

Simulación: Oscilaciones Acopladas

Jhon Jairo Chiliquinga Jácome
Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ciencias
Carrera de Física, Programación Científica
Séptimo Semestre
11 de Julio de 2022

1. Introducción

El propósito del presente reporte es presentar y discutir los resultados del análisis de un sistema de N osciladores acoplados, como se muestra en la figura 1, bajo condiciones particulares sobre las constantes elásticas k_j .

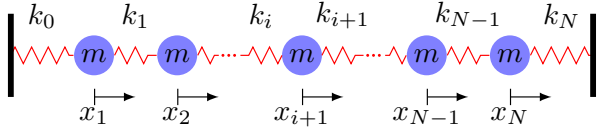


Figura 1: Sistema de N osciladores acoplados mediante resortes de constante k_j , con $j = \{0, 1, \dots, N\}$. La posición de cada partícula está definida desde su posición de equilibrio como $x_j \equiv x_j(t)$, en donde se obvia la dependencia temporal explícita en la notación.

Todas las partículas tienen la misma masa m y aquellas de los extremos están sujetas mediante un resorte a una pared.

Es factible analizar el sistema recurriendo a la mecánica lagrangiana. El lagrangiano \mathcal{L} para este sistema viene dado por,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \left[k_0 x_1^2 + k_N x_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2 \right]. \quad (1)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen N ecuaciones diferenciales que, luego de manipulaciones algebraicas, se puede escribir de una forma matricial como

$$\ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad (2)$$

en donde se usan las siguientes definiciones

$$\omega_0^2 = \frac{k_{min}}{m}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N)^T, \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{x}_1 \ \ddot{x}_2 \ \dots \ \ddot{x}_N)^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{k_0 + k_1}{k_{min}} & -\frac{k_1}{k_{min}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{k_1}{k_{min}} & \frac{k_1 + k_2}{k_{min}} & -\frac{k_2}{k_{min}} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_{min}} & \frac{k_2 + k_3}{k_{min}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{k_{N-1} + k_N}{k_{min}} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

con $k_{min} = \min\{k_0, k_1, \dots, k_N\}$ y \mathbf{M} una matriz $N \times N$ simétrica asociada al problema en particular.

Ahora, se buscan las soluciones en las cuales todas las masas oscilen con la misma frecuencia, es decir, se buscan los *modos normales* de oscilación. A partir de estos se puede describir cualquier oscilación del sistema como suma de estos modos, pues (2) es una ecuación lineal. [1]

Entonces, se propone $\mathbf{x} = \mathbf{v}_n e^{-i\omega_n t}$, con $\mathbf{v}_n = (v_{1n} \ v_{2n} \ \dots \ v_{Nn})^T$ independiente del tiempo y ω_n la frecuencia del modo normal. Al reemplazar en (2) se obtiene

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_n = \frac{\omega_n^2}{\omega_0^2} \mathbf{v}_n, \quad (7)$$

el cual es un problema de valores propios. Tomando en cuenta la forma de la solución propuesta, las frecuencias de los modos normales están dadas por

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} \omega_0, \quad (8)$$

donde λ_n es el n -ésimo valor propio de \mathbf{M} y es adimensional. Al ser una matriz $N \times N$ se tendrán N frecuencias y por tanto N modos normales. Además, de (7) se tiene que las componentes de los vectores propios de \mathbf{M} corresponden a las amplitudes de los osciladores, es decir, v_{ij} corresponde a la amplitud del oscilador i en el modo normal j .

Finalmente, un movimiento en general del oscilador i se puede describir como

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \cos(\omega_j t + \phi_j), \quad (9)$$

donde a_{ij} y ϕ_j se encuentran con condiciones iniciales. Para que $x_i(t)$ corresponda al modo normal de oscilación n se debe cumplir que $a_{ij} = v_{in} \delta_{jn}$

Suponiendo que en (9) se tiene que ω_n y ω_m cumplen con la siguiente relación

$$|\omega_n - \omega_m| \ll \omega_n + \omega_m, \quad (10)$$

entonces, entre estos dos términos se tendrá una modulación en la amplitud con una frecuencia de $\omega_{mod} = |\omega_n - \omega_m|/2$. Esta modulación será más notoria mientras más cercanos sean los valores de $|a_{in}|$ y $|a_{im}|$ y mientras menores sean los valores de $|a_{ik}|$ con respecto a los dos anteriores, $k \neq n, m$. [2]

2. Metodología

El lenguaje de programación usado para la simulación del sistema fue C++. Con el fin de usar cálculos numéricos se definió $\omega_0 = 1$. Con esta elección, las frecuencias se midieron en unidades de ω_0 y el tiempo t en unidades de $1/\omega_0$. Las distancias se expresaron en unidades arbitrarias [u].

Se llevaron a cabo 6 simulaciones que se dividen en 2 grupos.

- Se escogió $k_i = 1$, $i = 0, 1, \dots, N$. Se analizó este caso para 3 diferentes números de osciladores, $N=4, 6$ y 10 . En este caso $k_{min} = 1$.
- Se escogió $k_{2i+1} = 5k_{2i}$, $\forall i = 0, 1, \dots, N$. Se analizó este caso para 3 diferentes números de osciladores, $N=4, 6$ y 10 . En este caso $k_{min} = k_{2i}$.

En ambos casos, (6) se reduce a una matriz de entradas enteras. Para resolver el problema de valores propios correspondiente se usó el método QR.

El programa constó de 7 procedimientos y un algoritmo principal, detallados a continuación.

2.1. Procedimientos

Para el funcionamiento del código fue necesario generar un archivo de texto (*system.txt*) el cual tuviera los valores de las constantes elásticas relativas ($\frac{k_i}{k_{min}}$).

Para todos los procedimientos fue necesario conocer el número de osciladores analizados, pues de

ello dependen la dimensión de la matriz asociada al problema y la dimensión de los vectores usados.

1. *product*: Toma como argumento tres matrices, \mathbf{R} , \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 y realiza la operación $\mathbf{R} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2$, donde \cdot denota el producto usual de matrices.
2. *productt*: Toma como argumento tres matrices, \mathbf{R} , \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 y realiza la operación $\mathbf{R} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2^T$.
3. *productmv*: Toma como argumento dos vectores, \mathbf{r} , \mathbf{v} y una matriz \mathbf{M} y realiza la operación $\mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$.
4. *householder*: Calcula las matrices de transformación necesarias para el método QR.
5. *read*: Lee el archivo de texto mencionado y genera la matriz asociada (6).
6. *print*: Imprime la matriz que tiene como argumento.
7. *solve*: Resuelve el problema de valores propios mediante el método QR.

2.2. Algoritmo

Como único requisito para la simulación se necesitó el archivo *system.txt*. Con este archivo se encontraron los valores propios asociados al problema con ayuda de los procedimientos de la subsección anterior. Las frecuencias propias correspondientes se calcularon con la ayuda de (8).

Además se tuvieron 3 archivos de salida. En el primero se guardaron las posiciones de las masas para diferentes tiempos y diferentes modos normales de oscilación. Estos datos se guardaron desde $t = 0$ hasta $t = 10/\omega_0$ en pasos de $0,1/\omega_0$ para su posterior animación mediante el programa Gnuplot.

En el segundo archivo se guardaron las posiciones de los osciladores calculadas como (9) con $a_{ij} = v_{ij}$ y $\phi_j = 0$ para todo i y j . Cada posición se almacenó desde $t = 0$ en pasos de $0,01/\omega_0$ hasta $t = 200/\omega_0$ para $N = 4$ y 10 , y hasta $t = 600/\omega_0$ para $N = 6$. Con estos datos se generaron gráficos de x_i vs. t para los N osciladores. A este movimiento específico se lo denominará “movimiento mezcla”.

En el tercer archivo se guardaron las frecuencias propias del sistema de osciladores.

Para el tratamiento de los datos obtenidos se usó el programa Gnuplot.

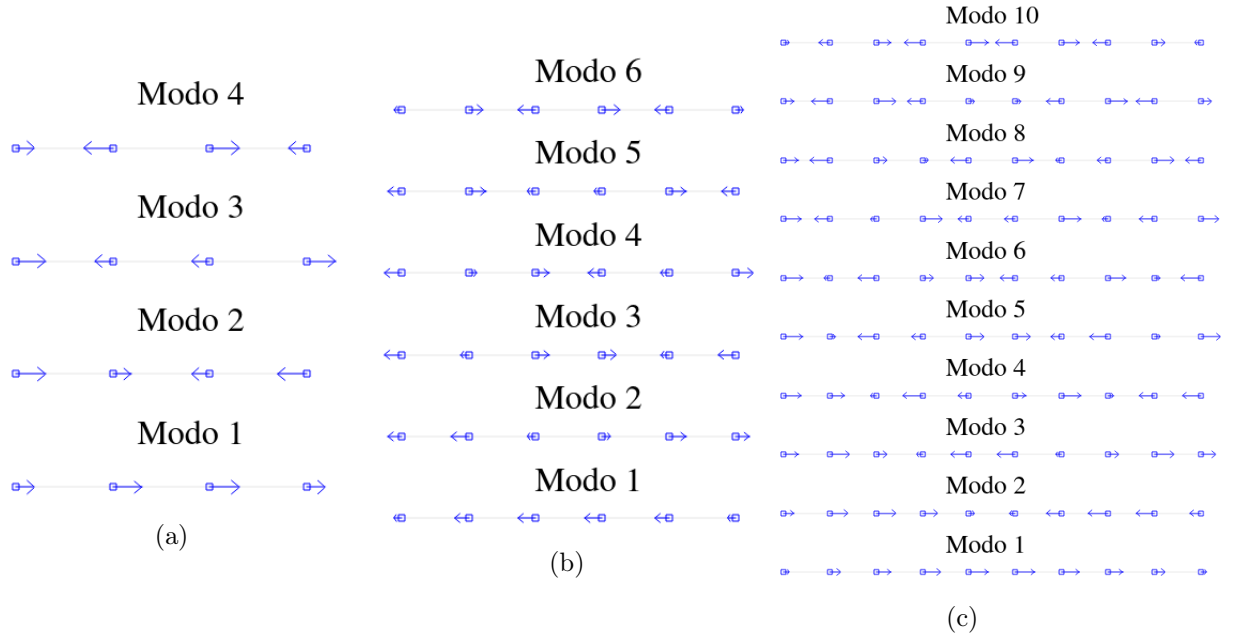


Figura 2: Esquema de los N modos normales para (a) $N=4$, (b) $N=6$, (c) $N=10$ y $k_i = 1$. La dirección de las flechas representan hacia dónde se mueve el oscilador en la posición correspondiente en un momento determinado y su magnitud la amplitud de oscilación. Estas amplitudes de oscilación corresponden a las componentes del respectivo vector propio.

Para los 6 sistemas se analizaron gráficos de x_i vs. t y de ω_i vs. i , en donde el modo 1 corresponde a la menor frecuencia y los demás se ordenaron de forma ascendente en frecuencias.

Para los 3 sistemas con $k_i = 1$ se analizaron los modos normales de oscilación y sus características. Para aquellos con $k_{2i+1} = 5k_{2i}$ se analizaron las frecuencias de modulación de la amplitud en el movimiento de las masas en las que se presentaba este fenómeno.

3. Resultados

En las figuras 2a, 2b y 2c se pueden observar los esquemas correspondientes a los modos normales de los sistemas con $k_i = 1$. Se pudo observar que, para todos los sistemas, el modo con menor frecuencia (Modo 1) correspondió a aquel en el que todas las masas se movían en la misma dirección. En este modo no se tuvo la misma amplitud para todas las oscilaciones, pues esta era mayor para las masas que están más alejadas de los extremos.

En contraposición, el modo con mayor frecuencia (Modo N) se dio cuando las masas cambian de dirección de movimiento de forma alternada, es decir, el oscilador i se mueve en dirección contraria al $i + 1$.

Esto se puede relacionar con las deformaciones de los resortes que unen dos masas. En el modo N , estos resortes sufren elongaciones mayores que en

el modo 1.

Al centrar el análisis en el sistema para $N=4$, se puede ver que en el modo 1 el resorte central no sufre ninguna elongación, pues las masas 2 y 3 se mueven con la misma amplitud y dirección, en cambio, en el modo 4 se mueven con dirección diferente.

Ahora, en el modo 2, las masas 2 y 3 se mueven en direcciones diferentes, pero su amplitud es menor, por lo cual no sufre una elongación tan pronunciada como en el modo 4.

En el modo 3, se tiene una elongación nula en el resorte central, pero los resortes que unen las otras masas sufren una mayor elongación que en el modo 1 y en el modo 2, pues las masas que unen van en direcciones contrarias.

Finalmente, en el modo 4 todos los resortes sufren la máxima elongación posible.

Este mismo comportamiento se pudo observar para $N = 6$ y $N = 10$, por lo cual se los pudo analizar de la misma manera y aplicar el mismo argumento.

Entonces, se encontró una relación cualitativa entre el aumento colectivo de las elongaciones máximas de los resortes y el aumento de la frecuencia normal de oscilación para estos sistemas.

Ahora, al analizar el movimiento mezcla de cada masa se encontró que en todos los sistemas se tenían movimientos oscilatorios no periódicos. En la figura 3 se representa la posición de la masa 1

en función del tiempo para los 3 sistemas con el fin de representar el tipo de movimiento encontrado.

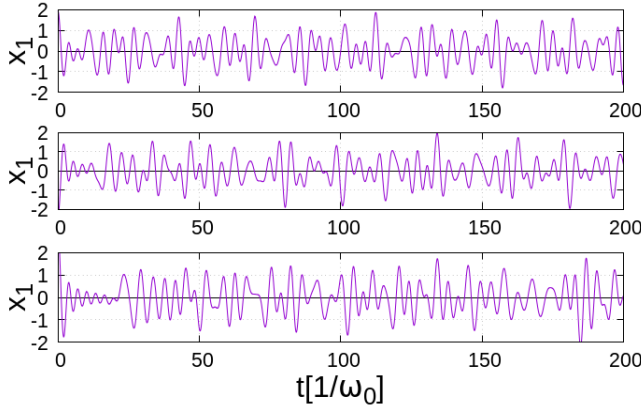


Figura 3: (De arriba hacia abajo) Posición de la masa 1 para el sistema de $N = 4$, $N = 6$ y $N = 10$ con $k_i = 1$. La posición se midió en unidades arbitrarias $[u]$.

Finalmente, en la figura 4 se graficó ω_i vs. i para estos 3 sistemas.

En primer lugar, se pudo encontrar que ningún par de frecuencias para un sistema en específico cumple con la condición (10), lo cual explica el porqué no se tuvo modulación en la amplitud en ningún movimiento.

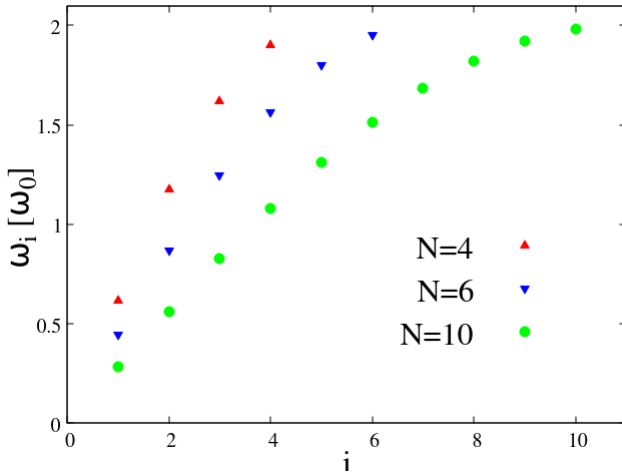


Figura 4: ω_i vs i para el sistema de $N=4,6$ y 10 masas con $k_i = 1$.

Además, se encontró que para un mismo modo, la frecuencia ω_i es mayor para un sistema con menos osciladores. También, para el sistema con menos osciladores, las frecuencias aumentan con mayor rapidez.

Ahora, para el sistema con $k_{2i+1} = 5k_{2i}$, se graficó ω_i vs. i (figura 5).

En este caso se ve que las frecuencias $\omega_{\frac{N}{2}}$ y $\omega_{\frac{N}{2}+1}$ cumplen con la condición (10), entonces se espera tener una modulación de amplitud. Se encontró que para $N = 4$ se dio esta modulación en x_1 y x_4 , para $N = 6$ en x_1 y x_6 , pero para $N = 10$ no se dio ninguna modulación.

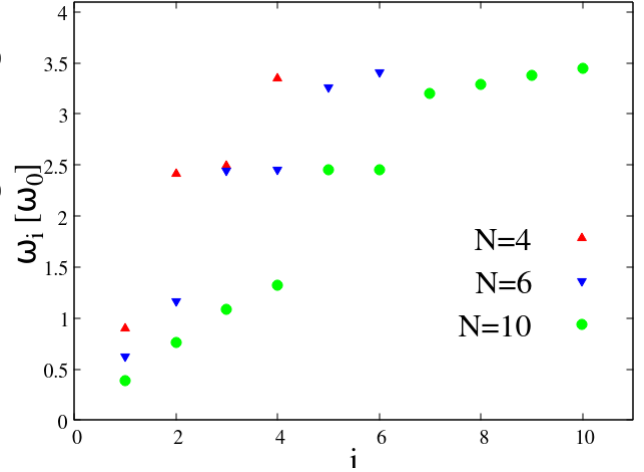


Figura 5: ω_i vs i para el sistema de $N=4,6$ y 10 masas $k_{2i+1} = 5k_{2i}$.

En las figuras 6 y 7 se presentan las gráficas de x_i vs. t para los cuales se tuvo una modulación. Y en la figura 8 se presentan x_1 y x_7 vs t como casos ilustrativos para presentar el movimiento no periódico y sin modulación encontrado en todas las masas.

Al analizar los coeficientes de (9) del sistema, los cuales son los componentes de los vectores propios, para $N = 4$ y $N = 6$ se pudo encontrar que las amplitudes correspondientes a las frecuencias $\omega_{\frac{N}{2}}$ y $\omega_{\frac{N}{2}+1}$ para las masas 1 y N fueron similares y mayores con respecto a las demás, por lo cual se tuvo esta modulación notoria. En cambio para $N = 10$ no se tuvo dicho caso.

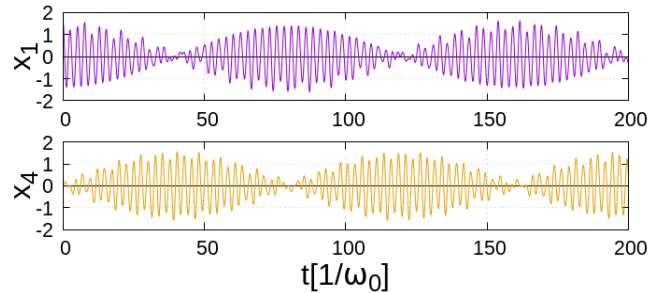


Figura 6: Posición en función del tiempo para la masa 1 y 4 para el sistema de $N = 4$ y $k_{2i+1} = 5k_{2i}$ en donde se evidencia una modulación de la amplitud. La posición se midió en unidades arbitrarias $[u]$.

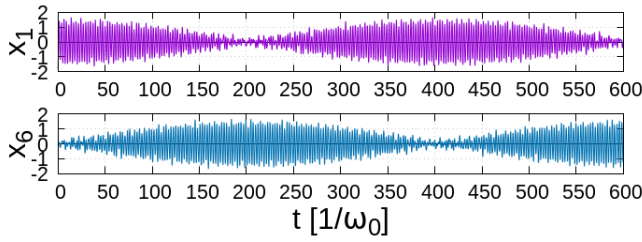


Figura 7: Posición en función del tiempo para la masa 1 y 6 para el sistema de $N = 6$ y $k_{2i+1} = 5k_{2i}$ en donde se evidencia una modulación de la amplitud. La posición se midió en unidades arbitrarias $[u]$.

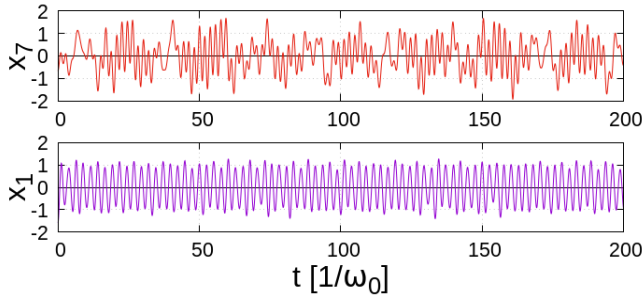


Figura 8: Posición en función del tiempo para la masa 1 del sistema de $N = 10$ y $k_{2i+1} = 5k_{2i}$. Se presenta simplemente un movimiento oscilatorio no periódico. La posición se midió en unidades arbitrarias $[u]$.

En la tabla 1 se presenta la comparación de amplitudes para el caso de x_1 . Para $N = 10$, las amplitudes de las frecuencias cercanas fueron muy diferentes y una de ellas es menor que la máxima. Este comportamiento se repitió para todas las demás masas.

	Amplitud $\frac{N}{2}$	Amplitud $\frac{N}{2} + 1$	Amplitud máxima
$N = 4$	0,694525	0,694171	0,133719
$N = 6$	0,746393	0,634967	0,112513
$N = 10$	0,97859	0,0486142	0,0893387

Tabla 1: Amplitudes de x_1 correspondientes a $\cos(\omega_i t)$. Se muestran estas amplitudes para $\omega_{\frac{N}{2}}$, $\omega_{\frac{N}{2}+1}$ y la amplitud máxima de entre las frecuencias restantes.

Además, para $N = 6$ las amplitudes para generar la modulación no son tan similares como en el caso de $N = 4$, es por eso que en este último caso la modulación es más evidente.

Finalmente, se midió la frecuencia de modulación y se la comparó con los valores predichos

ω_{mod} , y se obtuvo la tabla .

	$\omega_{mod}[\omega_0]$ Medida	$\omega_{mod}[\omega_0]$ Predicha
$N = 4$	0.0393	0.039315
$N = 6$	$7,85 \times 10^{-3}$	$7,74 \times 10^{-3}$

Tabla 2: Comparación entre las frecuencias de modulación presentes para $N = 4$ y $N = 6$. Para $N = 10$ no se tuvo modulación.

Se ve que con el mayor número de osciladores la frecuencia predicha se aleja más de la medida. Esto está en concordancia a la diferencia entre las amplitudes correspondientes mostradas en la tabla 1. Además, se encontró que estas frecuencias fueron menores a las de los modos normales.

4. Conclusiones

Para un sistema de N osciladores, como el de la figura 1 con constantes elásticas iguales para todos los resortes, se observó que las frecuencias de los modos normales de oscilación dependen de la elongación máxima conjunta de los resortes. Mientras mayor sea esta elongación mayor será la frecuencia del modo correspondiente. La menor frecuencia se alcanzó cuando todos las masas se movían en una misma dirección y la mayor cuando se movían en direcciones alternadas.

Para el caso del sistema en el cual se tuvo $k_{2i+1} = 5k_{2i}$ se encontró que 2 de las N frecuencias normales cumplían con $|\omega_i - \omega_j| \ll \omega_i + \omega_j$ (figura 5). Esto ocasionó que al tener un movimiento de la forma (9) con coeficientes correspondientes a entradas de los vectores propios se genere una modulación de la amplitud en ciertas masas. En particular estas modulaciones se dieron cuando las amplitudes correspondientes a las frecuencias normales que cumplieron con la condición anterior fueron similares y mayores a las demás. Por esta razón se vio una evidente modulación para $N = 4$, menos marcada para $N = 6$ y nula para $N = 10$.

Se vio que estas frecuencias de modulación de la amplitud fueron menores que cualquiera de las frecuencias de los modos normales.

Finalmente, para los 6 sistemas analizados, se encontró que la frecuencia normal para un modo específico y constantes elásticas particulares, fue mayor para los sistemas con menor número de osciladores.

Referencias

- [1] Alicia Guerrero de Mesa. *Oscilaciones y ondas*. Universidad Nacional de Colombia, 2005.
- [2] A.P. French. *Vibrations and Waves (The M.I.T. Introductory Physics Series)*. 1.^a ed. The M.I.T. Introductory Physics Series. W. W. Norton & Company, 1971. ISBN: 0393099369,9780393099362.