CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

4.1 La expresión $f(x) = \sqrt{x-1}$ define una función $f : I \mapsto \mathbb{R}$ si

a) $I = (-1, \infty)$.

b) $I = [1, \infty)$.

c) $I = (-\infty, \infty)$.

4.2 La expresión $f(x) = (x^2 - 1)/x$ define una función $f : I \mapsto \mathbb{R}$ si

a) $I = (-\infty, 2]$.

b) $I = (-\infty, 8)$.

c) $I = (4, \infty)$.

4.3 La expresión $f(x) = 1/(x-2)$ no define una función $f : I \mapsto \mathbb{R}$ si

a) $I = (-\infty, 1]$.

b) $I = (-3, 3]$.

c) $I = [3, \infty)$.

4.4 El gráfico de una función f definida en el intervalo $I = (0, 5)$ pasa por el punto $(1, 3)$ si

a) $f(3) = 1$.

b) $f^{-1}(1) = 3$.

c) $f(1) = 3$.

4.5 El gráfico de la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ no pasa por el punto

a) $(2, 5)$.

b) $(-1, 2)$.

c) $(-2, 3)$.

4.6 El gráfico de la función $f(x) = x^2 - 2$ no pasa por el punto

a) $(2, 5)$.

b) $(2, 2)$.

c) $(3, 7)$.

4.7 El gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ pasa por el punto

a) $(-1, 2)$.

b) $(-1, \sqrt{3})$.

c) $(2, \sqrt{3})$.

4.8 El gráfico de la función $f(x) = (x^2 - 2)/(x - 1)$ pasa por el punto

a) $(-1, -1/2)$.

b) $(2, 0)$.

c) $(-2, -2/3)$.

4.9 El gráfico de la función $f = x^2 - 2/(x - 1)$ pasa por los puntos

a) $(-1, -2)$ y $(0, 2)$.

b) $(0, 2)$ y $(2, 0)$.

c) $(-1, 2)$ y $(2, 2)$.

4.10 El gráfico de la función $f = \sqrt{x^2 + 3}$ pasa por los puntos

a) $(0, \sqrt{3})$ y $(-1, \sqrt{2})$.

b) $(\sqrt{6}, 3)$ y $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

c) $(-1, 2)$ y $(3, \sqrt{3})$.

4.11 Si $f(x) = x^3 - 4$ el punto $(2, 5)$ está

a) por encima de la gráfica de f.

b) por debajo de la gráfica de f.

c) sobre la gráfica de f.

4.12 Si $f(x) = 2 - 1/x$ el punto $(1/3, -1)$ está

a) por encima de la gráfica de f.

b) por debajo de la gráfica de f.

c) sobre la gráfica de f.

4.13 Si $f(x) = -1/\sqrt{x}$ el punto $(1/4, 2)$ está

a) por encima de la gráfica de f.

b) por debajo de la gráfica de f.

c) sobre la gráfica de f.

4.14 Si f es creciente en el intervalo $(-4, 1)$ no puede ser

a) $f(-3) > f(-1)$.

b) $f(1/2) > f(-1/2)$.

c) $f(-3) = f(-2)$.

4.15 Si f es decreciente en el intervalo $(-3, 1)$ no puede ser

a) $f(-4/3) < f(-2/3)$.

b) $f(-4/3) < f(-5/3)$.

c) $f(-7/3) = f(-4/3)$.

4.16 El límite de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ cuando $x \to -1$ es

a) 0.

b) -4.

c) 2.

4.17 Cuando $x \to 0$, la función

$$f(x) = -\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{4+x}+2}$$

tiende a

a) -2.

b) $-1/2$.

c) $1/2$.

4.18 La función $f(x) = 3x^2 - 2x^4$ tiene derivada

a) $f'(x) = 6x^3 - 8x^5$.

b) $f'(x) = 6x - 8x^3$.

c) $f'(x) = 6x^2 - 8x^4$.

4.19 La función $f(x) = -3x^3$ tiene derivada

a) $f'(x) = 9x^3$.

b) $f'(x) = -9x^4$.

c) $f'(x) = -9x^2$.

4.20 La función $f(x) = 1/x^3$ tiene derivada

a) $f'(x) = 1/(3x^2)$.

b) $f'(x) = -3/x^2$.

c) $f'(x) = 3/x^4$.

4.21 La función $f(x) = x^3 - 3x$ tiene derivada

a) $f'(x) = x^2 - 3$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$.

c) $f'(x) = 3x^2 - 3x$.

4.22 La función $(2-3x)^3$ tiene derivada

a) $3(2-3x)^2$.

b) $-9(2-3x)^2$.

c) $-6(2-3x)^2$.

4.23 La función $\sqrt{2x^2+1}$ tiene derivada

a) $1/(2\sqrt{2x^2+1})$.

b) $\sqrt{4x}$.

c) $2x/\sqrt{2x^2+1}$.

4.24 Si la posición de un móvil sobre una recta viene dada por $f(t) = t^2 - t$, su velocidad en el instante t es

a) $v(t) = 2t - 1$.

b) $v(t) = 2t - 2/t$.

c) $v(t) = t^2 - t$.

4.25 La derivada de la función $f(x) = 3x^3 - x^2$ en $x = 3$ vale

a) 27.

b) 41.

c) 75.

4.26 La derivada de $f(x) = 3/(2x+1)$ en el punto $x = 0$ vale

a) -6.

b) -3.

c) -2.

4.27 La derivada de $f(x) = 6x^2 - (x+1)^3$ no cumple

a) $f'(0) = -3$.

b) $f'(1) = 0$.

c) $f'(-1) = -8$.

4.28 La derivada de $f(x) = \sqrt{x} - x$ cumple

a) $f'(1) = -5/6$.

b) $f'(4) = -3/4$.

c) $f'(9) = -1/2$.

4.29 La posición de un móvil en el instante t es $f(t) = (1-t^2)^3$, entonces su velocidad en el instante $1/2$ es

a) -1.5.

b) $-27/16$.

c) $-3/4$.

4.30 Si la posición de un móvil en el instante t es $f(t) = 2t^2 - t^3$, su velocidad no verifica

a) $v(1) = 3$.

b) $v(2) = 1$.

c) $v(3) = -9$.

4.31 Si la posición de un móvil en el instante t es $f(t) = 2t^3 - 3t$, su velocidad verifica

a) $v(0) = -3$.

b) $v(1) = -3$.

c) $v(\sqrt{2}) = 8$.

4.32 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 - 2x^3$ en el punto de abscisa $x = 1/2$ vale

a) $-19/16$.

b) $-15/7$.

c) $-12/5$.

4.33 La pendiente de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^4 - 4x^3$ en el punto de abscisa $x = 2$ vale

a) -18.

b) 12.

c) 16.

4.34 La gráfica de la función $f(x) = x^4 - 2x^2$ tiene tangente de pendiente

a) 0 en el punto de abscisa $x = 1$.

b) $3/2$ en el punto de abscisa $x = 1/2$.

c) 1 en el punto de abscisa $x = 0$.

4.35 La tangente a la gráfica de $f(x) = (2x+3)^2$ tiene pendiente -2 en el punto de abscisa

a) $x = -5/4$.

b) $x = -7/4$.

c) $x = -3/2$.

4.36 La recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 1/2$ tiene por ecuación

a) $2y + 3x + 1 = 0$.

b) $2y - 3x - 1 = 0$.

c) $2y + 3x - 2 = 0$.

4.37 La curva de ecuación $y = x^2/(x+1)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tiene por tangente la recta de ecuación

a) $4y + x - 3 = 0$.

b) $4x - 3y - 5/2 = 0$.

c) $4y - 3x + 1 = 0$.

4.38 Si la tangente a la gráfica de la función $f(x)$, en el punto de abscisa $x = 2$, tiene por ecuación $3x - 2y + 4 = 0$ se verifica

a) $f(2) = 5$ y $f'(2) = 1/2$.

b) $f(2) = 5$ y $f'(2) = 3/2$.

c) $f(2) = -5$ y $f'(2) = -3/2$.

4.39 La tangente a la gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^2 + x$ en el punto de abscisa $x = 1$ es paralela a la tangente en el punto de abscisa

a) $x = -2$.

b) $x = 1/2$.

c) $x = 0$.

4.40 La tangente a la curva $y = x^2$ en el punto de abscisa $x = -1$ es perpendicular a la tangente en el punto de abscisa

a) $x = 1/4$.

b) $x = 1/2$.

c) $x = 1$.

4.41 Las tangentes a la curva $y = x^3 - 2x$ en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ se cortan en el punto

a) $(1/2, -3/2)$.

b) $(-3/2, 3/4)$.

c) $(2/3, -4/3)$.

4.42 Pasa por el punto $(-1, 3)$ la tangente a la curva $y = 3/(x-2)$ en el punto de abscisa

a) $x = 1$.

b) $x = 0$.

c) $x = -1$.

4.43 La función $f(x) = x^3 - 3x$ es decreciente en el intervalo

a) $[-1, 1]$.

b) $[-2, 0]$.

c) $[0, 3]$.

4.44 La función $f(x) = x^4 - x^3/2 + 5x^2$ tiene derivada segunda

a) $8x^2 - 3x$.

b) $4x^3 - 3x^2$.

c) $12x^2 - 3x + 10$.

4.45 La derivada segunda de $f(x) = 2x^{-2}$ (con $x > 0$) es

a) $-4x^{-2}$.

b) $12x^{-4}$.

c) $-8x^{-3}$.

4.46 La derivada segunda de $f(x) = x^2 - 1/x$ cumple

a) $f''(1) = -2$.

b) $f''(2) = 2$.

c) $f''(-1) = 4$.

4.47 La función $f(x) = x^2 - 3x + 5$ tiene un mínimo en

a) $x = 2$.

b) $x = 3/2$.

c) $x = -1/2$.

4.48 La función $f(x) = (x-1)^2/(x-2)$ tiene un máximo relativo en

a) $x = 3$.

b) $x = 1$.

c) $x = 0$.

4.49 La función $f(x) = (x-1)^2/(x-2)$ tiene un mínimo relativo en

a) $x = 3$.

b) $x = 1$.

c) $x = 0$.

4.50 La función $f(x) = 1/x^3$ en el intervalo $(0, \infty)$

a) es convexa.

b) es cóncava.

c) no es cóncava ni convexa.

SOLUCIONES DE LAS CUESTIONES DE AUTOEVALUACIÓN

4.1 *Respuesta correcta: b*

$\sqrt{x-1}$ sólo da un número real cuando $x-1$ es positivo o nulo; es decir, cuando es $x \geq 1$, lo cual define el intervalo $[1,\infty)$.

4.2 *Respuesta correcta: a*

El valor de la expresión no está definido cuando $x=0$, luego sólo define una función en intervalos que no contengan el valor 0; como $(4,\infty)$

4.3 *Respuesta correcta: b*

El denominador se anula para $x=2$, así que la expresión de f define un función en cualquier intervalo que no contenga el valor 2.

4.4 *Respuesta correcta: c*

La gráfica de la función f la componen los puntos $(x,f(x))$ con $x \in (0,5)$. Luego debe ser $f(1)=3$.

4.5 *Respuesta correcta: c*

Como $f(2)=5$ y $f(-1)=2$, el gráfico de f pasa por los puntos $(2,5)$ y $(-1,2)$. En cambio $f(-2)=-3$ y la gráfica no pasa por $(-2,3)$.

4.6 *Respuesta correcta: a*

Es $f(2)=2$ y $f(3)=7$; luego el gráfico de f pasa por los puntos $(2,2)$ y $(3,7)$, pero no pasa por $(2,5)$.

4.7 *Respuesta correcta: b*

Dado que $f(-1)=\sqrt{3}$ y $f(2)=\sqrt{6}$, el gráfico de f pasa por $(-1,\sqrt{3})$, pero no pasa por $(-1,2)$ ni por $(2,\sqrt{3})$.

4.8 *Respuesta correcta: c*

Como $f(-1)=1/2$, $f(2)=2$ y $f(-2)=-2/3$, el gráfico de f pasa por $(-2,-2/3)$, pero no pasa por $(-1,-1/2)$ ni por $(2,0)$.

4.9 *Respuesta correcta: c*

Es $f(-1)=2$, $f(0)=2$ y $f(2)=2$, luego el gráfico de f pasa por $(-1,2)$ y $(2,2)$, pero no pasa por $(-1,-2)$ ni por $(2,0)$.

4.10 *Respuesta correcta: b*

Es $f(-1)=2$, $f(0)=\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3})=\sqrt{6}$, $f(\sqrt{6})=3$ y $f(3)=2\sqrt{3}$. Luego el gráfico de f pasa por $(0,\sqrt{3})$, por $(-1,2)$, por $(\sqrt{6},3)$ y por $(\sqrt{3},\sqrt{6})$, pero no pasa por $(-1,\sqrt{2})$ ni por $(3,\sqrt{3})$.

4.11 *Respuesta correcta: a*

Es $f(2)=4$; luego el punto $(2,5)$ está por encima de la gráfica de f.

4.12 *Respuesta correcta: c*

Es $f(1/3)=-1$; luego el punto $(1/3,-1)$ está sobre la gráfica de f.

4.13 *Respuesta correcta: a*

Es $f(1/4)=-2$; luego el punto $(1/4,2)$ está por encima de la gráfica de f.

4.14 *Respuesta correcta: a*

Como $-3<-2$ y $-1/2<1/2$, si f es creciente tiene que ser $f(-3) \leq f(-2)$ y $f(-1/2) \leq f(1/2)$, compatibles con (c) y (b). Pero $f(-3) \leq f(-1)$ no es compatible con (a).

4.15 *Respuesta correcta: a*

Puesto que $-7/3 < -5/3 < -4/3 < -2/3$, si f es decreciente ha de ser $f(-7/3) \geq f(-5/3) \geq f(-4/3) \geq f(-2/3)$.

4.16 *Respuesta correcta: a*

$\text{lím}_{x\to-1} f(x) = \text{lím}_{x\to-1}(x^2-2x-3) = (-1)^2 - 2\cdot(-1)-3=0$

4.17 *Respuesta correcta: b*

Se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{4+x}+2} \\ &= -\frac{\sqrt{1-0}+1}{\sqrt{4+0}+2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4.18 *Respuesta correcta: b*

Aplicar las reglas **(i)**, **(ii)**$_1$ y **(v$_3$)**.

4.19 *Respuesta correcta: c*

Aplicar las reglas **(ii)**$_1$ y **(v$_3$)**.

4.20 *Respuesta correcta: b*

Aplicar a $f(x) = x^{-3}$ la regla **(v$_3$)**.

4.21 *Respuesta correcta: b*

Aplicar las reglas **(i)**, **(ii$_1$)** y **(v$_3$)**.

4.22 *Respuesta correcta: b*

Se puede aplicar la regla de la cadena con $g(x) = 2-3x$ y $f(x) = x^3$.

4.23 *Respuesta correcta: c*

Se puede aplicar la regla de la cadena con $g(x) = 2x^2+1$ y $f(x) = \sqrt{x}$.

4.24 *Respuesta correcta: a*

Es $v(t) = f'(t) = 2t-1$.

4.25 *Respuesta correcta: c*

Como $f'(x) = 9x^2-2x$, resulta $f'(3) = 81-6 = 75$.

4.26 *Respuesta correcta: a*

La derivada $f'(x) = -6/(2x+1)^2$ en $x = 0$ vale $f'(0) = -6$.

4.27 *Respuesta correcta: c*

La derivada $f'(x) = -3x^2+6x-3$ cumple $f'(0) = -3$, $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = -12$.

4.28 *Respuesta correcta: b*

La derivada $f'(x) = -1+1/2\sqrt{x}$ cumple $f'(1) = -1/2$, $f'(4) = -3/4$ y $f'(9) = -5/6$.

4.29 *Respuesta correcta: b*

La velocidad instantánea vale $f'(t) = -6t(1-t^2)^2$; con lo cual $f'(1/2) = -3(1/4)^2 = -27/16$.

4.30 *Respuesta correcta: b*

La velocidad instantánea vale $v(t) = f'(t) = 6t-3t^2$, de modo que $v(1) = 3$, $v(2) = 0$ y $v(3) = -9$.

4.31 *Respuesta correcta: a*

La velocidad instantánea vale $v(t) = f'(t) = 6t^2-3$, de modo que $v(0) = -3$, $v(1) = 3$ y $v(\sqrt{2}) = -9$.

4.32 *Respuesta correcta: a*

Es $f'(x) = 5x^4-6x^2$; así que $f'(1/2) = -19/16$.

4.33 *Respuesta correcta: c*

Es $f'(x) = 8x^3-12x^2$; así que $f'(2) = 16$.

4.34 *Respuesta correcta: a*

Es $f'(x) = 4x^3-4x$; de modo que $f'(1) = 0$, $f'(1/2) = -3/2$ y $f'(0) = 0$.

4.35 *Respuesta correcta: b*

Es $f'(x) = 4(2x+3)$; de modo que $f'(-5/4) = 2$, $f'(-7/4) = -2$ y $f'(-3/2) = 0$.

4.36 *Respuesta correcta: b*

Como $f'(x) = 6x^2-3$, la pendiente de la tangente es $f'(1/2) = -3/2$ y pasa por el punto $(1/2,-5/4)$, pues $f(1/2) = -5/4$.

4.37 *Respuesta correcta: c*

La derivada $y' = (x^2+2x)/(x+1)^2$ vale $3/4$ para $x = 1$; y la curva pasa por el punto $(1,1/2)$, luego la tangente es $y-1/2 = 3/4(x-1)$.

4.38 *Respuesta correcta: b*

La recta pasa por el punto $(2,5)$ y tiene pendiente $3/2$.

4.39 *Respuesta correcta: c*

La derivada $f'(x) = 4x^3-4x+1$ para $x = 1$ vale $f'(1) = 1$; mientras que $f'(-2) = -23$, $f'(1/2)) = -1/2$ y $f'(0) = 1$. Luego, las tangentes en $x = 1$ y $x = 0$ son paralelas.

4.40 *Respuesta correcta: a*

La derivada $y' = 2x$ vale -2 para $x = -1$; la perpendicular a la tangente tiene pendiente $1/2$, como corresponde a la tangente en el punto de abscisa $1/4$.

4.41 *Respuesta correcta: c*

La derivada $y' = 3x^2-2$ vale -2 para $x = 0$ y 1 para $x = 1$. Las ecuaciones de ambas tangentes son pues $y = -2x$ e $y = x-2$ respectivamente. Y se cortan en el punto $(2/3,-4/3)$.

4.42 *Respuesta correcta: a*

La derivada $y' = -3/(x-2)^2$ vale -3 cuando $x = 1$, $-3/4$ para $x = 0$ y $-1/3$ para $x = -1$. Luego las tangentes en los tres puntos son $y = -3x$, $y = -3/4x - 3/2$ e $y = -(x+4)/3$; de las cuales sólo la primera pasa por $(-1,3)$.

4.43 *Respuesta correcta: a*

Su derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$ es negativa cuando $x^2 \leq 1$, lo cual sucede en el intervalo $[-1,1]$.

4.44 *Respuesta correcta: c*

La derivada primera es $f'(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x$ y la derivada segunda $f''(x) = 12x^2 - 3x + 10$.

4.45 *Respuesta correcta: b*

Es $f'(x) = 4x^{-3}$ y $f''(x) = 12x^{-4}$.

4.46 *Respuesta correcta: c*

Es $f'(x) = 2x + 1/x^2$ y $f''(x) = 2 - 2/x^3$, con lo cual $f''(1) = 0$, $f''(2) = 7/4$ y $f''(-1) = 4$.

4.47 *Respuesta correcta: b*

La derivada $f'(x) = 2x - 3$ se anula para $x = 3/2$, que corresponde a un mínimo pues f' es negativa si $x < 3/2$ y positiva si $x > 3/2$.

4.48 *Respuesta correcta: b*

La derivada $f'(x) = (x-1)(x-3)/(x-2)^2$ se anula para $x = 1$ y $x = 3$; además es positiva cuando $x < 1$ y cuando $x > 3$ y negativa en el intervalo $(1,3)$. Así pues hay un máximo relativo en $x = 1$.

4.49 *Respuesta correcta: a*

La derivada $f'(x) = (x-1)(x-3)/(x-2)^2$ se anula para $x = 1$ y $x = 3$; además es positiva cuando $x < 1$ y cuando $x > 3$ y negativa en el intervalo $(1,3)$. Así pues hay un mínimo relativo en $x = 3$.

4.50 *Respuesta correcta: a*

Es $f'(x) = -3/x^4$, siempre negativa, y $f''(x) = 12/x^5$ negativa o positiva según el signo de x. Luego $f'(x)$ crece en $(0,\infty)$ y la función es convexa.