

Simulación: Vibraciones en una cuerda de guitarra

Jhon Jairo Chiliquinga Jácome
Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias
Carrera de Física, Programación Científica
Séptimo Semestre
5 de Septiembre de 2022

1. Introducción 1.0/1.0

El sonido producido por instrumentos de cuerda pulsada, como son la guitarra, arpa, banjo, etc., es generado por ondas de presión que llegan a nuestros tímpanos y son interpretadas como sonido. A su vez, estas ondas de presión son producidas por las vibraciones de la cuerda del instrumento al interactuar con el aire. Es por esto que se puede escuchar un sonido diferente dependiendo de cómo vibre la cuerda. [1]

El fenómeno físico de vibración de una cuerda de guitarra se puede modelar con el sistema mostrado en la figura 1. En esta se presenta una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$ la cual ha sido levantada una altura h desde el punto x_o . La longitud de la cuerda es L cuando está completamente horizontal. El punto $x = 0$ representa el puente de la guitarra y $x = L$ la cejuela.

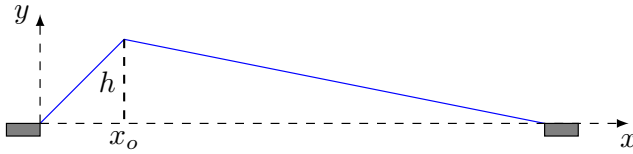


Figura 1: Cuerda con extremos fijos en $x = 0$, $x = L$ y elevada una altura h desde el punto x_o .

La forma inicial de la cuerda viene dada por una forma triangular

$$y(x, t = 0) = \begin{cases} \frac{h}{x_o}x, & \text{si } 0 \leq x \leq x_o, \\ \frac{h(L-x)}{L-x_o}, & \text{si } x_o \leq x \leq L. \end{cases} \quad (1)$$

Además, cada punto de la cuerda inicia desde el reposo, es decir

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

Su movimiento para un tiempo $t > 0$ está regido por la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (3)$$

en donde T es la tensión a la que está sometida la cuerda, ρ su densidad lineal y c la velocidad de propagación de ondas progresivas. Además, se ha asumido que no se tiene rozamiento con el aire, que la cuerda tiene densidad uniforme y que se analizan desplazamientos transversales pequeños comparados L . [2]

La solución de (3) sujeta a (1) y (2) se puede encontrar por el método de separación de variables y viene dada por [3]

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\omega_n t) \sin(k_n x), \quad (4)$$

en donde k_n , ω_n y b_n vienen dados por

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad (5)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (6)$$

Esta solución se puede interpretar como la suma de infinitas soluciones estacionarias que vibran con una frecuencia ω_n , múltiplo entero de una frecuencia fundamental ω_1

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{L}. \quad (7)$$

Igualmente se observa que las frecuencias ω_n no depende de la posición x_o .

Además, la ecuación (4) se puede considerar como la superposición de una onda viajando a la izquierda y otra hacia la derecha a una rapidez c

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \sin(k_n x + \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \sin(k_n x - \omega_n t). \quad (8)$$

De (5) se puede ver que la frecuencia de vibración depende de la longitud de la cuerda, su tensión y su densidad (a través de c). Es por esto que en una guitarra se puede generar distintas notas musicales de 3 formas diferentes.

1. Se puede cambiar la tensión a la que está sujeta una cuerda mediante la clavija, con lo cual se cambia la nota producida.

2. Si en una misma cuerda se presionan distintos trastes se está cambiando la longitud L correspondiente al análisis teórico.
3. Las distintas cuerdas tienen diferentes densidades lineales, por lo cual, si están sometidas a la misma tensión, sonarán de forma diferente.

Por otro lado, la fuerza ejercida sobre el puente ($x = 0$) se puede aproximar con la pendiente de la cuerda en ese punto, es decir

$$F(t) \sim \frac{y(\Delta x, t)}{\Delta x}, \quad \Delta x \ll 1, \quad (9)$$

mientras mayor la pendiente mayor será la fuerza en el puente.

En el presente trabajo se detallan los resultados del análisis del sistema de la figura 1 sujeto a las condiciones iniciales (1) y (2) y parámetros $L = 1[\text{m}]$, $c = 1[\text{m/s}]$ y $h = 0.01[\text{m}]$. Para ciertos valores de x_o se analizó la evolución temporal del perfil de la cuerda y de la fuerza en el puente. Para esta última se analizó su espectro de potencia, obtenido mediante una transformada rápida de Fourier, y con este se encontró los valores de las frecuencias presentes en el sistema.

2. Metodología 2.0/2.0

El lenguaje de programación usado para simular la situación descrita en la sección anterior fue C++.

Se realizaron 5 simulaciones determinadas por los siguientes valores de x_o

$$x_o = 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2[\text{m}]$$

Para todos los valores de x_o se obtuvieron datos de la evolución temporal de la cuerda y de la fuerza en el puente. Asimismo, de la transformada de Fourier de esta última.

Para la obtención de los resultados se usaron dos programas principales, “*cuerda.cpp*” y “*ffts1.cpp*”. El primer programa se usó para obtener los perfiles de la cuerda a diferentes tiempos y datos de la evolución temporal de la fuerza. El segundo dio como resultado la transformada de Fourier rápida de la fuerza.

Para la ejecución del programa *cuerda.cpp* se tuvo que ingresar como parámetro el valor de x_o en metros. Este programa encontró la solución a (3) mediante la evaluación numérica de (4) para el intervalo espacial $0 \leq x \leq 1[\text{m}]$ y temporal $0 \leq t \leq 10[\text{s}]$.

Para esto se discretizaron los dominios considerados. Se hicieron $N_t = 2000$ divisiones temporales con $dt = 0.005[\text{s}]$ y $N_x = 1000$ divisiones espaciales con $dx = 0.001[\text{m}]$.

Este programa constó de 4 subrutinas y 1 función principal.

2.1. Subrutinas

1. *inicio*: Define la forma inicial de la cuerda según la expresión (1).
2. *funcion*: Evalúa el integrando en la ecuación (6).
3. *fbn*: Calcula la expresión (6) mediante la regla de Simpson.
4. *parametros*: Define los valores para h , N_t , dt y dx mencionados anteriormente. Todos los valores faltantes ya fueron considerados en la estructuración del programa.

2.2. Función principal

Inicialmente se definieron dos vectores, **u** y **bn**. En **u** se guardaron los N_x datos de la posición de puntos discretos de la cuerda y en **bn** se guardaron los coeficientes b_n usados para calcular la suma (4).

Se generaron dos archivos de salida. En el primero, “*cuerdax_o.dat*”, se guardaron 201 perfiles de la cuerda correspondientes a los tiempos

$$t_k = k \cdot dt, \quad (10)$$

con $k = 0, 1, \dots, 200$. En el segundo, “*fuerzax_o.dat*” se guardaron datos de la fuerza sobre el puente para todo el dominio temporal.

Se definieron los parámetros a usar mediante la subrutina *parametros*. Y se guardó el perfil inicial de la cuerda mediante la subrutina *inicio*.

Luego, se calcularon 1000 coeficientes b_n de la serie (4) usando la subrutina *fbn* y se los guardó en **bn**. Usando estos coeficientes y para cada paso temporal se calculó la posición de cada punto discreto de la cuerda y se lo guardó en **u**.

En cada iteración temporal se guardó el valor de la fuerza sobre el puente en el archivo correspondiente usando la expresión (9) con $\Delta x = 0.001[\text{m}]$.

2.3. Espectro de potencia de la fuerza

Para correr el programa “*ffts1.cpp*” se tuvo que ingresar el archivo correspondiente a la serie temporal de la fuerza. La transformada rápida de Fou-

rier se la realizó con solo una descomposición en los datos.

Como archivo de salida se obtuvo la parte real e imaginaria de la transformada correspondiente al dominio de las frecuencias.

2.4. Análisis

Todo el análisis se lo hizo usando el software Gnuplot.

Para $x_o = 0.2[m]$ se graficaron los perfiles de la cuerda para tiempos desde $t = 0[s]$ hasta $t = 0.5[s]$ en pasos de $t = 0.1[s]$. Estos perfiles correspondieron a $k = 0, 20, 40, 60, 80, 100$ en la expresión (10).

Para $x_o = 0.01[m]$, $0.2[m]$ se graficó la evolución temporal de la fuerza y para todos los valores de x_o se graficó el espectro de potencia correspondiente a la fuerza usando su transformada de Fourier. De este se identificó el número n_x del primer armónico cuya amplitud fue cero. Se graficó n_x vs. x_o y se analizó la tendencia de los datos.

3. Resultados 5.0/5.0

En la figura 2 se muestran los perfiles de la cuerda con $x_o = 0.2[m]$ para los tiempos especificados.

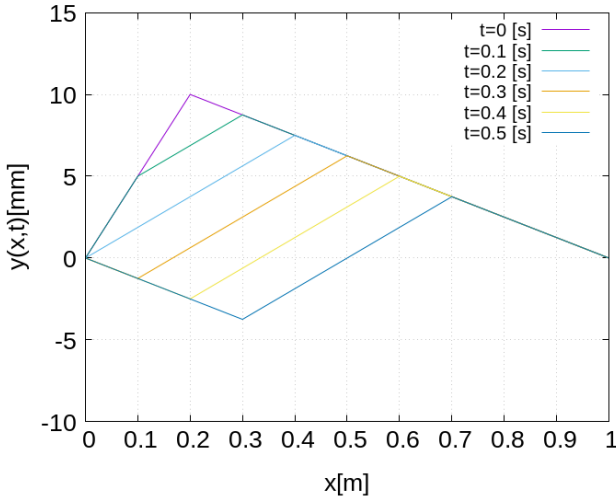


Figura 2: Perfiles de la cuerda para distintos tiempos cuando $x_o = 0.2[m]$.

La evolución temporal de la fuerza con $x_o = 0.01, 0.2[m]$ se presentan en las figuras 3 y 4 respectivamente.

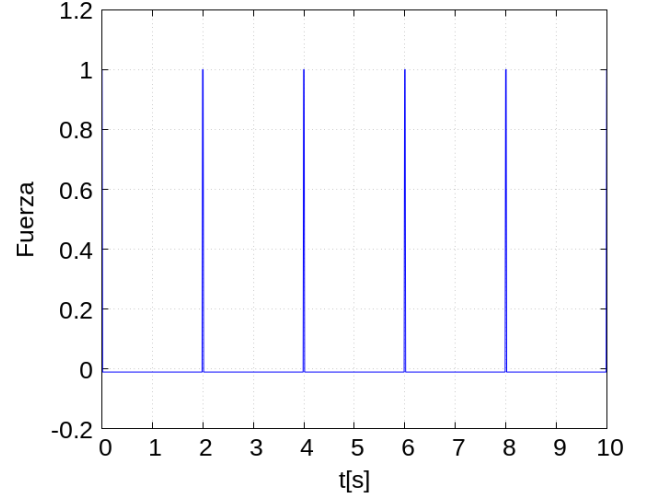


Figura 3: Evolución temporal de la fuerza en $x = 0$ para $x_o = 0.01[m]$.

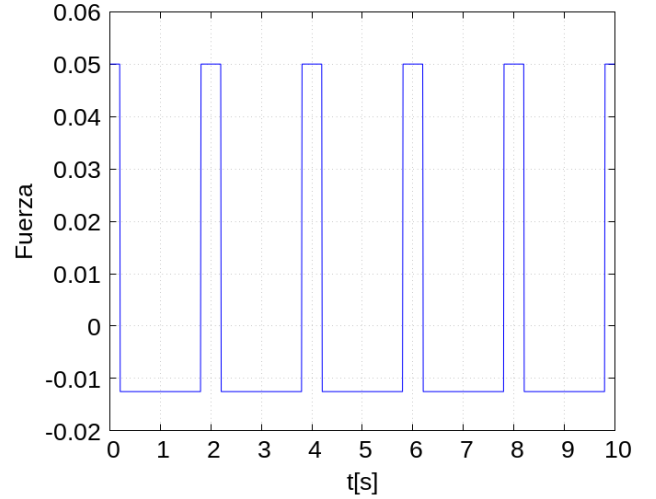


Figura 4: Evolución temporal de la fuerza en $x = 0$ para $x_o = 0.2[m]$.

El espectro de potencia para todos los valores de x_o considerados se presentan desde la figura 5 a 9. Las unidades de frecuencia se representaron en $[\pi\text{rad/s}]$, de esta forma las frecuencias ω_n de (5) son numéricamente iguales a n tomando en cuenta los valores escogidos de L y c . Entonces, ω_n solo tomará valores enteros.

En las figuras en donde se puede generar confusión sobre el armónico para el cual el espectro es cero se amplió el gráfico en la zona importante.

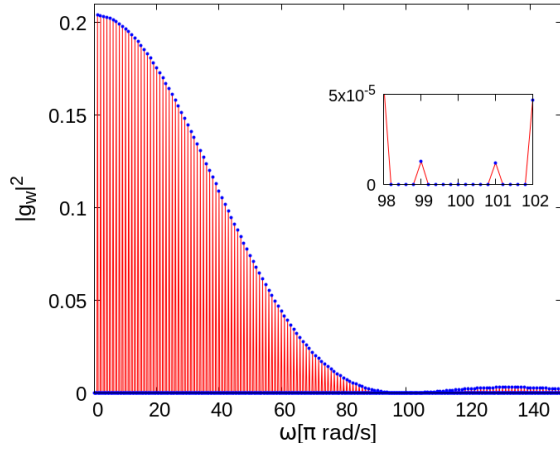


Figura 5: Espectro de potencia de la fuerza para $x_o = 0.01[\text{m}]$.

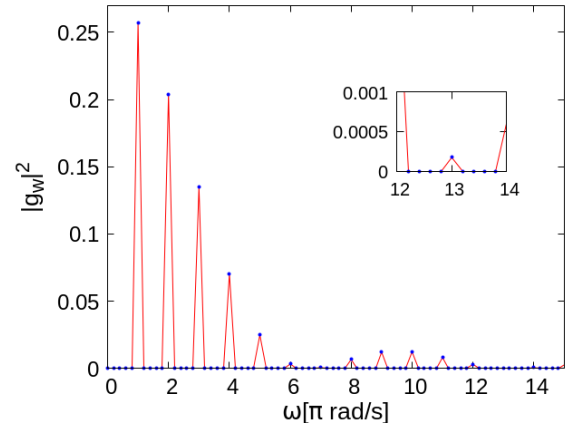


Figura 8: Espectro de potencia de la fuerza para $x_o = 0.15[\text{m}]$. Aunque en el gráfico pueda parecer que en el armónico 13 se tiene amplitud cero, al acercarse a esa región se puede ver que su amplitud es no nula.

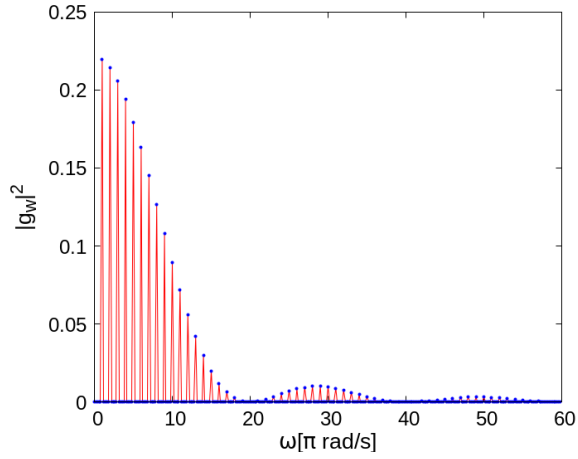


Figura 6: Espectro de potencia de la fuerza para $x_o = 0.05[\text{m}]$.

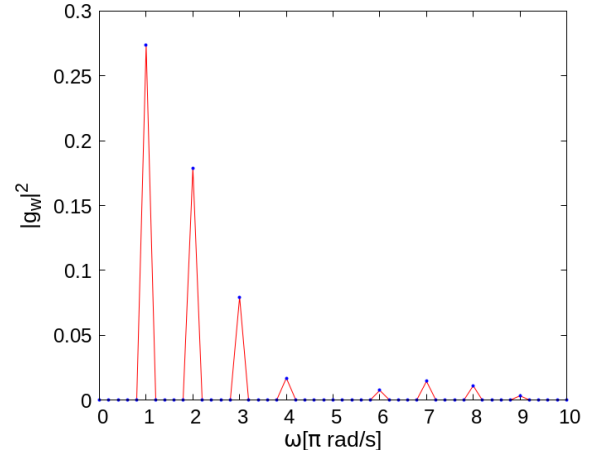


Figura 9: Espectro de potencia de la fuerza para $x_o = 0.2[\text{m}]$.

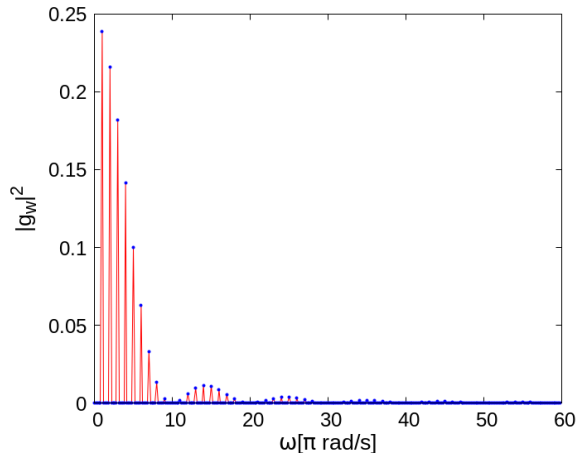


Figura 7: Espectro de potencia de la fuerza para $x_o = 0.1[\text{m}]$.

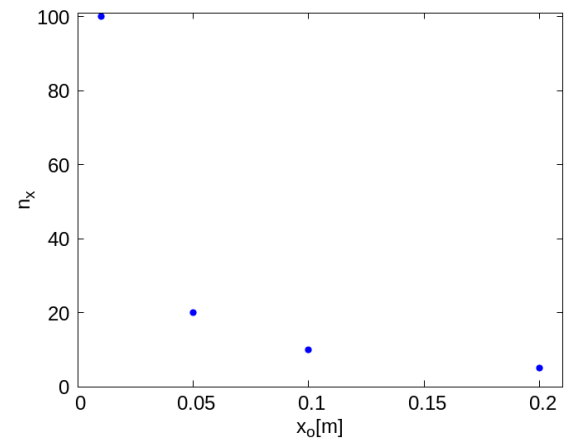


Figura 10: n_x vs x_o para los valores de x_o considerados en las simulaciones. Para $x_o = 0.15[\text{m}]$ ningún armónico tuvo amplitud cero en el rango analizado.

En la figura 10 se muestra la dependencia de n_x con x_o para los valores escogidos. Al examinar los valores se encontró que $n_x = 1/x_o$ en todos los casos.

4. Conclusiones 1.8/2.0

En la evolución temporal de los perfiles de la cuerda se pudo comprobar que este se conformó de la superposición de una onda viajando a la izquierda y otra a la derecha con velocidad $c = 1[\text{m/s}]$. En el tiempo $t = 0.1[\text{s}]$ se pudieron distinguir dos picos que son aquellos de las ondas mencionadas anteriormente. En el tiempo $0.2[\text{s}]$ solo se tiene un pico, ya que, debido a la velocidad de propagación, la onda que viajó a la izquierda se está reflejando en el extremo, lo cual se comprueba al tiempo $0.3[\text{s}]$, pues aparece un pico para $y < 0$ que corresponde a esta onda reflejada.

De lo anterior se dedujo que al tocar la cuerda la perturbación se propaga tanto para la izquierda como para la derecha, y no solamente en una dirección.

Por otro lado, de las gráficas de evolución temporal de la fuerza se tuvieron pulsos cuadrados que varían su anchura dependiendo del valor de x_o . En particular, fueron más delgados en el caso de $x_o = 0.01[\text{m}]$ y más gruesos en con $x_o = 0.2[\text{m}]$. El número de pulsos fue el mismo para los dos casos. Esto se debió al tiempo total simulado y la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda ($c = 1[\text{m/s}]$). Para que una de estas ondas vuelva a pasar por el mismo lugar le toma $2[\text{s}]$, pues la longitud de la cuerda es de $L = 1[\text{m}]$, esto se puede ver gracias a que los pulsos se presentan exactamente cada $2[\text{s}]$. Como se simularon $10[\text{s}]$ entonces es esperable que se tengan 5 pulsos en ambos casos.

Ahora, la anchura de los picos se relaciona con qué tan rápido la onda viajando hacia puente se refleja. Como para el caso $x_o = 0.01[\text{m}]$ la onda que viaja hacia la izquierda está más cerca que con $x_o = 0.2[\text{m}]$, entonces se refleja en un tiempo menor. Este comportamiento se va repitiendo en intervalos de 2 segundos por lo mencionado anteriormente. Además, se observó que mientras más lejos se toque la cuerda, mayor será la magnitud de la fuerza sobre este, pero su duración en el máximo será menor.

Al analizar los espectros de potencia de la fuerza para los diferentes valores de x_o se comprobó que la frecuencia con mayor importancia en el sistema (mayor amplitud en el espectro) es la fundamental, esto para las condiciones iniciales utilizadas. Además, el valor de esta frecuencia no dependió de x_o .

Por otro lado se observó que mientras mayor fue el valor de x_o , la amplitud de los picos decrecía con las frecuencias de los armónicos más rápidamente. En el caso de la guitarra, esto quiere decir que mientras más cerca del puente toquemos la cuerda, más notoriedad van a tener las frecuencias agudas con respecto a si tocamos más lejos de este. Todo esto se dedujo para el rango de valores de x_o analizados.

Por último, se pudo encontrar que el primer armónico que tiene amplitud cero se relaciona mediante $n_x = 1/x_o$. Como n_x debe ser un número entero, x_o debe ser tal que $1/x_o$ sea entero para que algún armónico tenga amplitud cero. Caso contrario, todos los armónicos estarán presentes en el sistema. Esto último se presentó con $x_o = 0.15[\text{m}]$. Esto nos indica que se puede tener cierto control sobre las frecuencias que suenan en nuestra guitarra variando la distancia al puente en donde se toca la cuerda.

Referencias

- [1] John Hall Arthur C. Guyton. *Manual del Tratado de Fisiologia Medica -Guytoncito - 10b: Edicion.* 10b. 2003. ISBN: 8448604296.
- [2] A. P. French. *Vibraciones y Ondas.* Curso de Física del M.I.T. Reverté, 1997. ISBN: 8429140980.
- [3] Kreyszig E. *Advanced engineering mathematics.* 9ed. Wiley, 2005. ISBN: 9780471728979.

Número de armónicos importantes para la generación del sonido en función de x_o ? -0.2