

# Simulación: Osciladores acoplados

Carrera de Física, Programación Científica, Semestre 2021B  
Luis Andrés Chicaiza  
14 de enero de 2022

## Introducción 0.9/1.0

El sistema de estudio consiste de  $N$  osciladores acoplados por resortes de diferentes constantes  $k_i$ .

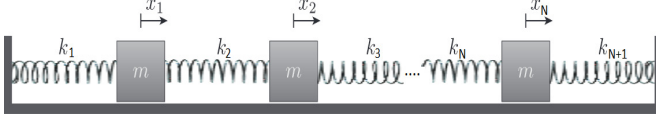


Figura 1: Esquema del sistema de estudio de  $N$  osciladores acoplados con  $N + 1$  resortes.

Cada bloque de masa  $m$ , está colocado sobre una superficie horizontal sin fricción. Los resortes de los extremos están unidos a una pared, como se muestra en la Figura 1.

~~Uno de los objetivos es encontrar las ecuaciones diferenciales del movimiento de cada bloque y luego resolverlas para encontrar  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  hasta  $x_N(t)$ .~~

Para un sistema de  $N$  osciladores acoplados, existen  $N$  modos normales. Aunque las frecuencias angulares desacopladas de los osciladores no son las mismas, el efecto del acoplamiento es que todos los cuerpos pueden moverse con la misma frecuencia. Sin embargo, en general, el movimiento se describe mediante una combinación lineal de todos los modos normales; dado que las ecuaciones diferenciales son lineales, dicha combinación lineal también es una solución para las ecuaciones lineales acopladas.

El lagrangiano de un sistema de  $N$  osciladores con  $N + 1$  resortes es el siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dots + \dot{x}_N^2) - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_{N+1}x_N^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 - \dots - \frac{1}{2}k_N(x_N - x_{N-1})^2 \quad (1)$$

A partir del lagrangiano se pueden obtener las  $N$  ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en forma matricial se obtiene la ecuación:

$$M\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz diagonal que tiene los valores de las masas (en este caso todas las masas son iguales) y  $\mathbf{K}$  es la matriz que contiene los valores de las constantes  $k$  de cada resorte.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -k_N & k_{N+1} + k_N \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

De esta manera, es posible establecer otra ecuación que permite resolver el problema de manera más sencilla,

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0 \quad (3)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia del modo normal correspondiente.

La razón de analizar este problema es que, al obtener las ecuaciones del sistema usando el lagrangiano (1), se obtiene un sistema de ecuaciones acopladas, además, cuando el número de osciladores es grande, resolver el problema de manera analítica es una tarea difícil.

En particular, de la ecuación (3), se obtiene que el problema se reduce a resolver una ecuación de valores y vectores propios,

$$(\mathbf{K} - \omega^2 m \mathbf{I}) = 0 \quad (4)$$

donde los valores propios serán,

$$\lambda = m\omega^2 \quad (5)$$

Entonces, el objetivo es enfrentar el problema resolviendo la ecuación de valores propios usando

métodos numéricos mediante un programa desarrollado en  $C++$ .

Con esto, lo que se ~~pretende~~ analizar, es la evolución de la posición de cada oscilador desde  $N = 2$  hasta  $N = 10$ . Además, se debe obtener la condición que deben cumplir las constantes  $k$  para obtener modulación de la amplitud.

## Metodología 1.6/2.0

La estructura del programa queda definida, de la siguiente manera:

- Se establece *product*, que es una función que calcula la multiplicación de dos matrices  $m1$  y  $m2$ , y el resultado se guarda en la matriz  $r$ .

- Se define *productmv*, que calcula el producto de una matriz  $m$  por un vector  $v$ , y se obtiene como resultado un vector  $r$ .

- Se define una función que realiza el procedimiento de Householder.

- Se define la función *read* la cual lee un archivo *.txt* que contiene los valores de las constantes de los resortes y construye una matriz simétrica con dichos valores.

- Se define una función para imprimir matrices.

- Se define la función *solve* que se encarga de realizar el procedimiento qr y entrega como resultado una matriz diagonal *mat*.

- Finalmente, se define la función principal *main*, en la que se usan las funciones mencionadas anteriormente en el orden pertinente, para obtener como resultado las frecuencias propias del sistema analizado.

Para estudiar el problema de  $N$  osciladores acoplados, el algoritmo utilizado queda definido de la siguiente manera:

- Leer el archivo *system.txt* con los valores de las constantes  $k$  para obtener la matriz  $K$ .

- El procedimiento qr es realizado para obtener una matriz diagonal con los valores propios calculados.

- Se calculan las  $N$  frecuencias propias  $\omega$  según la ecuación (5).

- Finalmente, se crean los diferentes datos, que corresponden a la evolución de la posición de cada masa, como una combinación lineal de los modos normales usando las frecuencias  $\omega$  que fueron encontradas numéricamente. Estos datos son exportados en el archivo *osciladores.dat* para su

posterior análisis.

Las condiciones de la simulación son tal que, la matriz  $K$  se asume tridiagonal y simétrica. Por otro lado, el valor de la masa es  $m = 1$ .

Para el tratamiento de los datos se hizo uso del software Gnuplot. En este programa, usando el archivo *osciladores.dat*, se obtuvieron las respectivas gráficas de la evolución de la posición  $x_i$  de cada oscilador para  $i = 1, \dots, N$  para diferentes números de osciladores  $2 < N \leq 10$ . Cada una de estas gráficas fue analizada para determinar los casos en los cuales se tuvo modulación de amplitud, y de esta manera, estimar el periodo de dicha modulación y a partir de esto obtener un resultado aproximado de la frecuencia.

Finalmente, se obtuvieron gráficos del valor máximo y mínimo de las frecuencias propias en función del número de osciladores  $N$  y se analizó su dependencia.

Valores de  $k_i$ ? -0.2  
Unidad de tiempo? -0.2

## Resultados 3.9/5.0

En primer lugar, se realizó el estudio de la condición que se debe cumplir para observar modulación de amplitud.

Se pueden considerar solo dos valores para todos los  $k$ , dígase  $k_a$  y  $k_b$ . Luego, suponiendo  $k_a > k_b$ , se debe cumplir que,  $k_a$  debe ser el valor para los resortes en los extremos ligados a la pared (Figura 1).

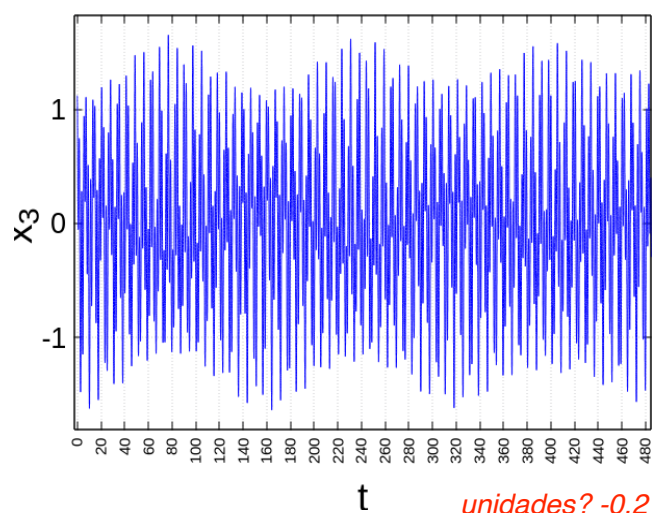


Figura 2: Gráfica de la evolución de la posición del oscilador 3 para  $N = 4$ . No se observa modulación de amplitud.

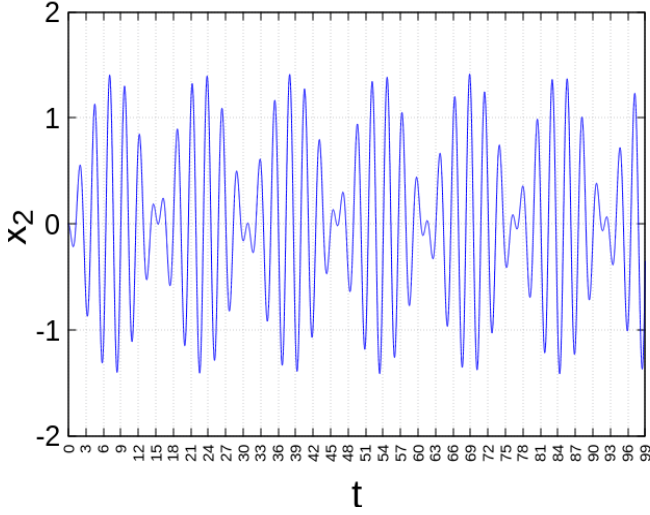


Figura 3: Gráfica del oscilador 2 para  $N = 2$  con secuencia de valores  $k_a, k_b, k_a$  con  $k_a = 5$  y  $k_b = 1$ . Se tiene modulación de amplitud.

Tomando como referencia el valor de  $k_a$  en los extremos, se debe colocar el valor de  $k_b$  intercálándolo con  $k_a$ . Así por ejemplo, si  $N = 4$ , se tiene la secuencia  $k_a, k_b, k_a, k_b, k_a$  y si  $N = 5$ , se tiene  $k_a, k_b, k_a, k_a, k_b, k_a$ . Estas secuencias son las que se deben ingresar en el archivo *system.txt* para poder observar modulación de amplitud para los diferentes valores de  $N$  dependiendo si es par o impar.

Es necesario mencionar que estos resultados se obtuvieron usando valores de  $k_a = 5$  y  $k_b = 1$ . De esto, el tipo de gráfico observado cuando se tiene modulación, es el mostrado en la Figura 3. Esta clase de gráfico se repite para todos los casos de  $N$  en los cuales se tuvo modulación de amplitud. Además, en todos los casos de  $N$ , la modulación fue observada en los osciladores de los extremos  $x_1$  y  $x_N$ .

Para los casos en los que no se tuvo modulación, los tipos de gráficos obtenidos fueron similares a la Figura 2. Como se ve, no existe un patrón periódico bien definido.

Por otra parte, la evolución de las posiciones de cada oscilador, cuando se tiene y no se tiene modulación de amplitud, fueron similares a las Figuras 2 y 3 respectivamente para los diferentes valores de  $N$ .

En las Figuras 4 y 5 se pueden observar dos ejemplos más cuando se tiene y no se tiene modulación. Es notorio que, las Figuras 3 y 4 presentan un patrón periódico similar que es la modulación

de amplitud. Por otro lado, en las Figuras 2 y 5 la modulación no es notoria.

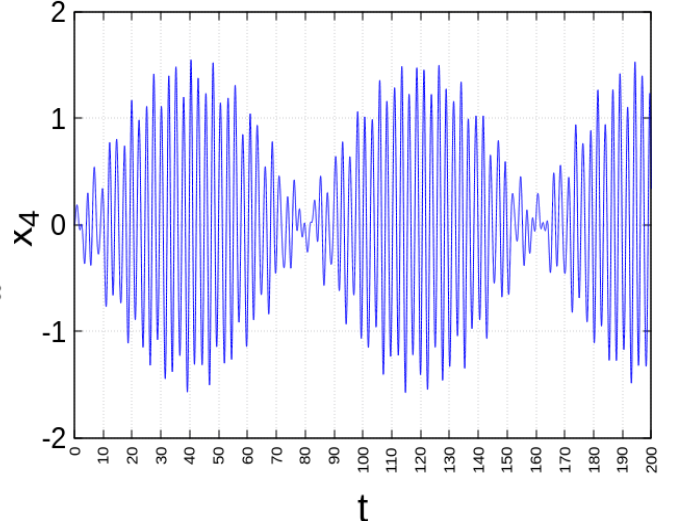


Figura 4: Gráfica del oscilador 4 para  $N = 4$  con secuencia de valores  $k_a, k_b, k_a, k_b, k_a$  con  $k_a = 5$  y  $k_b = 1$ . Se tiene modulación de amplitud.

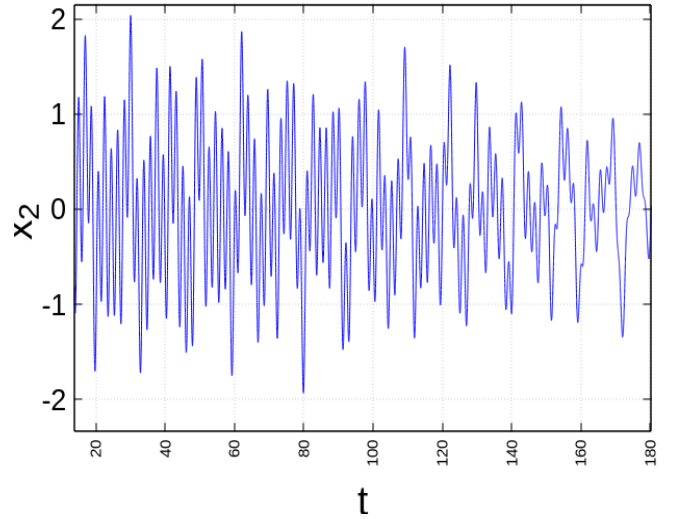


Figura 5: Gráfica del oscilador 2 para  $N = 7$  con secuencia de valores  $k_a, k_b, k_a, k_b, k_b, k_a, k_b, k_a$  con  $k_a = 5$  y  $k_b = 1$ . No se tiene modulación de amplitud.

**Gráfico para el oscilador que presenta modulación de amplitud para este caso? -0.2**

De esta manera, al analizar los gráficos con presencia visible de modulación de amplitud, se obtuvieron los siguientes valores de frecuencias.

N	f <i>unidades? -0.1</i>
2	1/30
3	1/140
4	1/160
5	1/280
6	1/790
7	1/3520
8	1/4720
9	1/320 ?
10	No se observó modulación

Cuadro 1: Valores de la frecuencia de modulación de la amplitud  $f$  para los diferentes valores de  $N$ .

Hay que mencionar, que las unidades de tiempo y de frecuencia, en todos los casos están en términos de  $\omega_0$ . ( $\omega_0^2 = k_{min}/m$ )

Luego, de los datos del Cuadro 1, desde  $N = 2$  hasta  $N = 8$ , el valor de la frecuencia disminuyó. Sin embargo, para  $N = 9$  existe un valor diferente y para  $N = 10$  no se tuvo modulación de amplitud.

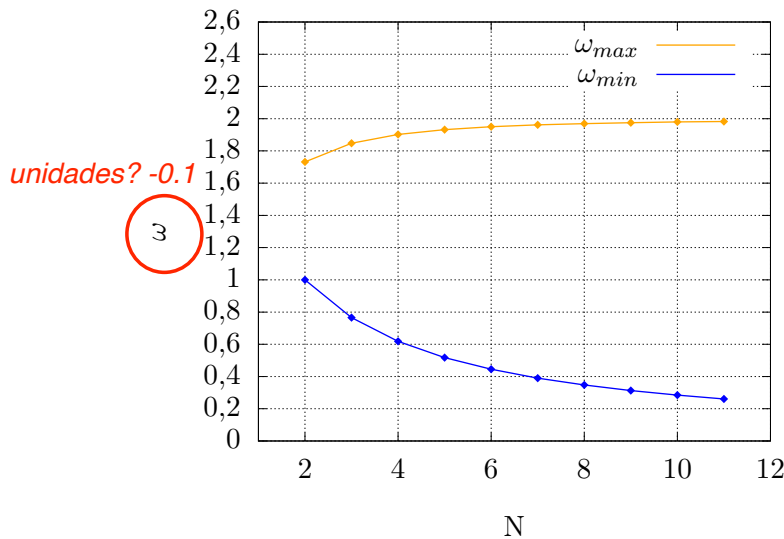


Figura 6: Evolución de los valores máximo y mínimo de las frecuencias propias desde  $N = 2$  hasta  $N = 11$

Finalmente, en la Figura 6, se observa la dependencia de los valores máximo y mínimo de  $\omega$  con el número de osciladores  $N$ . Lo que se obtiene es que, para  $\omega_{max}$  se observa una tendencia hacia 2, mientras que  $\omega_{min}$  tiende al valor de 0. Entonces, es notorio que para mayor valor de  $N$ ,  $\omega_{max}$  aumenta y  $\omega_{min}$  disminuye.

Los resultados de la Figura 6 fueron obtenidos con todos los valores de  $k$  iguales a 1 para todos los casos de  $N$ .

*Frecuencias para los casos en los que se tiene modulación de la amplitud? -0.5.*

## 1. Conclusiones 1.4/2.0

Para lograr observar una modulación de amplitud es necesario establecer un orden en las constantes  $k$  asignadas a cada resorte, esto dependerá de si  $N$  es par o impar. En este caso, se logró tener modulación cuando se usaron dos valores,  $k_a$  y  $k_b$ , tal que  $k_a > k_b$ . Además,  $k_a$  debe ser ubicada en los resortes de los extremos fijados a una pared, luego  $k_b$  debe ser colocada de manera alternada con  $k_a$  hasta tener  $N + 1$  resortes.

De esta manera se obtienen las figuras 3 y 4, donde claramente se observa un patrón periódico correspondiente a la modulación de amplitud.

Observando los resultados del cuadro 1, parecería correcto concluir que la frecuencia disminuye conforme el valor de  $N$  aumenta, sin embargo, los resultados para  $N = 9$  y  $N = 10$  son contraejemplos. Así, no es posible establecer una relación entre  $N$  y la frecuencia de la modulación de amplitud.

De la Figura 6, se obtuvo que,  $\omega_{max}$  aumenta de valor cuando  $N$  aumenta. Por el contrario,  $\omega_{min}$  disminuye cuando  $N$  incrementa. De aquí se concluye que, las frecuencias máxima y mínima tienden a un valor específico, en este caso fueron 2 y 0 respectivamente.

*Comparación entre la frecuencia de modulación de la amplitud y las frecuencias propias del sistema? -0.5*