

Simulación: Comportamiento caótico de un péndulo simple

Jhon Jairo Chiliquinga Jácome
Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias
Carrera de Física, Programación Científica
Séptimo Semestre
10 de Agosto de 2022

1. Introducción

El presente reporte tiene como propósito el presentar los resultados del análisis sobre comportamiento de un péndulo simple sometido a la acción de una fuerza externa periódica de la forma $F = f \cos(\omega t)$ y a rozamiento. Este análisis se centró en la periodicidad de las oscilaciones o la falta de esta al cambiar la magnitud f de la fuerza externa, así como en su comportamiento caótico bajo ciertas condiciones.

La ecuación diferencial que gobierna el movimiento del sistema planteado se puede presentar como

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\sin(\theta) - q \frac{d\theta}{dt} + b \cos(\omega t), \\ q &= \frac{r}{Lm}, \quad b = \frac{f}{m}, \end{aligned} \quad (1)$$

en donde m es la masa del péndulo, L su longitud y r el coeficiente de rozamiento.

Al ser una ecuación no lineal es necesario resolver el problema mediante métodos numéricos.

Existen diferentes métodos para analizar el sistema, por ejemplo, analizar su evolución temporal en el espacio de coordenadas. Principalmente, este análisis se lo hace recurriendo a las trayectorias generadas en el espacio de fases, el cual tendrá coordenadas $\{\theta, \dot{\theta}\}$.

Si se tiene una trayectoria cerrada en el espacio de fases se dice que se tiene un movimiento periódico. En contraposición, si no se tiene una trayectoria cerrada, el movimiento es no periódico.

Dentro de este contexto se puede encontrar el concepto de caos. Si no se encuentra un diagrama regular en el espacio de fases, es decir, hay aleatoriedad en la distribución de puntos, se puede decir que el sistema presenta un comportamiento caótico.

Una herramienta útil para el estudio de estos casos es la llamada *sección de Poincaré*. Esta se define como una sección del espacio de fases analizado. Ahora, las trayectorias del espacio de fases cortarán esta sección en tiempos discretos y se tendrá una serie de puntos representando estos

cortes. A esta colección de puntos se le llama *mapa de Poincaré*. [1]

Supongamos que en la sección de Poincaré se representan los cortes cada tiempo T . Entonces, si se tienen n puntos en esta sección significa que el movimiento tendrá un periodo nT . Si se tienen varios conjuntos de puntos, esto corresponde a un comportamiento caótico del sistema. [2]

Para el presente caso se representan los puntos en la sección de Poincaré cada tiempo $T = 2\pi/\omega$, con ω la frecuencia de la fuerza externa.

Finalmente, el comportamiento caótico de un sistema se puede analizar mediante el *diagrama de bifurcación*. Este muestra la dependencia de la frecuencia de oscilación encontrada en el sistema con un parámetro de control. En este diagrama se pueden encontrar regiones sombreadas a ciertos valores del parámetro, lo cual corresponde al régimen caótico.

2. Metodología

El lenguaje de programación usado para emular el problema descrito fue C++. Para la simulación se definió como unidad de frecuencia $\omega_0 = \sqrt{g/L} = 1$, en donde g es la aceleración de la gravedad. Además, se escogió $\omega = \frac{2}{3}\omega_0$ y $q = 0.5$ en (1). Finalmente, se usó $T = 2\pi/\omega$ (periodo de la fuerza externa) como unidad de tiempo.

Para todas las simulaciones realizadas se usaron las condiciones iniciales $\theta_0 = 1$ y $\dot{\theta}_0 = 0$. El ángulo θ y la velocidad $\dot{\theta}$ se midieron en unidades arbitrarias consistentes con la unidad de tiempo escogida.

El algoritmo usado para resolver (1) fue el de Runge-Kutta 4 con una división temporal de $N = 100$ en cada periodo T .

2.1. Programa

El programa empleado constó de 3 procedimientos y un algoritmo principal. Para los diferentes análisis se hicieron pequeñas variaciones al algoritmo, las cuales se detallan más adelante.

2.1.1. Procedimientos:

1. *a*: Evalúa la expresión (1) para valores específicos de θ , $\dot{\theta}$ y t .
2. *rk4*: encuentra la posición θ y la velocidad $\dot{\theta}$ en pasos de $dt = T/N$.
3. *parametros*: define los parámetros y condiciones iniciales descritas.

2.1.2. Algoritmo

Como único parámetro inicial para el programa se introdujo el valor de b . Con esto, se calcularon las posiciones y velocidades mediante el procedimiento *rk4* desde $t = 0$ hasta $t = 100T$.

El programa generó un archivo de salida con las posiciones y velocidades calculadas. Además guardó otro archivo correspondiente a las secciones de Poincaré de cada simulación.

2.2. Análisis

Bajo las condiciones presentadas se realizaron simulaciones para diferentes valores del parámetro b

$$b = 1.05, 1.07, 1.08, 1.09, 1.1. \quad (2)$$

Dependiendo del análisis a realizar se guardaron los datos de cierta forma para su posterior graficación.

El sistema analizado pasa por un periodo transitorio, el cual no interesa para los análisis presentes, por tanto se lo obviará y se tomarán datos luego de este tiempo. Para los valores de b escogidos el tiempo relevante es de $t > 50T$.

Para todos los análisis, excepto en la evolución temporal, se guardaron los datos de tal forma que $-\pi \leq \theta \leq \pi$ para una mejor visualización.

1. **Evolución temporal:** Se graficaron los datos de θ vs t para $50T < t < 100T$.
2. **Trayectoria en el espacio de fases:** Se graficaron los datos de $\dot{\theta}$ vs θ para $50T < t < 100T$.
3. **Sección de Poincaré:** Se guardaron y graficaron datos de $\dot{\theta}$ vs θ cada tiempo múltiplo de T para $t > 60T$. Además, se obtuvo la sección de Poincaré para $b = 1.2$ con un tiempo de simulación de $t = 10000T$.
4. **Diagrama de bifurcación:** Para tiempos múltiplos de T entre $500T < t < 1000T$, se

guardaron datos de θ para valores de b entre 1.04 y 1.09 en pasos de 0.0005. Se graficó θ vs b . Este diagrama muestra la cantidad de puntos en la sección de Poincaré para un valor de b específico.

Para el tratamiento de datos obtenidos se usó el programa Gnuplot.

3. Resultados

En las figuras 1 a 5 se muestran los gráficos de θ vs t . Los límites de θ no son de interés, pues solo indican los límites de oscilación luego del régimen transitorio.

Se puede ver que para $b = 1.05$ se tiene un marcado comportamiento periódico con periodo aproximadamente igual T . Para $b = 1.07$ se pudo distinguir un comportamiento periódico con un periodo $\approx 2T$. Con $b = 1.08$ el periodo de la solución aumentó a $\approx 3T$. En estos 3 casos se tuvieron subarmónicos de la frecuencia de la fuerza externa.

Para el caso de $b = 1.09$ no se pudo encontrar un patrón claro, con lo cual no se pudo distinguir un movimiento periódico. Lo mismo sucedió con $b = 1.1$. En este último caso fue más notorio la ausencia de un movimiento periódico

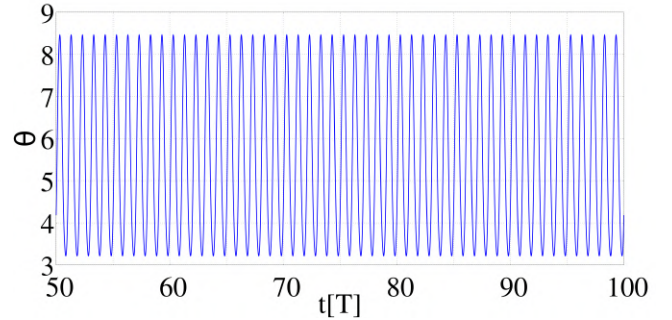


Figura 1: Evolución temporal de θ para $b = 1.05$.

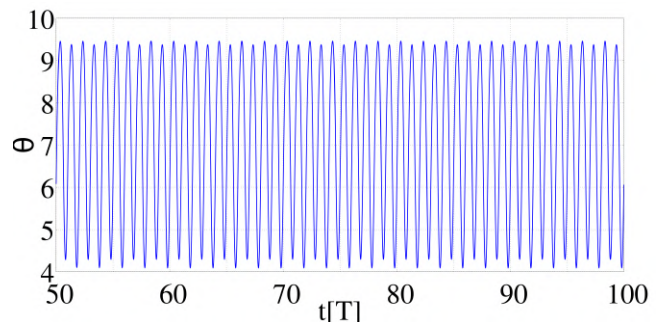


Figura 2: Evolución temporal de θ para $b = 1.07$.

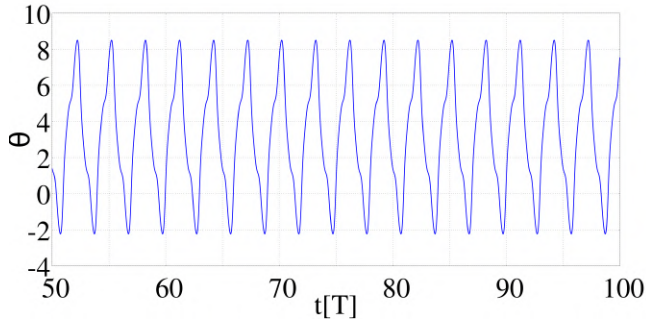


Figura 3: Evolución temporal de θ para $b = 1.08$.

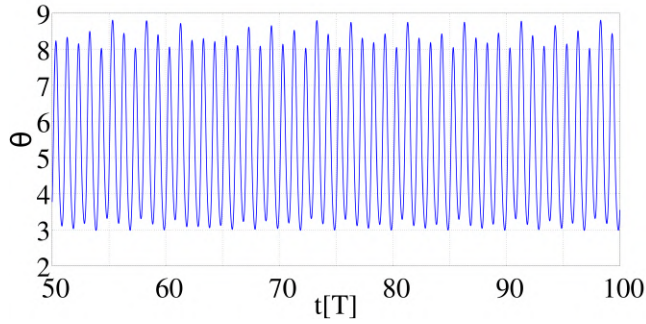


Figura 4: Evolución temporal de θ para $b = 1.09$.

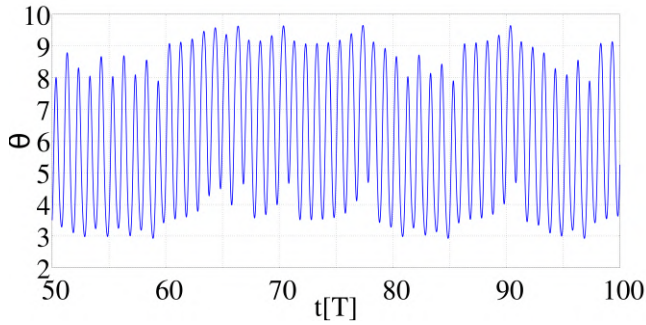


Figura 5: Evolución temporal de θ para $b = 1.1$.

En las figuras 6 a 10 se muestran las trayectorias en el espacio de fases para diferentes valores de b luego del periodo transitorio. Los saltos en estas se deben al dominio de los datos guardados $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Para $b = 1.05, 1.07, 1.08$ se distinguió una trayectoria cerrada bien definida, lo cual corresponde a un movimiento periódico. Esto está en concordancia con el análisis de la evolución temporal para estos casos, pues se pudo ver un patrón repetitivo.

Ahora, para los casos con $b = 1.09, 1.1$ se vio un aumento en la aleatoriedad de la distribución de puntos. Para $b = 1.09$ las trayectorias empezaron a ser menos notorias y no se distingue una cerrada como en los casos anteriores. Para $b = 1.1$ esto se vio más marcado. En estos dos casos se puede ver el comportamiento caótico del sistema.

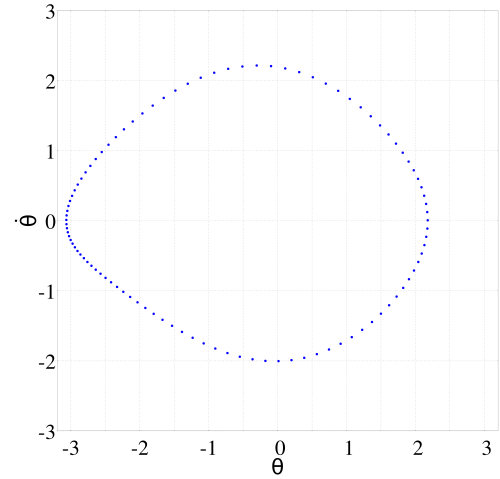


Figura 6: Trayectoria en el espacio de fases para $b = 1.05$.

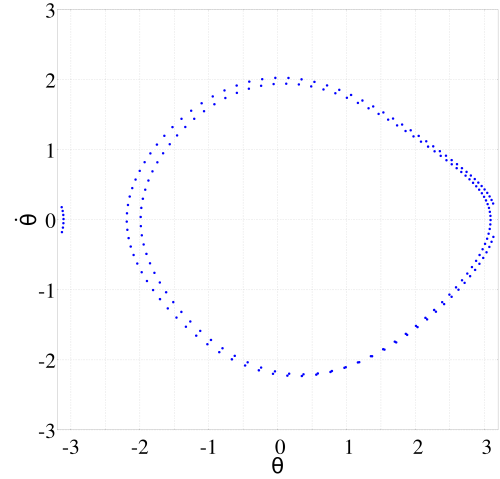


Figura 7: Trayectoria en el espacio de fases para $b = 1.07$.

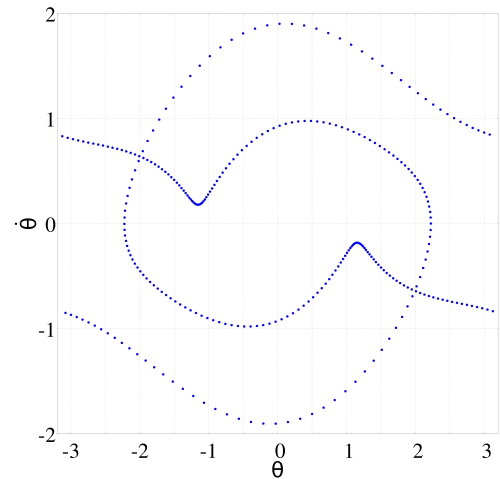


Figura 8: Trayectoria en el espacio de fases para $b = 1.08$.

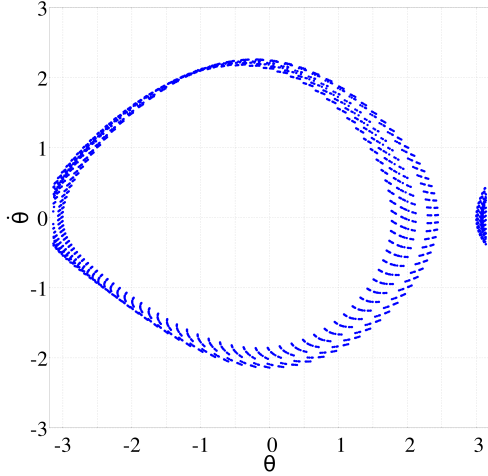


Figura 9: Trayectoria en el espacio de fases para $b = 1.09$.

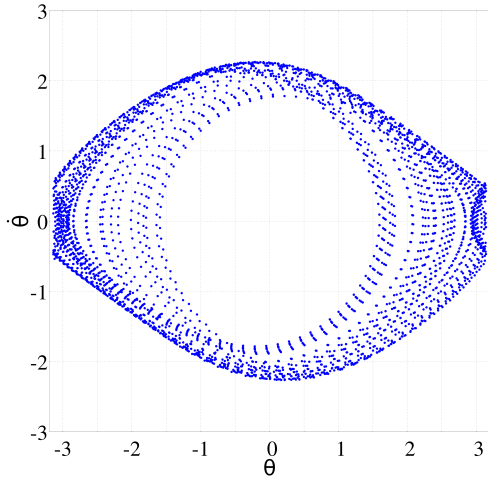


Figura 10: Trayectoria en el espacio de fases para $b = 1.1$.

Las secciones de Poincaré para cada caso se presentaron en las figuras 11 a 15.

Para $b = 1.05$ se tiene solo un punto, es decir, que se tuvo un movimiento periódico con un periodo igual a T . Para $b = 1.07$ se tuvieron 2 puntos, es decir, un movimiento periódico con periodo $2T$ y para $b = 1.08$ un movimiento periódico con periodo $3T$.

Con $b = 1.09$ se empieza a mostrar un patrón continuo en la distribución de puntos en la sección de Poincaré. Si se aumenta el tiempo de simulación se observan más puntos que no coinciden con los anteriores, entonces este patrón es aún más marcado, es decir, no se tiene un comportamiento periódico del sistema.

Para el valor de $b = 1.1$ los puntos de la sección de Poincaré ocuparon un área más extensa en el plano. Igualmente, al aumentar el tiempo de

simulación este patrón se vio más marcado.

En la figura 16 se muestra la sección de Poincaré para $b = 1.2$ y un tiempo de simulación mayor. Se vio que se forma una trayectoria que exhibe un comportamiento fractal. Para ilustrar esto se graficó los puntos de la sección en el rango de una "punta" de la trayectoria formada, la cual se muestra en la figura 17. Se ve que la misma estructura se repite varias veces, lo cual muestra un comportamiento caótico del sistema, pues se tienen varios conjuntos de puntos.

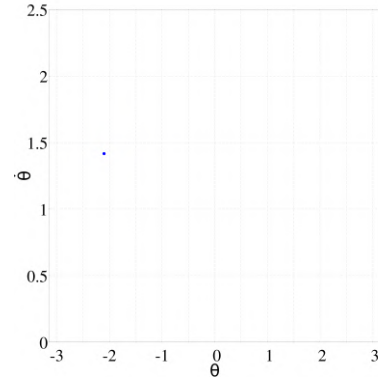


Figura 11: Sección de Poincaré para $b = 1.05$.

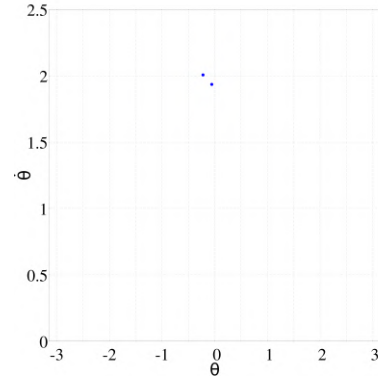


Figura 12: Sección de Poincaré para $b = 1.07$.

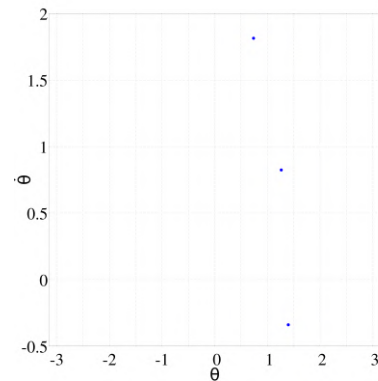


Figura 13: Sección de Poincaré para $b = 1.08$.

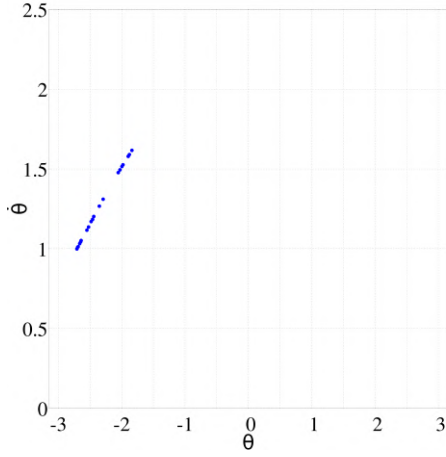


Figura 14: Sección de Poincaré para $b = 1.09$.

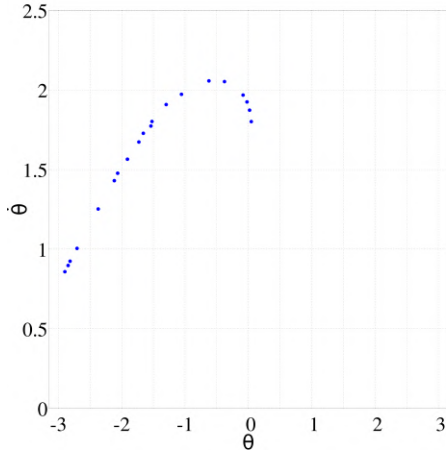


Figura 15: Sección de Poincaré para $b = 1.1$.

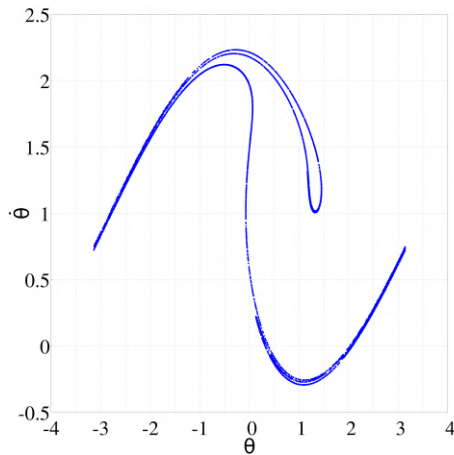


Figura 16: Sección de Poincaré para $b = 1.2$ para tiempos $80T < t < 10000T$.

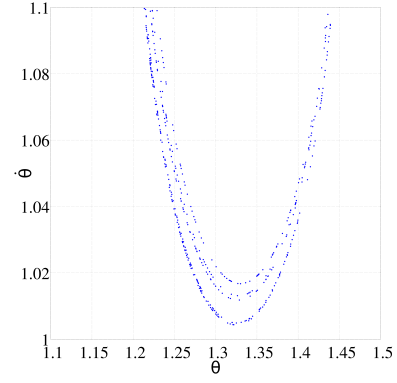


Figura 17: Comportamiento fractal de la sección de Poincaré con $b = 1.2$.

Finalmente, en la figura 18 se presenta el diagrama de bifurcación del sistema. Los valores específicos de θ no son de importancia, pues solo muestran los valores del ángulo cada múltiplo de T en un b específico. Para valores de b entre 1.04 y 1.065 se observa que solo se tuvo un punto en la sección de Poincaré, por tanto, presentó un movimiento periódico con periodo T . Al incrementar b se vio que fue aumentando el número de bifurcaciones que se presentaron en el periodo de las soluciones encontradas. Se pudo observar que aproximadamente con $b > 1.083$ el diagrama presenta un comportamiento caótico, pues no se puede distinguir las bifurcaciones que se presentan y el gráfico se vuelve sombreado en esta zona.

Además, con $b \approx 1.088$ se puede diferenciar una zona que no está sombreada. Esta corresponde a un comportamiento no caótico. El sistema pasa por este punto y evoluciona nuevamente al caos para $b > 1.088$.

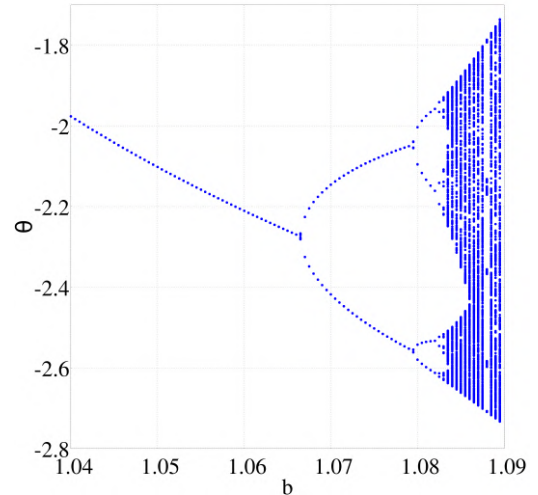


Figura 18: Diagrama de bifurcación.

4. Conclusiones

Se pudo encontrar que el sistema analizado puede presentar comportamiento caótico para ciertos valores de magnitud relativa de la fuerza b . Esto se comprobó mediante análisis en la evolución temporal del sistema y en su espacio de fases.

Para los valores de b analizados, la evolución temporal fue periódica hasta $b = 1.08$, lo cual no sucedió para valores mayores de b , evolucionando con cierto grado de aleatoriedad.

Con respecto a las trayectorias formadas en el espacio de fases, para valores $b < 1.08$ estas fueron cerradas luego del periodo transitorio, de lo cual se dedujo que se tienen movimientos periódicos. Para $b > 1.08$ las trayectorias ya no fueron bien defini-

das como en los casos anteriores lo cual mostró un comportamiento caótico.

Al analizar las secciones de Poincaré se encontró que a medida que b aumentaba, la cantidad de puntos también lo hacía, generándose un comportamiento fractal, indicando que se tiene un comportamiento caótico.

Finalmente, al estudiar el diagrama de bifurcación se pudo analizar cómo el sistema evoluciona al caos con el aumento de b . Para valores concretos de este parámetro se vio que se aumentaba el número de bifurcaciones presentes en el diagrama, llegando a un régimen caótico. Además, se pudo encontrar que para $b \approx 1.088$ se tuvo un comportamiento normal del sistema antes de volver al régimen caótico.

Referencias

- [1] John L. Saffko Herbert Goldstein Charles P. Poole. *Classical mechanics*. 3.^a ed. Addison Wesley, 2001.
- [2] Ahmet Bedri Özer y Erhan Akin. "TOOLS FOR DETECTING CHAOS". En: 2005.