Stage Map Graphs

José Lorgeré

17 juin 2025

Introduction

1 Résultats

Théorème 1 (Caractérisation des graphes de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte si et seulement si il existe H un graphe biparti planaire dont un des côtés de la bipartition est V, tel que $H^2[V] = G$.*

Proposition 1. *Si G est un graphe de carte, et $H = G[A]$ où $A \subset V$, alors H est un graphe de carte*

Démonstration. On reprend la carte de G où l'on ne garde que les régions identifées aux sommets présents dans A $\square$

Définition (Join)**.** *Le join de 2 graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommet $V'' = V \cup V'$ et pour arrêtes*

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x \in V'\}$$

On notera pour tout $n \geq 1$ $K(n, G)$ le join d'un indépendant à n sommets avec le graphe G

Proposition 2. *Soit G un graphe à 3 sommets. $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K(3, G)$ est un graphe de carte. On se donne alors H vérifiant toutes les propriétés du théorème 1. On note pour tout v_i, sommet indépendant de $K(3, G)$, N_i son voisinage dans H incluant v_i. On note H' le graphe $(((H/N_1)/N_2)/N_3)$, qui est donc un mineur de H et donc planaire. Or $H' = K_{3,3}$: en effet N_i est adjacent à tout les sommets de G, comme le voisinage de v_i dans H l'est, car v_i l'est dans $K(3, G)$. De plus il n'y a pas d'arrêtes entre les sommets de G comme H est biparti, et pas d'arrêtes entre les différents N_i comme les v_i sont indépendants dans G.
Absurde, $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte $\square$

Un argument très similaire montre que les expansions de $K(3, G)$ ne sont également pas des graphes de carte.
Notons que $K(2, G)$ pour G quelconque et $K(n, G)$ pour G à 2 sommets sont de carte (ptit dessin)

Conjecture. *Les graphes de carte sont stables par contraction d'arrête*

Conjecture. *Si G n'a pas de sous graphe induit se contractant en un $K(3, H)$, G est de carte*

Si la conjecture est vraie, on a alors un algorithme polynômial pour reconnaître les cographes de carte : pour l'union disjointe, il n'y a rien à vérifier. Pour le join, il suffit de vérifier récursivement que chaque composante a join est de carte, et qu'aucune ne contient un indépendant de taille 3. Au final on devrait avoir du $O(n^4)$ pire des cas avec que des algos naïfs, mais y a sûrement moyen d'améliorer