

Simulación: Comportamiento caótico de un péndulo simple

Gonzalez Peñafiel José Luis
Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias
Departamento de Física, Programación Científica
14 de febrero de 2023

1. Introducción 0.7/1.0

El presente reporte tiene como propósito presentar los resultados del análisis sobre el comportamiento de un péndulo simple sometido a una fuerza externa periódica de la forma $F = f \cdot \cos(\omega t)$ y a rozamiento. Este análisis se centró en la periodicidad de las oscilaciones y en el estudio de la variación de la misma al cambiar la relación entre la fuerza y la masa del péndulo (b), exhibiendo su comportamiento caótico bajo ciertas condiciones.

La ecuación diferencial que rige este movimiento del sistema de estudio, se presenta como:

rango de variación de theta? -0.1

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sin(\theta) - q\frac{d\theta}{dt} + b\cos(\omega t) \quad (1)$$

$$q = \frac{r}{Lm}, \quad b = \frac{f}{Lm}$$

valores de los parámetros? -0.1

en donde m es la masa del péndulo, L su longitud y r el coeficiente de rozamiento. Al ser una ecuación no lineal es necesario resolver el problema mediante métodos numéricos. Existen diferentes métodos para analizar este tipo de sistemas. En el presente reporte se tomaron dos caminos para el análisis: el análisis de la evolución espacial en el espacio de coordenadas (θ, t) , y el análisis de las trayectorias en el espacio de fases con coordenadas $(\dot{\theta}, \theta)$.

Si se tiene una trayectoria cerrada en el espacio de fases, la teoría nos dice que tiene un movimiento periódico, pero si no se tiene esta condición, se dice que el movimiento no es periódico. Tomando como antecedente lo dicho, se puede observar el comportamiento caótico como una distribución aleatoria de puntos en el diagrama de fases.

Otra herramienta útil para el análisis de este caso es la llamada *sección de Poincaré*. Esta se define como una sección del espacio de fases, donde las trayectorias cortan la sección en tiempos discretos y se tendrá una serie de puntos. A esta colección de puntos se le llama *mapa de Poincaré*.

También es conveniente mencionar, que en un sistema dinámico, podemos determinar una cantidad que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias cercanas. A esta cantidad se la conoce como el **Exponente de Lyapunov**. Cabe recalcar que estas trayectorias son del espacio de fases.

Para dos funciones $Z(t)$ se tiene:

En qué caso se tiene un comportamiento caótico? -0.1

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta Z_0| \quad (2)$$

Dados el movimiento particular que tenemos, se tienen dos fases: la transitoria y la estable. En la fase transitoria no se podría determinar una periodicidad, por lo tanto no tendría sentido calcular este coeficiente en esa parte.

Para el presente reporte, se tomó el tiempo cada $T = 2\pi/\omega$, con ω la frecuencia de la fuerza externa.

Los parámetros mas importantes para el presente análisis ya se han presentado, descartando la parte transitoria, que no nos aporta información al objetivo de análisis, y analizando la parte estable para proceder con las herramientas antes mencionadas y determinar el comportamiento caótico del péndulo simple sometido a una fuerza externa.

El presente reporte tiene como objetivo exhibir el comportamiento de un péndulo con la presencia de una fuerza periódica externa para estudiar su periodicidad, el cual llamaremos sistema 1, y el comportamiento del mismo péndulo cuando varían las condiciones iniciales en magnitudes bajas, el cual llamaremos sistema 2.

2. Metodología 1.8/2.0

El lenguaje de programación utilizado fue C + +. Para la simulación se definió $\omega = \sqrt{g/L} = 1$, en donde g es la aceleración de la gravedad. Otra condición que se utilizó fue $\omega = 2/3\omega_0$, y $q = 0,5$. Además, para las simulaciones del sistema 1 se utilizaron las condiciones iniciales $\theta_0 = 1$ y $\dot{\theta} = 0$, donde θ se midió en unidades de radián, consistentes con la unidad de tiempo escogida (T). Para el sistema 2 se comparó el péndulo con una variación del $\theta_1 = 1$ y $\theta_2 = 1,001$.

El algoritmo utilizado para resolver la ecuación diferencial propuesta (eq 1) fue Runge-Kutta 4 con una división temporal de $N = 100$ en cada periodo T .

2.1. Estructura del programa

Para la simulación, los dos programas constaron de 3 procedimientos y una función principal, que se detallan mas adelante. Cabe recalcar que el primer programa simuló aspectos relativos al movimiento de un péndulo que varia la fuerza externa (b), y el segundo que compara 2 movimientos del péndulo con las condiciones iniciales del movimiento variando en un 0,1 % pero con diferentes cantidades de b también.

A continuación se describen los procedimientos utilizados:

- **a:** Evalúa la ecuación diferencial para valores específicos de b , con las consideraciones antes mencionadas para cada caso.
- **rk4:** Resuelve la ecuación diferencial y determina θ y $\dot{\theta}$ en pasos de $dt = T/N$.
- **parámetros:** Esta función permite ingresar los parámetros que varían en la simulación.

La secuencia de los programas utilizados ejecutan *rk4* y genera 2 archivos de salida, uno con posiciones y velocidades calculadas, y otro con los datos necesarios para el mapa de Poincaré.

2.2. Análisis

A continuación se muestran los valores utilizados en las simulaciones para la variable b en los experimentos:

$$b_1 = 1,02 \ 1,04 \ 1,06 \ 1,08 \ 1,09 \ 1,1$$

$$b_2 = 0,6 \ 0,8 \ 1,0 \ 1,02 \ 1,06 \ 1,1$$

Para todos los análisis, se acotaron los datos de tal forma que $-\pi < \theta < \pi$ para mejorar la visualización, pero también se obtuvo una muestra con los datos sin acotar para visualizar otras propiedades del sistema.

- **Evolución temporal:** Se graficaron los datos de θ vs. t desde $t = 0, \dots, 20T$ para cada condición b_1 .
- **Espacio de fases:** Se graficaron los datos de $\dot{\theta}$ vs. θ para los puntos obtenidos en 100 períodos para cada condición b_1 .
- **Sección de Poincaré:** Se obtuvieron las secciones de Poincaré correspondientes al anterior análisis y a demás se realizaron 2 secciones adicionales para $b = 1,1$ y $b = 1,2$, con

datos de $100000T$. Se descartan los datos de la fase transitoria para el análisis.

- **Coefficiente de Lyapunov:** Se graficaron los datos del sistema 2 para cada b_2 en la forma de $\ln|\Delta\theta|$ vs. t , y con esto, podemos realizar un análisis para obtener el coeficiente de Lyapunov, pasando la ecuación exponencial (2) a una lineal.

procedimiento incorrecto. -0.2

El tratamiento de datos obtenidos se usó la librería Matplotlib en Python.

Para el estudio de los casos, de acuerdo con la ecuación (1), se define θ como el ángulo formado por el péndulo con Z^- .

3. Resultados 3.5/5.0

En las figuras 1 a 3 se muestran los gráficos de θ vs t para el sistema 1. En la figura 1 se puede observar como se comporta el péndulo cuando la fuerza es relativamente baja, se nota claramente que existe un periodo transitorio hasta alcanzar la estabilidad con el movimiento oscilatorio dentro de $[-\pi, \pi]$ y se mantiene el periodo en los 3 casos.

La figura 2 muestra mas claramente que este comportamiento transitorio se puede interpretar como uno o varios giros continuos del péndulo, sin oscilación, hasta que empieza a oscilar al rededor de un punto cercano a 0 por acción de la fuerza externa. Por ejemplo, para $b = 1,06$ tenemos que da una vuelta y media antes de empezar a oscilar. Para $b = 1,08$ ya se deja de notar una periodicidad dentro de los limites establecidos, ahora tiene un movimiento que aparenta ser periódico con un periodo de aproximadamente $3T$, como se puede notar en la figura 2, donde se puede interpretar esta forma de oscilar como un péndulo que da un giro y medio hacia un lado, y regresa dando un giro y medio hacia el otro lado.

En la figura 3, graficar los datos acotados no nos aportaba ninguna información útil, así que opto por graficar los datos sin acotar y se obtuvo este patrón para el movimiento con $b = 1,09$ y $b = 1,1$, donde no se aprecia un movimiento periódico a simple vista. Podemos notar que hasta $b = 1,08$ se tuvieron subarmónicos de la frecuencia de la fuerza externa.

gráficos redundantes. -0.1

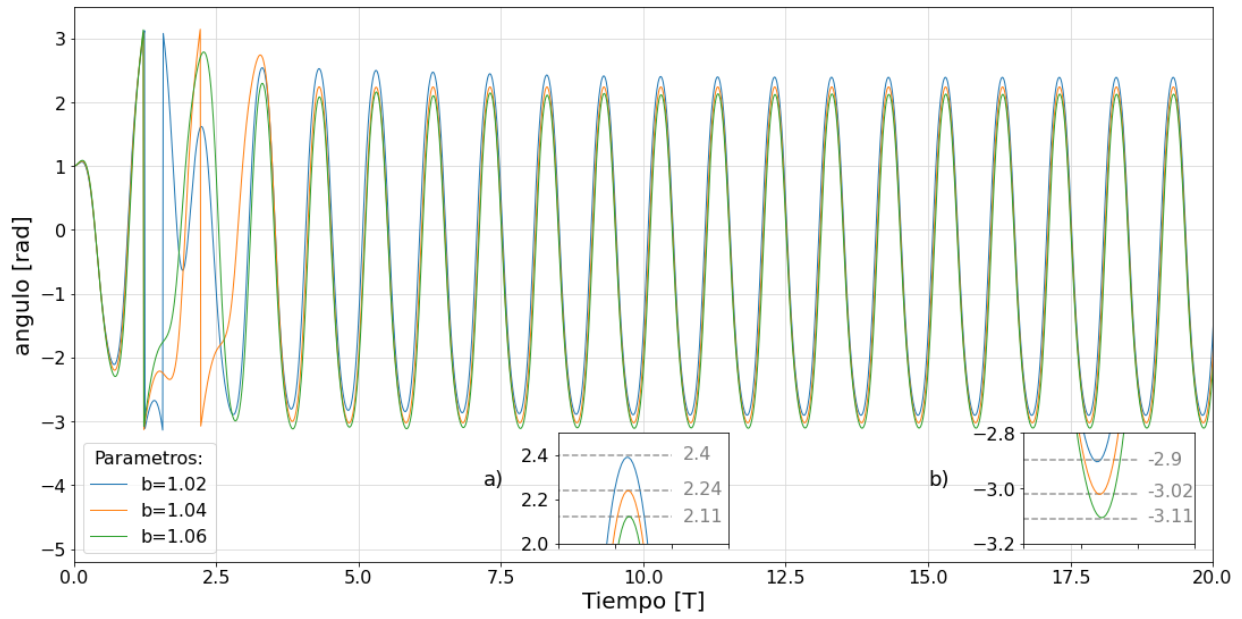


Figura 1: Sistema de estudio 1, θ vs. t acotado entre $-\pi < \theta < \pi$. Inset a) Máximo de una oscilación en la parte estable del movimiento, b) Mínimo de una oscilación en la parte estable del movimiento

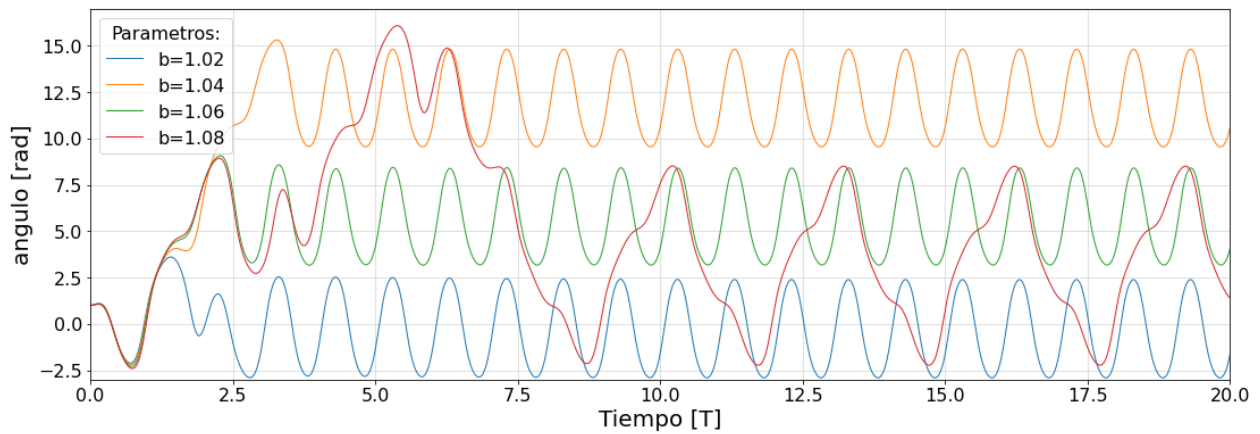


Figura 2: Sistema de estudio 1, θ vs. t sin acotar para b_1 menores.

Los gráfico debe estar acotados entre $-\pi$ y π . -0.2

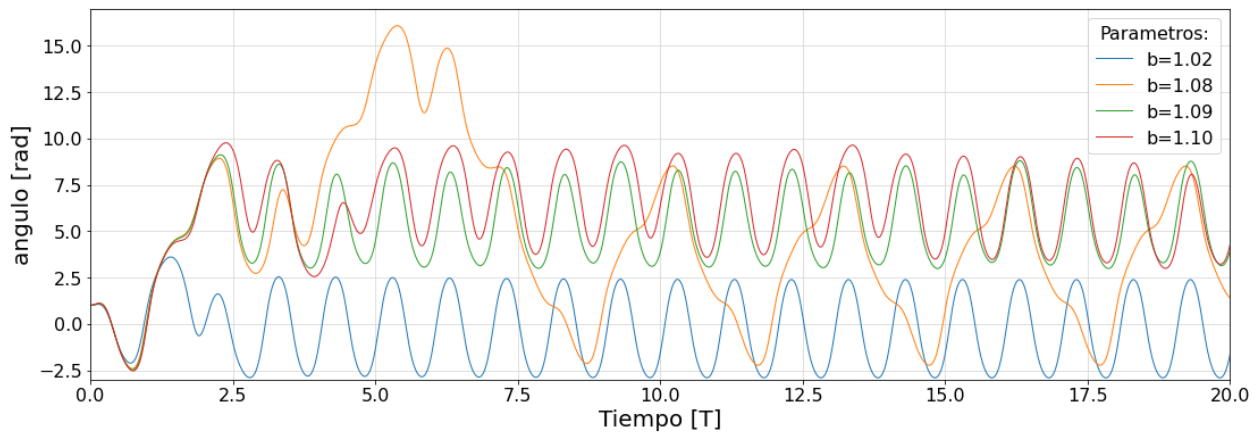


Figura 3: Sistema de estudio 1, θ vs. t sin acotar para b_1 mayores.

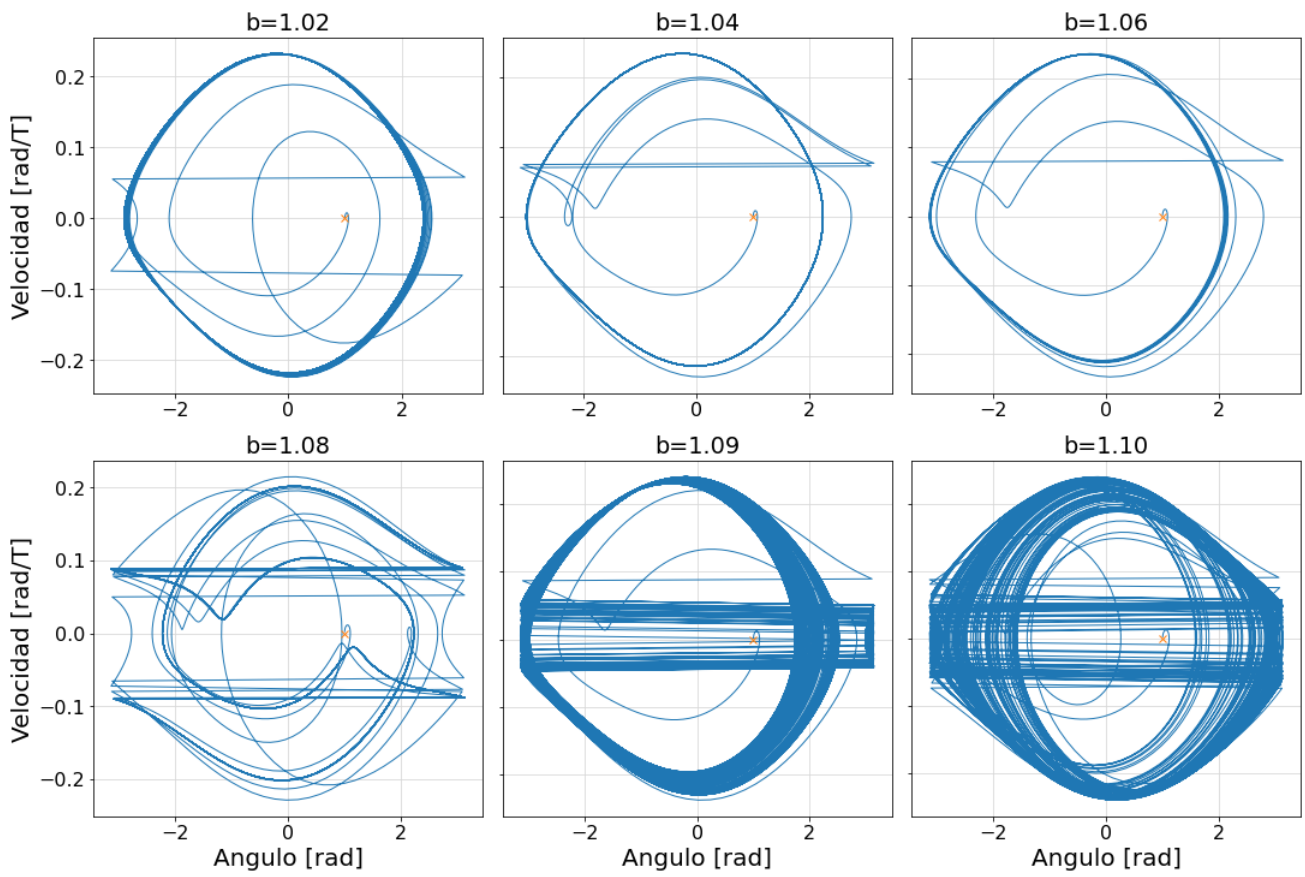


Figura 4: Sistema de estudio 1, espacio de fases acotado. *Gráficos inadecuados, se debe usar puntos. -0.2*

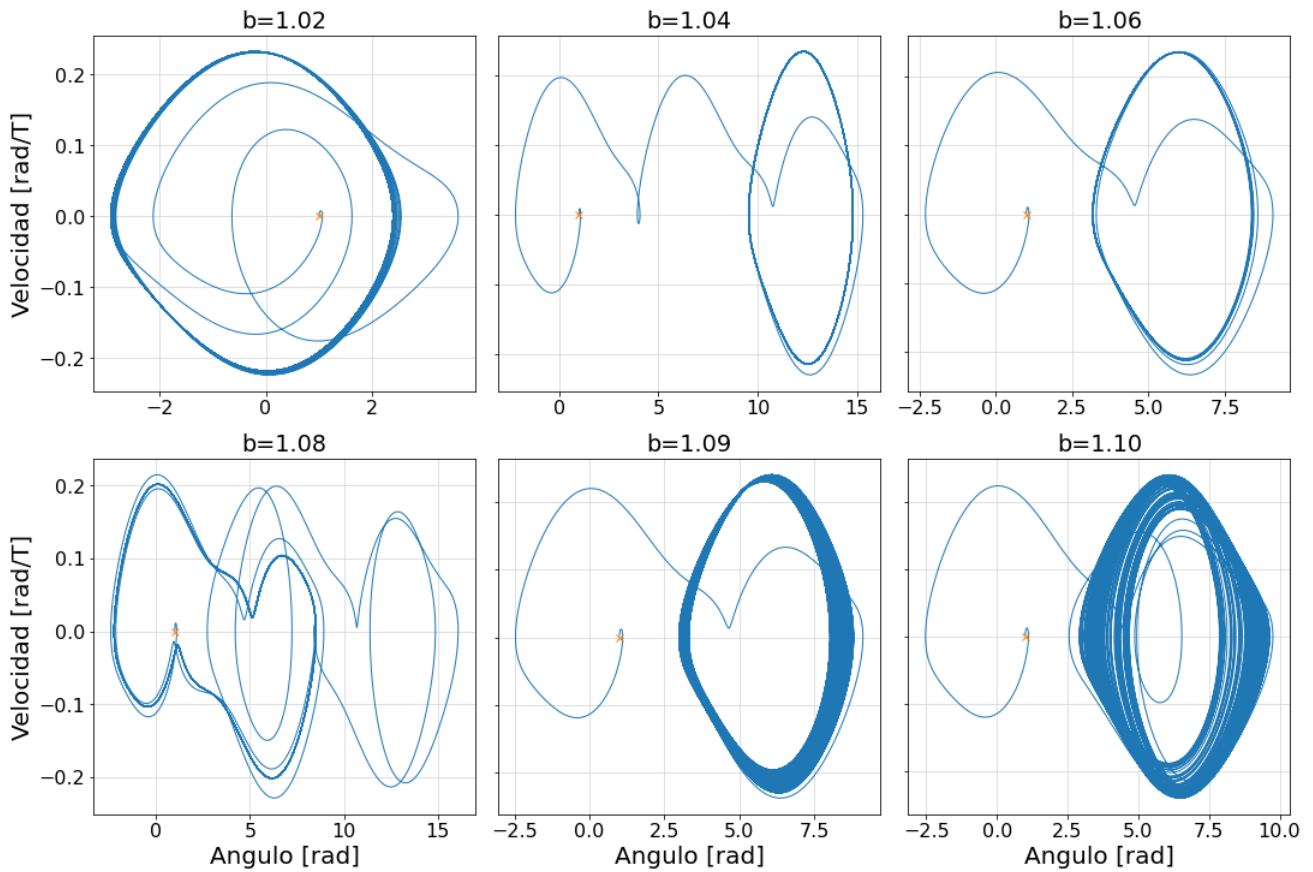


Figura 5: Sistema de estudio 1, espacio de fases sin acotar.

En las figuras 4 y 5 se muestran las trayectorias en el espacio de fases para diferentes valores de b_1 . Para los valores de $b_1 < 1,08$ se distinguió claramente una trayectoria cerrada bien definida, lo cual es consistente con lo definido anteriormente y pertenece a un movimiento periódico. En la figura 4 se observa mejor esto, donde se marca con una cruz tomate el punto de inicio del movimiento y se nota que en la parte transitoria la curva converge a una trayectoria cerrada. En la figura 5 se nota mas claramente esto, y sin distorsión, como hay un desplazamiento en la posición hasta llegar a la fase estable donde realiza un movimiento periódico. Todo esto es consistente con el análisis de la evolución temporal realizado antes.

Para los b_1 restantes, en la figura 4 se nota co-

mo aumenta la aleatoriedad en la distribución de los puntos, y aparentemente las trayectorias no logran cerrarse. Esto se coteja con el análisis de la figura 5, donde al revisar el patrón en los datos sin acotar, tampoco es fácil de ver la convergencia a una trayectoria cerrada, cuya aleatoriedad va aumentando conforme aumenta b . En estos últimos casos se puede ver el comportamiento caótico del sistema.

Las secciones de poincaré se presentan en la figura 6. Para $b_1 < 1,8$ una vez alcanzada la fase estable, solo se tiene un punto, que representa el movimiento periódico con periodo igual a T . Dicho esto, para $b = 1,08$ Es notorio que tenemos 3 puntos, lo que representa que el periodo para este b es $3T$. *No se presenta evidencia para concluir esto. -0.1*

gráficos redundantes. -0.1

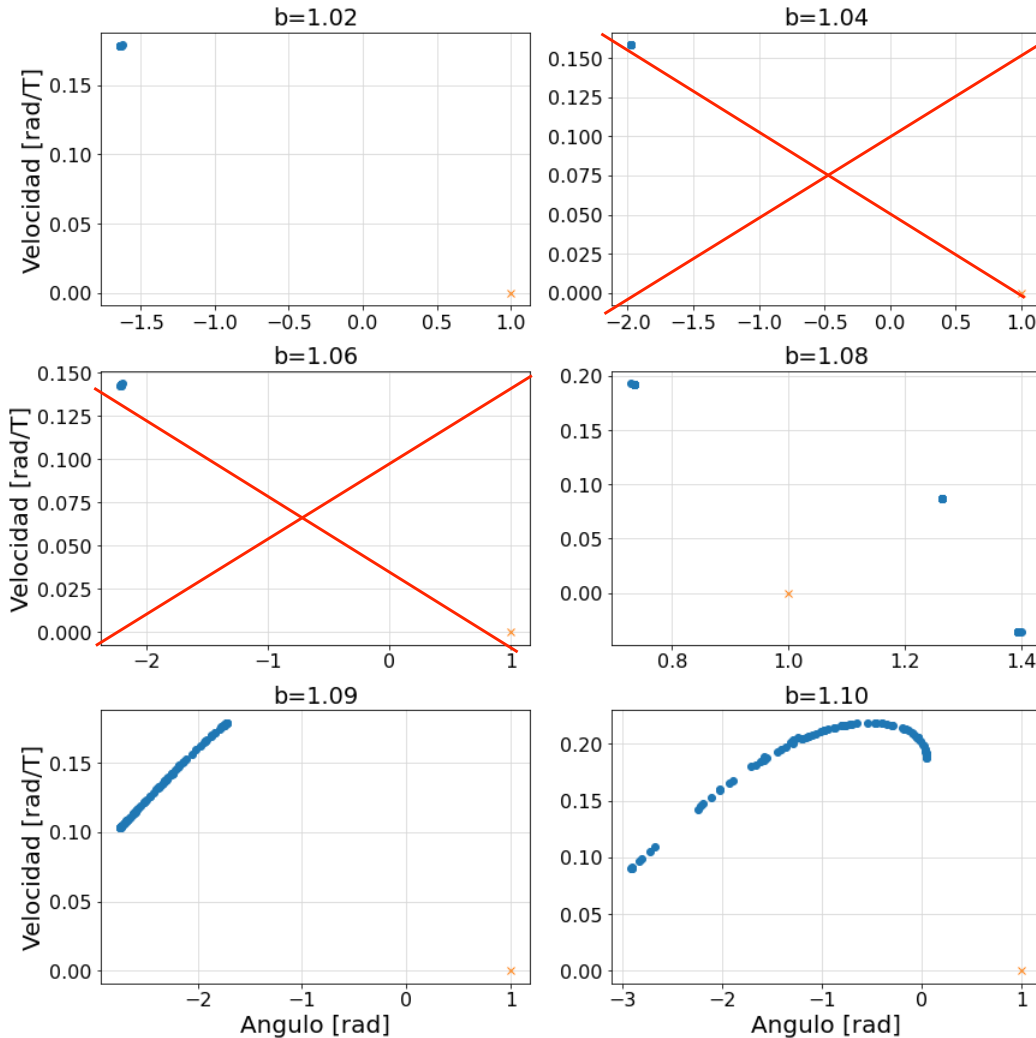


Figura 6: Sistema de estudio 1, Sección de Poincaré para b_1 en $t = 100T$.

Con $b = 1,09$ y $b = 1,1$ se empieza a formar un patrón continuo en la distribución de puntos de la sección de poincaré. Esta es una muestra de que el sistema ahora no tiene una periodicidad a lo largo del tiempo. Para notar de una mejor for-

ma lo dicho, se realizó la simulación con $b = 1,1$ y $b = 1,2$ en un tiempo de $10000T$ para corroborar que, conforme aumenta el tiempo, aumentan la cantidad de puntos en el patrón.

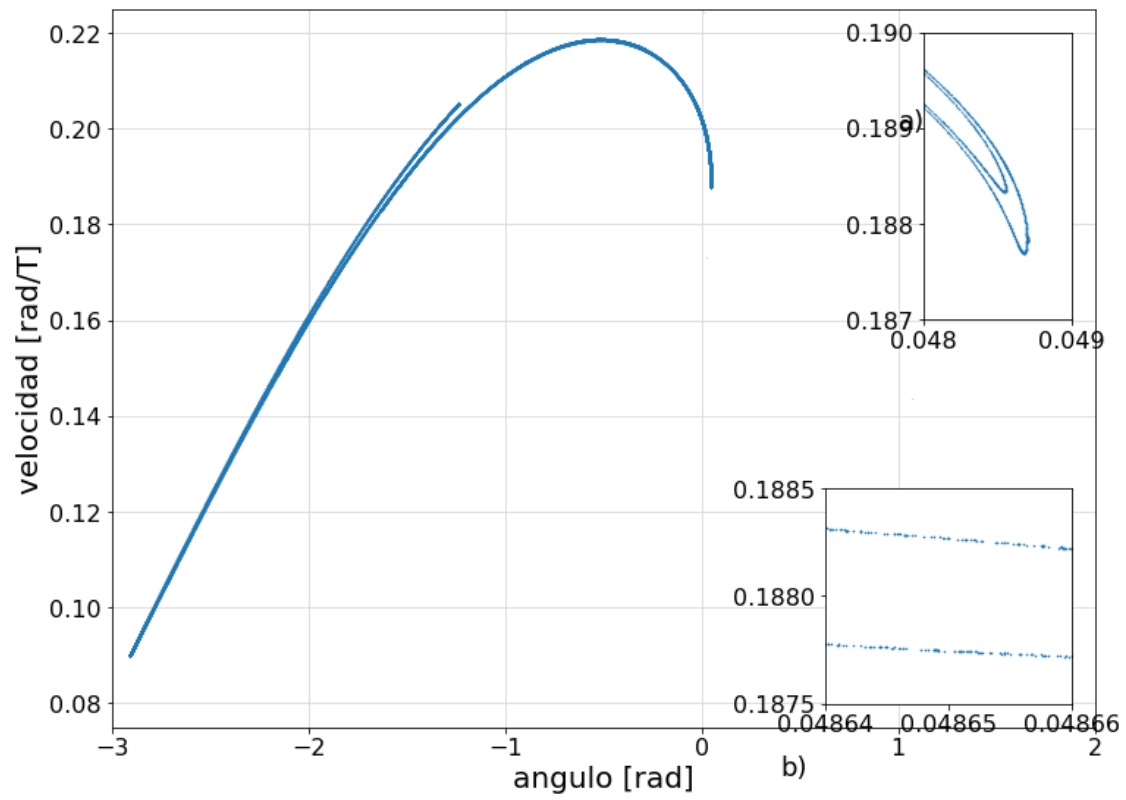


Figura 7: Sistema de estudio 1, Sección de Poincaré para $b = 1,1$ en $t = 100000T$. Inset a) Ampliación x10 de la punta del patrón, b) Ampliación x100 de la punta del patrón

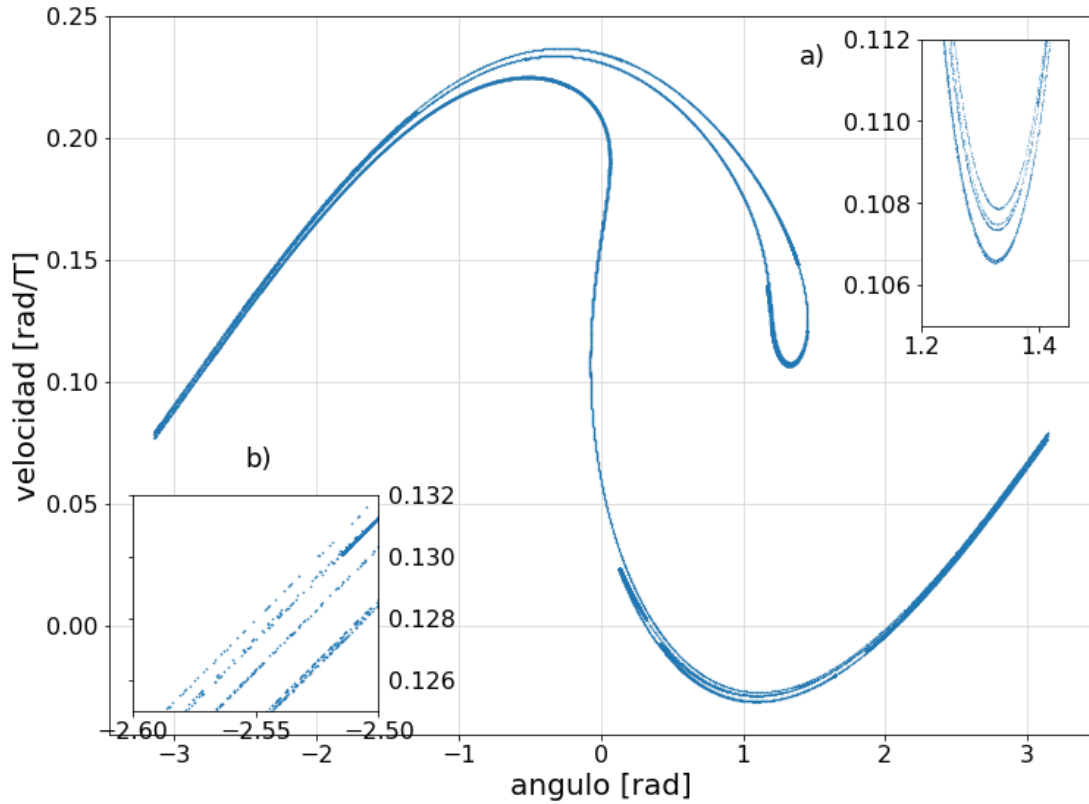
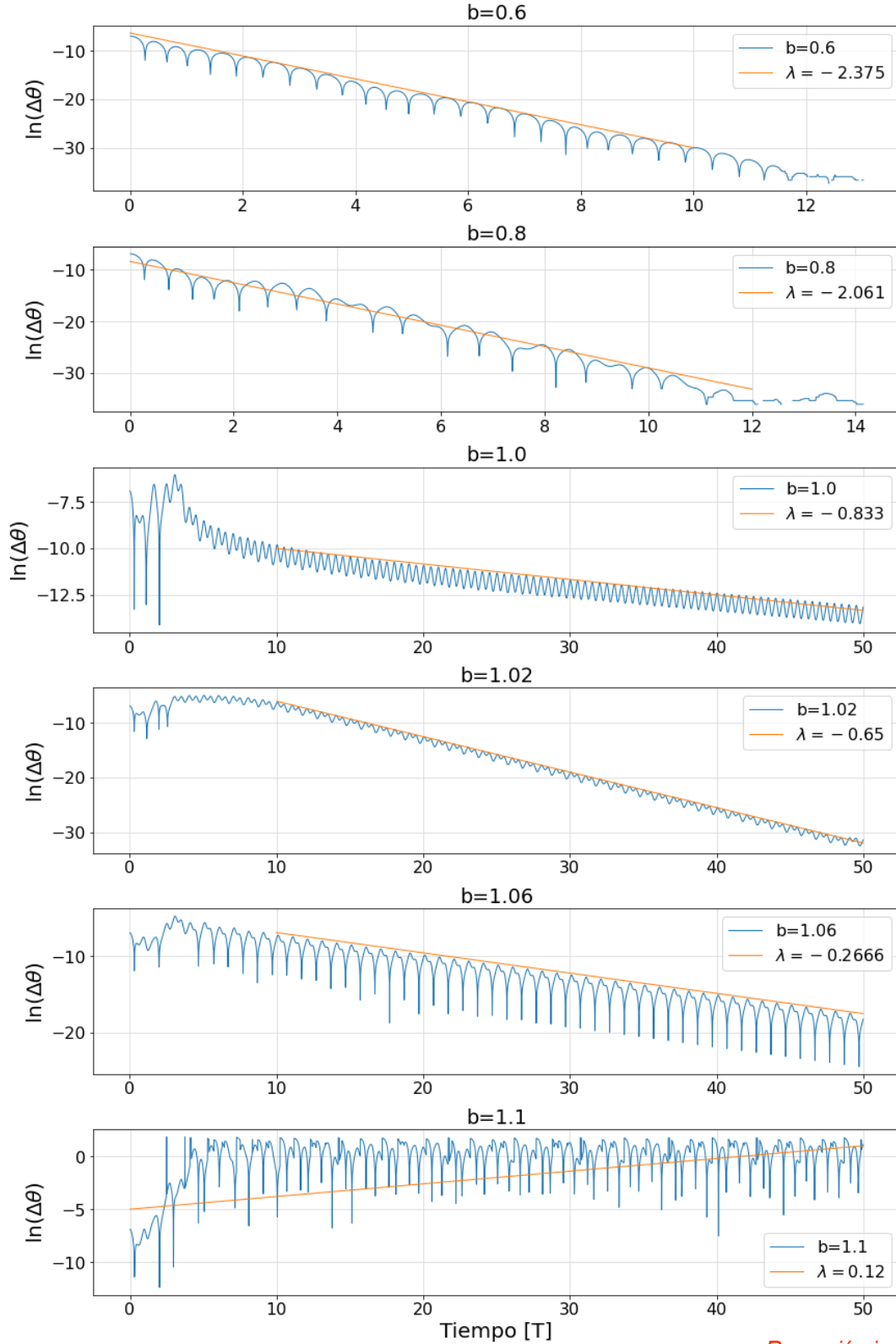


Figura 8: Sistema de estudio 1, Sección de Poincaré para $b = 1,2$ en $t = 100000T$. Inset a) Ampliación x10 de la punta del patrón, b) Ampliación x100 de la sección ascendente del patrón

En la figura 7 y 8, se observa que la trayectoria tiene un comportamiento fractal. Para mostrar esto, en los insets (a) de cada figura, se realizó una ampliación de 10 veces para mostrar que existen unas trayectorias, unas sobre otras, y en los insets

(b) se observa que a su vez estas están compuestas por puntos que repiten varias veces la trayectoria, lo que muestra el comportamiento caótico del sistema.

Coeficientes R^2 ? -0.5



Regresión incorrecta. -0.2

Figura 9: Sistema de estudio 2, gráfico del logaritmo natural de las variaciones de la posición cuando varían las condiciones iniciales en un 0,1 %

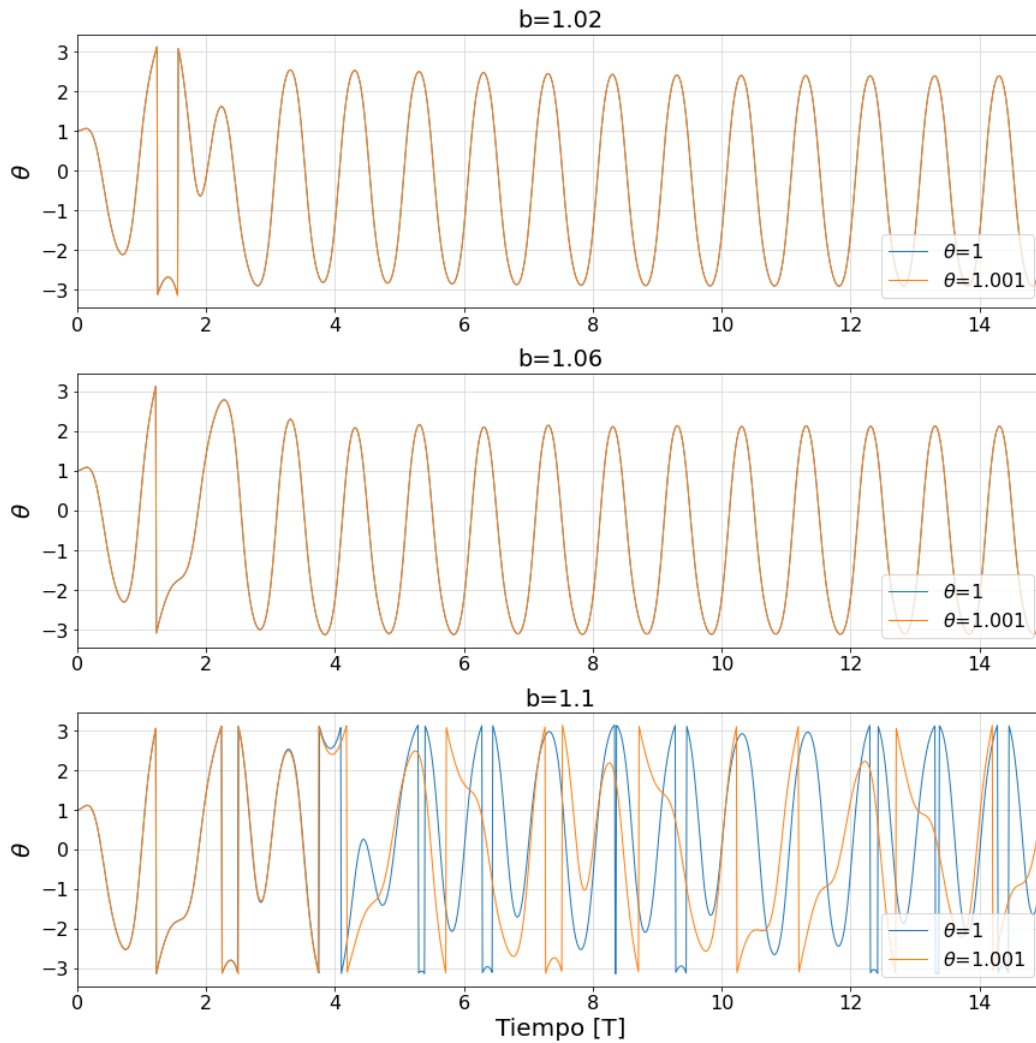


Figura 10: Sistema de estudio 2, gráfico de las posiciones

Para determinar los coeficientes de Lyapunov, se realizó la gráfica del $\ln|\Delta\theta|$ vs T y se trazó una recta entre los máximos de esta función, tomando en cuenta solamente su fase estable. Para 1,1 la forma de la gráfica es ascendente, por lo que al encontrar el coeficiente, este es positivo. En $b = 0,6$ y $0,8$ se nota como la gráfica pierde su continuidad y se va a $-\infty$, lo que nos indica que $\Delta\theta$ se ha hecho 0, por lo que las trayectorias han convergido a la misma trayectoria. En el caso de $b = 1,1$, al ser el coeficiente positivo, la literatura nos sugiere que el movimiento es caótico, como se evidencia en la figura 10, donde claramente se observa que, conforme aumenta b , el coeficiente de lyapunov va incrementando su valor hacia los números positivos.

Conclusiones 1.4/2.0

Se pudo encontrar que el sistema analizado puede presentar comportamiento caótico para ciertos valores de magnitud relativa de una fuerza b . Esto se comprobó mediante el análisis en la evolución temporal del sistema y en su espacio de fases.

Para los valores b_1 analizados, la evolución temporal fue periódica hasta $b = 1,08$, lo cual no sucedió para valores mayores de b_1 , evolucionando progresivamente hacia la aleatoriedad. Se pudo notar también que para tener un comportamiento caótico, la fuerza tiene que superar $b = 1,08$, donde aun presenta un movimiento periódico, pero empieza a tender al caos.

Con respecto a las trayectorias formadas en el espacio de fases, para valores de hasta $b_1 = 1,06$, se tiene que son cerradas luego de la fase transitoria, de lo cual se pudo inferir que son movimientos periódicos. Para el resto de valores superiores, no se pudo divisar claramente que se formen trayectorias cerradas, por lo que se determinó que el movimiento en estas condiciones, es caótico. Esto se puede

Los resultados corresponden a diferencias asociadas a posiciones ligeramente diferentes, no "algún parámetro".-0.1

corroborar al analizar las secciones de Poincaré, ya que se encontró que a medida que b aumentaba, la cantidad de puntos también lo hacía, generándose un comportamiento fractal, indicando que se tiene un comportamiento caótico.

La principal fuente del caos en este sistema es la fuerza periódica que afecta al péndulo, ya que por las trayectorias en el espacio de fases podríamos catalogarlo como un atractor extraño. Este comportamiento raro del péndulo se nota claramente en las figuras presentadas, ya que es muy susceptible ante variaciones muy pequeñas de algún parámetro conforme aumenta la fuerza externa. Como vimos en el sistema 2 (fig 10), al variar en un 0,1 % una de las condiciones iniciales, la diferencia entre las trayectorias se modifica infinitesimalmente, pero solo cuando la fuerza a aumentado considerablemente, las diferencias entre las trayectorias varían notablemente.

Finalmente, analizamos los coeficientes de Lyapunov y encontramos que para cuando el sistema no es caótico, este coeficiente la separación infinitesimal, donde de las trayectorias que difieren en su condición inicial en un 0,1 %, tiene un valor negativo que aumenta conforme va aumentando el caos en el sistema, hasta llegar a valores positivos que indican claramente que el movimiento es caótico.

Los resultados presentados no sustentan esta conclusión. 0.2

Referencias

- [1] John L. Safko Herbert Goldstein Charles P. Poole. Classical mechanics. 3.a ed. Addison Wesley, 2001.
- [2] Ahmet Bedri Özer y Erhan Akin. "TOOLS FOR DETECTING CHAOS". En: 2005.