

# Simulación: Oscilaciones Acopladas

Gonzalez Peñafiel José Luis

Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias

Departamento de Física, Programación Científica

17 de enero de 2023

## Introducción 0.9/1.0

El propósito del presente reporte es analizar los resultados de un sistema de  $N$  osciladores acoplados, como se muestra en la figura 1, bajo condiciones particulares sobre constantes elásticas  $k_j$ . Los aspectos de interés en este análisis son el comportamiento colectivo de las masas y los resortes, las frecuencias de modulación y los modos normales de este sistema.

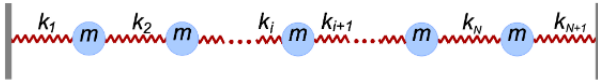


Figura 1: Esquema del sistema de estudio de  $N$  osciladores acoplados por  $N + 1$  resortes.

La posición de cada partícula está definida por la ecuación  $x_i = x_i(t)$ , definida desde su posición de equilibrio.

Como se observa en la figura 1, todas las partículas tienen la misma masa  $m$ , y están sujetas por resortes con constante  $k = k_i$  entre ellas y a la pared. De la mecánica clásica sabemos que para un sistema de  $N$  osciladores acoplados, se tendrán  $N$  modos normales y el movimiento será una combinación lineal de estos  $N$  modos.

Modelamos el sistema matemáticamente mediante un lagrangiano, tal que:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[ k_0 x_1^2 + k_N x_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2 \right] + \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2$$

Matemáticamente, usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener las  $N$  ecuaciones diferenciales y obtenemos una forma simplificada y matricial de describir las ecuaciones del movimiento, tal que:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \cdot M \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (1)$$

Tal que  $\mathbf{x}$  es el vector de posiciones  $x_n$  y  $\ddot{\mathbf{x}}$  el vector de las aceleraciones  $\ddot{x}_n$ , los demás términos

de esta ecuación se definen como:

$$\omega_o^2 = \frac{k_{min}}{m} \quad (2)$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{k_0+k_1}{k_{min}} & -\frac{k_1}{k_{min}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{k_1}{k_{min}} & \frac{k_1+k_2}{k_{min}} & -\frac{k_2}{k_{min}} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_{min}} & \frac{k_2+k_3}{k_{min}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{k_{N-1}+k_N}{k_{min}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para buscar los modos normales, se propone una solución tal que  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_n e^{-i\omega_n t}$ , con  $\mathbf{v}_n$  un vector independiente del tiempo y  $\omega_n$  la frecuencia del modo normal. Al reemplazar en (1) se comprueba que:

$$M \cdot \mathbf{v}_n = \frac{\omega_n^2}{\omega_o^2} \mathbf{v}_n \quad (4)$$

De lo cual se nota que, es un problema de valores propios de la matriz  $M$ . Dado que se propuso una forma de solución, las frecuencias de los modos normales están dadas por:

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} \omega_o \quad (5)$$

Donde  $\lambda_n$  es el  $n$ -ésimo valor propio de  $M$  y es adimensional. De la ecuación (3) se puede ver claramente que es una matriz  $N \times N$  y por ende se tendrán  $N$  valores propios, lo que implica  $N$  frecuencias y  $N$  modos normales.

Finalmente, este reporte tiene como propósito presentar los resultados del análisis del comportamiento del sistema, cuyo movimiento de un oscilador  $i$  se puede describir como:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \cos(\omega_j t + \phi_j) \quad (6)$$

Donde  $A_{ij}$  y  $\phi_j$  se encuentran en base a las condiciones iniciales.

Asumiendo que se tienen dos frecuencias propias  $\omega_n$  y  $\omega_m$ , que cumplen con la siguiente relación:

$$|\omega_n - \omega_m| \ll \omega_n + \omega_m \quad (7)$$

entonces, se tendrá una modulación en la amplitud con una frecuencia:

$$\omega_{mod} = |\omega_n - \omega_m|/2 \quad (8)$$

## Metodología 1.8/2.0

Para la simulación del sistema, se utilizó el lenguaje de programación utilizado fue  $C++$ . Para determinar los valores de forma numérica, se definió  $\omega_0 = 1$ , tal que las frecuencias serán encontradas en unidades de  $\omega_0$  y el tiempo  $t$  en unidades de  $1/\omega_0$ . Se corrieron en total 12 simulaciones que se dividen en 4 grupos:

- Tomando  $k_i = 1, \forall i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$
- Tomando  $k_{2i-1} = 2k_{2i}$ .
- Tomando  $k_{2i-1} = 4k_{2i}$ .
- Tomando  $k_{2i-1} = 6k_{2i}$ .

Para los casos anteriores se analizó 3 diferentes números de osciladores,  $N = 2, 4$  y  $6$ . Para resolver el problema de valores propios correspondiente, se hizo uso del método **QR**.

### Estructura del programa

El programa utilizado requiere el ingreso de un vector con las constantes elásticas relativas  $k_i/k_{min}$  en un archivo externo "system.txt". El número de constantes  $N_r$  que le proporcionamos en el archivo, nos da el número de masas  $N = N_r - 1$ . Con el vector dado, el programa generará la matriz de la ecuación (3) de valores asociada al problema descrito.

Con ayuda de algunas funciones definidas para la multiplicación de matrices ( $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2^T$ ) y matriz-vector ( $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$ ) nombradas como *product*, *productt*, y *productmv* respectivamente. Aparte de estas, se define una función llamada *householder* que calcula las matrices de transformación requeridas para el método **QR**. Para finalizar se definieron funciones para manejo de datos como la función *read* que lee el archivo de texto, *print* para escribir la forma matricial del array, y finalmente *solve* que usa las funciones anteriores para realizar el procedimiento **QR**. En la función *main*, se realizó todo el procedimiento y se imprimió las posiciones vs. tiempo en un archivo de salida "oscilaciones.dat".

El programa ofrece un único archivo de salida donde se almacena la información de las posiciones calculadas según la ecuación (6) desde  $t = 0$  en

pasos de  $0,01/\omega_0$  hasta  $t_f = 200/\omega_0$  para  $N = 2, 4$  y  $t_f = 600/\omega_0$  para  $N = 6$ .

Para el tratamiento de datos se hizo uso del software GNU PLOT. En este programa se usó el archivo de salida para graficar la evolución temporal de los  $i$  osciladores con  $i = 1, \dots, 6$ . Cada una de estas gráficas fue analizada para determinar los casos en que existía una modulación en la amplitud y aspectos relativos a esta característica.

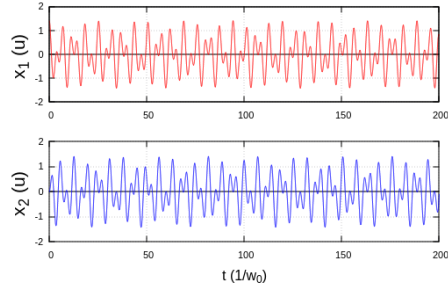
Para los 12 sistemas se analizaron gráficos de  $x_i$  vs.  $t$ , y para los casos donde  $K_{2i+1} \neq 1$ , se identificó los osciladores cuya frecuencia está modulada para estimar las frecuencias de modulación de la amplitud. *Procedimiento? -0.2*

## Resultados 4.5/5.0

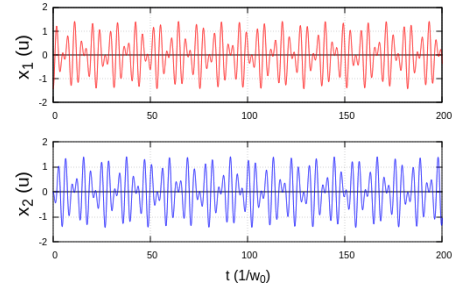
Para analizar el movimiento de mezcla, que es uno de los aspectos de interés que delimitamos previamente, se analizó las posiciones de las masas como se muestra en las figuras 2, 3 y 4.

Se puede notar que en las figuras 2(a), 2(b), 3(a), 3(b), 4(a) y 4(b), que los movimientos de todas las partículas carecen de algún tipo de periodicidad notoria. Pero conforme aumentamos la constante de elasticidad relativa en los puestos pares (figuras 2,3,4:(a) y (b)) se nota claramente que existe una modulación en la amplitud de las partículas primera y última.

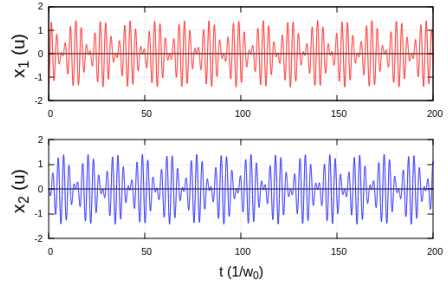
Dada la condición (7) establecida previamente, se nota que efectivamente la modulación en la amplitud empieza a aparecer cuando la suma de los diferentes valores de  $k_i$  es mucho mayor que el valor absoluto de su resta. Notese que en el primer caso, solamente a partir de  $k_{2i-1} = 4k_{2i}$  se empieza a notar la modulación, pero conforme se aumenta el número de partículas empiezan a hacerse notorio un cierto intento de modulación pero que no queda del todo claro. Si comparamos las subfiguras (c) de las figuras 2, 3 y 4, se nota que para 2 partículas el movimiento parece periódico, para 4 partículas se empieza a notar la modulación y para 6 osciladores la modulación es innegable. Otra cosa que se nota del análisis de los gráficos es que la frecuencia de esta modulación está relacionada directamente con el número de partículas, de modo que cuando estas aumentan, la frecuencia disminuye notablemente.



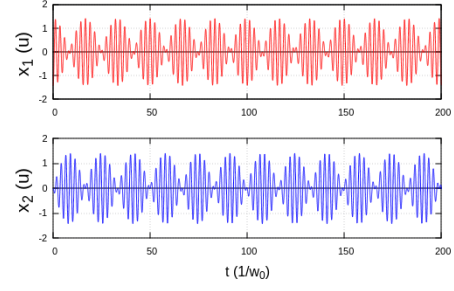
(a) 2 osciladores con  $k_i = 1$



(b) 2 osciladores con  $k_{2i-1} = 2k_{2i}$

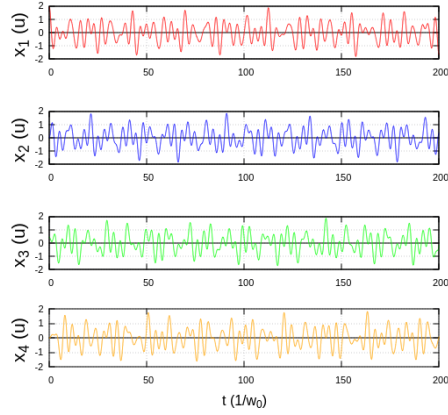


(c) 2 osciladores con  $k_{2i-1} = 4k_{2i}$

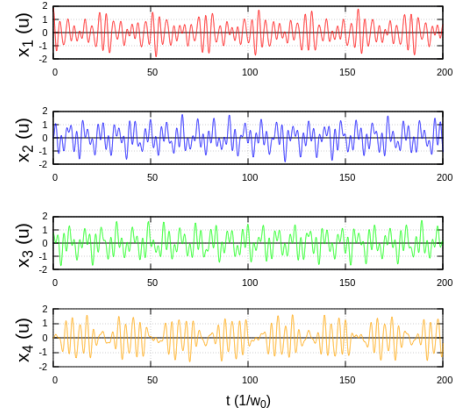


(d) 2 osciladores con  $k_{2i-1} = 6k_{2i}$

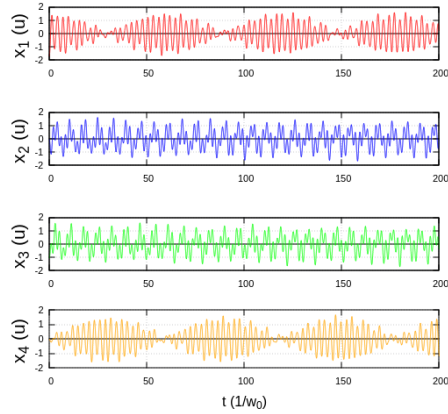
Figura 2: Posición de las masas del sistema



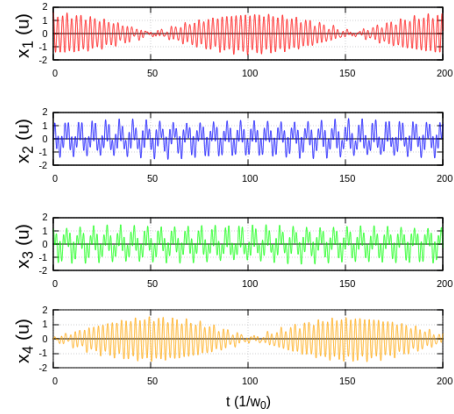
(a) 4 osciladores con  $k_i = 1$



(b) 4 osciladores con  $k_{2i-1} = 2k_{2i}$

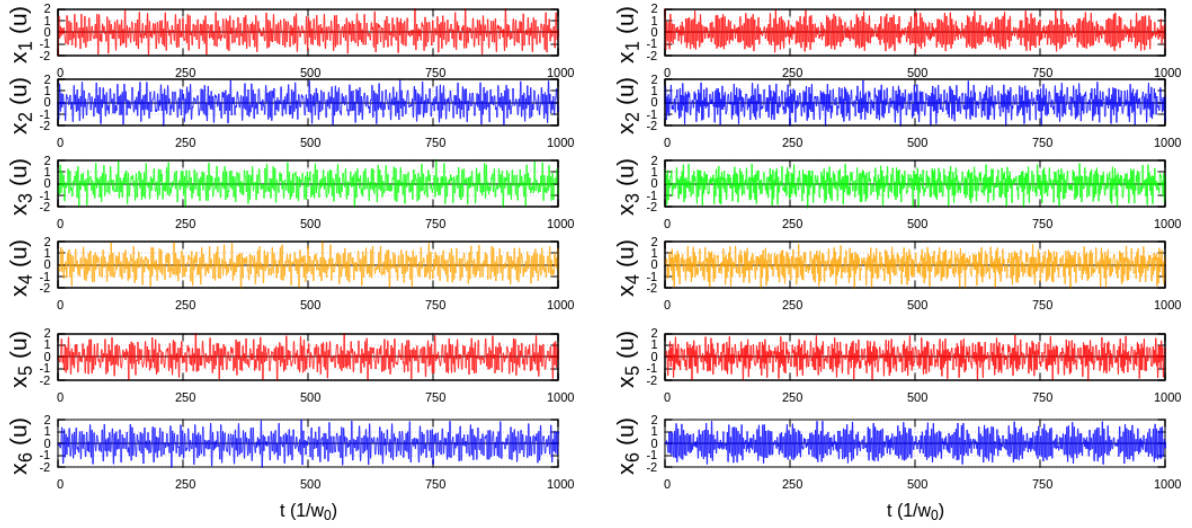


(c) 4 osciladores con  $k_{2i-1} = 4k_{2i}$



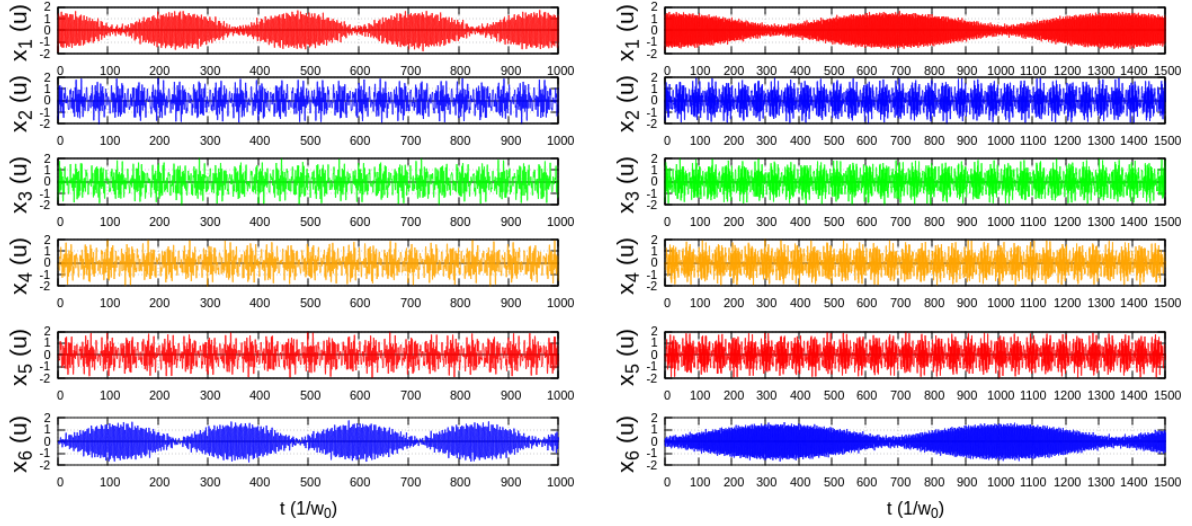
(d) 4 osciladores con  $k_{2i-1} = 6k_{2i}$

Figura 3: Posición de las masas del sistema



(a) 6 osciladores con  $k_i = 1$

(b) 6 osciladores con  $k_{2i-1} = 2k_{2i}$



(c) 6 osciladores con  $k_{2i-1} = 4k_{2i}$

(d) 6 osciladores con  $k_{2i-1} = 6k_{2i}$

Figura 4: Posición de las masas del sistema

A continuación se presenta una tabla con los valores medidos de la modulación, para los primeros casos no se observó modulación alguna.

frecuencias de los modos normales involucrados? -0.2

	N=2	N=4	N=6
$k_i = 1$	no obs	no obs	no obs
$k_{2i-1} = 2k_{2i}$	no obs	no obs	no obs
$k_{2i-1} = 4k_{2i}$	0.0729	0.01818	$3.921 \cdot 10^{-3}$
$k_{2i-1} = 6k_{2i}$	0.06	$9.901 \cdot 10^{-3}$	$1.4925 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 1:  $\omega_{mod}$  obtenido de la simulación

unidades? -0.1

valor teórico? -0.2

Estos resultados estan de acuerdo con lo propuesto en la ecuación (8), que establece una relación entre las frecuencias propias del sistema y la frecuencia de modulación medida.

Se repitió el experimento intercambiando las constantes de los resortes entre pares e impares y se observo lo siguiente:

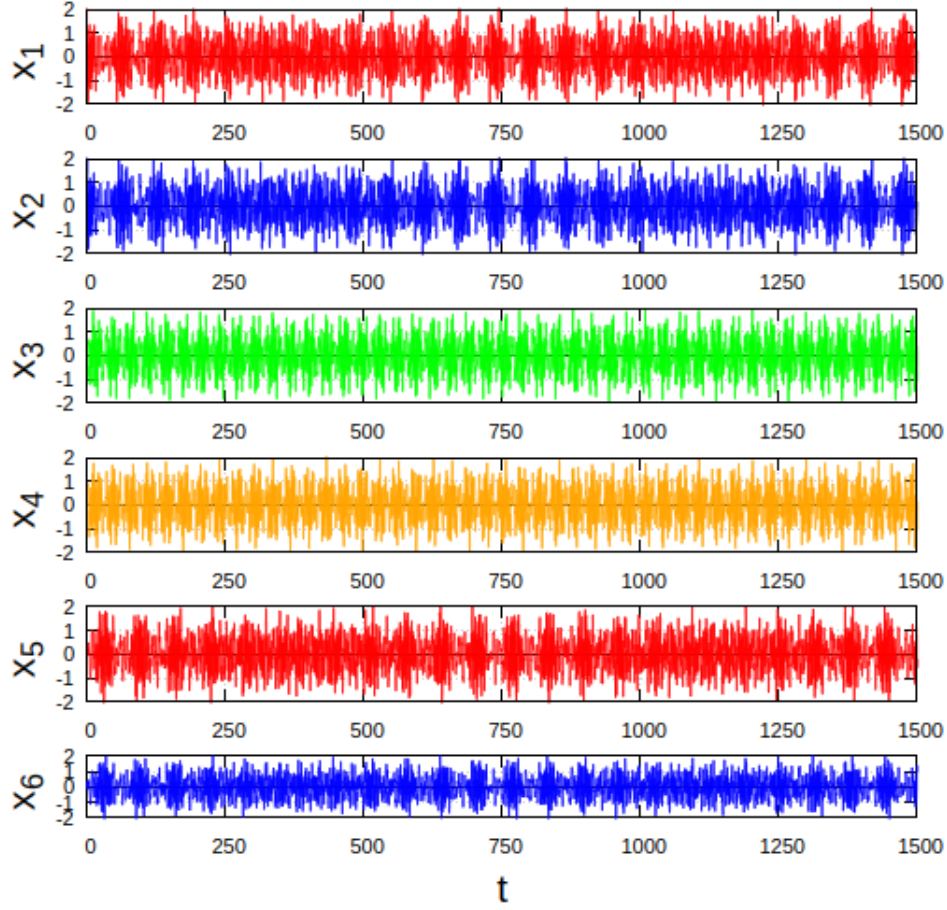


Figura 5: Sistema de estudio de  $N$  osciladores acoplados por  $N + 1$  resortes con  $k_{2i} = 6k_{2i-1}$ .

Se nota claramente que no existe modulación alguna.

## Conclusiones 1.7/2.0

Como se observó en la simulación, para lograr una modulación en la amplitud apreciable, es necesario establecer una relación entre los  $k_i$ , tal que se cumpla que los resortes impares tengan una constante mucho mayor que las pares. También se nota que el orden de los resortes de mayor constante frente a los de menor constante es específico para que exista modulación. En este caso se logró observar ambos casos, que motivan esta conclusión. También se nota que la modulación en la amplitud solo se observa en las masas que están mas externas del sistema, lo que se puede relacionar con los modos normales de vibración de este sistema, que no fueron analizados en el presente reporte, pero

se pueden inferir apartir del estudio de sistemas similares.

Como se observó en la tabla 1, parecería correcto concluir que la frecuencia disminuye conforme el valor de  $N$  aumenta, para una condición similar en los resortes, hasta donde se ha observado con las simulaciones. Aun se tienen muy pocos datos para establecer una relación experimental de  $\omega_{mod}$  vs.  $N$ .

Las frecuencias normales cumplen con las relaciones definidas por la bibliografía y establecidas en la ecuación (7) y (8), aunque son muy buenas, empiezan a diferir cuando  $N$  aumenta. Se concluye que la frecuencia de modulación de amplitud es menor a cualquiera de las frecuencias propias del sistema.

*Esto no es una conclusión. -0.2*

*frecuencias de los modos normales involucrados? -0.1*