Stage Map Graphs

José Lorgeré

16 juillet 2025

Introduction

1 Trucs généraux

1.1 Résultats et définitions préliminaires

Définition (Carte). *Une carte est une fonction $f : V \to \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ telle que pour tout $v \in V$, $f(v)$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^2$ et telle que pour $v \neq u$, $f(u)$ et $f(v)$ sont d'intérieur disjoints. Si f forme un recouvrement de $\mathbb{S}^2$, on la dira sans trou, ou complète. On appelera les $f(v)$ régions*

Définition (Graphe de carte [2]). *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte s'il existe une carte f sur V telle que $xy \in E$ si et seulement si $f(x) \cap f(y) \neq \varnothing$*

Théorème 1 (Caractérisation des graphes de carte). *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte si et seulement si il existe H un graphe biparti planaire, de bipartition V, U, tel que $H^2[V] = G$. Un tel graphe H est appelé graphe témoin de G*

Proposition 1. *Si G est un graphe de carte, et $H = G[A]$ où $A \subset V$, alors H est un graphe de carte*

Démonstration. On reprend la carte de G où l'on ne garde que les régions identifées aux sommets présents dans A □

Définition (Join). *Le join de 2 graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommet $V'' = V \cup V'$ et pour arrêtes*

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x \in V'\}$$

On notera pour tout $n \geq 1$ $K(n, G)$ le join d'un indépendant à n sommets avec le graphe G. Plus généralement, le join des graphes G et G' sera noté $K(G, G')$. Cette opération étant associative, on se permettra d'écrire $K(G, H, L)$ pour désigner le join successif de G à H puis à L

Lemme 1. *Un graphe G a pour mineur $K_{3,3}$ si et seulement si il existe 6 sommets, $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ et des chemins $P_{i,j}$ de s_i à t_j pour tout i, j tels que*

- *Pour tout $i \neq i', j \neq j'$, $P_{i',j'}$ et $P_{i,j}$ ne se rencontrent pas*
- *Pour tout i, s_i et t_i ne sont sommet intermédiaire d'aucun des chemins*
- *Si deux de ces chemins se rencontrent, leur intersection est également un chemin*

Démonstration. Supposons que G possède un mineur $K_{3,3}$. Alors il existe des ensembles de sommets connexes, disjoints, $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ tels qu'une fois contractés, le graphe induit par ces ensembles aie pour sous graphe $K_{3,3}$. Soient $s_i \in S_i$ et $t_i \in T_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Comme on a une arrête de S_i à T_j pour tout i, j, il existe des sommets $s'_i \in S_i$ et $t'_j \in T_j$ tels que $s'_i t'_j \in E$. En se donnant un chemin de s_i à s'_i puis de t'_j à t_j, on construit alors des chemins $P_{i,j}$ comme décrits dans l'énoncé. Si $i \neq i'$, $j \neq j'$, les chemins $P_{i,j}$ et $P_{i',j'}$ sont à valeurs dans des ensembles disjoints et ne se rencontrent donc pas. La deuxième condition est vérifiée pour les mêmes raisons. Pour la troisième, si un chemin de s_i à t_j rencontre un chemin de s_i à $t_{j'}$ en un sommet intermédiaire, cette intersection se fait nécessairement dans

S_i. On modifie alors le chemin $P_{i,j'}$ de sorte à ce qu'il coincide avec $P_{i,j}$ jusqu'à sa dernière intersection avec ce dernier dans S_i. On raisonne de manière similaire pour $P_{i,j}$ et $P_{i',j}$

Supposons à présent qu'il existe de tels s_i et t_i et de tels chemins $P_{i,j}$. On se restreint au sous graphe constitué des chemins $P_{i,j}$. Soient $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Supposons que $P_{i,j}$, hors extérmités, ne soit pas disjoint de tout les autres chemins. On note $P_{i,j} = \{s_i = v_1, v_2, ..., v_l = t_j\}$ dans l'ordre de parcours, et on se donne

$$p = \min\{k \in [\![1, l]\!] \mid \exists i' \neq i, v_k \in P_{i',j}\}$$
$$q = \max\{k \in [\![1, l]\!] \mid \exists j' \neq j, v_k \in P_{i,j'}\}$$

L'hypothèse faite sur les chemins permet d'affirmer que les deux ensembles décrits sont les seules intersections possibles de $P_{i,j}$ avec d'autres chemins.
Montrons que $p > q$: on se donne les i' et j' correspondants. Comme l'intersection de deux chemins reste un chemin, et que $P_{i,j'}$ contient à la fois s_i et v_q, les sommets $v_1, ..., v_q$ font tous partie de $P_{i,j'}$. De même, $v_p, ..., v_l$ font partie de $P_{i',j}$. Supposons maintenant par l'absurde que $p \leq q$. On déduit des remarques précédentes que les sommets $v_p, ..., v_q$ font partie de $P_{i,j'}$ et $P_{i',j}$, hors ces chemins ne s'interesctent pas par hypothèse, absurde.
On contracte alors tout les sommets de v_1 à v_p et ceux de v_q à v_l comme il existe un chemin les reliant tous. Puisque $p > q$ et que les sommets de départs et d'arrivée ne sont pas présents sur les chemins hors extrémités, on conserve bien des chemins de s_i à $t_{j'}$ et de $s_{i'}$ à t_j. Après cette opération, le nouveau chemin $P_{i,j}$ est disjoint de tout les autres. On répète alors cette opération pour tout i, j.
Une fois cela fait, on obtient des chemins tous disjoints de tout s_i à tout t_j, ne reste plus qu'à contracter ces chemins afin d'obtenir un $K_{3,3}$. □

Proposition 2. *Soit G un graphe à 3 sommets. $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K(3, G)$ est un graphe de carte. On se donne alors H vérifiant toutes les propriétés du théorème 1. On note pour tout v_i, sommet indépendant de $K(3, G)$, N_i son voisinage dans H incluant v_i. Notons que pour $i \neq j$, N_i et N_j sont disjoints comme v_i et v_j sont indépendants. Comme les chemins de v_i aux sommets de G n'empruntent que des sommets de N_i, mis à part le sommet de G, les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées. H a donc pour mineur $K_{3,3}$, absurde par planarité. $K(3, G)$ n'est donc pas un graphe de carte. □

Notons toutefois que $K(2, G)$ lui est un graphe de carte, et que le join de 2 graphes à 3 sommets tous deux non indépendants est de carte également. Cela pourrait laisser à penser que, comme pour les graphes planaires, les graphes $K(3, G)$ seraient des contre exemples "fondamentaux". Ce n'est en fait pas le cas, la proposition suivante montrant qu'un graphe n'a pas besoin d'avoir 3 indépendants pour ne pas être de carte

Proposition 3. *$K_{2,2,2,2}$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. On numérote les sommets de 1 à 8, tels que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_7, v_8\}$ soient les indépendants. On suppose par l'absurde que $K_{2,2,2,2}$ est un graphe de carte, on s'en donne donc un témoin H. On le suppose même minimal pour la relation de sous graphe.
Notons d'abord que les voisinages de v_1 et v_2 dans H sont disjoints, ces deux sommets étant indépendants. Cela vaut aussi pour toutes les autres paires indépendantes. Ainsi, pour tout $u \in N(v_i)$, u n'est voisin que d'au plus un élement de chaque paire. Ainsi les sommets de U sont de degré au plus 4. On construit à présent un mineur $K_{3,3}$ de H

Notons que comme $K_{2,2,2,2}$ n'est pas planaire, au moins un sommet de H dans U est de degré au moins 4. Les remarques précedentes font que ce sommet est de degré exactement 4. Notons le u, et supposons quitte à renommer que ses voisins sont v_1, v_3, v_5, v_7. Soit $i \in \{4, 6, 8\}$. Notons p, q, r les voisins de v_2 donnant un chemin de longueur 2 respectivement à v_3, v_5, v_7. Depuis v_i on construit un chemin vers v_{i-1} en exploitant un sommet $v_j \in V$ intermédiaire tel que $j \notin \{1, 2, 3, 5, 7, i\}$. Les autres chemins depuis v_i sont ceux de longueurs 2 donnés par le fait que H soit un témoin de $K_{2,2,2,2}$. On note alors q', p', r' les

voisins de v_i participant à chacun de ces 3 chemins ordonnés de même manière que p, q, r. On notera s' le sommet de U venant après v_j dans le chemin de v_i à v_{i-1}
Une disjonction de cas basée sur les remarques faites sur le degré des sommets et la minimalité de H montre que l'on peut choisir i et j tels que les chemins de v_i et v_2 à v_3, v_5, v_7 se rencontrent selon les hypothèse du lemme 1. (à foutre en annexe)

On considère les sommets $v_1, v_2, v_i, v_3, v_5, v_7$ et les chemins donnés précedemment (le chemin depuis v_1 aux autres est de longueur 2 et utilise u). u étant de degré 4 donc maximal, et par ce qui précède, ces sommets vérifient les hypothèses du lemme 1. Donc H n'est pas planaire. Absurde □

Notons que $K_{2,2,2}$ est toutefois un graphe de carte

Définition (Témoin compact [1])**.** *Un témoin compact d'un graphe de carte G, est un témoin $H = (V \cup U, E)$ dont on se donne un plongement dans le plan, ne contenant aucun sommet $u \in U$ tel que*
- $\deg(u) = 2$ *et il existe* $u' \in U$ *tel que* $N(u) \subset N(u')$
- *Il existe* $u' \in U$ *tel que* $N(u) = N(u') = \{v, w\}$ *et* u, v, u', w *délimite une face de* H

Les sommets vérifiant de telles propriétés seront dits inutiles, tout les sommets d'un témoin compact sont alors "utiles"

Dans l'article ... on a que l'existence d'un témoin compact équivaut à l'existence d'un témoin de G. Ainsi on peut se restreindre à l'étude de ces témoins particuliers

Théorème 2. *Un graphe G admet une carte complète si et seulement si il admet un témoin compact qui est une quadrangulation*

On en déduit alors que les graphes admettant des cartes complètes sont 2-connexes comme une quadrangulation l'est (ce que l'on pouvait également voir par un argument concernant la topologie des régions). En fait on a même la propriété suivante concernant la 2-connexité

Proposition 4. *Un graphe G est de carte si et seulement si toutes ses composantes 2-connexes le sont*

On peut par exemple en déduire q'un block graph, c'est à dire un graphe dont les composantes 2-connexes sont des cliques, est alors toujours un graphe de carte, et admet une carte complète si et seulement si ce dernier est 2-connexe.

Définition (Adjacence réelle)**.** *Pour $H = (V \cup U, E')$ un témoin de G, on définit l'adjacence réelle, $RA(x)$ d'un sommet $x \in V \cup U$ comme suit :*
- *Si* $x \in V$, $RA(x) = \{x\}$
- *Si* $x \in U$, $RA(x) = N(x)$

On peut alors définir l'adjacence réelle $RA(S)$ d'un sous ensemble $S \subset V \cup U$ en faisant l'union sommet par sommet.

2 Etude des cartes complètes 3-connexes

Dans la suite, le terme chemin pourra désigner soit un chemin dans un graphe, soit un chemin au sens topologique, c'est à dire l'image d'une application continue $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$. On dira qu'un chemin (topologique) est un lacet si $\gamma(0) = \gamma(1)$. Un chemin sera dit simple s'il est injectif. Un lacet sera dit simple si la seule valeur atteinte plus d'une fois est $\gamma(0)$. On confondra souvent un chemin et son image

Définition (Arrête contractible)**.** *Soit G un graphe de carte. On dira que $xy \in E$ est contractible si il existe une carte de G dans laquelle $x \cap y$ est un chemin simple.*

Proposition 5. *Soit G un graphe de carte et $xy \in E$ une arrête contractible. G/xy est également un graphe de carte. De plus si la carte de G est complète, celle de G/xy l'est également*

Démonstration. $x \cap y$ étant un chemin simple, on peut alors montrer que $x \cup y$ est homéomorphe à un disque (on peut par exemple dire que $x \cup y$ est l'intérieur du lacet simple obtenu en concaténant des parties des frontières de x et y). Ainsi on a une carte de G/xy donnée par la carte de G restreinte à $V - \{x, y\}$ et où le sommet xy est représenté par la région $x \cup y$. □

On souhaite à présent étudier plus en profondeur les graphes de carte 3-connexe à carte complète afin de pouvoir plus facilement distinguer les potentielles arrêtes contractibles par des critères combinatoires

2.1 Cycles et voisinages

Proposition 6 (Cycle séparant)**.** *Soit G 3-connexe admettant une carte complète. Soit $v \in V$. Il existe un témoin compact quadrangulé H de G et un cycle C tel que*
- *$RA(C) = N[v]$ (on considère ici les voisins dans G)*
- *L'intérieur de C ne contient que v et les seules arrêtes dans cet intérieur sont celles entre v et les élements de $C \cap U$*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. On ne s'intéressera ici qu'à la construction du témoin impliquant le voisinage de v, le reste du témoin pouvant être construit comme souhaité à partir de la carte complète grâce au théorème 2.

La région v étant homéomorphe à un disque, on se donne $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ un lacet simple paramétrant sa frontière. Quitte à reparamétrer, on admettra que l'on peut choisir $\gamma(0)$ tel qu'il soit point de rencontre d'au plus 2 régions (et donc d'exactement 2 comme la carte est complète), le graphe étant fini. Les mêmes arguments de finitude et le fait que la carte soit complète permettent d'affirmer qu'il existe $v_1 \in V$ tel que l'ensemble $I_1 = \{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset v_1\}$ soit un intervalle non ponctuel. On note alors $t_1 = \sup(I_1) > 0$. On a que $t_1 < 1$: en effet si $t_1 = 1$, alors γ est un lacet inclus dans u_1, et l'on admettra que ce lacet n'est pas homotope à un point, ce qui est absurde comme u_1 est homéomorphe à un disque. En utilisant le même argument que celui donnant l'existence de v_1, et comme t_1 est maximal, on trouve un $v_2 \in V$ distinct de v_1 tel que l'ensemble suivant $I_2 = \{t \in [t_1, 1] \mid \gamma([t_1, t]) \subset v_2\}$ soit un intervalle non ponctuel et on continue ce processus jusqu'à atteindre 1. A noter que la dernière région considérée se trouve être v_1, comme $\gamma(0)$ n'est pas un point de rencontre de 3 régions pour aller du dernier point, $\gamma(t_k)$, à 1, il faut longer v_1 selon un chemin. On notera alors $v_1, ..., v_k$ les régions obtenues par ce processus, où v_k est l'avant dernière région considérée.

Supposons que $v_i = v_j$ où $j > i$. Par construction, on a donc $j > i + 1$. Donc la région v_i rencontre v en au moins deux chemins. On a alors que $G - \{v, v_i\}$ n'est pas connexe, v_{i+1} et v_{j+1} sont séparés, absurde par 3-connexité. Donc les v_i sont tous distincts. On construit à présent le témoin.
On place chaque sommet de V à l'intérieur de la région lui correspondant. On ajoute les points $\gamma(t_i)$ au graphe, en les placant à leurs positions, et l'on relie v à tout ces points par des chemins dans sa région. On relie également toutes les régions contenant un point $\gamma(t_i)$ à ce dernier par des chemins.
On a ainsi obtenu un cycle vérifiant par construction la seconde propriété de l'énoncé. Pour la première, pour un sens, il suffit de voir que tout les sommets adjacents à des $\gamma(t_i)$ dans ce graphe sont des régions rencontrant v, donc des voisins. Réciproquement, un voisin de v est soit un v_i, soit rencontre ponctuellement v en un des $\gamma(t_i)$: si un voisin de v rencontre sa frontière en un point entre deux $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$, v_i n'est pas homéomorphe à un disque. On a bien la première propriété
Les sommets $\gamma(t_1), ..., \gamma(t_k)$, qui correspondront à des élements de U, sont tous utiles, et les faces présentes à l'intérieur du cycle sont bien bordées par 4 arrêtes. On complète ensuite le graphe pour obtenir un témoin compact de G quadrangulé □

Corollaire 1 (Ordre cyclique)**.** *Soit G 3-connexe admettant une carte complète et $v \in V$. Il existe un ordre total $v_1, ..., v_k$ sur les voisins de v induisant un cycle*

Démonstration. On se donne un témoin H vérifiant les propriétés de la proprosition 6. Soit $s_1, ..., s_{2l}$ le cycle dans H donné par cette proposition. On suppose sans perte de généralité que $s_1 \in V$. Pour tout i, on pose $E_i = \{s_i\}$ si i est impair, si i est pair, E_i correspond à l'ensemble des voisins de s_i hors cycle, v

exclu. On ordonne alors $N(v)$ comme suit : on ordonne chaque E_i selon un ordre arbitraire. Puis on ordonne ces ordres arbitraires de sorte à ce que tout les élements de E_i soient plus petits que ceux de E_{i+1}. Si un élement apparaît dans plusieurs E_i, on le placera avec le E_i de plus petit indice auquel il appartient. Cet ordre est bien total sur $N(v)$ comme $RA(\{s_1, ..., s_{2l}\}) = N[v]$. De plus ce dernier donne bien lieu à un cycle : en effet tout les sommets de E_i sont adjacents aux sommets de E_{i+1} (les indices étant pris modulo $2l$), et les E_i pour i pair sont des cliques. □

2.2 Décontractions d'arrêtes

Proposition 7. *Soit G, $xy \in E$ une arrête. Supposons que G/xy admette une carte complète et soit 3-connexe. Soit H un témoin compact quadrangulé de G/xy donné par la proposition 6. Notons $s_1, ..., s_k$ le cycle séparant xy du reste de H. Si les voisins de x distincts de y sont exactement $RA(\{s_i, ..., s_{i+l}\}) - xy$ et ceux de y $RA(\{s_{i+l}, ..., s_{i-1}, s_i\}) - xy$, où i, l sont entiers et les indices sont vus modulo k, alors G admet une carte complète*

Démonstration. On construit la carte complète comme suit : on part de H, on retire xy et on ajoute x et y à l'intérieur du cycle séparant. Ensuite, on relie x à tout ses voisins de la manière suivante : si $s_j \in U$ et que les deux voisins de s_j sur le cycle sont voisins de x, on ajoute une arrête entre x et s_j.
Si l'un des voisins de s_j n'est pas voisin de x et l'autre l'est, et que ce dernier n'a pas été pris en compte par l'étape précédente, c'est alors que x n'a qu'un voisin sur le cycle par les conditions précédentes : si il en avait plus de deux, il aurait été possible de tous les couvrir en considérant les sommets de U faisant la liaison. Dans ce cas, on relie x à son voisin par deux arrêtes subdivisées, et on relie y à chaque sommet joignant x à son voisin.
On effectue les mêmes étapes pour y. Si il n'existe aucun $s_j \in U$ tels que ses deux voisins sur le cycle soient également voisins de x et y, cela signifie que s_i et s_{i+l} sont dans V. On ajoute alors deux sommet, s et s', l'un relié à s_i, x, y, l'autre à s_{i+l}, x, y. On obtient au final un témoin de G, compact et quadrangulé, donc G admet une carte complète □

Lemme 2. *Soit G un graphe admettant une carte complète et $xy \in E$ une arrête telle que G/xy soit un graphe 3-connexe à carte complète. Soit H un témoin compact quadrangulé de G/xy. On suppose que les voisins de xy dans G/xy induisent un cycle sans corde. Alors H vérifie la propriété de la proposition 7*

Démonstration. Supposons par l'absurde H ne vérifie pas cette propriété. Notons que comme les voisins de xy induisent un cycle sans corde, on peut supposer sans perte de généralité que les voisins de xy dans H sont tous de degré 3 : en effet ces derniers ont pour voisins des voisins de xy dans G/xy. Si un tel sommet était de degré plus que 3, alors on aurait un triangle présent parmi les voisins de xy. Si ces derniers sont au nombre de 3, H respecterait la propriété de la proposition 7. Si xy a plus de 4 voisins, alors le cycle formé par ses voisins dans G/xy possède une corde, absurde.

On exploite à présent l'hypothèse sur H : notons $v_1, ..., v_l$ l'ordre cyclique sur les voisins de xy. De par la forme du témoin, l'hypothèse implique que les voisins de x et de y ne sont pas des intervalles modulo l parmi ces sommets (si l'on retire x et y). Comme G est à carte complète et 3-connexe, les voisins de x et ceux de y forment respectivement des cycles. Hors les voisins de x ne forment pas un intervalle modulo l parmi $v_1, ..., v_l$ (y est exclu). Donc $N(x) = \{y, v_{a_1}, ..., v_{b_1}, v_{a_2}, ..., v_{b_2}, ..., v_{b_k}\}$ où $a_1 = 1$ sans perte de généralité, $k \geq 2$, $b_i < a_{i+1} + 1$ pour $1 \leq i \leq k-1$, et $b_k < l - 1$, là encore quitte à effectuer des permutations cycliques.
On numérote les voisins de x $u_1, ..., u_r$ dans un ordre cyclique. En supposant $u_1 = v_1$ et quitte à inverser l'ordre, on a $u_{b_1} = v_{b_1}$. Le seul sommet adjacent à v_{b_1} encore non utilisé est y, donc $u_{b_1+1} = y$. Puis u_{b_1+2} est un sommet quelconque parmi ceux restants. Supposons pour simplifier le raisonnement qu'il s'agisse de v_{a_2}. Le seul sommet adjacent non considéré est v_{a_2+1} et ainsi de suite jusqu'à atteindre v_{b_2}. v_{b_2} n'a pas de voisins non considérés dans le cycle. Le raisonnement est le même si l'on tombe sur un voisin entre un v_{a_i} et v_{b_i} le sens de progression peut toutefois être différent. Au total, c'est absurde.

Ainsi H vérifie la propriété annoncée □

Lemme 3. *Soit G un graphe à carte complète, $xy \in E$ une arrête contractible. Il existe un graphe G' à carte complète, tel que G'/xy soit à carte complète et se contracte à l'aide d'arrêtes contractibles en G/xy, et vérifiant que les voisins de xy dans G'/xy induisent un cycle sans corde.*

3 Algorithmes

On discutera ici d'abord du problème de reconnaissance des graphes de carte, restreint à des sous classes particulières, puis l'on s'intéressera

3.1 Cas des graphes trivialement parfaits

Un graphe G sera dit trivialement parfait s'il ne contient pas les graphes P_4 et C_4 en sous graphe induit. Il est équivalent de les définir comme des graphes d'intervalles particuliers. Un graphe trivialement parfait est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles "emboîtés" : si I et J sont deux intervalles représentant des sommets de G, si $I \cap J \neq \varnothing$, alors $I \subset J$ ou inversement.
Cette définition par les intervalles permet de voir facilement que l'unique séparateur minimal d'un graphe trivialement parfait G est composé de l'ensemble des sommets universels de G (un sommet universel étant un sommet adjacent à tout les sommets du graphe). Ainsi G est 3-connexe si et seulement si il possède au moins 3 sommets universels.

3.1.1 Cas 3-connexe

On se fixe pour la suite un graphe G trivialement parfait 3-connexe

Lemme 4. *Si G a 3 sommets indépendants, il n'est pas de carte*

Démonstration. Un tel graphe contient $K(3, K_3)$ parmi ses sous graphes induits, par les remarques précédentes □

Supposons que G ne soit pas une clique. On peut déduire de ce lemme que le séparateur minimal de G le sépare en 2 composantes connexes. Notons que ce séparateur est une clique de taille au moins 3. Notons C_1 et C_2 les 2 composantes connexes séparées par ce séparateur. Le lemme 4 permet également de déduire que C_1 et C_2 sont des cliques : en effet si C_1 n'est pas une clique, il contient 2 sommets indépendants. On a donc un indépendant de taille 3 constitué de ces 2 sommets et d'un sommet de C_2. On en déduit le lemme suivant :

Lemme 5. *G est de carte si et seulement c'est une clique ou un $K(K_n, K_p \sqcup K_q)$ avec $n \geq 3$. De plus, la carte donnée est complète*

Démonstration. Le sens direct a déjà été traité précedemment.
Pour le sens réciproque, toute clique admettant une carte complète, on se concentre sur le second cas. On construit alors un témoin compact quandrangulé pour $K(K_n, K_p \sqcup K_q)$ comme illustré figure ? ? □

3.1.2 Cas général

On s'intéresse à présent au cas où G est 2-connexe, qui conclura l'analyse des graphes trivialement parfaits par la proposition 4 et le fait qu'un graphe à carte complète est nécessairement 2-connexe. Comme précedemment, la 2-connexité de G impose l'existence de 2 sommets universels. S'il y en a 3, la question a déjà été réglée précédemment car G est alors 3-connexe.

Théorème 3. *Un graphe G trivialement parfait 2-connexe est de carte si et seulement si chacune de ses composantes 3-connexe est de carte. De plus la carte de G construite est complète.*

Démonstration. Si G est de carte, toutes ses composantes 3-connexes sont de carte comme ce sont des sous graphes induits de G.
Pour le sens réciproque, le lemme 5, nous donne la forme des composantes 3-connexes de G. Notons $C_1, ..., C_k$ les composantes 3-connexes de G. On construit alors une carte comme suit : on place 2 régions

associées aux 2 universels, u et v, de G, que l'on fait se rencontrer en $k+1$ chemins disjoints. Ainsi après retrait de ces 2 régions, la sphère est séparée en k composantes connexes.
Si C_i, $1 \leq i \leq k$, est une clique, on place dans une des k composantes connexes encore libre une clique remplissant entièrement cette composante, portée par un point de rencontre entre u et v. Sinon C_i est de la forme $K(K_n, K_p \sqcup K_q)$, $n \geq 3$. On représente alors les sommets distincts de u et v formant le K_n par une clique séparant la composante en deux, de telle sorte à ce que chaque partie ait accès à un point portant cette clique. On remplit ensuite chaque partie par une clique portée par un point porteur de la clique K_n. (illustré figure ? ?) □

Notons alors que les graphes trivialement parfaits de carte sont exactement les graphes ne possédant pas $C_4, P_4, K(3, K_3)$ parmi leur sous graphes induits : en effet, un graphe trivialement parfait de carte vérifie cette condition, et réciproquement, un graphe n'ayant pas ces 3 sous graphes induits sera de carte car tout le raisonnement est basé sur le seul lemme 4

(A rediscuter avec la possibilité de juste passer en force par les sous graphes interdits) On en déduit alors un algorithme en temps polynômial décidant si un graphe G trivialement parfait est de carte : on commence par séparer G en ses composantes connexes puis 2-connexes, puis 3-connexes.

Puis, afin de décider si les composantes 3-connexes ont bien la forme souhaitée, on emploie l'algorithme suivant : on liste les cliques max de la composante, si la composante elle même est une clique max, il n'y a alors qu'une seule clique max et ce cas est donc vu dès la première clique listée. On renvoie alors une réponse positive. Si il n'y a que 2 cliques max, chaque sommet étant dans au moins une clique max, ces deux dernières recouvrent la composante 3-connexe. La 3-connexité impose que ces deux dernières se rencontrent en au moins 3 points, le graphe est alors de la forme $K(K_n, K_p \sqcup K_q)$, les 2 cliques max ayant $n+p$ et $n+q$ sommets chacune, la clique K_n, $n \geq 3$ étant formée des sommets communs aux deux cliques max. On renvoie alors aussi une réponse positive. Si il y a plus de 3 cliques max, on renvoie une réponse négative.

3.2 Cas des cographes

Une classe plus large que celle des graphes trivialement parfaits est celle des cographes : un graphe est un cographe s'il ne possède pas P_4 parmi ses sous graphes induits. Il est équivalent de les définir comme le plus petit ensemble de graphes contenant le sommet, stable par union disjointe et join. Cette dernière caractérisation s'avèrera plus intéressante pour l'étude.
En effet cette dernière donne lieu à une représentation des cographes par des arbres enracinés : il s'agit en fait d'utiliser l'arbre enraciné des opérations, de join (étiquetté par 1) et union disjointe (étiquettée par 0), nécessaires afin d'obtenir le cographe en question, où les feuilles sont donc les sommets du graphe. Deux sommets sont alors adjacents si et seulement si leur plus petit ancêtre commun est un 1. Les opérations de join et union disjointe étant associatives, il est alors possible de compacter le coarbre de telle sorte à ce qu'un noeud 1 ne puisse avoir comme enfant que des noeuds 0 ou des sommets et de même pour 0. La représentation devient alors unique pour un cographe donné, on appelle cet arbre le coarbre associé au cographe. Notons d'abord que les opérations de join et union disjointe étant au moins binaires, tout les noeuds internes ont au moins 2 enfants.

3.2.1 Connexités et coarbres

On discutera ici de comment se manifeste les différentes propriétés de connexité des cographes au niveau de leur coarbre associé. Le lemme suivant caractérise la connexité par la racine de du coarbre

Lemme 6. *Un cographe G est connexe si et seulement si son coarbre T a pour racine un noeud étiquetté* 1

Dont on peut déduire la proposition suivante

Proposition 8. *Soit G un cographe connexe et T son coarbre. Notons $T_1, ..., T_k$ les sous arbres de T enracinés en les enfants de la racine de T. Les séparateurs minimaux de G sont exactement les $\bigcup_{i \neq j} V(T_i)$ où j parcourt l'ensemble des indices de $1, ..., k$ tels que T_i ne soit pas une feuille*

Démonstration. Les ensembles décrits sont bien des séparateurs minimaux : notons $S_j = \bigcup_{i \neq j} V(T_i)$ pour un tel j. $G - S_j$ peut être représenté par l'arbre T où l'on a retiré les sous arbres $T_i, i \neq j$. Mais alors la racine n'a plus qu'un enfant et sa représentation est donc inutile. Donc $G - S_j$ peut être représenté par T_j, il s'agit même de son coarbre. Or T_j a un 0 a sa racine comme ce n'est pas une feuille.

Réciproquement, soit S un séparateur. Soient s, t deux sommets séparés par S. Le plus petit ancêtre commun de s et t dans T est donc un noeud 0. T étant le coarbre de G, connexe, 0 a pour parent un noeud 1. Tout r descendant de ce noeud, n'étant pas dans le sous arbre contenant s et t fournit un chemin de longueur 3 de s à t. En particulier, en notant j l'indice du sous arbre de la racine contenant s et t, T_j n'est pas une feuille et S contient alors $V(T_i)$ pour tout $i \neq j$. Ces ensembles sont bien des séparateurs minimaux. □

Corollaire 2. *Un cographe G est k-connexe si et seulement si pour tout j tel que T_j n'est pas une feuille, $\sum_{i \neq j} |V(T_i)| \geq k$*

On mènera alors une étude similaire aux graphes trivialement parfaits, en se concentrant d'abord sur les cographes à forte connexité pour ensuite généraliser les résultats

3.2.2 Structure des cographes de carte

On a un résultat ULTRA restricif sur les G de carte 3-connexe. Peut être qu'on peut le généraliser en parlant de sous arbres d'un arbre maximal ? ?

Lemme 7. *Soit G un cographe 3-connexe. G est de carte si et seulement si il s'agit de l'un des graphes suivants, $p, q, r, s \geq 1, n \geq 0$, et où les valeurs minimales des indices dépendent du cas, de manière ce que G soit 3-connexe :*
- $K(2, 2, K_p \sqcup K_q, K_n)$
- $K(K_p \sqcup K_q, K_r \sqcup K_s, K_n)$
- $K(K_p \sqcup K_q, K_n)$ *avec* $n \geq 3$
- K_n, $n \geq 1$

Démonstration. On distingue selon le nombre de fils de la racine étiquettés 0 □

Annexe

Pour tout les trucs à moitiés vrais et à moitié utiles

Définition (Arrête sans trou). *On dit qu'une arrête xy d'un graphe G 3-connexe est sans trou si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes pour un certain $S \subsetneq \{x, y\}$:*
- *Pour toute clique max K de $G[N(x) \cap N(y)]$, si $G - (K \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, $G - (K \cup S)$ l'est aussi.*
- *Pour toute paire de cliques indépendantes maximales K^1, K^2 de $G[N(x) \cap N(y)]$, si $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$ l'est aussi, où Δ est la différence symétrique sur les sommets de K^1 et K^2*

La définition est motivée par... le dessin qui n'est pas là

On considèrera par la suite que tout les graphes G sont de carte, 3-connexe, et admettent une carte complète

Lemme 8. *Soit $xy \in E$. Si xy est sans trou, alors dans toute carte complète de G, l'arrête xy est représentée par une adjacence connexe entre les deux régions, soit un chemin, soit un point*

Démonstration. On se donne une carte complète de G vérifiant ces conditions. Supposons par l'absurde que x et y ne se rencontrent pas en un ensemble connexe On raisonne selon la nature de $x \cap y$

Supposons cet ensemble discret, donc fini car compact. Notons alors ses points $u_1, ..., u_k$, $k \geq 2$ dans l'ordre cyclique selon la frontière de x. On construit alors H un témoin compact quadrangulé de G à partir de cette carte, contenant les points $u_1, ..., u_k$ dont le voisinage correspond aux régions les contenant dans cette carte.
Si $k \geq 4$, alors en retirant les cliques max suivantes : K^1 est l'ensemble des régions hors x, y contenant u_1, K^2 celles contenant u_k. Notons alors que ce témoin contient un cycle, x, u_1, y, u_k, dont les sommets de V à l'intérieur de ce dernier ne peuvent accéder à l'extérieur qu'en utilisant les points u_1 et u_k. De même les sommets de K^1 intérieurs à ce cycle ne peuvent se trouver dans K^2, car alors on aurait une arrête d'un sommet à l'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 à u_k, ou à tous les sommets de K^2, qui sont tous à l'extérieur de ce cycle. En retirant $K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\}$, on sépare alors l'intérieur du cycle x, u_2, y, u_3 du reste du graphe. Cela n'est plus le cas si on ne retire que x ou y, ainsi xy est à trou.
S
Si cet ensemble n'est pas discret, son nombre de composantes connexes étant fini par compacité, il est alors union disjointe de chemins et de points.
Sinon : cet ensemble ne peut contenir 2 chemins disjoints par 3-connexité : en effet dans ce cas $G - \{x, y\}$ n'est pas connexe. Donc il contient un chemin et un point n'appartenant pas à ce dernier. On choisit alors un point u_1 dans l'intérieur du chemin (pas à une de ses éxtrémités) et on note u_2 un point de $x \cap y$ n'appartenant pas au chemin. On construit un témoin H de la même manière que précédemment.
L'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 contient un sommet de V pour les mêmes raisons qu'auparavant, sauf qu'ici u_1 étant dans l'intérieur du chemin ne peut être adjacent à ce sommet. Notons K la clique formée des sommets extérieurs à ce cycle, excepté x et y, contenant le point u_2. $G - K$ est connexe, pour les mêmes raisons que pour le cas précédent, tandis que $G - (K \cup \{x, y\})$ ne l'est pas □

Lemme 9. *Pour tout $v \in V$, il existe u un voisin de v tel que uv soit sans trou*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. La preuve du lemme **??** permet d'affirmer qu'il existe des régions u adjacentes à v telles que $u \cap v$ ne soit pas discret. On suppose alors par l'absurde que toutes ces régions sont telles que $u \cap v$ ne soit pas connexe. Mais alors, $u \cup v$ sépare $\mathbb{S}^2$ en au moins 2 composantes connexes, et la carte étant complète les deux sont totalement recouvertes par des régions. Ainsi, v a des voisins tels que leur intersection n'est pas discrète dans les deux composantes connexes ainsi délimitées. On considère alors un voisin dans l'une de ces composantes que l'on note C et on réitère le processus, en choisissant à chaque fois une composante incluse dans C. On obtient ainsi une infinité de régions distinctes ce qui est absurde car le graphe est fini.

Ainsi il existe u voisin de v tel que $u \cap v$ soit un chemin. On montre alors qu'il existe un tel u tel que uv soit sans trou. Bon globalement faut distinguer selon si la frontière est recouverte ou pas □

Proposition 9. *Soit G admettant une carte complète et $xy \in E$. On suppose que xy est représentée dans une certaine carte complète de G par une adjacence en un seul point u. Si dans cette même carte, la clique formée des régions contenant u (hors x et y) est supportée par d'autres points que u, alors G/xy admet une carte complète*

Démonstration. On se donne un témoin compact quadrangulé issu de la carte complète de l'énoncé, H. On suppose également sans perte de généralité que le plongement de H dans le plan donné est un plongement droit. On construit un nouveau témoin compact quandrangulé H' comme suit : on note K la clique formée des régions contenant u, hors x, y. On retire toute les arrête entre K et u. u devient alors de degré 2, ayant pour seuls voisins x et y. On place alors un sommet u' arbitrairement proche de u, que l'on relie à x et y par des segments. Ensuite, par des arguments géométriques, tout sommet de K peut être relié par un segment soit à u soit à u'. On obtient alors au final un graphe planaire biparti quandrangulé H'. Reste à voir que H' est un témoin compact de G.

Les seuls arrêtes de G impactées par les modifications sont les arrêtes entre sommets de K (celles avec x et y sont préservées comme on relie chaque sommet soit à u soit à u'). Hors par hypothèse, la clique K est portée par d'autres points de la carte distincts de u. Ainsi la suppression de certaines arrêtes de K à u n'a pas d'impact sur les adjacences des sommets de K. H' est bien un témoin de G. Il est compact par sa construction comme H est un témoin compact

Il est alors facile de construire un témoin compact quandrangulé de G/xy comme H' représente une carte où les régions x et y se rencontrent en un chemin □

Reformuler la propriété de sans trou, et reformuler la propriété (typiquement le premier point est pas en équivalence, le deuxième si par contre. Toutefois si le premier point échoue, alors on peut reconstruire la carte pour y enlever les trous). Sans trou est peut être plus intelligent dans le cas spécifique des graphes de carte, si on a une non instance de toute façon on le verra quand ça devient gênant

Proposition 10. *Soit $xy \in E$. xy est une arrête à trou si et seulement si pour tout $S \subsetneq \{x, y\}$*
- *Soit pour K^1, K^2 deux cliques max de $G[N(x) \cap N(y)]$, $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, où Δ est la différence symétrique sur les sommets des deux cliques, et $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$ l'est*

Démonstration. Si xy vérifie ces conditions, alors xy est une arrête à trou : il existe au plus 2 cliques K^1, K^2 voisines de x et y telles que $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ ne soit pas connexe, tandis que pour $S \subsetneq \{x, y\}$, $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$ le soit.

Si xy est une arrête à trou : on se donne K^1, K^2 les cliques voisines de x et y données par la définition. Si l'on peut prendre K^2 vide :
On notera alors le K^1 correspondant comme K. On se donne alors une clique max de $G[N(x) \cap N(y)]$ contenant K, que l'on note K'. Notons $C_1, ..., C_k$ les composantes connexe de $G - K - \{x, y\}$, $k \geq 2$. Si pour tout choix de K', la propriété n'est pas vérifiée : alors pour tout K', □

Lemme 10. *Soit G un graphe de carte 3-connexe. Il existe un surgraphe de G à un sommet de plus admettant une carte complète.*

Démonstration. On se donne un témoin H de G et on note U l'ensemble des sommets autres que V de H. On peut supposer que H est construit de telle sorte à ce que $d(u) \geq 2$ pour $u \in U$. Soit $u \in U$, $x, y \in V$ parmi ses voisins. Si x et y sont adjacents à la même face de H, alors on ajoute une arrête entre x et y à l'intérieur de cette face, que l'on subdivise ensuite à l'aide d'un sommet afin de garder le graphe biparti. On répète alors ce processus jusqu'à ce que tout les sommets adjancents dans G soient reliés par deux chemins de longueur 2.

Le nouveau graphe H' est planaire biparti et 2-connexe : si l'on retire un sommet de V le graphe reste clairement connexe comme G est 3-connexe. Si l'on retire un sommet de U' (l'ensemble U avec les nouveaux sommets ajoutés), H reste aussi connexe : si le sommet retiré est parmi ceux de $U' \backslash U$, la construction de U' donne que le graphe reste connexe. Sinon, on se donne $v_1, ..., v_k$ les voisins de u le sommet retiré, tels que v_i et v_{i+1} soient adjacents à la même face. On a alors qu'après le retrait de u, par construction encore de U', les v_i sont tous accessibles entre eux. On peut alors voir que cela implique que le graphe reste connexe et est un témoin de G

On construit alors un surgraphe de H' que l'on va plonger dans le plan. On construit le surgraphe H'' en itérant sur tout sommet $v \in V$, et en ajoutant une arrête entre chaque paire u_1, u_2 voisine de v adjacente à une même face, arrête prenant la forme d'un chemin dans cette face. Si v est un sommet extérieur dans H', et que l'on considère 2 de ses voisins dans H' eux aussi extérieurs, alors on choisira le chemin de telle sorte à ce que v devienne intérieur dans H''. Ainsi tout les élements de U' deviennent de degré au moins

3. G étant 3-connexe, on peut alors voir que H'' le devient également (on ne peut plus isoler de sommet de U'). H'' est également planaire et par construction, tout les sommets $v \in V$ sont intérieurs.

(merde faut montrer que les adjacences restent cohérentes aussi). On construit à présent la carte : pour $v \in V$, la région associée à v est l'adhérence de la face dans laquelle se trouve le point v dans $H'' - v$. Cette face est bien homéomorphe à un disque, comme $H'' - v$ est 2-connexe et qu'alors cette dernière est bordée par un cycle (voir ...), le théorème de Jordan-Schönflies nous donne ce que l'on veut. Cet ensemble de région correspond alors à l'intérieur du cycle de H'' séparant la face non bornée des autres (comme H'' est 2-connexe). Ainsi, pour les mêmes raisons, la face non bornée, vue dans $\mathbb{S}^2$, est homéomorphe à un disque. On ajoute alors un sommet à G correspondant à cette face et à ses adjacences dans cette carte. La carte est bien complète par construction

□

3.1 Permutations de cycle et arrêtes contractibles

Une inversion totale sur n élements est la permutation suivante $i \in [\![1, n]\!] \longmapsto n - i + 1$, les permutations cycliques sont les puissances du cycle $i \in [\![1, n]\!] \longmapsto (i + 1 \mod n) + 1$. Notons que ces permutations engendrent exactement les automorphismes du graphe C_n.
On appelera $\mathrm{Iso}(C_n)$ l'ensemble des permutations sur n élements quotientées par les automorphismes de C_n, décrit plus tôt. On obtient alors un ensemble intéressant pour l'étude des cycles : on peut l'identifier au quotient de l'ensemble des graphes sur les sommets $1, ..., n$ isomorphes à C_n par la relation d'équivalence de différer d'un automorphisme.

Définition (Permutations de cycle)**.** *Soit $n \geq 4$, et C'_n un surgraphe à n sommets de C_n, dont le cycle canonique sera numéroté $1, 2, ..., n$. On dira qu'une permutation σ préserve les cycles si $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ est également un cycle de C'_n. Une permutation de cycle est alors $[\sigma] \in \mathrm{Iso}(C_n)$ telle que σ préserve les cycles.*

La définition est bien cohérente car si σ et σ' sont équivalents, ils diffèrent d'un produit d'une inversion totale et d'une permutation cyclique. Le cycle $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ est préservé par inversion totale et permutation cyclique donc $\sigma'(1), ..., \sigma'(n)$ est également un cycle.

Définition (Echange)**.** *Un échange de i est une permutation de cycle $[\sigma]$ telle que, en notant E l'ensemble des arrêtes de C_n, on ait $\sigma(i)\sigma(i+1) \notin E$ ou $\sigma(i-1)\sigma(i) \notin E$. Si le nombre d'échanges de i est non nul, on le dira échangeable*

La définition est là encore indépendante du choix du représentant de $[\sigma]$: si σ' est équivalent à σ, ils diffèrent par un automorphisme de C_n. Donc si $\sigma(i)\sigma(i+1) \notin E$, $\sigma'(i)\sigma'(i+1)$ également

Ce que l'on remarque en faisant les dessins : on se donne $v \in V$ dans un graphe de carte et on fixe un ordre cyclique de $N(v)$ donné par le corollaire 1. On étudie ses permutations de cycle. On remarque que les sommets u non échangeables font de bons candidats pour que uv soit contractible (à vraiment peu de choses près)

Références

[1] Patrizio Angelini, Michael A. Bekos, Giordano Da Lozzo, Martin Gronemann, Fabrizio Montecchiani, and Alessandra Tappini. Recognizing Map Graphs of Bounded Treewidth. In *18th Scandinavian Symposium and Workshops on Algorithm Theory (SWAT 2022)*, volume 227, pages 8 :1–8 :18, 2022.

[2] Christos H. Papadimitriou Zhi-Zong Chen, Michelangelo Grigni. Map Graphs. *Journal of the ACM*, 49(2), 2002.