Sistemas de ecuaciones no lineales

Marco V. Bayas

Noviembre 11, 2022

Ecuaciones no lineales

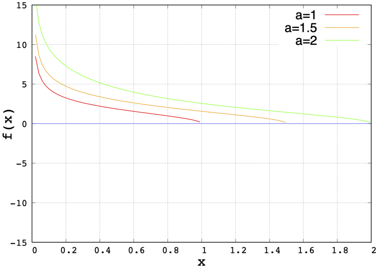
$$f(x) = 0 \qquad \color{blue}{f(x) \text{ no lineal en } x}$$

La resolución requiere métodos numéricos

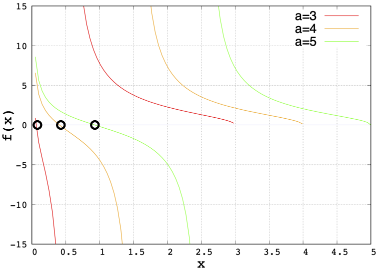
Ejemplo:

$$\tan\sqrt{a-x} + \sqrt{\frac{a}{x} - 1} = 0 \quad , \quad 0 < x < a$$

Sin raíces



Con raíces



Sistema de dos ecuaciones no lineales.

$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

Método de Newton-Raphson:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \Delta y + \cdots$$
$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \Delta y + \cdots$$

Si la solución (x_r, y_r) está en la vecindad de (x_0, y_0), entonces:

$$f(x_r, y_r) \approx f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \Delta y \approx 0$$
$$g(x_r, y_r) \approx g(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x_0, y_0} \Delta y \approx 0$$

Sistema de dos ecuaciones no lineales.

Método de Newton-Raphson:

$$\underbrace{f(x_0, y_0)}_{f_0} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}}_{f_x} \underbrace{(x_r - x_0)}_{\Delta x} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}}_{f_y} \underbrace{(y_r - y_0)}_{\Delta y} = 0$$

$$\underbrace{g(x_0, y_0)}_{g_0} + \underbrace{\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}}_{g_x} \underbrace{(x_r - x_0)}_{\Delta x} + \underbrace{\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}}_{g_y} \underbrace{(y_r - y_0)}_{\Delta y} = 0$$

Sistema de ecuaciones lineales para Δx y Δy

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_0 \\ g_0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad x_r = x_0 - \frac{f_0\, g_y - g_0\, f_y}{f_x\, g_y - g_x\, f_y} \quad , \quad y_r = y_0 - \frac{g_0\, f_x - f_0\, g_x}{f_x\, g_y - g_x\, f_y}$$

Sistema de dos ecuaciones no lineales.

Método de Newton-Raphson:

Algoritmo

Requerimientos:

- $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $g(x, y)$ y $g'(x, y)$
- Estimación inicial (x_0,y_0)

1. Definir la estimación inicial: (x_0,y_0) y la tolerancia δ
2. Para cada valor de $k \geq 0$
   - Determinar el sistema de ecuaciones lineales para Δx y Δy
   - Resolver el sistema de ecuaciones y encontrar Δx y Δy
   - Evaluar

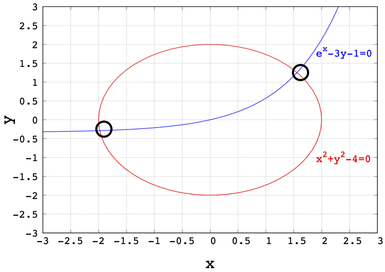
$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$
$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

3. Repetir el paso 2 hasta que $|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| < \delta$

Sistema de dos ecuaciones no lineales.

Ejercicio:

$$e^x - 3y - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$



$$\begin{bmatrix} e^{x_k} & -3 \\ 2x_k & 2y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x_k} - 3y_k - 1 \\ x_k^2 + y_k^2 - 4 \end{bmatrix}$$

Búsqueda de la solución :

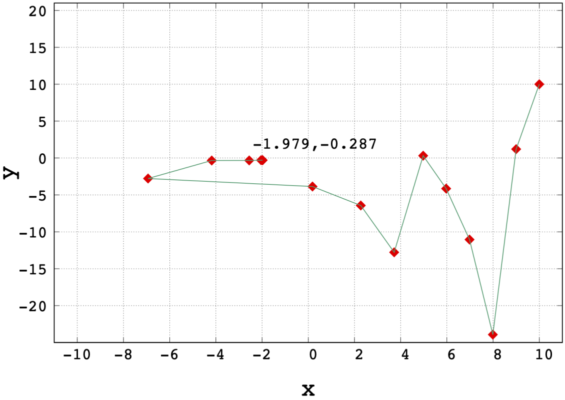
$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \quad , \quad y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

Busqueda de la solución.

$$e^x - 3y - 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x_0 = 10$$
$$y_0 = 10$$

Iteraciones: 15
$$x = -1.97926$$
$$y = -0.28727$$



Generalización

$$F_i(x_1, x_2, .., x_N) = F_i(\mathbf{x}) = 0 \qquad\qquad i = 1, .., N$$

$$\rightarrow F_i(\mathbf{x_r}) \approx F_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}}_{J_{ij}} \Delta x_j$$

En notación matricial:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_r) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \cdot \Delta\mathbf{x} \approx \mathbf{0}$$

$$\rightarrow \mathbf{J} \cdot \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}) \qquad \text{y} \qquad \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x_r} = \mathbf{x_0} + \Delta\mathbf{x}$$

Esquema iterativo:

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k$$

Métodos globalmente convergentes

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k \qquad , \qquad \Delta\mathbf{x}_k = -\mathbf{J}_k^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$$

Estrategia para la aceptación de $\Delta\mathbf{x}_k$

- Minimización de $\quad f = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})$
- $\nabla f \cdot (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -2f < 0$

Actualización:

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x}_k + \lambda\Delta\mathbf{x}_k \quad , \quad 0 < \lambda < 1$$

Escoger λ tal que:

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x_k}) + \alpha\nabla\mathbf{f} \cdot (\mathbf{x_{k+1}} - \mathbf{x_k}) \quad , \quad 0 < \alpha < 1$$