y-1149 = \frac{1357-1149}{1300-1100}(x-1100)$$

se sigue $y-1149 = 1.04(x-1100)$, o bien $y-1149 = 1.04x-1144$, es decir $y = 1.04x+5$. Luego la prima añadida por el comerciante es $r = 0.04$ o el 4% del valor intrínseco de la pieza.

6.4 *Respuesta correcta: c*

Puesto que la gráfica de función precio es una recta, basta hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1,y_1) = (1000,1054)$ y $(x_2,y_2) = (1200,1264)$.

$$y-1054 = \frac{1264-1054}{1200-1000}(x-1000)$$

se sigue $y-1054 = 1.05(x-1000)$, o bien $y-1054 = 1.05x-1050$, es decir $y = 1.05x+4$. Cuando $x = 1300$, el precio de venta será $1.05 \times 1300+4 = 1369$.

6.5 *Respuesta correcta: b*

La función precio es una suma de funciones, $f'(x) = (1.045x)'+(4)'$, luego $f'(x) = 1.045+0 = 1.045$. La derivada del precio es constante e igual a la pendiente de la recta, esto es característico de las funciones lineales. Su interpretación económica es que es el incremento que tiene el precio si la cotización aumenta una unidad monetaria.

6.6 *Respuesta correcta: c*

El valor de x que hace los precios iguales, $f_A(x) = f_B(x)$ es la solución de la ecuación $1.04x+5 = x+35$, es decir $0.04x = 30$, luego $x = 30/0.04 = 750$.

6.7 *Respuesta correcta: a*

La función $f_A(x) = 1.06x+5$ es lineal y creciente, cuánto mayor es el precio x, más vale la función; se sigue que su gráfica es una recta que tiene pendiente igual a 1.06. De manera semejante, la función $f_B(x) = x+40$ es lineal y creciente, con pendiente igual a 1.

La figura de la alternativa b no representa correctamente las funciones $f_A(x)$ y $f_B(x)$ ya que una de las funciones es creciente y la otra decreciente. Tampoco la alternativa c representa correctamente las funciones $f_A(x)$ y $f_B(x)$, ya que sus gráficas no son rectas paralelas, puesto que tienen pendientes distintas. La alternativa a si representa fielmente las propiedades de ambas funciones, la gráfica de $f_A(x)$ tiene una pendiente mayor que la de $f_B(x)$, por lo que crece más rápidamente; sin embargo, el término fijo de B es mayor que el de A y se tiene que para valores pequeños de x, el precio $f_A(x)$ es menor que $f_B(x)$, mientras que para valores grandes de x ocurre al revés.

Habrá un valor x para el cual los dos precios se igualen. Podemos hallar ese valor poniendo $f_A(x) = f_B(x)$, es decir

$$1.06x+5 = x+40$$

o bien $0.06x = 35$; si tomamos dos decimales exactos, se sigue $x = 35/0.06 = 583.33$. Por debajo de 583.33 es más barato comprar a B, por encima es mejor comprar a B.

6.8 *Respuesta correcta: b*

La longitud del contorno de la moneda es aproximadamente la longitud de una circunferencia de radio $\frac{28}{2}$, por lo que su medida es $L = 2\pi\frac{28}{2} \approx 87.96$mm.

7 SUMINISTRO Y CONSUMO ANUAL DE ORO

7.1 *Respuesta correcta: c*

De acuerdo con los datos de la tabla 6.5, la producción primaria mundial de oro fue igual a $420+255+227+220+150+145+120+100+1133=2770$, luego el porcentaje de producción procedente de China fue $\frac{420}{2770}\cdot 100\,\%$, es decir $15.16\,\%$.

7.2 *Respuesta correcta: b*

Durante 2013, la producción de USA fue de 227 toneladas y la de Australia de 255 toneladas. Para que USA tuviera en 2014 la misma producción que Australia tuvo en 2013, debería aumentarla en 28 toneladas; es decir la producción de 2013 debería aumentar en un $\frac{28}{227}\cdot 100\,\% = 12.33\,\%$ para alcanzar las 255 toneladas.

7.3 *Respuesta correcta: a*

Hasta el final de 2012 se habían extraído 175000 toneladas. En 2013, de acuerdo con los datos de la tabla 6.5, la producción primaria mundial de oro fue de 2770 toneladas que incrementaron el tonelaje extraído en un porcentaje igual a $\frac{2770}{175000}\cdot 100\,\% = 1.58\,\%$.

7.4 *Respuesta correcta: a*

De acuerdo con los datos de la tabla 6.6, la producción en 1970 fue de 1000.4 toneladas, mientras que la producción en 2010 fue de 189 toneladas. En términos absolutos, la producción en 2010 ha disminuido en $1000.4-189=811.4$ toneladas respecto de 1970, luego había disminuido en un $\frac{811.4}{1000.4}\cdot 100 = 81.11\,\%$ respecto de la producción de 1970.

La alternativa b no es correcta; si la producción disminuye, lo hará en cierta cantidad positiva, ya que como mucho disminuirá en el total cuando la producción se reduzca a cero. El porcentaje de disminución será positivo.

La alternativa c no es correcta; la producción de 1970, respecto de la de 2010, fue mayor en un porcentaje igual al $\frac{811.4}{189}\cdot 100 = 429.31\,\%$.

7.5 *Respuesta correcta: b*

La media de las nueve producciones de la tabla 6.6 es igual a

$$\frac{1000.4+713.4+674+670.8+605.4+523.8+428.3+296+189}{9} = 566.79$$

Así, cinco de los valores de la tabla son mayores que la media y cuatro son menores.

La respuesta c no es correcta porque ninguno de los valores es mayor que el doble de la media.

7.6 *Respuesta correcta: b*

La varianza es igual al promedio de los cuadrados menos el cuadrado de la media.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

En este caso, la suma de los cuadrados es igual a $1000.4^2+713.4^2+674^2+670.8^2+605.4^2+523.8^2+428.3^2+296^2+189^2=3361641.85$, luego el promedio de los cuadrados es

$$\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i^2}{9} = \frac{3361641.85}{9} = 373515.76$$

y la varianza es

$$s^2 = 373515.76 - 566.79^2 = 52264.86$$

7.7 *Respuesta correcta: a*

El consumo total de oro durante el primer trimestre de 2014 fue de

$$570.7+00+282.3+282.5 = 1234.5$$

toneladas, el porcentaje de este consumo total debido al consumo en joyería es $\frac{570.7}{1234.5}\cdot 100 = 46.23\,\%$. Análogamente, el porcentaje del consumo total debido al consumo en tecnología es $\frac{99.0}{1234.5}\cdot 100 = 8.02\,\%$, el debido al consumo en inversión es $\frac{282.3}{1234.5}\cdot 100 = 22.87\,\%$ y el debido a los bancos centrales es $\frac{282.5}{1234.5}\cdot 100 = 22.88\,\%$.

7.8 *Respuesta correcta: c*

La respuesta a no es correcta; en el primer trimestre de 2013, el consumo total fue de 1077.1 toneladas y el consumo de oro debido a la inversión o a los bancos centrales fue de $288.1+130.8=418.9$ toneladas, luego el porcentaje del consumo total debido a estos dos sectores fue el $\frac{418.9}{1077.1} \cdot 100 = 38.89\,\%$; por otra parte, el consumo total del primer trimestre de 2014 fue de 1234.5 toneladas y el consumo debido a la inversión y a los bancos centrales fue de $282.3 + 282.5 = 564.8$ toneladas; luego el porcentaje del consumo total debido a estos dos sectores fue el $\frac{564.8}{1234.5} \cdot 100 = 45.75\,\%$. Así, el porcentaje de consumo debido a estos dos sectores no ha disminuido sino que ha aumentado.

La respuesta b no es correcta; durante el primer trimestre de 2013, el porcentaje del consumo total debido a los bancos centrales fue el $\frac{130.8}{1077.1} \cdot 100 = 12.14\,\%$, mientras que durante el primer trimestre de 2014, el porcentaje del consumo total debido a los bancos centrales fue el $\frac{282.5}{1234.5} \cdot 100 = 22.88\,\%$, luego el porcentaje no se ha duplicado. Observemos que el consumo absoluto si se ha más que duplicado, pues ha pasado de 130.8 a 282.5 toneladas, sin embargo el porcentaje no, ya que al mismo tiempo ha crecido el consumo total.

La respuesta c es correcta; durante el primer trimestre de 2013, el porcentaje del consumo total debido a l a joyería fue el $\frac{554.7}{1077.1} \cdot 100 = 51.50\,\%$, mientras que durante el primer trimestre de 2014, el porcentaje del consumo total debido a este sector fue el $\frac{570.7}{1234.5} \cdot 100 = 46.23\,\%$, luego el porcentaje ha disminuido. Observemos que, aunque el consumo absoluto de joyería ha aumentado de un trimestre a otro, su porcentaje ha disminuido debido, otra vez, al aumento del consumo total.

7.9 *Respuesta correcta: a*

El histograma a) es el apropiado ya que tiene una barra por cada año considerado y representa la producción del año en cuestión, de esta forma, al comparar visualmente el tamaño de dos barras estamos comparando las producciones en esos periodos.

El histograma b) no representa la producción absoluta de cada periodo sino la proporción del total producido que corresponde a cada año; sin cálculos adicionales y sin conocer el total producido no podemos comparar entre sí las producciones de dos años dados.

El histograma c) representa la producción *acumulada* en cada periodo ya que cada barra tiene una altura proporcional a la producción del año correspondiente más lo producido en los años anteriores. Tampoco permite comparar directamente las producciones de dos años sin hacer algunos cálculos para descontar lo producido en los periodos anteriores.

7.10 *Respuesta correcta: a*

El diagrama a es el más adecuado ya que tiene los sectores dibujados con un ángulo proporcional a la importancia relativa de cada sector dentro de la demanda total; además, nos informa mediante las leyendas del valor de esa proporción.

Los diagramas b y c no representan gráficamente los porcentajes ya que los sectores son del mismo tamaño cuando las proporciones de los sectores son bien distintas.

8 MEDIDAS DEL TIEMPO

8.1 *Respuesta correcta: b*

Marcará la hora exacta cuando se haya atrasado 12 horas o bien 720 minutos. Como se atrasa 8 minutos al día, tardará $720/8 = 90$ días atrasarse 720 minutos.

8.2 *Respuesta correcta: a*

Para adelantarse 12 horas completas o 720 minutos, el reloj tardará $720/7 = 102.8571428$ días. Pero 0.8571428 días equivalen a $0.8571428 \cdot 24 = 20.5714272$ horas; a su vez 0.5714272 horas son $0.5714272 \cdot 60 = 34.2856314$ minutos y 0.2856314 minutos son $0.2856314 \cdot 60 = 17.137884$ segundos.

8.3 *Respuesta correcta: c*

Hasta las 18:22 del Viernes, transcurren $3 \cdot 24 = 72$ horas. De ellas hay que descontar el tiempo entre las 10:50 y las 18:22 del Viernes, que son 7 horas 32 minutos o 452 minutos. Así pues, entre los instantes indicados transcurren $72 \cdot 60 - 452 = 3868$ minutos.

8.4 *Respuesta correcta: a*

Hasta las 16:15 del 14 de Marzo, transcurren 8 horas y 35 minutos y faltan 5 días completos, o 120 horas, para el momento final. Total 128 horas y 35 minutos, o bien $128.58\widehat{3}$ horas.

8.5 *Respuesta correcta: b*

Sumando directamente la hora de salida y la duración del viaje, se obtiene 26:96. Pero 96 minutos es 1 hora y 36 minutos, así que la hora de llegada serán las 27:36, referidas al comienzo del día de salida. Pero, a las 24:00 se habrá producido el cambio de fecha, de manera que en el horario del día siguiente son las 3:36 de la madrugada.

8.6 *Respuesta correcta: a*

Con el horario de Zagreb, el viaje que empieza a la 8:30 termina a las 23:82 que son, en realidad, las 0:22 del día siguiente. Como en Atenas es una hora más que en Zagreb, los relojes en Atenas marcarán la 1:22 de la madrugada.

8.7 *Respuesta correcta: b*

El viaje dura de las 16:30 hasta las 32:31 o, mejor dicho, las 8:31 del día siguiente, siempre en hora de Atenas. Como en Zagreb es una hora menos, serán las 7:31 hora local.

8.8 *Respuesta correcta: c*

Debido a las 5 horas de diferencia horaria, en el horario de Madrid, la llegada a Río de Janeiro se produce a las 22:15. Siempre en horario de Madrid, a las 21:40 se lleva volando 10 horas, quedan 20 minutos para las 22:00 y 35 minutos para las 22:15. Luego el vuelo dura 10 horas y 35 minutos. También, el vuelo sale a las 6:40, hora de Brasil, y llega a las $17:15 = 16$ horas$+75$ minutos; así que, restando, la duración del vuelo es de 10 horas y 35 minutos.

8.9 *Respuesta correcta: a*

Como en Hong Kong son 6 horas más que en París, el vuelo llega a las 4:30 horas de París, pero del día siguiente a la salida. Sumando 24 horas, han transcurrido 28 horas y 30 minutos, o bien 27 horas y 90 minutos, desde que empezó en París el día de la salida. Restando la hora de salida: $27\text{ h}+90\text{ m}-(12\text{ h}+35\text{ m}) = 15\text{ h}+55\text{ m}$ es la duración del vuelo.

8.10 *Respuesta correcta: a*

Desde que empezó el día de salida en Nueva York, hasta que se llega a París, han transcurrido 28 horas y 70 minutos o, mejor dicho, 29 horas y 10 minutos. En el horario de Nueva York, la hora de llegada a París son las 5:10 del día siguiente y en París son 6 horas más; es decir, las 11:10.

8.11 *Respuesta correcta: c*

El vuelo sale a las 13:10 hora de Nueva York; sumando la duración del vuelo, llega a Nueva York cuando allí son las 21:15.

8.12 *Respuesta correcta: b*

Conviene medir el tiempo t en horas, a partir de la salida del primer tren; mientras que la posición x de cada tren sobre la vía se medirá en kilómetros, a partir de Málaga. En el instante t, el primer tren se encuentra en el punto: $x = 90 \cdot t$, puesto que recorre 90 kilómetros cada hora. El tren que sale de Barcelona parte 2 horas y 20 minutos después, lo que equivale a 7/3 de hora; además inicialmente está a 900 kilómetros de Málaga. Como viaja a 120 Km/h, la posición del segundo tren es $x = 900 - 120(t - 7/3)$. Ambos trenes se cruzarán cuando sus posiciones coincidan; es decir, cuando

$$90t = 900 - 120(t - 7/3) \quad \text{o bien} \quad 90t = 1180 - 120t.$$

La solución de esta ecuación es $t = 118/21 = 5.619$ horas. Ello equivale a 5 horas, $0.619 \cdot 60 = 37.1428$ minutos, o bien 5 horas, 37 minutos y $0.1428 \cdot 60 = 8.57$ segundos. Como el tiempo se ha contado a partir de las 8:00, los trenes se cruzan a las 13:37:08.

8.13 *Respuesta correcta: a*

Conviene medir el tiempo t en horas, a partir de las 12:30 y la posición x de los coches en kilómetros, a partir de Valencia. Así, en el instante t, la posición del primer coche será $x = 110t$. Mientras que el segundo coche, que parte 1.5 horas más tarde a distancia 612 kilómetros de Valencia, será $x = 612 - 90(t - 1.5)$. Cuando ambos coches se crucen, sus posiciones coincidirán y se cumplirá

$$110t = 612 - 90(t - 1.5) \quad \text{o bien} \quad 110t = 747 - 90t.$$

De ahí que $t = 747/200 = 3.735$ horas. En ese tiempo, el primer coche ha recorrido $110 \cdot 3.735 = 410.85$

kilómetros y ambos se encuentran a esa distancia de Valencia.

8.14 *Respuesta correcta: b*

A partir del meridiano de Greenwich la longitud geográfica se extiende desde los 180° de longitud Este hasta los 180° de longitud Oeste; completando lógicamente los 360° en los que se divide cualquier circunferencia. Puesto que hay 24 husos horarios, cada uno abarca $360°/24 = 15°$.

8.15 *Respuesta correcta: c*

La circunferencia de la Tierra en el Ecuador es $L = 2\pi \cdot 6375 = 40055$ kilómetros. Puesto que hay 24 husos horarios, cada uno mide $40055/24 = 1669$ kilómetros de ancho en el ecuador.

8.16 *Respuesta correcta: b*

Como recorre 5° cada día, tarda $360/5 = 72$ días exactos en completar su viaje. Si, tras navegar un tiempo t, medido en días, ve por primera vez al Sol pasar sobre él, habrá recorrido $t \cdot 5°$, mientras que el Sol ha recorrido $360° - t \cdot 5°$. Como el Sol recorre 360° por día, t es solución de la ecuación

$$360° - t \cdot 5° = t \cdot 360°$$

es decir $t = 360/365 = 0.9863$ días. Cada día se repite lo mismo y los pasos del Sol sobre el navegante están espaciados por lapsos de 0.9863 días. Al completar su viaje, el número n de lapsos transcurridos entre pasos consecutivos del Sol por su vertical es tal que $n \cdot 0.9863 = 72$, o sea $n = 72/0.9863 = 73$. Puede caer en el error de pensar que ha tardado 73 días, cuando en realidad ha tardado 72 días.

El fenómeno no depende de la velocidad del navegante (siempre que no sea muy elevada): Si recorre $v°$ cada día, el instante t en que ve el primer paso del Sol por su vertical se obtiene de la ecuación $360° - t \cdot v° = t \cdot 360°$; así que $t = 360/(360 + v)$ es el lapso entre los pasos consecutivos del Sol sobre él. Su viaje dura $360/v$ días y, durante ese tiempo, observa

$$n = \frac{360/v}{360/(360+v)} = \frac{360+v}{v} = \frac{360}{v} + 1$$

pasos del Sol por su vertical; uno más de lo que dura su viaje.

8.17 *Respuesta correcta: a*

Como recorre 8° cada día, tarda $360/8 = 45$ días exactos en completar su viaje. Si, tras navegar un tiempo t, medido en días, ve por primera vez al Sol pasar sobre él, habrá recorrido $t \cdot 8°$, mientras que el Sol ha recorrido $360° + t \cdot 8°$. Como el Sol recorre 360° por día, t es solución de la ecuación

$$360° + t \cdot 8° = t \cdot 360°$$

es decir $t = 360/352 = 1.0227$ días. Cada día se repite lo mismo y los pasos del Sol sobre el navegante están espaciados por lapsos de 1.0227 días. Al completar su viaje, el número n de lapsos transcurridos entre pasos consecutivos del Sol por su vertical es tal que $n \cdot 1.0227 = 45$, o sea $n = 45/1.0227 = 44$. Puede caer en el error de pensar que ha tardado 44 días, cuando en realidad ha tardado 45 días.

Como en el ejercicio anterior, la respuesta no depende de la velocidad moderada del navegante.

8.18 *Respuesta correcta: b*

Los equinoccios ocurren cuando el día y la noche tienen la misma duración: 12 horas de luz diurna y 12 horas de obscuridad. A y C son los puntos que están sobre la recta de ordenada 12 horas.

8.19 *Respuesta correcta: c*

En el solsticio de verano la luz diurna tiene la máxima duración, tal como ocurre en el punto B del gráfico. El solsticio de invierno, cuando la luz diurna alcanza tiene la mínima duración, corresponde al punto D del gráfico

8.20 *Respuesta correcta: c*

En cualquier lugar, la hora de salida y de puesta del Sol varía poco de un día al siguiente. En ambos gráficos se aprecian saltos de una hora aproximadamente, debido a que se ha consignado en ellos la hora legal que añade una hora a los relojes a finales de Marzo y se la resta a finales de Octubre. De esta forma, si amaneció a las 7:00 el día anterior al horario de verano, amanecerá a las 8:00 el día siguiente al cambio. De modo análogo, si anocheció a las 19:00 el último día del horario de verano, anochecerá a las 18:00 el primer día del horario de invierno.

8.21 *Respuesta correcta: b*

Un siglo dura 100 años y, en particular, el siglo I comprende los años $1,2,3,\ldots,100$. En consecuencia, el siglo I terminó el 31 de Diciembre del año 100 y el siglo II empezó el 1 de Enero del año 101.

Nunca hubo año 0, ni siglo 0. Inicialmente, los años se contaban de forma ordinal: el *primer* año después de Cristo, el *segundo*, el *tercero*, etc. Pronto debió abandonarse esta práctica, pues es más cómodo referirse al año 23 que al *vigésimo tercer* año; y mucho más para el año 117. Todavía se oye hablar del primer, segundo o tercer milenio, en lugar del milenio 1, 2 o 3; pero tal práctica desaparecerá si la humanidad sobrevive para el *trigésimo cuarto milenio*.. Igual que ya nadie habla del *vigésimo primer* siglo para referirse al siglo XXI.

8.22 *Respuesta correcta: a*

El primer milenio abarca los mil años $\{1,2,3,\ldots,1000\}$, el segundo es el conjunto de los años $\{1001,1002,\ldots,2000\}$ y el tercero empezó el 1 de Enero de 2001.

Todo el mundo recuerda las celebraciones del Año Nuevo de 2000, cuando faltaba un año para que empezase el siglo XXI. Bien es cierto que las celebraciones son una convención cultural, sin que haya ninguna diferencia real entre ambas fechas.

8.23 *Respuesta correcta: b*

En cada ciclo de 400 años, hay 100 que son múltiplos de 4 y, de entre ellos, 4 que son múltiplos de 100, de los cuales uno es múltiplo de 400. Si A representa el conjunto de los años del ciclo que son múltiplos de 4, B el conjunto de los que son múltiplos de 100 y C el conjunto de los que son múltiplos de 400, se verifica $C \subset B \subset A$, así como $\#(A) = 100$, $\#(B) = 4$, $\#(C) = 1$. El conjunto de los años bisiestos en el calendario Gregoriano es $A-(B-C)$ y se tiene

$$\#(B-C) = 4-1 = 3$$

con lo cual

$$\#(A-(B-C)) = 100-3 = 97.$$

Alternativamente

$$\begin{aligned} A-(B-C) &= A\cap(B-C)^c = A\cap(B\cap C^c)^c \\ &= A\cap(B^c\cup C) = (A\cap B^c)\cup(A\cap C) \\ &= (A-B)\cup C \end{aligned}$$

y, puesto que $\#(A-B) = 96$ y $\#(C) = 1$, se obtiene $\#((A-B)\cup C) = 96+1 = 97$.

8.24 *Respuesta correcta: a*

El calendario Gregoriano utiliza ciclos de 400 años, de los cuales 97 son bisiestos y tienen un día suplementario, mientras que los 303 restantes tienen 365 días. Por tanto, el ciclo dura

$$400\cdot 365+97 = 146097 \text{ días;}$$

lo cual coincide con

$$303\cdot 365+97\cdot 366 = 146097 \text{ días.}$$

La duración media de los años es entonces

$$\frac{146097}{400} = 365.2425\text{días.}$$

8.25 *Respuesta correcta: c*

Naturalmente, hay que suponer que la fecha corresponde al año Juliano que rigió desde el 46 a.C. hasta el 1582 d.C. Desde el 1 de Enero del año 1, hasta el 31 de Diciembre del año 406, transcurrieron 406 años; entre ellos hubo 101 años bisiestos (los múltiplos de 4: $4,8,12,\ldots,404$), así que la invasión se produjo el día $406\cdot 365+101 = 148291$ de nuestra era. Alternativamente, teniendo en cuenta que cada año del calendario Juliano duraba 365.25 días, habían transcurrido $406\cdot 365.25 = 148291.5$ días, de los cuales hay que descontar los 0.5 días que no se contabilizarían hasta el siguiente año bisiesto (el 408).

8.26 *Respuesta correcta: a*

En 1789 regía ya en Francia el calendario Gregoriano, que había sido ajustado para recuperar el adelanto del calendario Juliano; así que se puede suponer que el calendario Gregoriano había regido desde el año 1 de nuestra era. Hasta el final de 1600, se habían completado cuatro ciclos de 400 años con 97 años bisiestos cada uno; total

$$4 \cdot (400 \cdot 365 + 97) = 584\,388 \text{ días.}$$

En los 188 años siguientes, hasta el final de 1788, hubo 47 años múltiplos de 4 $(1604, 1608, \ldots, 1788)$, que fueron todos bisiestos, salvo 1700. Ello añade

$$188 \cdot 365 + 46 = 68\,666 \text{días más.}$$

Por último, desde el 1 de Enero de 1789 hasta el 14 de Julio del mismo año, transcurrieron

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 14 = 195 \text{ días.}$$

En resumen, la toma de la Bastilla ocurrió el día

$$584\,388 + 68\,666 + 195 = 653\,249 \text{ d.C.}$$

Una buena aproximación es multiplicar los 1788 años completos por su duración media 365.2425 y añadir los 195 días de 1789. Así

$$1788 \cdot 365.2425 + 195 = 653\,248.59 \text{ días.}$$

8.27 *Respuesta correcta: c*

Las horas trabajadas son $5 \cdot 8 = 40$, mientras que la semana consta de $7 \cdot 24 = 168$ horas. Por consiguiente, la proporción de tiempo trabajado es

$$\frac{40}{168} = 0.2381 = 23.81\,\%.$$

8.28 *Respuesta correcta: a*

Si el mes empieza en Jueves, incluye 5 Sábados, 4 Domingos y 22 días laborables. El tiempo total trabajado es de $22 \cdot 8 = 176$ horas, de un total de las $31 \cdot 24 = 744$ horas del mes. La proporción de tiempo trabajado es

$$\frac{176}{744} = 0.2366 = 23.66\,\%.$$

8.29 *Respuesta correcta: b*

Desde luego son distintos los calendarios impresos para los años bisiestos (en los que figura el 29 de Febrero) y para los años normales. Además el 1 de Enero puede caer el cualquiera de los 7 días de la semana, de Lunes a Domingo; luego sólo hay 14 calendarios diferentes.

8.30 *Respuesta correcta: a*

Entre los años 2014 y 2018 sólo es bisiesto el 2016. El 6 de Mayo será Miércoles en 2015, Viernes en 2016, Sábado en 2017 y Domingo en 2018.

8.31 *Respuesta correcta: b*

A pesar de que 2016 es bisiesto, el 4 de Febrero de 2016 será Jueves, puesto que el día extra se introduce al final de Febrero. Pero el 4 de Febrero de 2017 será Sábado, ya que hasta entonces han transcurrido 52 semanas y dos días. En 2018, el 4 de Febrero será Domingo; en 2019, Lunes y en 2020, Martes.

8.32 *Respuesta correcta: b*

Desde un 29 de Febrero hasta el siguiente pasan $4 \cdot 365 + 1 = 1461$ días; ello supone 208 semanas y cinco días adicionales y, por consiguiente, el 29 de Febrero siguiente será Jueves. La regla no vale, por ejemplo, para el 1896 porque 1900 no fue bisiesto y el 29 de Febrero siguiente ocurrió en 1904. En este caso, pasan $8 \cdot 365 + 1 = 2921$ que son 417 semanas y dos días; de forma que el 29 de Febrero de 1904 fue Lunes.

9 EL MUNDO DEL FÚTBOL

9.1 *Respuesta correcta: a*

La proposición r expresa un deseo; no es posible decidir nada acerca de su verdad o falsedad. Por tanto, no es una proposición lógica. En cambio, p y q son afirmaciones que se pueden valorar como ciertas o falsas, por lo que se pueden considerar proposiciones lógicas.

9.2 *Respuesta correcta: b*

Sean las proposiciones $p =$ *"Bieito se recupera de su lesión"* y $q =$ *"Joao juega"*. Entonces la afirmación del entrenador se puede simbolizar por $p \to \neg q$. Si admitimos que el entrenador dice la verdad, entonces la proposición anterior es cierta. Al repasar la alineación, vemos que *Joao* juega el partido, es decir, la proposición q es también cierta. Puesto que $q = \neg(\neg q)$, al aplicar el *modus tollendo tollens* deducimos que $\neg p$ es también cierta, es decir, *Bieito no se recuperó de su lesión.*

9.3 *Respuesta correcta: c*

Sean las proposiciones $p =$ *"el rival es un equipo muy combativo"* y $q =$ *"el rival tiene mucha suerte"*. Entonces la afirmación del entrenador se puede simbolizar por $p \vee q$. Si admitimos que el entrenador dice la verdad, entonces la proposición anterior es cierta. Según los comentaristas deportivos p no es cierta, por lo cual $\neg p$ es cierta. Al aplicar el *modus tollendo ponens* deducimos que q es cierta.

9.4 *Respuesta correcta: a*

Sean las proposiciones $p =$ *"el día del partido no llueve"*, $q =$ *"el día del partido funciona la manguera"* y $r =$ *el día del partido se riega el campo*. La afirmación del entrenador se puede simbolizar por $p \to (q \wedge r)$. Esta proposición es cierta según las palabras del entrenador. Puesto que el día del partido no llovió p es cierta, por lo cual al aplicar el *modus ponendo ponens* deducimos que $q \wedge r$ es también cierta.

9.5 *Respuesta correcta: b*

Sean las proposiciones $p =$*"ganamos este partido"*, $q =$*"nos clasificamos para la* champions league*"* y $r =$ *"salvamos la temporada"*. Entonces los comentarios camino del campo se pueden representar por $p \to q$ y $q \to r$. Al aplicar la ley del silogismos hipotético se deduce $p \to r$, que es la representación simbólica de la reflexión realizada en el campo.

9.6 *Respuesta correcta: a*

Sean las proposiciones $p =$ *"el equipo juega bien"*, $q =$ *"el equipo gana el partido"*, $r =$ *"el equipo suma tres puntos"*, $r =$ *"el equipo será campeón"*. Entonces las declaraciones del jugador pueden simbolizarse del siguiente modo. Las tres primeras frases forman las premisas: $\neg p \wedge q =$*"el equipo no juega bien y el equipo gana el partido"* y $q \to r =$ *"si el equipo gana el partido entonces el equipo suma tres puntos"*. y $r \to s =$ *"si el equipo suma tres puntos entonces el equipo será campeón"*. La última frase es la conclusión: $\neg p \wedge s =$ *"el equipo no juega bien y el equipo será campeón"*. En forma esquemática, el razonamiento tiene la forma siguiente

	$\neg p \wedge q$	*"el equipo no juega bien y el equipo gana el partido".*
	$q \to r$	*"si el equipo gana el partido entonces el equipo suma tres puntos".*
	$r \to s$	*"si el equipo suma tres puntos entonces el equipo será campeón".*
$\therefore$	$\neg p \wedge s$	*"el equipo no juega bien y el equipo será campeón".*

Vamos *demostrar* que el razonamiento es lógicamente válido. Los pasos de la demostración pueden ser los siguientes:

(1)	$\neg p \wedge q$	Premisa 1
(2)	$q \to r$	Premisa 2
(3)	$r \to s$	Premisa 3
(4)	$\neg p$	Se deduce de (1) por ser cierta su conjunción con otra proposición.
(5)	q	Se deduce de (1) por ser cierta su conjunción con otra proposición.
(6)	r	Se deduce de (2) y (5) por el modus ponendo ponens.
(7)	s	Se deduce de (3) y (6) por el modus ponendo ponens.
(8)	$\neg p \wedge s$	Se deduce de (4) y (7) por ser la conjunción de dos proposiones verdaderas.

Luego el razonamiento es cierto. También se puede comprobar calculando da tabla de verdad del razonamiento, como se ve a continuación

					Premisas			Conclusión
p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \to r$	$r \to s$	$\neg p \wedge s$
V	V	V	V	F	F	V	V	F
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F

Puesto que no hay ningún caso en el que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa podemos afirmar que el razonamiento es lógicamente válido.

9.7 *Respuesta correcta: b*

La longitud reglamentaria debe cumplir que $90 \leq x \leq 120$. Entonces necesariamente $x \in A$ y $x \in B$, por lo cual $x \in A \cap B$. La alternativa a) es el conjunto $\mathbb{R}$, por lo que incluye valores de x que no son necesariamente longitudes reglamentarias, mientras que la alternativa c) es el conjunto vacío.

9.8 *Respuesta correcta: c*

La anchura reglamentaria debe cumplir que $45 \leq y \leq 90$. Entonces necesariamente $y \notin C$ e $y \notin D$, es decir, $y \in C^c$ e $y \in D^c$ por lo cual $x \in C^c \cap D^c$. Ninguno de los valores del conjunto de la alternativa a) es una anchura reglamentaria, mientras que la alternativa b) es el conjunto vacío.

9.9 *Respuesta correcta: a*

La longitud x de un campo de fútbol tiene que cumplir $90 \leq x \leq 120$, es decir, cualquier x perteneciente al intervalo cerrado $[90,120]$ es una longitud reglamentaria. Las respuestas b) y c) no son correctas porque excluyen a un extremo, el valor 90 en la opción b), o a ambos extremos en la opción c) .

9.10 *Respuesta correcta: c*

La anchura y de un campo de fútbol tiene que cumplir $45 \leq y \leq 90$, es decir, cualquier y perteneciente al intervalo cerrado $[45,90]$ es una anchura reglamentaria. Las respuestas a) y b) no son correctas porque excluyen a un extremo, el valor 45 en la opción b), o a ambos extremos en la opción a) .

9.11 *Respuesta correcta: c*

Como se indica en el enunciado, la longitud ℓ de la circunferencia de un balón de fútbol reglamentario ha de ser $68 \leq \ell \leq 70$, es decir, $\ell \in [68,70]$. Sabemos que dado un número real a el intervalo $(-\infty, a)$ representa al conjunto de números reales que son menores que a, mientras que el intervalo $(a, +\infty)$ representa al conjunto de números reales mayores que a. Así pues, el conjunto indicado en la alternativa a) es la intersección del conjunto de números reales *menores* que 68 con el conjunto de números reales *mayores* que 70, el cual es obviamente vacío. La alternativa b) representa el conjunto de números reales que son *menores* que 68 o bien son mayores que 70. Evidentemente ℓ no pertenece a este conjunto. Finalmente, la alternativa c) representa al conjunto de números reales que *no son menores que 68* y que *no son mayores que 70*, es decir, tienen que estar entre 68 y 70 ambos incluidos. Éste es pues el conjunto al que pertenece ℓ.

9.12 *Respuesta correcta: b*

Cada jugador tiene que llevar un número propio, diferente del que llevan los demás compañeros. Por tanto, dos elementos de A distintos no pueden tener la misma imagen. De ahí que la aplicación sea inyectiva. La aplicación no es sobreyectiva porque existen números de B que no son el dorsal de ningún jugador. De esto también se sigue que la aplicación no es biyectiva.

9.13 *Respuesta correcta: a*

La longitud de la meta es $\ell = 7.32$ metros $= 8$ yardas y que la anchura es $a = 2.44$ metros $= 8$ pies. Llamemos c al cociente entre la yarda y el pie, es decir, 1 yarda $= c$ pies. Tenemos entonces las igualdades siguientes:

$$7.32 \text{ metros} = 8 \text{ yardas} = 8 \cdot c \cdot \text{ pies} = 8 \cdot c \cdot \frac{2.44}{8} \text{ metros}$$

por lo cual $c = \frac{7.32}{2.44} = 3$, es decir, una yarda es igual a 3 pies.

9.14 *Respuesta correcta: b*

La longitud de la meta es 7.32 metros u 8 yardas, podemos deducir que una yarda es igual a $\frac{7.32}{8} = 0.915$ metros.

9.15 *Respuesta correcta: a*

La altura de los postes de la meta es 2.44 metros u 8 pies, podemos deducir que un pie es igual a $\frac{2.44}{8} = 0.305$ metros.

9.16 *Respuesta correcta: c*

Cada palo mide 2.44 metros, mientras que el larguero mide 7.32. Por tanto la suma de los tres es $2 \cdot 2.44 + 7.32 = 12.2$ metros.

9.17 *Respuesta correcta: c*

El espacio entre los palos de una portería mide 7.32 metros, mientras que la línea de meta mide 68 metros. Por tanto, la fracción es $\frac{7.32}{68} = 0.1076$ y resulta ser mayor que $\frac{1}{10}$.

9.18 *Respuesta correcta: b*

El resultado se deduce de la figura 6.25. A la longitud de la meta hay que sumarle los dos tramos de 5.5 metros que se extienden a cada lado de la misma y resulta

$$7.32 + (2 \cdot 5.5) = 18.32 \text{ metros.}$$

9.19 *Respuesta correcta: b*

El resultado se deduce de la figura 6.25. A la longitud de la meta hay que sumarle los dos tramos de 16.5 metros que se extienden a cada lado de la misma y resulta

$$7.32 + (2 \cdot 16.5) = 40.32 \text{ metros.}$$

9.20 *Respuesta correcta: b*

La longitud del campo es 105 y la anchura es 68. Por tanto el perímetro es $2 \cdot (105 + 68) = 346$ metros.

9.21 *Respuesta correcta: a*

La dimensión mayor del área de meta es

$$7.32 + (2 \cdot 5.5) = 18.32 \text{ metros.}$$

mientras que la dimensión menor es 5.5. Por tanto el perímetro es $2 \cdot (5.5 + 18.32) = 47.64$ metros.

9.22 *Respuesta correcta: b*

La dimensión mayor del área de penal es

$$7.32 + (2 \cdot 16.5) = 40.32 \text{ metros}$$

mientras que la dimensión menor es 16.5. Por tanto el perímetro es $2 \cdot (16.5 + 40.32) = 113.64$ metros.

9.23 *Respuesta correcta: a*

La longitud del campo es 105 y la anchura es 68. Por tanto el área es $105 \cdot 68 = 7{,}140$ metros cuadrados.

9.24 *Respuesta correcta: c*

La dimensión mayor del área de penal es

$$7.32 + (2 \cdot 16.5) = 40.32 \text{ metros.}$$

mientras que la dimensión menor es 16.5. Por tanto la superficie del área de penal es $16.5 \cdot 40.32 = 665.28$ metros cuadrados.

9.25 *Respuesta correcta: c*

La dimensión mayor del área de meta es

$$7.32 + (2 \cdot 5.5) = 18.32 \text{ metros.}$$

mientras que la dimensión menor es 5.5. Por tanto la superficie del área de meta es $5.5 \cdot 18.32 = 100.76$ metros cuadrados.

9.26 *Respuesta correcta: b*

Según las dimensiones de la portería indicadas en la figura 6.26 la superficie es $7.32 \cdot 2.44 = 17.86$ metros cuadrados.

9.27 *Respuesta correcta: a*

Puesto que la superficie del terreno de juego es $105 \cdot 68 = 7{,}140$ metros cuadrados y la superficie de la portería es $7.32 \cdot 2.44 = 17.86$ metros cuadrados, resulta que ésta supone un porcentaje de aquélla igual a $\frac{17.86}{7{,}140} \cdot 100 = 0.25\,\%$.

9.28 *Respuesta correcta: b*

La superficie del área de penal es igual $16.5 \cdot 40.32 = 665.28$, mientras que la superficie del área de meta es igual a $5.5 \cdot 18.32 = 100.76$. Por tanto, con respecto al área penal el área de meta supone aproximadamente un $\frac{100.76}{665.28} \cdot 100 = 15.15\,\%$.

9.29 *Respuesta correcta: b*

La circunferencia que delimita el círculo central tiene como centro el punto $(0,0)$ y el valor del radio es 9.15. Por tanto su ecuación es $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 9.15^2$ que es la ecuación expresada en b).

9.30 *Respuesta correcta: b*

La longitud de la circunferencia que delimita el círculo central es $2\,\pi\, r = 2\pi\, 9.15 = 2 \cdot 3.14 \cdot 9.15 \approx 57.49$.

9.31 *Respuesta correcta: a*

La superficie del círculo central es igual a $\pi\, r^2 = \pi\, 9.15^2 = 3.14 \cdot 9.15^2 \approx 263.02$.

9.32 *Respuesta correcta: a*

La recta se corresponde con el eje de abscisas y tiene ecuación $y = 0$.

9.33 *Respuesta correcta: b*

El punto de penal con abscisa positiva tiene coordenadas $(41.5,0)$. La recta perpendicular por este punto al eje de abscisas, es decir, a la recta $y = 0$ tiene ecuación $x = 41.5$.

9.34 *Respuesta correcta: c*

El punto del banderín de esquina superior derecha tiene coordenadas $(52.5,34)$, mientras que el punto central es el (0,0). La ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos es

$$y = \frac{34-0}{52.5-0}(x-0)+0 \;=\; \frac{34}{52.5}\,x \;=\; \frac{68}{105}\,x$$

De aquí se sigue que la recta buscada es $105y - 68x = 0$.

9.35 *Respuesta correcta: c*

Las coordenadas del punto A son (36,20.16) y las coordenadas del punto B son (47,9.16). Entonces la distancia entre los dos puntos es igual a

$$d = \sqrt{(36-47)^2 + (20.16-9.16)^2} = 15.56$$

9.36 *Respuesta correcta: b*

La distancia recorrida por *Bieito* es igual a

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} &= \sqrt{(25-(-10))^2 + (25-25)^2} \\ &\quad + \sqrt{(35-25)^2 + (10-25)^2} \\ &= 53.03 \text{ metros}\end{aligned}$$

9.37 *Respuesta correcta: a*

La ecuación de la recta que sigue el jugador pasa por el punto (5,-20) y tiene pendiente $\frac{2}{5}$, es decir, es la recta $y-(-20) = \frac{2}{5}(x-5)$. Al simplificar la igualdad anterior se obtiene la recta $-2x + 5y = -110$. El lado mayor del área de penal de la derecha, que es la dirección que sigue el jugador, es la recta perpendicular al eje de abscisas por el punto $x = 36$, es decir, es la recta de ecuación $x = 36$. La intersección de las dos rectas se obtiene al resolver el sistema que forman las ecuaciones de ambas rectas. Desde luego, la abscisa del punto de intersección ha de ser $\overline{x} = 36$. Al sustituir este valor en la ecuación de la recta que sigue el jugador tenemos: $-2 \cdot 36 + 5y = -110$. Si despejamos la variable y obtenemos el valor de la ordenada: $\overline{y} = -7.6$. Por tanto el punto buscado tiene coordenadas $(36,-7.6)$.

9.38 *Respuesta correcta: c*

La ecuación de la recta que pasa por el punto (5,-20) y tiene pendiente $\frac{2}{5}$ es $y-(-20) = \frac{2}{5}(x-5)$. Al simplificar la igualdad anterior se obtiene la recta $-2x + 5y = -110$.

9.39 *Respuesta correcta: a*

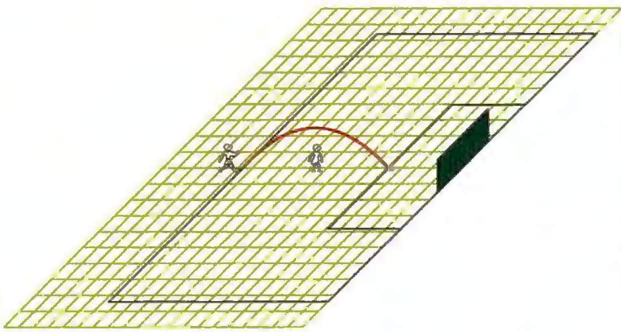
Si despejamos y en la ecuación de la recta por la que corre *Bieito* obtenemos $y = \frac{1}{4}(x-105)$, por lo cual su pendiente es $\frac{1}{4}$. La paralela a esta recta por el punto (15,-30) tiene ecuación $y = \frac{1}{4}(x-15) - 30$. Al simplificar se obtiene la ecuación $-x + 4y = -135$.

9.40 *Respuesta correcta: a*

La recta $x + 2y = 10$ tiene pendiente $a = -\frac{1}{2}$. Entonces cualquier perpendicular a dicha recta tendrá pendiente

$a' = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$. Por otra parte, la perpendicular buscada tiene que pasar por el punto de penal del área penal del defensor, es decir, por el punto (-41.5,0). Entonces la ecuación es $y = 2(x-(-41.5))+0 = 2x+83$.

9.41 *Respuesta correcta: b*

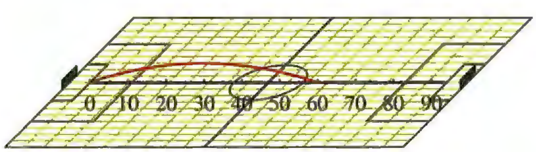


Si igualamos a cero la primera derivada de f se obtiene $f'(x) = -2 \cdot 0.1(x-41.5) = 0$. Al resolver esta ecuación obtenemos que el punto en que f alcanza su máximo es $x = 41.5$.

9.42 *Respuesta correcta: a*

Para calcular la altura máxima, buscamos el punto en que f alcanza su máximo. Si resolvemos la ecuación que resulta de igualar a cero la primera derivada de f se obtiene $x = 41.5$. Para este valor de x, la función toma el valor $f(41.5) = 3-0.1(41.5-41.5)^2 = 3$.

9.43 *Respuesta correcta: b*



Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Para encontrar el punto en que esta función alcanza su máximo, igualamos su primera derivada a cero y resolvemos la ecuación resultante. Tenemos $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2x}{180} = 0$. Al despejar, se obtiene $x = 30$.

9.44 *Respuesta correcta: a*

Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Para encontrar el punto en que esta función alcanza su máximo, igualamos su primera derivada a cero y resolvemos la ecuación resultante. Tenemos $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{2x}{180} = 0$. Al despejar, se obtiene $x = 30$. En este punto, la función toma el valor $f(30) = \frac{1}{3}\,30 - \frac{1}{180}\,30^2 = 5$.

9.45 *Respuesta correcta: a*

Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Al caer el balón al suelo, la altura vale cero. Entonces hay que buscar el punto x para el cual $f(x) = 0$. Escribimos entonces la ecuación $\frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2 = 0$. La ecuación anterior puede ponerse como $x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{180}x\right) = 0$. Si $x = 0$ tenemos el punto de saque. Si $x \neq 0$ entonces tiene que ocurrir que $\frac{1}{3} - \frac{1}{180}x = 0$. Al despejar resulta $x = 60$.

9.46 *Respuesta correcta: b*

Como se observa en la figura, el balón describe la parábola $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2$. Al caer el balón al suelo, la altura vale cero, es decir, $\frac{1}{3}x - \frac{1}{180}x^2 = 0$. Al despejar, se obtiene $x = 60$. Como la distancia desde la línea de meta a la línea de medio campo es 52.5 metros, podemos asegurar que el balón ha cruzado dicha línea antes de caer al suelo.

9.47 *Respuesta correcta: b*

Consideremos como espacio de posibilidades el formado por los cuatro resultados posibles de lanzar dos monedas:

$$\Omega = \{\ ,\ ,\ ,\ \}$$

Si admitimos que las monedas estás equilibradas, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad y el modelo es uniforme. Entre los cuatro casos hay tres favorables al suceso A = "obtener alguna cara",

$$A = \text{“obtener alguna cara”} = \{\ ,\ ,\ \}$$

De acuerdo con la regla de Laplace, la probabilidad del suceso es $3/4$.

Otro método para calcular esta probabilidad es hallar la probabilidad del suceso contrario. El suceso que nos interesa está formado por los casos que tienen una o dos caras, mientras que su contrario está formado por el caso que sólo tiene cruces. Calcular la probabilidad del suceso contrario supone aprovechar la sencillez de éste, frente a la mayor de complejidad del suceso A.

Un razonamiento equivocado es el siguiente: *"Al lanzar dos veces la moneda pueden aparecer* 0, 1 *ó* 2 *caras, luego hay tres casos posibles; puesto que los dos casos* 1 *y* 2, *son favorables al suceso, la probabilidad es* $2/3$." El error de este razonamiento está en suponer que los tres casos 0, 1 y 2 tienen la misma probabilidad, este modelo no es uniforme ya que hay dos maneras de tener una cara, que salga  o , mientras que sólo hay una manera de tener dos caras y sólo una de tener dos cruces.

9.48 Respuesta correcta: c

Consideremos como espacio de posibilidades el formado por los ocho resultados posibles de lanzar tres monedas.

$\Omega = \{$  $\}$

Puesto que el modelo es uniforme, todos los casos posibles tienen la misma probabilidad. Hay siete casos favorables al suceso "aparece alguna cara", luego su probabilidad es $7/8$. Otro método de cálculo es hallar la probabilidad del suceso contrario. El contrario de "aparece alguna cara" es "todos los resultados son cruz" que sólo tiene un caso favorable. La probabilidad del contrario es $1/8$ y la del suceso problema $1-1/8=7/8$.

9.49 Respuesta correcta: c

Si consideramos los sucesos B = *"Bahía gana la eliminatoria contra el Internacional"* e I = *"Internacional gana la eliminatoria contra el Bahía"* se tiene $P(B) = P(I) = 0.5$. Sea S el suceso *"el Sport gana la semifinal"*, $S|B$ el suceso *"el Sport gana la semifinal condicionado a que el rival es el Bahía"* y $S|I$ el suceso *"el Sport gana la semifinal condicionado a que el rival es el Internacional"*. Entonces la probabilidad de que el Sport F. C. gane la semifinal es

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|B)P(B)+P(S|I)P(I) \\ &= 0.8\cdot 0.5+0.4\cdot 0.5 = 0.60 \end{aligned}$$

9.50 Respuesta correcta: a

Llamamos A_i al suceso *el jugador A_i acierta al lanzar el penalti*, $i=1,2,3,4,5$. Al suponer que los lanzamientos son independientes se tiene

$$\begin{aligned} P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) \\ &= 0.90\cdot 0.85\cdot 0.88\cdot 0.92\cdot 0.95 \\ &= 0.59 \end{aligned}$$

9.51 Respuesta correcta: b

Llamamos A_i al suceso *el jugador A_i acierta al lanzar el penalti*, $i=1,2,3,4,5$. Tenemos que calcular la probabilidad del suceso $(A_1^c\cup A_2^c\cup A_3^c\cup A_4^c\cup A_5^c)$. Es más sencillo calcular la probabilidad de su complementario y restar de 1 el resultado. El complementario del suceso anterior es el suceso $(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)$. Al suponer que los lanzamientos son independientes se tiene

$$\begin{aligned} P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) \\ &= 0.90\cdot 0.85\cdot 0.88\cdot 0.92\cdot 0.95 \\ &= 0.59 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(A_1^c\cup A_2^c\cup A_3^c\cup A_4^c\cup A_5^c) &= 1-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5) \\ &= 0.41 \end{aligned}$$

9.52 Respuesta correcta: a

Sea n el número de equipos que iniciaron la competición. Al finalizar la primera fase, permanecieron en competición la mitad, es decir, $\frac{n}{2}$. En la siguiente eliminatoria este número queda reducido a la mitad, es decir, se reduce a $\frac{n/2}{2}=\frac{n}{4}$. De modo similar, en la siguiente eliminatoria el número de supervivientes se reduce a $\frac{n/4}{2}=\frac{n}{8}$. Por fin, en la última eliminatoria el número de finalistas es igual a $\frac{n/8}{2}=\frac{n}{16}$. Así pues, $\frac{n}{16}=2$, por lo cual sabemos que participaron 32 equipos.

9.53 Respuesta correcta: c

Llamemos g al número de grupos y m al número de equipos de cada grupo, de forma que el número de equipos que juegan la fase es $g\cdot m$. Claramente, todos estos números son números enteros. El enunciado asegura que en cada grupo se jugó una liga a una sola vuelta, es decir, cada uno de los m equipos del grupo jugó con los

$(m-1)$ equipos restantes. Como en cada partido intervienen dos equipos se deduce que el número de partidos que se jugaron en cada grupo es $\frac{m(m-1)}{2}$. Como hay g grupos, el número total de partidos de la primera fase fue $g\,\frac{m(m-1)}{2}$. El enunciado asegura que este número es 48, así pues, $g\,\frac{m(m-1)}{2} = 48$. De aquí deducimos que $gm(m-1) = 96$, es decir, g, m y $(m-1)$ tienen que ser divisores de 96. Si descomponemos 96 en factores primos resulta $96 = 2^5 \cdot 3$. Entonces, las posibles descomposiciones de 96 en que intervengan tres factores y verifiquen la condición de que dos de ellos sean número consecutivos son las dos siguientes:

$$\begin{aligned} 96 &= 16 \cdot 3 \cdot 2 \\ 96 &= 8 \cdot 4 \cdot 3 \end{aligned}$$

De la primera obtendríamos $g = 16$, $m = 3$, es decir, tendríamos 16 grupos de 3 equipos cada uno, lo cual hace un total de 48 equipos. Cada equipo juega dos partidos, es decir, se juegan un total de 48 partidos. De la segunda descomposición obtendríamos $g = 8$, $m = 4$, es decir, tendríamos 8 grupos de 4 equipos cada uno, lo cual hace un total de 32 equipos. Cada equipo juega 3 partidos, es decir, se juegan también un total de 48 partidos. Por tanto, sin más datos, no es posible afirmar si jugaron 32 ó 48 equipos.

9.54 *Respuesta correcta: a*

Los valores que puede tomar la variable se corresponden con los distintos países del mundo: español, mexicano, etc. Entonces se trata de una variable estadística cualitativa.

9.55 *Respuesta correcta: b*

Los valores que puede tomar la variable son 0,1,2,..., es decir, valores enteros. Entonces se trata de una variable estadística cuantitativa discreta.

9.56 *Respuesta correcta: b*

Los valores que puede tomar la variable son 0,1,2,..., es decir, valores enteros. Entonces se trata de una variable estadística cuantitativa discreta.

9.57 *Respuesta correcta: c*

En principio, la distancia recorrida por un jugador en un partido puede tomar cualquier valor real mayor o igual que cero. Por tanto puede considerarse una variable estadística cuantitativa continua.

9.58 *Respuesta correcta: b*

La tabla de frecuencias relativas es

Número de goles marcados x_i	Frecuencia absoluta de goleadores F_i	Porcentaje de goleadores %
1	71	73.96 %
2	14	14.58 %
3	4	4.17 %
4	3	3.13 %
5	4	4.17 %

A la vista de los datos anteriores, el porcentaje de goleadores que anotó más de un gol fue 100-73.96 = 26.04 %.

9.59 *Respuesta correcta: b*

Como se observa en los datos, la variable *"número de partidos jugados"* toma los valores $x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7. La frecuencia absoluta F_i de cada uno de ellos es

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
F_i	3	4	1	2	1	1	1	10

El número total de jugadores es $\sum_{F_i} = 23$. Por tanto la frecuencia relativa del valor *Numpartidos* = 7 es $f_i = \frac{10}{23} = 0.4348$.

9.60 *Respuesta correcta: b*

En la tabla siguiente se muestra las distribuciones de frecuencias, absolutas, relativas, acumuladas absolutas y acumuladas relativas de la variable.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
F_i	3	4	1	2	1	1	1	10
f_i	0.1304	0.1739	0.0435	0.0869	0.0435	0.0435	0.0435	0.4348
n_i	0.1304	0.3043	0.3478	0.4348	0.4783	0.5217	0.5652	1.0000

Por tanto la frecuencia relativa acumulada correspondiente al valor $x_i = 3$ es 0.4348.

9.61 *Respuesta correcta: a*

La altura media es igual a la suma de todos lo valores dividido por el número de ellos, de forma que

$$\overline{Altura} = \frac{184+187+\cdots+172+187}{23} = 180.9130\text{cm}.$$

9.62 *Respuesta correcta: a*

El rango de la variable es

$$R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}} = 194 - 169 = 25\text{cm}.$$

9.63 *Respuesta correcta: a*

Dado que pasaron 16 equipos y en cada partido se elimina uno, la segunda fase constó de 15 partidos eliminatorios más el partido adicional, en total, 16 partidos. También se puede razonar del modo siguiente: en la primera ronda hay 16 equipos y se juegan 8 partidos. En la segunda, 8 equipos y 4 partidos. En la tercera, 4 equipos y 2 partidos que deciden los dos finalistas y los dos que juegan por el tercer y cuarto puesto. En total se han jugado 8+4+2 = 14 partidos, a los que hay que añadir la final y el partido adicional, totalizando 16 partidos. Sea x el número de encuentros de la primera fase, t el número de goles y a el número de tarjetas amarillas. Entonces, se jugaron un total de $x+16$ partidos. Según el enunciado $t = 2x$ y $t = \frac{3}{2}(x+16)$. Al resolver estas dos ecuaciones, se llega a que $x = 48$ y $t = 96$, con lo cual se han jugado en total $48+16 = 64$ partidos. Finalmente, si cada jugador de un equipo es amonestado, el número de tarjetas se incrementa en 11. En ese caso el número de tarjetas sería $a+11$ y según el enunciado tendremos $a+11 = 4\cdot 64 = 256$. Al despejar obtenemos $\cdot a = 245$.

9.64 *Respuesta correcta: c*

La tabla siguiente muestras la disposición de los cálculos para obtener la media de la distribución del número de tarjetas amarillas por partido.

x_i	F_i	x_iF_i
0	2	0
1	5	5
2	11	22
3	11	33
4	12	48
5	14	70
6	4	24
7	2	14
8	1	8
9	1	9
12	1	12
Total	64	245

Por tanto el número medio de tarjetas amarillas por partido es igual a $\overline{x} = \frac{245}{64} = 3.83$.

9.65 *Respuesta correcta: b*

La tabla siguiente muestras la disposición de los cálculos para obtener la varianza de la distribución del número de tarjetas amarillas por partido.

x_i	F_i	x_iF_i	$(x_i-\overline{x})$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(x_i-\overline{x})^2\,F_i$
0	2	0.00	−3.83	14.65	29.31
1	5	5.00	−2.83	8.00	39.99
2	11	22.00	−1.83	3.34	36.76
3	11	33.00	−0.83	0.69	7.54
4	12	48.00	0.17	0.03	0.35
5	14	70.00	1.17	1.37	19.23
6	4	24.00	2.17	4.72	18.87
7	2	14.00	3.17	10.06	20.12
8	1	8.00	4.17	17.40	17.40
9	1	9.00	5.17	26.75	26.75
12	1	12.00	8.17	66.78	66.78
Total	64.00	245.00			283.11

La media es

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_iF_i}{N} = \frac{245.00}{64.00}$$

La varianza es

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\,F_i}{N} = \frac{283.11}{64.00} = 4.42$$

La desviación típica es

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4.42} = 2.10$$

9.66 *Respuesta correcta: c*

La distribución de frecuencias del número de países que pertenecen a cada continente es

Continente	Frecuencia
Europa	13
América	8
África	6
Asia	3
Oceanía	2

La representación más exacta de esta distribución es el diagrama de sectores mostrado en c). La opción a) es incorrecta porque el sector correspondiente a Oceanía tiene un sector mayor que el de Asia. La opción b) es incorrecta porque los sectores de Europa y América son del mismo tamaño.

9.67 *Respuesta correcta: b*

Dado que todas las barras tienen la misma longitud de base, la altura de la barra tiene que ser proporcional a la frecuencia. Esto sólo ocurre en la alternativa b). La alternativa a) se olvida de la frecuencia del valor 0 de la variable, mientras que la alternativa c) intercambia las barras correspondientes a los valores 6 y 7.

10 LA CAÍDA DE LOS CUERPOS

10.1 *Respuesta correcta: c*

Como la distancia es de 0.1 m, la fuerza de atracción entre ambos cuerpos es

$$F = G\ \frac{1000 \cdot 50}{0.1^2} = 0.00033\, N$$

puesto que la constante de gravitación universal vale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$.

10.2 *Respuesta correcta: a*

Sometido a una fuerza de 0.00033 N, un cuerpo de 50 kg de masa, sufre una aceleración de

$$a = \frac{0.00033}{50} = 6.6 \cdot 10^{-6}\, m/s^2$$

en la dirección de la fuerza.

10.3 *Respuesta correcta: a*

Sometido a una fuerza de 0.00033 N, un cuerpo de 1000 kg de masa, sufre una aceleración de

$$a = \frac{0.00033}{1000} = 3.3 \cdot 10^{-7}\, m/s^2$$

en la dirección de la fuerza.

10.4 *Respuesta correcta: b*

La velocidad de $900\, km/h$ equivale a $900000/3600 = 250\, m/s$. Alcanzar dicha velocidad al cabo de $180\, s$, supone una aceleración de $250/180 = 1.39\, m/s^2$. Para que el avión, de $50000\, kg$ de masa, adquiera esta aceleración, los motores han de ejercer una fuerza $F = 50000 \cdot 1.39 = 69500\, N$.

10.5 *Respuesta correcta: c*

Según la Ley de gravitación universal, la fuerza con la que la Luna atrae a un cuerpo de 1 kg de masa, situado en su superficie es

$$F = G\ \frac{7.368 \cdot 10^{22}}{1740000^2} = 1.62\, N$$

ya que la constante de gravitación universal vale $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2/kg^2$.

10.6 *Respuesta correcta: a*

La báscula mide la fuerza que se ejerce sobre ella al subirse. En la Tierra, el astronauta ejerce una fuerza de $75 \cdot 9.81 = 735.75\, N$, que la báscula interpreta como 75 kg. En cambio, en la Luna ejercerá una fuerza de $75 \cdot 1.62 = 121.5\, N$ y la báscula, graduada para la Tierra, lo interpretará como 12.385 kg que es la masa que en la Tierra ejercería una fuerza de $12.385 \cdot 9.81 = 121.5\ N$. Dicho de otra forma, la fuerza ejercida en la Luna por cada kilogramo de masa es una proporción de $1.62/9.81 = 0.16513$ de la fuerza ejercida en la Tierra y, en consecuencia, 75 kg son interpretados por la báscula como $75 \cdot 0.16513 = 12.385\ kg$.

10.7 *Respuesta correcta: b*

Con una altura inicial $y_0 = 20\ m$ y una velocidad inicial $v_0 = 0$, al cabo de t segundos la piedra está a una altura $y = 20 - 9.81 \cdot t^2/2$; así que, para $t = 1$, la altura resulta $y = 20 - 9.81/2 = 15.095$ metros.

10.8 *Respuesta correcta: a*

La altura inicial es $y_0 = 20\ m$ y la velocidad inicial $v_0 = 0\ m/s$. Por tanto, su posición al cabo de un tiempo t es $y = 20 - 9.81 \cdot t^2/2$. Llegará al suelo cuando la altura se anule; es decir cuando se verifique $20 - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$, lo cual se produce al cabo de $t = \sqrt{40/9.81} = 2.02$ segundos. Obsérvese que el tiempo de caída no depende de la masa de la piedra.

10.9 *Respuesta correcta: c*

La piedra tarda 2.02 s en llegar al suelo. Durante ese tiempo ha ido acelerando a 9.81 m/s^2, a partir de su velocidad inicial $v_0 = 0$; por consiguiente, llega al suelo con una velocidad $v = 9.81 \cdot 2.02 = 19.8\ m/s$. Ello equivale a $v = 19.8 \cdot 3600/1000 = 71.28\ km/h$.

10.10 *Respuesta correcta: b*

Se supone que la piedra estaba inicialmente en reposo ($v_0 = 0$) a una altura y_0 desconocida. Llega al suelo cuando sea $y_0 - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$; es decir, cuando hayan transcurrido $t = \sqrt{2y_0/9.81}$ y, en ese instante, la velocidad con la que se mueve es $v = 9.81\sqrt{2y_0/9.81} = \sqrt{2y_0 \cdot 9.81}$. Como dicha velocidad es de 36 m/s, es porque la altura desde la que ha caído la piedra cumple $2y_0 \cdot 9.81 = 36^2$ o bien $y_0 = 36^2/(2 \cdot 9.81) = 66$ metros.

10.11 *Respuesta correcta: a*

La altura inicial es $y_0 = 1\ m$ y la velocidad inicial $v_0 = 150\ km/h = 150 \cdot 1000/3600 = 41.67\ m/s$; luego la altura al cabo de t segundos es

$$y = 1 + 41.67 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

Para $t = 5\ s$, resulta $y = 1 + 41.67 \cdot 5 - 9.81 \cdot 5^2/2 = 86.725\ m$.

10.12 *Respuesta correcta: b*

Con una velocidad inicial $v_0 = 41.67\ m/s$, al cabo de t segundos su velocidad será $v = 41.67 - 9.81 \cdot t$. Con $t = 5\ s$ queda $v = -7.38 m/s$; es decir que la pelota está bajando con una velocidad instantánea de 7.38 m/s.

10.13 *Respuesta correcta: b*

Como la velocidad inicial es $v_0 = 150\ km/h = 41.67\ m/s$, al cabo de t segundos, su velocidad será $v = 41.67 - 9.81 \cdot t$. La bola sube hasta que su velocidad se anula (y pasa después a ser negativa para caer hacia el suelo). Por tanto, sube durante $t = 41.67/9.81 = 4.25$ segundos.

10.14 *Respuesta correcta: c*

Con una altura inicial $y_0 = 1$ y una velocidad inicial $v_0 = 41.67\ m/s$, la altura de la bola al cabo de t segundos será $y = 1 + 41.67 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$. La altura máxima se alcanza cuando su derivada –la velocidad – se anula; dado que la velocidad en el instante t es $v = 41.67 - 9.81 \cdot t$, la pelota sube durante $t = 41.67/9.81 = 4.25\ s$ y, en ese instante, la altura alcanzada es

$$y = 1 + 41.67 \cdot 4.25 - 9.81 \cdot 4.25^2/2 = 89.5\ m.$$

10.15 *Respuesta correcta: b*

La pelota sube, hasta que su velocidad $v = 41.67 - 9.81 \cdot t$ se anula, durante $t = 41.67/9.81 = 4.25\ s$. En ese instante su altura es $y = 1 + 41.67 \cdot 4.25 - 9.81 \cdot 4.25^2/2 = 89.5\ m$. A continuación, cae desde esa altura; o sea que su posición al cabo de t segundos adicionales es

$$z = 89.5 - 9.81 \cdot t^2/2$$

y llega al suelo cuando sea $89.5 - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$, lo que ocurre al cabo de $t = \sqrt{2 \cdot 89.5/9.81} = 4.27$ segundos. En total, la bola ha estado 4.25 s subiendo y 4.27 s bajando; de forma que llega al suelo 8.52 s después del golpe.

Directamente, la ecuación de segundo grado

$$1 + 41.67 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2 = 0$$

indica cuando se anula la altura de la bola y, efectivamente, su solución positiva es 8.52 s.

10.16 *Respuesta correcta: a*

Según la cuestión anterior, la bola tarda 8.52 s en caer al suelo. Su velocidad al cabo de ese tiempo es

$$v = v_0 - 9.81 \cdot t = 41.67 - 9.81 \cdot 8.52 = -41.91\, m/s$$
$$= -41.91 \cdot 3600/1000 = -150.88\, km/h.$$

El signo menos indica que se trata de una velocidad hacia abajo. Puede observarse que la bola vuelve a estar a 1 m del suelo al cabo de 4.25 s de descenso y llega a esa altura con velocidad opuesta a la que salió: $-150\, km/h$.

10.17 *Respuesta correcta: c*

Contando el tiempo a partir del momento en el que se rompe el cable, la altura inicial es $y_0 = 15\, m$ y la velocidad inicial $v_0 = 0.6\, m/s$. Entonces, al cabo de t segundos, la altura será

$$y = 15 + 0.6 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

y, para $t = 1$, resulta $y = 15 + 0.6 - 9.81/2 = 10.695$ metros.

10.18 *Respuesta correcta: c*

Cuando el cable se rompe, la velocidad inicial es $v_0 = 0.6\, m/s$. Al cabo de t segundos la velocidad será $v = 0.6 - 9.81 \cdot t$. En particular, con $t = 1\, s$, es $v = 0.6 - 9.81 = -9.21\, m/s$; lo cual significa que baja a 9.21 m/s.

10.19 *Respuesta correcta: a*

Cuando el cable se rompe, la altura es 15 m y la velocidad 0.6 m/s. Por consiguiente, después de t segundos su altura será

$$y = 15 + 0.6 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

que se anula únicamente cuando $t = 1.81$ segundos, mientras que para $t = 2.3\, s$ vale $-9.567\, m$ y para $t = 2.82\, s$ vale $-22.31\, m$ (valores negativos que indican que el ascensor estaría por debajo del suelo si pudiese continuar cayendo). De hecho, $t = 1.81\, s$ es la única solución positiva de la ecuación de segundo grado $y = 0$.

10.20 *Respuesta correcta: c*

Según la cuestión anterior, el ascensor cae al suelo al cabo de 1.81 segundos y en ese instante la velocidad será $v = 0.6 - 9.81 \cdot 1.81 = -17.16\, m/s = -17.16 \cdot 3600/1000 = -61.78; km/h$. El signo menos indica que la velocidad es hacia abajo.

10.21 *Respuesta correcta: a*

La velocidad total tiene una componente horizontal de 270 km/h y una componente vertical de 45 km/h; es decir, puede representarse como el segmento S que une el origen con el punto de coordenadas $(270, 45)$. Según el teorema de Pitágoras, dicho segmento tiene longitud $L = \sqrt{270^2 + 45^2} = 273.72\, km/h$, que es la velocidad que el arco ha imprimido a la flecha en la dirección en la que ha sido disparada. Puede observarse que el ángulo α que forma el segmento S con la dirección horizontal es tal que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{45}{270} = 0.167$; dicho ángulo mide 0.165 radianes o 9.45° e indica la dirección en la que se ha efectuado el disparo.

10.22 *Respuesta correcta: b*

La velocidad inicial es $v_0 = 45 \cdot 1000/3600 = 12.5\, m/s$ en la dirección vertical. Después de t segundos de vuelo, la altura de la flecha sobre el suelo es

$$y = 12.5 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2.$$

En particular, después de $t = 2\, s$, la altura de la flecha es $y = 12.5 \cdot 2 - 9.81 \cdot 4/2 = 5.38$ metros.

10.23 *Respuesta correcta: a*

La velocidad inicial es $w_0 = 270 \cdot 1000/3600 = 75\, m/s$ en la dirección horizontal. Después de t segundos de vuelo, la distancia horizontal recorrida por la flecha es $x = w_0 \cdot t = 75 \cdot t$ y, para $t = 2\, s$, vale $x = 75 \cdot 2 = 150$ metros.

10.24 *Respuesta correcta: c*

Según las dos cuestiones previas, al cabo de 2 segundos la flecha se encuentra en el punto de coordenadas $(150, 5.38)$. La distancia desde ese punto al origen del disparo viene dada por $d = \sqrt{150^2 + 5.38^2} = 150.1$ metros.

10.25 *Respuesta correcta: b*

La velocidad inicial es $v_0 = 45 \cdot 1000/3600 = 12.5\, m/s$ en la dirección vertical. Al cabo de t segundos, la velocidad vertical de la flecha es $v = v_0 - 9.81 \cdot t = 12.5 - 9.81 \cdot t$. Para $t = 2$, se obtiene $v = 12.5 - 9.81 \cdot 2 = -7.12\, m/s$. El signo menos indica que la flecha está bajando.

10.26 *Respuesta correcta: a*

Las velocidades iniciales son $w_0 = 270 \cdot 1000/3600 = 75\ m/s$ en la dirección horizontal y $v_0 = 45 \cdot 1000/3600 = 12.5\ m/s$ en la dirección vertical. Después de t segundos de vuelo, la altura de la flecha sobre el suelo es

$$y = 12.5 \cdot t - 9.81 \cdot t^2/2$$

que se anula en el momento en que la flecha cae. La ecuación $12.5 \cdot t = 9.81 \cdot t^2/2$ equivale a $12.5 = 9.81 \cdot t/2$ y tiene como solución $t = 2 \cdot 12.5/9.81 = 2.548$ segundos.

10.27 *Respuesta correcta: c*

Según la cuestión anterior, la flecha cae al suelo al cabo de 2.548 segundos. En ese tiempo, la distancia horizontal recorrida es $x = w_0 \cdot t = 75 \cdot 2.548 = 191.1$ metros.

10.28 *Respuesta correcta: b*

En la dirección vertical, al cabo de t segundos de vuelo, la flecha lleva una velocidad $v = v_0 - 9.81 \cdot t = 12.5 - 9.81 \cdot t\, m/s$. La altura máxima se alcanza cuando la velocidad vertical se anula, instante en el que deja de subir, para empezar a bajar. Por tanto, la altura máxima se alcanza tras $t = 12.5/9.81 = 1.274$ segundos y, en ese momento, la altura alcanzada es

$$y = 12.5 \cdot 1.274 - 9.81 \cdot 1.274^2/2 = 7.96 \text{ metros.}$$

Nótese que la altura máxima se alcanza a mitad del recorrido de la flecha, puesto que $2 \cdot 1.274 = 2.548$.

10.29 *Respuesta correcta: a*

La altura inicial del avión es 700 m y su velocidad vertical es inicialmente $v_0 = 0$. Por tanto, t segundos después de perder las alas, su altura será $y = 700 - 9.81 \cdot t^2/2$. Para $t = 6\, s$, queda $y = 700 - 9.81 \cdot 6^2/2 = 523.42$ metros.

10.30 *Respuesta correcta: c*

Como la velocidad vertical es nula, al cabo de t segundos, será $v = -9.81 \cdot t$, que vale $v = -9.81 \cdot 6 = -58.86\, m/s = -58.86 \cdot 3600/1000 = 211.9\, km/h$.

10.31 *Respuesta correcta: a*

Como su velocidad inicial vertical es $v_0 = 0$, al cabo de t segundos su altura será $y = 700 - 9.81 \cdot t^2/2$. Llegará al suelo cuando sea $700 - 9.81t^2/2 = 0$; es decir, al cabo de $t = \sqrt{2 \cdot 700/9.81} = 11.946$ segundos.

10.32 *Respuesta correcta: a*

Según la cuestión anterior, el avión llega al suelo al cabo de 11.946 segundos; durante ese tiempo su velocidad horizontal ha sido $700\ km/h = 700 \cdot 1000/3600 = 194.44\ m/s$, con lo cual su posición horizontal habrá aumentado en $194.44 \cdot 11.946 = 2322.78$ metros o aproximadamente 2.323 km.

10.33 *Respuesta correcta: b*

El avión tarda 11.946 segundos en llegar al suelo y su velocidad vertical en ese instante será $v = 9.81 \cdot 11.946 = 117.19\ m/s = 117.19 \cdot 3600/1000 = 421.88\ km/h$.

10.34 *Respuesta correcta: b*

Según la cuestión anterior, el avión cae al suelo con una velocidad vertical de $421.88\ km/h$ y sigue llevando una velocidad horizontal de $700\ km/h$. Según el teorema de Pitágoras, su velocidad total será $\sqrt{700^2 + 421.88^2} = 817.3\ km/h$.

11 PRUEBAS DIAGNÓSTICAS

11.1 *Respuesta correcta: b*

De acuerdo con la tabla 6.11, entre los 100000 análisis hubo 248 positivos, luego la probabilidad de que un análisis sea positivo es $\frac{248}{100000} = 0.00248$.

11.2 *Respuesta correcta: a*

Hay 248 análisis positivos entre lo que elegimos uno al azar. Puesto que 220 de estos análisis corresponden a personas que no están infectadas, la probabilidad de que un análisis positivo corresponda a un no infectado es

$$\frac{220}{248} = 0.887$$

11.3 *Respuesta correcta: c*

El número de personas no infectadas que hay entre las 100 000 analizadas es 99970, de éstas, 99750 presentan un test negativo; luego la probabilidad de que un no infectado tenga un test negativo es

$$\frac{99750}{99970} = 0.997799$$

11.4 *Respuesta correcta: b*

El número de individuos infectados es 30; entre estos, 28 han resultado positivos y 2 negativos. El porcentaje de positivos entre los infectados es $\frac{28}{30} \cdot 100\,\% = 93.33\,\%$.

11.5 *Respuesta correcta: c*

El número de positivos es 248; entre ellos hay 28 infectados, luego el porcentaje de infectados entre los positivos es $\frac{28}{248} \cdot 100\,\% = 11.29\,\%$

11.6 *Respuesta correcta: a*

El número de casos positivos es 248; entre los positivos hay 220 casos de individuos no infectados. Así, la probabilidad de un falso positivo es $\frac{220}{248} = 0.8871$.

11.7 *Respuesta correcta: a*

El número de resultados negativos es 99752 entre los que hay 2 casos que estaban infectados. La probabilidad de un falso negativo es $\frac{2}{99752} = 0.00002005$.

11.8 *Respuesta correcta: b*

Entre las 100 000 personas analizadas hay 28 que están infectados y resultan positivos, luego la probabilidad de una persona elegida al azar esté infectada y dé positivo en el test es $\frac{28}{100000} = 0.00028$.

11.9 *Respuesta correcta: b*

Lo justificaremos primero con palabras sencillas: si el test tiene una sensibilidad del 100 %, entonces todos los individuos infectados resultan positivos, pero esto no impide que algunos individuos no infectados también resulten positivos, por lo que no puede asegurarse que todos los positivos estén infectados y la proposición es falsa.

De manera un poco más formal, en cualquier test que se pueda presentar hay cuatro casos posibles:

Caso 1 Todos los infectados resultan positivos y todos los no infectados resultan negativos.

Caso 2 Todos los infectados resultan positivos y algunos no infectados resultan positivos.

Caso 3 Algunos infectados resultan negativos y todos los no infectados resultan negativos.

Caso 4 Algunos infectados resultan negativos y algunos no infectados resultan positivos.

Ahora consideremos las proposiciones p, "el test tiene una sensibilidad del 100 %" y q "todo individuo que resulta positivo, está infectado", la proposición que debemos analizar es $p \to q$.

En el caso 1, la proposición p es verdadera y la proposición q es verdadera; en el caso 2, la proposición p es verdadera y la q falsa; en los casos 3 y 4 la proposición p es falsa y no hay nada que analizar. Así, hay un caso en que la proposición p es verdadera y la q es falsa, por lo que $p \to q$ es falsa.

11.10 *Respuesta correcta: b*

Con palabras sencillas: si un test no tiene falsos positivos entonces todos los individuos que resultan positivos están infectados, pero esto no significa que todos los infectados resulten positivos, por lo que la proposición es falsa.

De manera un poco más formal, en cualquier test que se pueda presentar hay cuatro casos posibles:

Caso 1 Todos los positivos están infectados y todos los negativos están no infectados.

Caso 2 Todos los positivos están infectados y algunos negativos están infectados.

Caso 3 Algunos positivos están no infectados y todos los negativos están no infectados.

Caso 4 Algunos positivos están no infectados y algunos negativos están infectados.

Ahora consideremos las proposiciones p, "no hay falsos positivos" que equivale a decir "todos los positivos están infectados" y la proposición q "todo infectado resulta positivo", la proposición que debemos analizar es $p \to q$.

En el caso 1, la proposición p es verdadera ya que todos los positivos están infectados y la proposición q también es verdadera; en el caso 2, la proposición p es verdadera y la q falsa ya que hay algún infectado entre los negativos, lo que significa que no ha dado positivo; en los casos 3 y 4 la proposición p es falsa y no hay nada que analizar. Así, hay un caso en que la proposición p es verdadera y la q es falsa, por lo que $p \to q$ es falsa.

12 CÓDIGOS

12.1 *Respuesta correcta: b*

Es una aplicación inyectiva porque no hay dos restos que lleven asociada la misma letra. No es una aplicación sobreyectiva porque, de acuerdo con la tabla, las letras I, Ñ, O y U no tienen preimagen. Puesto que no es sobreyectiva, no puede ser biyectiva.

12.2 *Respuesta correcta: c*

La correspondencia f no es una aplicación, ya que algunos elementos del conjunto original, las letras I, Ñ, O y U, no tienen imagen.

12.3 *Respuesta correcta: c*

Si dividimos 2693750 entre 23, resulta

```
2 6 9 3 7 5 0 |2 3
  3 9          1 1 7 1 1 9
  1 6 3
      2 7
        4 5
        2 2 0
          1 3
```

luego $2693750 = 117119 \times 23 + 13$; el resto de la división es 13 y la letra asignada, de acuerdo con la tabla 6.12 es J.

12.4 *Respuesta correcta: a*

Si el número 95362431 tiene asignada la letra S, entonces su resto en la división por 23 es 15, lo que significa que se pone poner como

$$95362431 = 23 \times C + 15$$

donde C es el cociente de la división. Se sigue que el número $95362432 = 95362431 + 1$ será igual a

$$95362432 = 23 \times C + 15 + 1 = 23 \times C + 16$$

luego el resto de la división de 95362432 entre 23 es 16 y, de acuerdo con la tabla 6.12 de asignación de letras, le corresponde la letra Q.

12.5 *Respuesta correcta: a*

Si realizamos la división por 23 del número 95362441, resulta

```
9 5 3 6 2 4 4 1 |2 3
  3 3            4 1 4 6 1 9 3
  1 0 6
    1 4 2
        4 4
        2 1 4
            7 1
              2
```

El resto es 2, luego la letra que debe tener asignada es la W; el código es válido.

12.6 *Respuesta correcta: b*

Los ocho primeros dígitos de la cuenta son 5432 0001; calculamos el número M igual a

$$\begin{aligned} M &= 2^2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 4 + 2^4 \cdot 3 + 2^5 \cdot 2 \\ &\quad + 2^6 \cdot 0 + 2^7 \cdot 0 + 2^8 \cdot 0 + 2^9 \cdot 1 \\ &= 676 \end{aligned}$$

Ahora, el resto de la división por 11 es igual a 5.

```
6 7 6 |1 1
  1 6  6 1
    5
```

luego el primer dígito de control es igual a $11 - r = 11 - 5 = 6$.

12.7 *Respuesta correcta: a*

Comprobemos que los dos dígitos de control cumplen el algoritmo que hemos descrito. Primero, M es igual a

$$\begin{aligned} M &= 2^2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 4 + 2^4 \cdot 3 + 2^5 \cdot 2 \\ &\quad + 2^6 \cdot 1 + 2^7 \cdot 0 + 2^8 \cdot 0 + 2^9 \cdot 1 \\ &= 740 \end{aligned}$$

El resto de la división de M por 11 es $r = 3$.

$$\begin{array}{rrr|ll} 7 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{4-5} & 8 & 0 & 6 & 7 \\ & & 3 & & \end{array}$$

luego el primer dígito de control es $11 - 3 = 8$.

Segundo, calculamos N igual a

$$\begin{aligned} N &= 4 + 2^1 \cdot 2 + 2^3 \cdot 2 + 2^4 \cdot 5 + 2^5 \cdot 9 + 2^6 \cdot 7 + 2^9 \cdot 1 \\ &= 1352 \end{aligned}$$

El resto de la división de N por 11 es $s = 10$.

$$\begin{array}{rrrr|lll} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 & \\ \cline{5-7} & 2 & 5 & & 1 & 2 & 2 \\ & & 3 & 2 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \end{array}$$

luego el segundo dígito de control es $11 - s = 11 - 10 = 1$.