Stage Map Graphs

José Lorgeré

21 juillet 2025

Introduction

1 Trucs généraux

1.1 Résultats et définitions préliminaires

Définition (Carte)**.** *Une carte est une fonction $f : V \to \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ telle que pour tout $v \in V$, $f(v)$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^2$ et telle que pour $v \neq u$, $f(u)$ et $f(v)$ sont d'intérieur disjoints. Si f forme un recouvrement de $\mathbb{S}^2$, on la dira sans trou, ou complète. On appelera les $f(v)$ régions*

Définition (Graphe de carte [2])**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte s'il existe une carte f sur V telle que $xy \in E$ si et seulement si $f(x) \cap f(y) \neq \varnothing$*

Théorème 1 (Caractérisation des graphes de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte si et seulement si il existe H un graphe biparti planaire, de bipartition V, U, tel que $H^2[V] = G$. Un tel graphe H est appelé graphe témoin de G*

Proposition 1. *Si G est un graphe de carte, et $H = G[A]$ où $A \subset V$, alors H est un graphe de carte*

Démonstration. On reprend la carte de G où l'on ne garde que les régions identifées aux sommets présents dans A □

Définition (Join)**.** *Le join de 2 graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommet $V'' = V \sqcup V'$ et pour arrêtes*

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x \in V'\}$$

On notera pour tout $n \geq 1$ $K(n, G)$ le join d'un indépendant à n sommets avec le graphe G. Plus généralement, le join des graphes G et G' sera noté $K(G, G')$. Cette opération étant associative, on se permettra d'écrire $K(G, H, L)$ pour désigner le join successif de G à H puis à L

Définition (Cliques indépendantes)**.** *Pour tout $k \geq 1$, $n_1, ..., n_k \geq 1$, on dénotera par $I_{n_1,...,n_k}$ le graphe complémentaire de $K_{n_1,...,n_k}$. Ainsi I_n est l'indépendant à n sommets pour n un entier, et $I_{n_1,...,n_k}$ pour $k \geq 2$ est composé de k composantes connexes, qui sont toutes des cliques de tailles $n_1, ..., n_k$*

Définition (Union disjointe)**.** *L'union disjointe de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommets $V \cup V'$ et pour arrêtes $E \cup E'$. On notera cette dernière $I(G, G')$. Cette opération étant également associative, on se permettre de reprendre la convention du join.*
On notera pour tout $n \geq 1$, $I(n, G)$ l'union disjointe d'une clique à n sommets et du graphe G.

1.2 Premières obstructions à l'existence de cartes

Lemme 1. *Un graphe G a pour mineur $K_{3,3}$ si et seulement si il existe 6 sommets, $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ et des chemins $P_{i,j}$ de s_i à t_j pour tout i, j tels que*

- *Pour tout $i \neq i', j \neq j'$, $P_{i',j'}$ et $P_{i,j}$ ne se rencontrent pas*
- *Pour tout i, s_i et t_i ne sont sommet intermédiaire d'aucun des chemins*

— *Si deux de ces chemins se rencontrent, leur intersection est également un chemin*

Démonstration. Supposons que G possède un mineur $K_{3,3}$. Alors il existe des ensembles de sommets connexes, disjoints, $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ tels qu'une fois contractés, le graphe induit par ces ensembles aie pour sous graphe $K_{3,3}$. Soient $s_i \in S_i$ et $t_i \in T_i$ pour $i \in \{1,2,3\}$. Comme on a une arrête de S_i à T_j pour tout i, j, il existe des sommets $s'_i \in S_i$ et $t'_j \in T_j$ tels que $s'_i t'_j \in E$. En se donnant un chemin de s_i à s'_i puis de t'_j à t_j, on construit alors des chemins $P_{i,j}$ comme décrits dans l'énoncé. Si $i \neq i'$, $j \neq j'$, les chemins $P_{i,j}$ et $P_{i',j'}$ sont à valeurs dans des ensembles disjoints et ne se rencontrent donc pas. La deuxième condition est vérifiée pour les mêmes raisons. Pour la troisième, si un chemin de s_i à t_j rencontre un chemin de s_i à $t_{j'}$ en un sommet intermédiaire, cette intersection se fait nécessairement dans S_i. On modifie alors le chemin $P_{i,j'}$ de sorte à ce qu'il coincide avec $P_{i,j}$ jusqu'à sa dernière intersection avec ce dernier dans S_i. On raisonne de manière similaire pour $P_{i,j}$ et $P_{i',j}$

Supposons à présent qu'il existe de tels s_i et t_i et de tels chemins $P_{i,j}$. On se restreint au sous graphe constitué des chemins $P_{i,j}$. Soient $i, j \in \{1,2,3\}$. Supposons que $P_{i,j}$, hors extérmités, ne soit pas disjoint de tout les autres chemins. On note $P_{i,j} = \{s_i = v_1, v_2, ..., v_l = t_j\}$ dans l'ordre de parcours, et on se donne

$$p = \min\{k \in [\![1,l]\!] \mid \exists i' \neq i, v_k \in P_{i',j}\}$$
$$q = \max\{k \in [\![1,l]\!] \mid \exists j' \neq j, v_k \in P_{i,j'}\}$$

L'hypothèse faite sur les chemins permet d'affirmer que les deux ensembles décrits sont les seules intersections possibles de $P_{i,j}$ avec d'autres chemins.
Montrons que $p > q$: on se donne les i' et j' correspondants. Comme l'intersection de deux chemins reste un chemin, et que $P_{i,j'}$ contient à la fois s_i et v_q, les sommets $v_1, ..., v_q$ font tous partie de $P_{i,j'}$. De même, $v_p, ..., v_l$ font partie de $P_{i',j}$. Supposons maintenant par l'absurde que $p \leq q$. On déduit des remarques précédentes que les sommets $v_p, ..., v_q$ font partie de $P_{i,j'}$ et $P_{i',j}$, hors ces chemins ne s'interesctent pas par hypothèse, absurde.
On contracte alors tout les sommets de v_1 à v_p et ceux de v_q à v_l comme il existe un chemin les reliant tous. Puisque $p > q$ et que les sommets de départs et d'arrivée ne sont pas présents sur les chemins hors extrémités, on conserve bien des chemins de s_i à $t_{j'}$ et de $s_{i'}$ à t_j. Après cette opération, le nouveau chemin $P_{i,j}$ est disjoint de tout les autres. On répète alors cette opération pour tout i, j.
Une fois cela fait, on obtient des chemins tous disjoints de tout s_i à tout t_j, ne reste plus qu'à contracter ces chemins afin d'obtenir un $K_{3,3}$. □

Proposition 2. *Soit G un graphe à 3 sommets. $K(3,G)$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K(3,G)$ est un graphe de carte. On se donne alors H vérifiant toutes les propriétés du théorème 1. On note pour tout v_i, sommet indépendant de $K(3,G)$, N_i son voisinage dans H incluant v_i. Notons que pour $i \neq j$, N_i et N_j sont disjoints comme v_i et v_j sont indépendants. Comme les chemins de v_i aux sommets de G n'empruntent que des sommets de N_i, mis à part le sommet de G, les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées. H a donc pour mineur $K_{3,3}$, absurde par planarité. $K(3,G)$ n'est donc pas un graphe de carte. □

Notons toutefois que $K(2,G)$ lui est un graphe de carte, et que le join de 2 graphes à 3 sommets tous deux non indépendants est de carte également. Cela pourrait laisser à penser que, comme pour les graphes planaires, les graphes $K(3,G)$ seraient des contre exemples "fondamentaux". Ce n'est en fait pas le cas, la proposition suivante montrant qu'un graphe n'a pas besoin d'avoir 3 indépendants pour ne pas être de carte

Proposition 3. *$K_{2,2,2,2}$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. On numérote les sommets de 1 à 8, tels que $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_7, v_8\}$ soient les indépendants. On suppose par l'absurde que $K_{2,2,2,2}$ est un graphe de carte, on s'en donne donc un témoin H. On le suppose même minimal pour la relation de sous graphe.
Notons d'abord que les voisinages de v_1 et v_2 dans H sont disjoints, ces deux sommets étant indépendants. Cela vaut aussi pour toutes les autres paires indépendantes. Ainsi, pour tout $u \in N(v_i)$, u

n'est voisin que d'au plus un élement de chaque paire. Ainsi les sommets de U sont de degré au plus 4. On construit à présent un mineur $K_{3,3}$ de H

Notons que comme $K_{2,2,2,2}$ n'est pas planaire, au moins un sommet de H dans U est de degré au moins 4. Les remarques précedentes font que ce sommet est de degré exactement 4. Notons le u, et supposons quitte à renommer que ses voisins sont v_1, v_3, v_5, v_7. Soit $i \in \{4, 6, 8\}$. Notons p, q, r les voisins de v_2 donnant un chemin de longueur 2 respectivement à v_3, v_5, v_7. Depuis v_i on construit un chemin vers v_{i-1} en exploitant un sommet $v_j \in V$ intermédiaire tel que $j \notin \{1, 2, 3, 5, 7, i\}$. Les autres chemins depuis v_i sont ceux de longueurs 2 donnés par le fait que H soit un témoin de $K_{2,2,2,2}$. On note alors q', p', r' les voisins de v_i participant à chacun de ces 3 chemins ordonnés de même manière que p, q, r. On notera s' le sommet de U venant après v_j dans le chemin de v_i à v_{i-1}
Une disjonction de cas basée sur les remarques faites sur le degré des sommets et la minimalité de H montre que l'on peut choisir i et j tels que les chemins de v_i et v_2 à v_3, v_5, v_7 se rencontrent selon les hypothèse du lemme 1. (à foutre en annexe)

On considère les sommets $v_1, v_2, v_i, v_3, v_5, v_7$ et les chemins donnés précedemment (le chemin depuis v_1 aux autres est de longueur 2 et utilise u). u étant de degré 4 donc maximal, et par ce qui précède, ces sommets vérifient les hypothèses du lemme 1. Donc H n'est pas planaire. Absurde $\square$

Notons que $K_{2,2,2}$ est toutefois un graphe de carte. Ces deux propositions donnent alors des conditions nécessaires au fait de posséder une carte : en effet les graphes de carte étant stables par sous graphe induit, ces derniers ne peuvent alors posséder ni $K(3, G)$ ni $K_{2,2,2,2}$ parmi ces derniers. Ces conditions ne sont pas suffisantes : une subdivision de $K_{3,3}$ quelconque n'est pas un graphe de carte par des arguments similaires à la proposition 2

1.3 Cartes et connexités

(mettre ici que les cartes complètes sont biconnexes)

Proposition 4. *Un graphe G est de carte si et seulement si toutes ses composantes 2-connexes le sont*

On peut par exemple en déduire qu'un block graph, c'est à dire un graphe dont les composantes 2-connexes sont des cliques, est alors toujours un graphe de carte, et admet une carte complète si et seulement si ce dernier est 2-connexe.
On pourrait alors se demander, à la lumière des exemples de $K(3, G)$ et $K_{2,2,2,2}$ si un graphe n'étant pas 3-connexe peut ne pas être de carte. Le graphe donné par un $K_{3,3}$ auquel on ajoute un sommet de degré 2 n'est pas 3-connexe et n'est pas de carte.

La 3-connexité jouant un rôle important dans la suite, on se propose de voir comment on peut se ramener à l'étude des graphes 3-connexes à partir d'un graphe 2-connexe [1].
Si $\{x, y\} \subset V$ est un séparateur d'un graphe G 2-connexe, on note $C_1, ..., C_k$ les composantes connexes de $G - \{x, y\}$. Pour tout i, on note G_i le graphe induit par $C_i \cup \{x, y\}$ auquel on a rajouté l'arrête xy. G_i est 2-connexe. Si G_i n'est pas 3-connexe, il existe alors séparateur de taille 2 et on peut ainsi recommencer ce processus. En répétant ce processus, on finit par obtenir de obtenus au final ainsi que des 2-séparateurs permettant de les obtenir sera appelée une décomposition 3-connexe de G. Les graphes 3-connexes obtenus seront appelés des composantes 3-connexes de G associés à cette décomposition.

Proposition 5. *Soit G un graphe de carte 2-connexe. Pour toute décomposition 3-connexe de G, ses composantes sont des graphes de carte*

Démonstration. On montre uniquement que, étant donné un séparateur $\{x, y\}$ de G, tout les G_i associés sont des graphes de carte. Si xy est une arrête de G, alors chaque G_i est un sous graphe induit de G et on a ce qu'on veut. Sinon, on construit une carte à G_i à partir de celle de G : comme $\{x, y\}$ est un séparateur, il existe au moins une autre composante connexe de $G - \{x, y\}$, que l'on note C_j, $j \neq i$. x et y étant reliés à C_j, il existe un chemin de x à y dans C_j. On se donne un témoin H associé à G. L'existence de ce chemin dans G donne un chemin dans H de x à y, jamais voisin d'un sommet de C_i sauf en x et y. En considérant le sous graphe de H obtenu en ne considérant que le voisinage de C_i et le chemin de x à y évoqué, on peut en contractant des arrêtes du chemin obtenir un témoin de G_i $\square$

2 Propriétés des cartes complètes 3-connexes

Dans la suite, le terme chemin pourra désigner soit un chemin dans un graphe, soit un chemin au sens topologique, c'est à dire l'image d'une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2$. On dira qu'un chemin (topologique) est un lacet si $\gamma(0) = \gamma(1)$. Un chemin sera dit simple s'il est injectif. Un lacet sera dit simple si la seule valeur atteinte plus d'une fois est $\gamma(0)$. On confondra souvent un chemin et son image.

Les graphes des graphes 3-connexes admettant des cartes complètes est motivée par la proposition suivante, qui permet de considérer que tout graphe de carte 3-connexe est "presque" un graphe admettant une carte complète.

Proposition 6. *Soit G un graphe de carte 3-connexe. Il existe un graphe G' sur les sommets $V \sqcup \{\infty\}$ (où ∞ est un sommet non présent dans V) admettant une carte complète, et tel que $G'[V] = G$*

Démonstration. On se donne un témoin H de G et on note U l'ensemble des sommets autres que V de H. On peut supposer que H est construit de telle sorte à ce que $d(u) \geq 2$ pour $u \in U$. Soit $u \in U$, $x, y \in V$ parmi ses voisins. Si x et y sont adjacents à la même face de H, alors on ajoute une arrête entre x et y à l'intérieur de cette face, que l'on subdivise ensuite à l'aide d'un sommet afin de garder le graphe biparti. On répète alors ce processus jusqu'à ce que tout les sommets adjancents dans G soient reliés par deux chemins de longueur 2.

Le nouveau graphe H' est planaire biparti et 2-connexe : si l'on retire un sommet de V le graphe reste clairement connexe comme G est 3-connexe. Si l'on retire un sommet de U' (l'ensemble U avec les nouveaux sommets ajoutés), H reste aussi connexe : si le sommet retiré est parmi ceux de $U' \backslash U$, la construction de U' donne que le graphe reste connexe. Sinon, on se donne $v_1, ..., v_k$ les voisins de u le sommet retiré, tels que v_i et v_{i+1} soient adjacents à la même face. On a alors qu'après le retrait de u, par construction encore de U', les v_i sont tous accessibles entre eux. On peut alors voir que cela implique que le graphe reste connexe et est un témoin de G

On construit alors un surgraphe de H' que l'on va plonger dans le plan. On construit le surgraphe H'' en itérant sur tout sommet $v \in V$, et en ajoutant une arrête entre chaque paire u_1, u_2 voisine de v adjacente à une même face, arrête prenant la forme d'un chemin dans cette face. Si v est un sommet extérieur dans H', et que l'on considère 2 de ses voisins dans H' eux aussi extérieurs, alors on choisira le chemin de telle sorte à ce que v devienne intérieur dans H''. Ainsi tout les élements de U' deviennent de degré au moins 3. G étant 3-connexe, on peut alors voir que H'' le devient également (on ne peut plus isoler de sommet de U'). H'' est également planaire et par construction, tout les sommets $v \in V$ sont intérieurs.

On construit à présent la carte : pour $v \in V$, la région associée à v est l'adhérence de la face dans laquelle se trouve le point v dans $H'' - v$. Cette face est bien homéomorphe à un disque, comme $H'' - v$ est 2-connexe et qu'alors cette dernière est bordée par un cycle. Cet ensemble de région correspond alors à l'intérieur du cycle de H'' séparant la face non bornée des autres (comme H'' est 2-connexe). Ainsi, pour les mêmes raisons, la face non bornée, vue dans $\mathbb{S}^2$, est homéomorphe à un disque. Notons S l'ensemble des sommets de V adjacents à cette dernière dans H''. On prends alors $G' = (V \cup \{\infty\}, E \cup \{s\infty \mid s \in S\})$, et on associe à ∞ la face non bornée de H''. La carte est bien complète par construction. Cette dernière, restreinte à V, donne bien une carte de G : en effet les frontières de la région associée au sommet v est le cycle formé des voisins de v dans H''. Si $uv \in E$, u et v partagent un voisin dans H'' et donc les régions se rencontrent. Si les régions se rencontrent, H'' étant planaire, les cycles ne peuvent se rencontrer que s'ils partagent des sommets, donc $uv \in E$.

$\square$

Une propriété sympathique des graphes à carte complète 3-connexe est que les voisins de chaque sommet v peuvent être organisés afin de former un cycle, et on a même plus précis si on regarde les cartes.

Définition (Adjacence réelle)**.** *Pour $H = (V \cup U, E')$ un témoin de G, on définit l'adjacence réelle, $RA(x)$ d'un sommet $x \in V \cup U$ comme suit :*
- *Si $x \in V$, $RA(x) = \{x\}$*
- *Si $x \in U$, $RA(x) = N(x)$*

On peut alors définir l'adjacence réelle $RA(S)$ d'un sous ensemble $S \subset V \cup U$ en faisant l'union sommet par sommet.

Proposition 7 (Cycle séparant)**.** *Soit G 3-connexe admettant une carte complète. Soit $v \in V$. Il existe un témoin H de G et un cycle C tel que*
- *$RA(C) = N[v]$ (on considère ici les voisins dans G)*
- *L'intérieur de C ne contient que v et les seules arrêtes dans cet intérieur sont celles entre v et les élements de $C \cap U$*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. On ne s'intéressera ici qu'à la construction du témoin impliquant le voisinage de v, le reste du témoin pouvant être construit comme souhaité à partir de la carte complète grâce au théorème **??**.

La région v étant homéomorphe à un disque, on se donne $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ un lacet simple paramétrant sa frontière. Quitte à reparamétrer, on admettra que l'on peut choisir $\gamma(0)$ tel qu'il soit point de rencontre d'au plus 2 régions (et donc d'exactement 2 comme la carte est complète), le graphe étant fini. Les mêmes arguments de finitude et le fait que la carte soit complète permettent d'affirmer qu'il existe $v_1 \in V$ tel que l'ensemble $I_1 = \{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset v_1\}$ soit un intervalle non ponctuel. On note alors $t_1 = \sup(I_1) > 0$. On a que $t_1 < 1$: en effet si $t_1 = 1$, alors γ est un lacet inclus dans u_1, et l'on admettra que ce lacet n'est pas homotope à un point, ce qui est absurde comme u_1 est homéomorphe à un disque. En utilisant le même argument que celui donnant l'existence de v_1, et comme t_1 est maximal, on trouve un $v_2 \in V$ distinct de v_1 tel que l'ensemble suivant $I_2 = \{t \in [t_1, 1] \mid \gamma([t_1, t]) \subset v_2\}$ soit un intervalle non ponctuel et on continue ce processus jusqu'à atteindre 1. A noter que la dernière région considérée se trouve être v_1, comme $\gamma(0)$ n'est pas un point de rencontre de 3 régions pour aller du dernier point, $\gamma(t_k)$, à 1, il faut longer v_1 selon un chemin. On notera alors $v_1, ..., v_k$ les régions obtenues par ce processus, où v_k est l'avant dernière région considérée.

Supposons que $v_i = v_j$ où $j > i$. Par construction, on a donc $j > i + 1$. Donc la région v_i rencontre v en au moins deux chemins. On a alors que $G - \{v, v_i\}$ n'est pas connexe, v_{i+1} et v_{j+1} sont séparés, absurde par 3-connexité. Donc les v_i sont tous distincts. On construit à présent le témoin.
On place chaque sommet de V à l'intérieur de la région lui correspondant. On ajoute les points $\gamma(t_i)$ au graphe, en les placant à leurs positions, et l'on relie v à tout ces points par des chemins dans sa région. On relie également toutes les régions contenant un point $\gamma(t_i)$ à ce dernier par des chemins.
On a ainsi obtenu un cycle vérifiant par construction la seconde propriété de l'énoncé. Pour la première, pour un sens, il suffit de voir que tout les sommets adjacents à des $\gamma(t_i)$ dans ce graphe sont des régions rencontrant v, donc des voisins. Réciproquement, un voisin de v est soit un v_i, soit rencontre ponctuellement v en un des $\gamma(t_i)$: si un voisin de v rencontre sa frontière en un point entre deux $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$, v_i n'est pas homéomorphe à un disque. On a bien la première propriété □

Corollaire 1 (Ordre cyclique)**.** *Soit G 3-connexe admettant une carte complète et $v \in V$. Il existe un ordre total $v_1, ..., v_k$ sur les voisins de v induisant un cycle*

Démonstration. On se donne un témoin H vérifiant les propriétés de la proprosition 7. Soit $s_1, ..., s_{2l}$ le cycle dans H donné par cette proposition. On suppose sans perte de généralité que $s_1 \in V$. Pour tout i, on pose $E_i = \{s_i\}$ si i est impair, si i est pair, E_i correspond à l'ensemble des voisins de s_i hors cycle, v exclu. On ordonne alors $N(v)$ comme suit : on ordonne chaque E_i selon un ordre arbitraire. Puis on ordonne ces ordres arbitraires de sorte à ce que tout les élements de E_i soient plus petits que ceux de E_{i+1}. Si un élement apparaît dans plusieurs E_i, on le placera avec le E_i de plus petit indice auquel il appartient. Cet ordre est bien total sur $N(v)$ comme $RA(\{s_1, ..., s_{2l}\}) = N[v]$. De plus ce dernier donne bien lieu à un cycle : en effet tout les sommets de E_i sont adjacents aux sommets de E_{i+1} (les indices étant pris modulo $2l$), et les E_i pour i pair sont des cliques. □

3 Algorithmes

On discutera ici d'abord du problème de reconnaissance des graphes de carte, restreint à des sous classes particulières, puis l'on s'intéressera

3.1 Cas des graphes trivialement parfaits

Un graphe G sera dit trivialement parfait s'il ne contient pas les graphes P_4 et C_4 en sous graphe induit. Il est équivalent de les définir comme des graphes d'intervalles particuliers. Un graphe trivialement parfait est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles "emboîtés" : si I et J sont deux intervalles représentant des sommets de G, si $I \cap J \neq \varnothing$, alors $I \subset J$ ou inversement.
Cette définition par les intervalles permet de voir facilement que l'unique séparateur minimal d'un graphe trivialement parfait G est composé de l'ensemble des sommets universels de G (un sommet universel étant un sommet adjacent à tout les sommets du graphe). Ainsi G est 3-connexe si et seulement si il possède au moins 3 sommets universels.

3.1.1 Cas 3-connexe

On se fixe pour la suite un graphe G trivialement parfait 3-connexe

Lemme 2. *Si G a 3 sommets indépendants, il n'est pas de carte*

Démonstration. Un tel graphe contient $K(3, K_3)$ parmi ses sous graphes induits, par les remarques précédentes □

Supposons que G ne soit pas une clique. On peut déduire de ce lemme que le séparateur minimal de G le sépare en 2 composantes connexes. Notons que ce séparateur est une clique de taille au moins 3. Notons C_1 et C_2 les 2 composantes connexes séparées par ce séparateur. Le lemme 2 permet également de déduire que C_1 et C_2 sont des cliques : en effet si C_1 n'est pas une clique, il contient 2 sommets indépendants. On a donc un indépendant de taille 3 constitué de ces 2 sommets et d'un sommet de C_2. On en déduit le lemme suivant :

Lemme 3. *G est de carte si et seulement c'est une clique ou un $K(K_n, I_{p,q})$ avec $n \geq 3$. De plus, la carte donnée est complète*

Démonstration. Le sens direct a déjà été traité précedemment.
Pour le sens réciproque, toute clique admettant une carte complète, on se concentre sur le second cas. On construit alors une carte complète pour $K(K_n, I_{p,q})$ comme illustré figure ? ? □

3.1.2 Cas général

On s'intéresse à présent au cas où G est 2-connexe, qui conclura l'analyse des graphes trivialement parfaits par la proposition 4 et le fait qu'un graphe à carte complète est nécessairement 2-connexe. Comme précedemment, la 2-connexité de G impose l'existence de 2 sommets universels. S'il y en a 3, la question a déjà été réglée précédemment car G est alors 3-connexe. Notons que le séparateur minimal étant unique et universel, G n'a qu'une seule décomposition 3-connexe. On parlera alors simplement de composantes 3-connexes de G sans préciser de décomposition.

Théorème 2. *Un graphe G trivialement parfait 2-connexe est de carte si et seulement si chacune de ses composantes 3-connexe est de carte. De plus la carte de G construite est complète.*

Démonstration. Si G est de carte, toutes ses composantes 3-connexes sont de carte par la proposition 5 Pour le sens réciproque, le lemme 3, nous donne la forme des composantes 3-connexes de G. Notons $C_1, ..., C_k$ les composantes 3-connexes de G. On construit alors une carte comme suit : on place 2 régions associées aux 2 universels, u et v, de G, que l'on fait se rencontrer en $k+1$ chemins disjoints. Ainsi après retrait de ces 2 régions, la sphère est séparée en k composantes connexes.
Si C_i, $1 \leq i \leq k$, est une clique, on place dans une des k composantes connexes encore libre une clique remplissant entièrement cette composante, portée par un point de rencontre entre u et v. Sinon C_i est de la forme $K(K_n, I_{p,q})$, $n \geq 3$. On représente alors les sommets distincts de u et v formant le K_n par une clique séparant la composante en deux, de telle sorte à ce que chaque partie ait accès à un point portant cette clique. On remplit ensuite chaque partie par une clique portée par un point porteur de la clique K_n. (illustré figure ? ?) □

Notons alors que les graphes trivialement parfaits de carte sont exactement les graphes ne possédant pas $C_4, P_4, K(3, K_3)$ parmi leur sous graphes induits : en effet, un graphe trivialement parfait de carte vérifie cette condition, et réciproquement, un graphe n'ayant pas ces 3 sous graphes induits sera de carte car tout le raisonnement est basé sur le seul lemme 2

(A rediscuter avec la possibilité de juste passer en force par les sous graphes interdits) On en déduit alors un algorithme en temps polynômial décidant si un graphe G trivialement parfait est de carte : on commence par séparer G en ses composantes connexes puis 2-connexes, puis 3-connexes.

Puis, afin de décider si les composantes 3-connexes ont bien la forme souhaitée, on emploie l'algorithme suivant : on liste les cliques max de la composante, si la composante elle même est une clique max, il n'y a alors qu'une seule clique max et ce cas est donc vu dès la première clique listée. On renvoie alors une réponse positive. Si il n'y a que 2 cliques max, chaque sommet étant dans au moins une clique max, ces deux dernières recouvrent la composante 3-connexe. La 3-connexité impose que ces deux dernières se rencontrent en au moins 3 points, le graphe est alors de la forme $K(K_n, I_{p,q})$, les 2 cliques max ayant $n+p$ et $n+q$ sommets chacune, la clique K_n, $n \geq 3$ étant formée des sommets communs aux deux cliques max. On renvoie alors aussi une réponse positive. Si il y a plus de 3 cliques max, on renvoie une réponse négative.

3.2 Cas des cographes

Une classe plus large que celle des graphes trivialement parfaits est celle des cographes : un graphe est un cographe s'il ne possède pas P_4 parmi ses sous graphes induits. Il est équivalent de les définir comme le plus petit ensemble de graphes contenant le sommet, stable par union disjointe et join. Cette dernière caractérisation s'avèrera plus intéressante pour l'étude.
En effet cette dernière donne lieu à une représentation des cographes par des arbres enracinés : il s'agit en fait d'utiliser l'arbre enraciné des opérations, de join (étiquetté par 1) et union disjointe (étiquettée par 0), nécessaires afin d'obtenir le cographe en question, où les feuilles sont donc les sommets du graphe. Deux sommets sont alors adjacents si et seulement si leur plus petit ancêtre commun est un 1. Les opérations de join et union disjointe étant associatives, il est alors possible de compacter le coarbre de telle sorte à ce qu'un noeud 1 ne puisse avoir comme enfant que des noeuds 0 ou des sommets et de même pour 0. La représentation devient alors unique pour un cographe donné, on appelle cet arbre le coarbre associé au cographe. Notons d'abord que les opérations de join et union disjointe étant au moins binaires, tout les noeuds internes ont au moins 2 enfants.

3.2.1 Connexités et coarbres

On discutera ici de comment se manifeste les différentes propriétés de connexité des cographes au niveau de leur coarbre associé. Le lemme suivant caractérise la connexité par la racine de du coarbre

Lemme 4. *Un cographe G est connexe si et seulement si son coarbre T a pour racine un noeud* 1

Dont on peut déduire la proposition suivante

Proposition 8. *Soit G un cographe connexe et T son coarbre. Notons $T_1, ..., T_k$ les sous arbres de T enracinés en les enfants de la racine de T. Les séparateurs minimaux de G sont exactement les $\bigcup_{i \neq j} V(T_i)$ où j parcourt l'ensemble des indices de $1, ..., k$ tels que T_i ne soit pas une feuille*

Démonstration. Les ensembles décrits sont bien des séparateurs : notons $S_j = \bigcup_{i \neq j} V(T_i)$ pour un tel j. $G - S_j$ peut être représenté par l'arbre T où l'on a retiré les sous arbres $T_i, i \neq j$. Mais alors la racine n'a plus qu'un enfant et sa représentation est donc inutile. Donc $G - S_j$ peut être représenté par T_j, il s'agit même de son coarbre. Or T_j a un 0 a sa racine comme ce n'est pas une feuille.

Soit S un séparateur. Soient s, t deux sommets séparés par S. Le plus petit ancêtre commun de s et t dans T est donc un noeud 0. T étant le coarbre de G, connexe, 0 a pour parent un noeud 1. Tout r descendant de ce noeud, n'étant pas dans le sous arbre contenant s et t fournit un chemin de longueur 3 de s à t. En particulier, en notant j l'indice du sous arbre de la racine contenant s et t, T_j n'est pas une feuille et S contient alors $V(T_i)$ pour tout $i \neq j$. Donc $S_j \subset S$. On montre alors que les S_j sont des séparateurs minimaux, et que ce sont les seuls □

Corollaire 2. *Un cographe G est k-connexe si et seulement si pour tout j tel que T_j n'est pas une feuille, $\sum_{i \neq j} |V(T_i)| \geq k$*

On mènera alors une étude similaire aux graphes trivialement parfaits, en se concentrant d'abord sur les cographes à forte connexité pour ensuite généraliser les résultats

3.2.2 Structure des cographes de carte

Lemme 5. *Soit G un cographe 3-connexe. G est de carte si et seulement si son coarbre est de hauteur inférieure à 4 et la racine de ce dernier a au plus 3 fils étiquettés 0. De plus la carte est complète*

Démonstration. Supposons G de carte. Notons T son coarbre. Il n'existe aucun noeud 1 de T ayant plus de 4 fils 0 : en effet chaque fils 0 possède au moins 2 descendants, on pourrait alors construire un sous graphe induit $K_{2,2,2,2}$ ce qui est impossible comme G est de carte.
Puis, supposons que T est de hauteur au moins 5. Il existe donc une branche de T dont les noeuds sont étiquettés, de haut en bas, $1, 0, 1, 0, ...$. Le premier 0 ayant au moins 2 fils, on se donne v un sommet descendant de ce noeud ne descendant pas du noeud 1 situé juste après sur la branche. Le deuxième noeud 0 nous donne deux sommets u, w, indépendants. u et v ont pour plus petit ancêtre commun le premier noeud 0 de la branche, donc sont indépendants, de même pour w et v. On a ainsi un indépendant de taille 3. G étant 3-connexe, le corollaire 2 donne que 1 a au moins 3 sommets descendants dans un sous arbre ne contenant pas u, v, w. Ces descendants ont alors pour plus petit ancêtre commun avec u, v, w la racine 1. On a ainsi un sous graphe induit $K(3, G)$, absurde comme G est de carte.

Supposons à présent que T est de la forme souhaitée. On distingue selon k, le nombre de fils de la racine étiquettés 0. On aura $n \geq 0, p, q, r, s, t, u \geq 1$

- Si $k = 0$, G est une clique
- Si $k = 1$, $G = K(I_{p,q}, K_n)$ où le K_n est dû aux sommets qui sont fils directs de la racine. G est alors trivialement parfait. On peut le représenter par exemple par le théorème 2
- Si $k = 2$: $G = K(I_{p,q}, I_{r,s}, K_n)$, la figure ? ? donne une carte complète de G
- Si $k = 3$: $G = K(I_{p,q}, I_{r,s}, I_{t,u}, K_n)$, la figure ? ? donne une carte complète de G

□

Lemme 6. *Le graphe $K(2, I(1, K_{2,2}))$ n'est pas de carte*

Démonstration. On numérote $v_1, ..., v_6$ les sommets du $K_{2,2,2}$ induit, tels que les indépendants soient $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}$. On notera a le sommet relié à deux sommets indépendants de ce sous graphe, que l'on supposera être v_1, v_2.

On suppose le graphe de carte, on s'en donne alors H un témoin. Comme $v_1v_2 \notin E$, les voisins de a sont tous de degré 2, ou l'un est aussi voisin de v_1 et un autre de v_2.
Les sommets $a, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6$ et les chemins suivant vérifient alors les hypothèses du lemme 1, en reprenant un raisonnement similaire à la proposition 3 : les chemins de v_3, v_4 à v_2, v_5, v_6 sont les arrêtes subdivisées de H traduisant les adjacences dans le graphe original, celui de a à v_2 est donné par l'arrête subdivisée représentant l'arrête av_2, ceux de a à v_5, v_6 exploitent les chemins de a à v_1 puis de v_1 à v_5, v_6.
Absurde, H étant planaire, donc le graphe donné n'est pas de carte $\square$

On s'intéresse à présent plus généralement à la reconnaissance des cographes de carte 2-connexe. Le cas 3-connexe ayant déjà été traité, on se limite aux graphes ayant des séparateurs de taille 2. Notons alors que, par la forme des séparateurs minimaux donnée par la proposition 8, le seul cographe 2-connexe n'ayant pas un unique séparateur minimal de taille 2 est $K_{2,2}$: en effet si on souhaite avoir plus d'un séparateur minimal, la racine du corarbre doit avoir au moins 2 fils 0. Elle doit en avoir en fait exactement 2 sinon le graphe devient 3-connexe. Chaque fils 0 ayant au moins 2 sommets descendants, la racine ne peut avoir d'autres fils. Enfin l'existence de 2 séparateurs minimaux de taille 2 finit d'imposer la structure du coarbre.

Ainsi, dès que le cographe a plus de 5 sommets, il ne possède qu'un seul séparateur de taille 2. Notons que les composantes 3-connexes du cographe G sont alors obtenues en une seule étape de décomposition : en effet le coarbre associé à un des graphes G_i, en reprenant les notations de 1.3, a pour racine 1, et a pour enfants les sommets x, y séparant le graphe. Ses autres enfants sont les fils du noeud 1 dans le coarbre de G représentant la composante C_i, ou un unique sommet si cette composante n'est composée que d'un sommet. Dans le deuxième cas, $G_i = K_3$. Dans le premier, si G_i n'est pas 3-connexe, il doit exister un fils de la racine 0, et les autres sous arbres de la racine ne doivent pas exceder 2 sommets. Impossible, le noeud 1 racine du coarbre de C_i a au moins 2 fils, l'un d'entre eux étant ce noeud 0, les autres venant rejoindre x et y parmi les fils de la racine distincts de ce noeud 0. On dépasse alors nécessairement les 3 sommets. On peut alors parler sans ambiguïté des composantes 3-connexes sans spécifier une décomposition. On déduit de ces remarques le lemme suivant :

Théorème 3. *Soit G un cographe 2-connexe à plus de 5 sommets et $\{x, y\}$ un séparateur minimal de G.*
- *Si $xy \in E$, G est de carte si et seulement si toutes ses composantes 3-connexes le sont*
- *Sinon, G est de carte si et seulement si chaque composante connexe de $G - \{x, y\}$ est de carte et que le coarbre de chacune vérifie que la racine a au plus un fils 0*

Démonstration. Supposons d'abord $xy \in E$. Le sens direct est donné par la proposition 5.
Pour le sens réciproque, les remarques précédentes permettent de dire que les composantes 3-connexes de G sont exactement les G_i donnés par la paire $\{x, y\}$. Notons que comme $xy \in E$, les G_i sont des sous graphes induits de G. On représente les régions x et y comme décrit dans la démonstration du théorème 2. On se fixe à présent un G_i que l'on va représenter à l'intérieur de l'un des trous laissés par les régions x et y
Le lemme 5 donne une carte de G_i ayant la particularité qu'il suffit à une région de contenir au plus 2 point spécifiques u et v pour être adjacente à toutes les régions de la carte. La carte de $G_i - \{x, y\}$ ainsi obtenue conserve cette particularité. On place alors la carte de $G_i - \{x, y\}$ "dans" une des composantes du complémentaire de la région $x \cup y$, de manière à ce que u et v rencontrent à la fois x et y comme illustré figure ? ?.

Supposons maintenant $xy \notin E$. On s'intéresse au sens direct : la stabilité par sous graphe induit donne la première partie de la propriété. Soit C_i une composante connexe de $G - \{x, y\}$. Soit T_i le coarbre de C_i. Le coarbre de G est construit de la manière suivante : la racine a 2 fils, les deux étant des noeuds 0. L'un a pour enfants les sommets x et y. L'autre a pour sous arbres les coarbres des composantes connexes de $G - \{x, y\}$. G étant de carte, la racine de T_i ne peut avoir plus de 3 fils 0, sinon on aurait un sous graphe induit $K_{2,2,2,2}$ en utilisant T_i, x et y. Elle ne peut également avoir 2 fils 0 : en effet le noeud 0 ayant pour sous arbres les composantes de $G - \{x, y\}$ amet un sommet descendant v n'appartenant pas à T_i. On trouve alors un sous graphe induit $K(2, I(1, K_{2,2}))$: le premier 2 est dû à x, y, le 1 à v, et $K_{2,2}$ est construit grâce à T_i. Au total, T_i vérifie bien la condition de l'énoncé.

Pour le sens réciproque, comme les composantes 3-connexes de G sont les G_i et que ces derniers ne peuvent qu'être de la forme K_n ou $K(I_{p,q}, K_n)$ par ce qui précède, la figure ?? donne une carte de G où x et y sont les deux régions indépendantes, représentées à part, et où chaque cas de $G_i - \{x, y\}$ est représenté □

On peut également déduire de ce théorème que les cographes de carte sont exactement ceux ne possédant pas $K(3, G), K_{2,2,2,2}, K(2, I(1, K_{2,2}))$ parmi leur sous graphes induits : en effet la démonstration utilise uniquement l'interdiction de ces 3 classes de graphes comme condition nécessaire à être un graphe de carte. Que ce soit par une méthode exploitant cette caractérisation ou par une autre méthode séparant en composantes 3-connexe et vérifiant si ces dernières ont la bonne forme, on obtient un algorithme polynômial reconaissant si un cographe G est de carte

Question. *Est ce que pour G un graphe cordal 2-connexe, il est vrai que G est de carte si et seulement si ses composantes 3-connexes pour toutes/une décomposition 3-connexe sont de carte ?*

Annexe

Pour tout les trucs à moitiés vrais et à moitié utiles

Définition (Arrête sans trou). *On dit qu'une arrête xy d'un graphe G 3-connexe est sans trou si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes pour un certain $S \subsetneq \{x, y\}$:*
- *Pour toute clique max K de $G[N(x) \cap N(y)]$, si $G - (K \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, $G - (K \cup S)$ l'est aussi.*
- *Pour toute paire de cliques indépendantes maximales K^1, K^2 de $G[N(x) \cap N(y)]$, si $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$ l'est aussi, où Δ est la différence symétrique sur les sommets de K^1 et K^2*

La définition est motivée par... le dessin qui n'est pas là

On considèrera par la suite que tout les graphes G sont de carte, 3-connexe, et admettent une carte complète

Lemme 7. *Soit $xy \in E$. Si xy est sans trou, alors dans toute carte complète de G, l'arrête xy est représentée par une adjacence connexe entre les deux régions, soit un chemin, soit un point*

Démonstration. On se donne une carte complète de G vérifiant ces conditions. Supposons par l'absurde que x et y ne se rencontrent pas en un ensemble connexe On raisonne selon la nature de $x \cap y$

Supposons cet ensemble discret, donc fini car compact. Notons alors ses points $u_1, ..., u_k$, $k \geq 2$ dans l'ordre cyclique selon la frontière de x. On construit alors H un témoin compact quadrangulé de G à partir de cette carte, contenant les points $u_1, ..., u_k$ dont le voisinage correspond aux régions les contenant dans cette carte.
Si $k \geq 4$, alors en retirant les cliques max suivantes : K^1 est l'ensemble des régions hors x, y contenant u_1, K^2 celles contenant u_k. Notons alors que ce témoin contient un cycle, x, u_1, y, u_k, dont les sommets de V à l'intérieur de ce dernier ne peuvent accéder à l'extérieur qu'en utilisant les points u_1 et u_k. De même les sommets de K^1 intérieurs à ce cycle ne peuvent se trouver dans K^2, car alors on aurait une arrête d'un sommet à l'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 à u_k, ou à tous les sommets de K^2, qui sont tous à l'extérieur de ce cycle. En retirant $K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\}$, on sépare alors l'intérieur du cycle x, u_2, y, u_3 du reste du graphe. Cela n'est plus le cas si on ne retire que x ou y, ainsi xy est à trou.
S
Si cet ensemble n'est pas discret, son nombre de composantes connexes étant fini par compacité, il est alors union disjointe de chemins et de points.
Sinon : cet ensemble ne peut contenir 2 chemins disjoints par 3-connexité : en effet dans ce cas $G - \{x, y\}$ n'est pas connexe. Donc il contient un chemin et un point n'appartenant pas à ce dernier. On choisit alors un point u_1 dans l'intérieur du chemin (pas à une de ses éxtrémités) et on note u_2 un point de $x \cap y$

n'appartenant pas au chemin. On construit un témoin H de la même manière que précédemment. L'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 contient un sommet de V pour les mêmes raisons qu'auparavant, sauf qu'ici u_1 étant dans l'intérieur du chemin ne peut être adjacent à ce sommet. Notons K la clique formée des sommets extérieurs à ce cycle, excepté x et y, contenant le point u_2. $G - K$ est connexe, pour les mêmes raisons que pour le cas précédent, tandis que $G - (K \cup \{x, y\})$ ne l'est pas □

Lemme 8. *Pour tout $v \in V$, il existe u un voisin de v tel que uv soit sans trou*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. La preuve du lemme **??** permet d'affirmer qu'il existe des régions u adjacentes à v telles que $u \cap v$ ne soit pas discret. On suppose alors par l'absurde que toutes ces régions sont telles que $u \cap v$ ne soit pas connexe. Mais alors, $u \cup v$ sépare $\mathbb{S}^2$ en au moins 2 composantes connexes, et la carte étant complète les deux sont totalement recouvertes par des régions. Ainsi, v a des voisins tels que leur intersection n'est pas discrète dans les deux composantes connexes ainsi délimitées. On considère alors un voisin dans l'une de ces composantes que l'on note C et on réitère le processus, en choisissant à chaque fois une composante incluse dans C. On obtient ainsi une infinité de régions distinctes ce qui est absurde car le graphe est fini.

Ainsi il existe u voisin de v tel que $u \cap v$ soit un chemin. On montre alors qu'il existe un tel u tel que uv soit sans trou. Bon globalement faut distinguer selon si la frontière est recouverte ou pas □

Proposition 9. *Soit G admettant une carte complète et $xy \in E$. On suppose que xy est représentée dans une certaine carte complète de G par une adjacence en un seul point u. Si dans cette même carte, la clique formée des régions contenant u (hors x et y) est supportée par d'autres points que u, alors G/xy admet une carte complète*

Démonstration. On se donne un témoin compact quadrangulé issu de la carte complète de l'énoncé, H. On suppose également sans perte de généralité que le plongement de H dans le plan donné est un plongement droit. On construit un nouveau témoin compact quandrangulé H' comme suit : on note K la clique formée des régions contenant u, hors x, y. On retire toute les arrête entre K et u. u devient alors de degré 2, ayant pour seuls voisins x et y. On place alors un sommet u' arbitrairement proche de u, que l'on relie à x et y par des segments. Ensuite, par des arguments géométriques, tout sommet de K peut être relié par un segment soit à u soit à u'. On obtient alors au final un graphe planaire biparti quandrangulé H'. Reste à voir que H' est un témoin compact de G.

Les seuls arrêtes de G impactées par les modifications sont les arrêtes entre sommets de K (celles avec x et y sont préservées comme on relie chaque sommet soit à u soit à u'). Hors par hypothèse, la clique K est portée par d'autres points de la carte distincts de u. Ainsi la suppression de certaines arrêtes de K à u n'a pas d'impact sur les adjacences des sommets de K. H' est bien un témoin de G. Il est compact par sa construction comme H est un témoin compact

Il est alors facile de construire un témoin compact quandrangulé de G/xy comme H' représente une carte où les régions x et y se rencontrent en un chemin □

Reformuler la propriété de sans trou, et reformuler la propriété (typiquement le premier point est pas en équivalence, le deuxième si par contre. Toutefois si le premier point échoue, alors on peut reconstruire la carte pour y enlever les trous). Sans trou est peut être plus intelligent dans le cas spécifique des graphes de carte, si on a une non instance de toute façon on le verra quand ça devient gênant

Proposition 10. *Soit $xy \in E$. xy est une arrête à trou si et seulement si pour tout $S \subsetneq \{x, y\}$*

— *Soit pour K^1, K^2 deux cliques max de $G[N(x) \cap N(y)]$, $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, où Δ est la différence symétrique sur les sommets des deux cliques, et $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$ l'est*

Démonstration. Si xy vérifie ces conditions, alors xy est une arrête à trou : il existe au plus 2 cliques K^1, K^2 voisines de x et y telles que $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ ne soit pas connexe, tandis que pour $S \subsetneq \{x, y\}$, $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$ le soit.

Si xy est une arrête à trou : on se donne K^1, K^2 les cliques voisines de x et y données par la définition. Si l'on peut prendre K^2 vide :
On notera alors le K^1 correspondant comme K. On se donne alors une clique max de $G[N(x) \cap N(y)]$ contenant K, que l'on note K'. Notons $C_1, ..., C_k$ les composantes connexe de $G - K - \{x, y\}$, $k \geq 2$. Si pour tout choix de K', la propriété n'est pas vérifiée : alors pour tout K', □

3.1 Permutations de cycle et arrêtes contractibles

Une inversion totale sur n élements est la permutation suivante $i \in [\![1, n]\!] \longmapsto n - i + 1$, les permutations cycliques sont les puissances du cycle $i \in [\![1, n]\!] \longmapsto (i + 1 \mod n) + 1$. Notons que ces permutations engendrent exactement les automorphismes du graphe C_n.
On appelera $\mathrm{Iso}(C_n)$ l'ensemble des permutations sur n élements quotientées par les automorphismes de C_n, décrit plus tôt. On obtient alors un ensemble intéressant pour l'étude des cycles : on peut l'identifier au quotient de l'ensemble des graphes sur les sommets $1, ..., n$ isomorphes à C_n par la relation d'équivalence de différer d'un automorphisme.

Définition (Permutations de cycle)**.** *Soit $n \geq 4$, et C'_n un surgraphe à n sommets de C_n, dont le cycle canonique sera numéroté $1, 2, ..., n$. On dira qu'une permutation σ préserve les cycles si $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ est également un cycle de C'_n. Une permutation de cycle est alors $[\sigma] \in \mathrm{Iso}(C_n)$ telle que σ préserve les cycles.*

La définition est bien cohérente car si σ et σ' sont équivalents, ils diffèrent d'un produit d'une inversion totale et d'une permutation cyclique. Le cycle $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ est préservé par inversion totale et permutation cyclique donc $\sigma'(1), ..., \sigma'(n)$ est également un cycle.

Définition (Echange)**.** *Un échange de i est une permutation de cycle $[\sigma]$ telle que, en notant E l'ensemble des arrêtes de C_n, on ait $\sigma(i)\sigma(i + 1) \notin E$ ou $\sigma(i - 1)\sigma(i) \notin E$. Si le nombre d'échanges de i est non nul, on le dira échangeable*

La définition est là encore indépendante du choix du représentant de $[\sigma]$: si σ' est équivalent à σ, ils diffèrent par un automorphisme de C_n. Donc si $\sigma(i)\sigma(i + 1) \notin E$, $\sigma'(i)\sigma'(i + 1)$ également

Ce que l'on remarque en faisant les dessins : on se donne $v \in V$ dans un graphe de carte et on fixe un ordre cyclique de $N(v)$ donné par le corollaire 1. On étudie ses permutations de cycle. On remarque que les sommets u non échangeables font de bons candidats pour que uv soit contractible (à vraiment peu de choses près)

3.2 Décontractions d'arrêtes

Proposition 11. *Soit G, $xy \in E$ une arrête. Supposons que G/xy admette une carte complète et soit 3-connexe. Soit H un témoin compact quadrangulé de G/xy donné par la proposition 7. Notons $s_1, ..., s_k$ le cycle séparant xy du reste de H. Si les voisins de x distincts de y sont exactement $RA(\{s_i, ..., s_{i+l}\}) - xy$ et ceux de y $RA(\{s_{i+l}, ..., s_{i-1}, s_i\}) - xy$, où i, l sont entiers et les indices sont vus modulo k, alors G admet une carte complète*

Démonstration. On construit la carte complète comme suit : on part de H, on retire xy et on ajoute x et y à l'intérieur du cycle séparant. Ensuite, on relie x à tout ses voisins de la manière suivante : si $s_j \in U$ et que les deux voisins de s_j sur le cycle sont voisins de x, on ajoute une arrête entre x et s_j.
Si l'un des voisins de s_j n'est pas voisin de x et l'autre l'est, et que ce dernier n'a pas été pris en compte par l'étape précédente, c'est alors que x n'a qu'un voisin sur le cycle par les conditions précédentes : si il en avait plus de deux, il aurait été possible de tous les couvrir en considérant les sommets de U faisant la liaison. Dans ce cas, on relie x à son voisin par deux arrêtes subdivisées, et on relie y à chaque sommet joignant x à son voisin.
On effectue les mêmes étapes pour y. Si il n'existe aucun $s_j \in U$ tels que ses deux voisins sur le cycle soient également voisins de x et y, cela signifie que s_i et s_{i+l} sont dans V. On ajoute alors deux sommet, s et s', l'un relié à s_i, x, y, l'autre à s_{i+l}, x, y. On obtient au final un témoin de G, compact et quadrangulé, donc G admet une carte complète □

Lemme 9. *Soit G un graphe admettant une carte complète et $xy \in E$ une arrête telle que G/xy soit un graphe 3-connexe à carte complète. Soit H un témoin compact quadrangulé de G/xy. On suppose que les voisins de xy dans G/xy induisent un cycle sans corde. Alors H vérifie la propriété de la proposition 11*

Démonstration. Supposons par l'absurde H ne vérifie pas cette propriété. Notons que comme les voisins de xy induisent un cycle sans corde, on peut supposer sans perte de généralité que les voisins de xy dans H sont tous de degré 3 : en effet ces derniers ont pour voisins des voisins de xy dans G/xy. Si un tel sommet était de degré plus que 3, alors on aurait un triangle présent parmi les voisins de xy. Si ces derniers sont au nombre de 3, H respecterait la propriété de la proposition 11. Si xy a plus de 4 voisins, alors le cycle formé par ses voisins dans G/xy possède une corde, absurde.

On exploite à présent l'hypothèse sur H : notons $v_1, ..., v_l$ l'ordre cyclique sur les voisins de xy. De par la forme du témoin, l'hypothèse implique que les voisins de x et de y ne sont pas des intervalles modulo l parmi ces sommets (si l'on retire x et y). Comme G est à carte complète et 3-connexe, les voisins de x et ceux de y forment respectivement des cycles. Hors les voisins de x ne forment pas un intervalle modulo l parmi $v_1, ..., v_l$ (y est exclu). Donc $N(x) = \{y, v_{a_1}, ..., v_{b_1}, v_{a_2}, ..., v_{b_2}, ..., v_{b_k}\}$ où $a_1 = 1$ sans perte de généralité, $k \geq 2$, $b_i < a_{i+1} + 1$ pour $1 \leq i \leq k-1$, et $b_k < l - 1$, là encore quitte à effectuer des permutations cycliques.
On numérote les voisins de x $u_1, ..., u_r$ dans un ordre cyclique. En supposant $u_1 = v_1$ et quitte à inverser l'ordre, on a $u_{b_1} = v_{b_1}$. Le seul sommet adjacent à v_{b_1} encore non utilisé est y, donc $u_{b_1+1} = y$. Puis u_{b_1+2} est un sommet quelconque parmi ceux restants. Supposons pour simplifier le raisonnement qu'il s'agisse de v_{a_2}. Le seul sommet adjacent non considéré est v_{a_2+1} et ainsi de suite jusqu'à atteindre v_{b_2}. v_{b_2} n'a pas de voisins non considérés dans le cycle. Le raisonnement est le même si l'on tombe sur un voisin entre un v_{a_i} et v_{b_i} le sens de progression peut toutefois être différent. Au total, c'est absurde.

Ainsi H vérifie la propriété annoncée □

Références

[1] J.E. Hopcroft et R.E. Tarjan. Dividing a graph into triconnected components. *SIAM Journal on Computing*, 2(3), 1973.

[2] Christos H. Papadimitriou Zhi-Zong Chen, Michelangelo Grigni. Map Graphs. *Journal of the ACM*, 49(2), 2002.