Stage Map Graphs

José Lorgeré

8 juillet 2025

Introduction

1 Trucs généraux

1.1 Résultats et définitions préliminaires

Définition (Carte)**.** *Une carte est une fonction $f : V \to \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ telle que pour tout $v \in V$, $f(v)$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^2$ et telle que pour $v \neq u$, $f(u)$ et $f(v)$ sont d'intérieur disjoints. Si f forme un recouvrement de $\mathbb{S}^2$, on la dira sans trou, ou complète. On appelera les $f(v)$ régions*

Définition (Graphe de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte s'il existe une carte f sur V telle que $xy \in E$ si et seulement si $f(x) \cap f(y) \neq \varnothing$*

Théorème 1 (Caractérisation des graphes de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte si et seulement si il existe H un graphe biparti planaire, de bipartition V, U, tel que $H^2[V] = G$. Un tel graphe H est appelé graphe témoin de G*

Proposition 1. *Si G est un graphe de carte, et $H = G[A]$ où $A \subset V$, alors H est un graphe de carte*

Démonstration. On reprend la carte de G où l'on ne garde que les régions identifées aux sommets présents dans A □

Définition (Join)**.** *Le join de 2 graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommet $V'' = V \cup V'$ et pour arrêtes*

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x \in V'\}$$

On notera pour tout $n \geq 1$ $K(n, G)$ le join d'un indépendant à n sommets avec le graphe G

Proposition 2. *Soit G un graphe à 3 sommets. $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K(3, G)$ est un graphe de carte. On se donne alors H vérifiant toutes les propriétés du théorème 1. On note pour tout v_i, sommet indépendant de $K(3, G)$, N_i son voisinage dans H incluant v_i. On note H' le graphe $(((H/N_1)/N_2)/N_3)$, qui est donc un mineur de H et donc planaire. Or $H' = K_{3,3}$: en effet N_i est adjacent à tout les sommets de G, comme le voisinage de v_i dans H l'est, car v_i l'est dans $K(3, G)$. De plus il n'y a pas d'arrêtes entre les sommets de G comme H est biparti, et pas d'arrêtes entre les différents N_i comme les v_i sont indépendants dans G.
Absurde, $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte □

Notons toutefois que $K(2, G)$ lui est un graphe de carte, et que le join de 2 graphes à 3 sommets tous deux non indépendants est de carte également.

Proposition 3. *$K_{2,2,2,2}$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. □

Notons que $K_{2,2,2}$ est toutefois un graphe de carte

Définition (Témoin compact). *Un témoin compact est ...*

Dans l'article ... on a que l'existence d'un témoin compacte équivaut à l'existence d'un témoin de G. Ainsi on peut se restreindre à l'étude de ces témoins particuliers

Théorème 2. *Un graphe G admet une carte complète si et seulement si il admet un témoin qui est une quadrangulation*

On en déduit alors que les graphes admettant des cartes complètes sont 2-connexes comme une quadrangulation l'est

Définition (Adjacence réelle). *Pour $H = (V \cup U, E')$ un témoin de G, on définit l'adjacence réelle, $RA(x)$ d'un sommet $x \in V \cup U$ comme suit :*
- *Si $x \in V$, $RA(x) = \{x\}$*
- *Si $x \in U$, $RA(x) = N(x)$*

On peut alors définir l'adjacence réelle $RA(S)$ d'un sous ensemble $S \subset V \cup U$ en faisant l'union sommet par sommet.

2 Etude des cartes complètes 3-connexes

On va faire qqes lemmes sur les cartes complètes qui permettront de déblayer un algo

Il faudra aussi bien introduire ce que l'on veut dire par "arrête contractile". Le shuffle de l'ordre cyclique des voisins peut aider à avoir des conditions

Proposition 4. *Soit G 3-connexe admettant une carte complète. Soit $v \in V$. Il existe un témoin compact quadrangulé H de G et un cycle C tel que*
- *$RA(C) = N[v]$ (on considère ici les voisins dans G)*
- *L'intérieur de C ne contient que v et les seules arrêtes dans cet intérieur sont celles entre v et les élements de $C \cap U$*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. On ne s'intéressera ici qu'à la construction du témoin impliquant le voisinage de v, le reste du témoin pouvant être construit comme souhaité à partir de la carte complète grâce au théorème 2.

La région v étant homéomorphe à un disque, on se donne $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ un lacet simple paramétrant sa frontière. Quitte à reparamétrer, on admettra que l'on peut choisir $\gamma(0)$ tel qu'il soit point de rencontre d'au plus 2 régions (et donc d'exactement 2 comme la carte est complète), le graphe étant fini. Les mêmes arguments de finitude et le fait que la carte soit complète permettent d'affirmer qu'il existe $v_1 \in V$ tel que l'ensemble $I_1 = \{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset v_1\}$ soit un intervalle non ponctuel. On note alors $t_1 = \sup(I_1) > 0$. On a que $t_1 < 1$: en effet si $t_1 = 1$, alors γ est un lacet inclus dans u_1, et l'on admettra que ce lacet n'est pas homotope à un point, ce qui est absurde comme u_1 est homéomorphe à un disque. En utilisant le même argument que celui donnant l'existence de v_1, et comme t_1 est maximal, on trouve un $v_2 \in V$ distinct de v_1 tel que l'ensemble suivant $I_2 = \{t \in [t_1, 1] \mid \gamma([t_1, t]) \subset v_2\}$ soit un intervalle non ponctuel et on continue ce processus jusqu'à atteindre 1. A noter que la dernière région considérée se trouve être v_1, comme $\gamma(0)$ n'est pas un point de rencontre de 3 régions pour aller du dernier point, $\gamma(t_k)$, à 1, il faut longer v_1 selon un chemin. On notera alors $v_1, ..., v_k$ les régions obtenues par ce processus, où v_k est l'avant dernière région considérée.

Supposons que $v_i = v_j$ où $j > i$. Par construction, on a donc $j > i + 1$. Donc la région v_i rencontre v en au moins deux chemins. On a alors que $G - \{v, v_i\}$ n'est pas connexe, v_{i+1} et v_{j+1} sont séparés, absurde par 3-connexité. Donc les v_i sont tous distincts. On construit à présent le témoin.
On place chaque sommet de V à l'intérieur de la région lui correspondant. On ajoute les points $\gamma(t_i)$ au graphe, en les placant à leurs positions, et l'on relie v à tout ces points par des chemins dans sa région. On relie également toutes les régions contenant un point $\gamma(t_i)$ à ce dernier par des chemins.

On a ainsi obtenu un cycle vérifiant par construction la seconde propriété de l'énoncé. Pour la première, pour un sens, il suffit de voir que tout les sommets adjacents à des $\gamma(t_i)$ dans ce graphe sont des régions rencontrant v, donc des voisins. Réciproquement, un voisin de v est soit un v_i, soit rencontre ponctuellement v en un des $\gamma(t_i)$: si un voisin de v rencontre sa frontière en un point entre deux $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$, v_i n'est pas homéomorphe à un disque. On a bien la première propriété
Les sommets $\gamma(t_1), ..., \gamma(t_k)$, qui correspondront à des élements de U, sont tous utiles, et les faces présentes à l'intérieur du cycle sont bien bordées par 4 arrêtes. On complète ensuite le graphe pour obtenir un témoin compact de G quadrangulé □

Corollaire 1. *Soit G 3-connexe admettant une carte complète et $v \in V$. Il existe un ordre total $v_1, ..., v_k$ sur les voisins de v induisant un cycle*

Démonstration. On se donne un témoin H vérifiant les propriétés de la proprosition 4. Soit $s_1, ..., s_{2l}$ le cycle dans H donné par cette proposition. On suppose sans perte de généralité que $s_1 \in V$. Pour tout i, on pose $E_i = \{s_i\}$ si i est impair, si i est pair, E_i correspond à l'ensemble des voisins de s_i hors cycle, v exclu. On ordonne alors $N(v)$ comme suit : on ordonne chaque E_i selon un ordre arbitraire. Puis on ordonne ces ordres arbitraires de sorte à ce que tout les élements de E_i soient plus petits que ceux de E_{i+1}. Si un élement apparaît dans plusieurs E_i, on le placera avec le E_i de plus petit indice auquel il appartient. Cet ordre est bien total sur $N(v)$ comme $RA(\{s_1, ..., s_{2l}\}) = N[v]$. De plus ce dernier donne bien lieu à un cycle : en effet tout les sommets de E_i sont adjacents aux sommets de E_{i+1} (les indices étant pris modulo $2l$), et les E_i pour i pair sont des cliques. □

Proposition 5. *Soit G, $xy \in E$ une arrête. Supposons que G/xy admette une carte complète et soit 3-connexe. Soit H un témoin compact quadrangulé de G/xy donné par la proposition 4. Notons $s_1, ..., s_k$ le cycle séparant xy du reste de H. Si les voisins de x distincts de y sont exactement $RA(\{s_i, ..., s_{i+l}\}) - x$ et ceux de y $RA(\{s_{i+l}, ..., s_{i-1}, s_i\}) - y$, où i, l sont entiers et les indices sont vus modulo k, alors G admet une carte complète*

Démonstration. On construit la carte complète comme suit : on part de H, on retire xy et on ajoute x et y à l'intérieur du cycle séparant. Ensuite, on relie x à tout ses voisins de la manière suivante : si $s_j \in U$ et que les deux voisins de s_j sur le cycle sont voisins de x, on ajoute une arrête entre x et s_j.
Si l'un des voisins de s_j n'est pas voisin de x et l'autre l'est, et que ce dernier n'a pas été pris en compte par l'étape précédente, c'est alors que x n'a qu'un voisin sur le cycle par les conditions précédentes : si il en avait plus de deux, il aurait été possible de tous les couvrir en considérant les sommets de U faisant la liaison. Dans ce cas, on relie x à son voisin par deux arrêtes subdivisées, et on relie y à chaque sommet joignant x à son voisin.
On effectue les mêmes étapes pour y. Si il n'existe aucun $s_j \in U$ tels que ses deux voisins sur le cycle soient également voisins de x et y, cela signifie que s_i et s_{i+l} sont dans V. On ajoute alors deux sommet, s et s', l'un relié à s_i, x, y, l'autre à s_{i+l}, x, y. On obtient au final un témoin de G, compact et quadrangulé, donc G admet une carte complète □

3 Algorithmes

L'algorithme de reconnaissance que l'on essaiera de développer est le suivant : on choisit une arrête "contractile" du graphe (c'est à dire que, si le graphe est de carte, une arrête représentée par une intersection entre les deux régions formant un chemin). C'est la partie la plus difficile et qui sera peut être facilitée par la restriction à des sous familles de graphe. Ensuite, on teste si le graphe contracté est un graphe de carte sans trou. Après cela, on décontracte à l'aide de la définition d'arrête contractile et de la proposition précédente

La dernière étape étant polynômiale, la polynômialité de l'algorithme dépend uniquement de celle du choix de l'arrête contractile.

Annexe

Pour tout les trucs à moitiés vrais et à moitié utiles

Définition (Arrête sans trou)**.** *On dit qu'une arrête xy d'un graphe G 3-connexe est sans trou si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes pour un certain $S \subsetneq \{x, y\}$:*

- *Pour toute clique max K de $G[N(x) \cap N(y)]$, si $G - (K \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, $G - (K \cup S)$ l'est aussi.*
- *Pour toute paire de cliques indépendantes maximales K^1, K^2 de $G[N(x) \cap N(y)]$, si $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$ l'est aussi, où Δ est la différence symétrique sur les sommets de K^1 et K^2*

La définition est motivée par... le dessin qui n'est pas là

On considèrera par la suite que tout les graphes G sont de carte, 3-connexe, et admettent une carte complète

Lemme 1. *Soit $xy \in E$. Si xy est sans trou, alors dans toute carte complète de G, l'arrête xy est représentée par une adjacence connexe entre les deux régions, soit un chemin, soit un point*

Démonstration. On se donne une carte complète de G vérifiant ces conditions. Supposons par l'absurde que x et y ne se rencontrent pas en un ensemble connexe On raisonne selon la nature de $x \cap y$

Supposons cet ensemble discret, donc fini car compact. Notons alors ses points $u_1, ..., u_k$, $k \geq 2$ dans l'ordre cyclique selon la frontière de x. On construit alors H un témoin compact quadrangulé de G à partir de cette carte, contenant les points $u_1, ..., u_k$ dont le voisinage correspond aux régions les contenant dans cette carte.
Si $k \geq 4$, alors en retirant les cliques max suivantes : K^1 est l'ensemble des régions hors x, y contenant u_1, K^2 celles contenant u_k. Notons alors que ce témoin contient un cycle, x, u_1, y, u_k, dont les sommets de V à l'intérieur de ce dernier ne peuvent accéder à l'extérieur qu'en utilisant les points u_1 et u_k. De même les sommets de K^1 intérieurs à ce cycle ne peuvent se trouver dans K^2, car alors on aurait une arrête d'un sommet à l'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 à u_k, ou à tous les sommets de K^2, qui sont tous à l'extérieur de ce cycle. En retirant $K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\}$, on sépare alors l'intérieur du cycle x, u_2, y, u_3 du reste du graphe. Cela n'est plus le cas si on ne retire que x ou y, ainsi xy est à trou.
S
Si cet ensemble n'est pas discret, son nombre de composantes connexes étant fini par compacité, il est alors union disjointe de chemins et de points.
Sinon : cet ensemble ne peut contenir 2 chemins disjoints par 3-connexité : en effet dans ce cas $G - \{x, y\}$ n'est pas connexe. Donc il contient un chemin et un point n'appartenant pas à ce dernier. On choisit alors un point u_1 dans l'intérieur du chemin (pas à une de ses éxtrémités) et on note u_2 un point de $x \cap y$ n'appartenant pas au chemin. On construit un témoin H de la même manière que précédemment. L'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 contient un sommet de V pour les mêmes raisons qu'auparavant, sauf qu'ici u_1 étant dans l'intérieur du chemin ne peut être adjacent à ce sommet. Notons K la clique formée des sommets extérieurs à ce cycle, excepté x et y, contenant le point u_2. $G - K$ est connexe, pour les mêmes raisons que pour le cas précédent, tandis que $G - (K \cup \{x, y\})$ ne l'est pas □

Lemme 2. *Pour tout $v \in V$, il existe u un voisin de v tel que uv soit sans trou*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. La preuve du lemme **??** permet d'affirmer qu'il existe des régions u adjacentes à v telles que $u \cap v$ ne soit pas discret. On suppose alors par l'absurde que toutes ces régions sont telles que $u \cap v$ ne soit pas connexe. Mais alors, $u \cup v$ sépare $\mathbb{S}^2$ en au moins 2 composantes connexes, et la carte étant complète les deux sont totalement recouvertes par des régions. Ainsi, v a des voisins tels que leur intersection n'est pas discrète dans les deux composantes connexes ainsi délimitées. On considère alors un voisin dans l'une de ces composantes que l'on note C et on réitère le processus, en choisissant à chaque fois une composante incluse dans C. On obtient ainsi une infinité de régions distinctes ce qui est absurde car le graphe est fini.

Ainsi il existe u voisin de v tel que $u \cap v$ soit un chemin. On montre alors qu'il existe un tel u tel que uv soit sans trou. Bon globalement faut distinguer selon si la frontière est recouverte ou pas □

Proposition 6. *Soit G admettant une carte complète et $xy \in E$. On suppose que xy est représentée dans une certaine carte complète de G par une adjacence en un seul point u. Si dans cette même carte, la clique formée des régions contenant u (hors x et y) est supportée par d'autres points que u, alors G/xy admet une carte complète*

Démonstration. On se donne un témoin compact quadrangulé issu de la carte complète de l'énoncé, H. On suppose également sans perte de généralité que le plongement de H dans le plan donné est un plongement droit. On construit un nouveau témoin compact quandrangulé H' comme suit : on note K la clique formée des régions contenant u, hors x, y. On retire toute les arrête entre K et u. u devient alors de degré 2, ayant pour seuls voisins x et y. On place alors un sommet u' arbitrairement proche de u, que l'on relie à x et y par des segments. Ensuite, par des arguments géométriques, tout sommet de K peut être relié par un segment soit à u soit à u'. On obtient alors au final un graphe planaire biparti quandrangulé H'. Reste à voir que H' est un témoin compact de G.

Les seuls arrêtes de G impactées par les modifications sont les arrêtes entre sommets de K (celles avec x et y sont préservées comme on relie chaque sommet soit à u soit à u'). Hors par hypothèse, la clique K est portée par d'autres points de la carte distincts de u. Ainsi la suppression de certaines arrêtes de K à u n'a pas d'impact sur les adjacences des sommets de K. H' est bien un témoin de G. Il est compact par sa construction comme H est un témoin compact

Il est alors facile de construire un témoin compact quandrangulé de G/xy comme H' représente une carte où les régions x et y se rencontrent en un chemin □

Reformuler la propriété de sans trou, et reformuler la propriété (typiquement le premier point est pas en équivalence, le deuxième si par contre. Toutefois si le premier point échoue, alors on peut reconstruire la carte pour y enlever les trous). Sans trou est peut être plus intelligent dans le cas spécifique des graphes de carte, si on a une non instance de toute façon on le verra quand ça devient gênant

Proposition 7. *Soit $xy \in E$. xy est une arrête à trou si et seulement si pour tout $S \subsetneq \{x, y\}$*

- *Soit pour K^1, K^2 deux cliques max de $G[N(x) \cap N(y)]$, $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, où Δ est la différence symétrique sur les sommets des deux cliques, et $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$ l'est*

Démonstration. Si xy vérifie ces conditions, alors xy est une arrête à trou : il existe au plus 2 cliques K^1, K^2 voisines de x et y telles que $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ ne soit pas connexe, tandis que pour $S \subsetneq \{x, y\}$, $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$ le soit.

Si xy est une arrête à trou : on se donne K^1, K^2 les cliques voisines de x et y données par la définition. Si l'on peut prendre K^2 vide :
On notera alors le K^1 correspondant comme K. On se donne alors une clique max de $G[N(x) \cap N(y)]$ contenant K, que l'on note K'. Notons $C_1, ..., C_k$ les composantes connexe de $G - K - \{x, y\}$, $k \geq 2$. Si pour tout choix de K', la propriété n'est pas vérifiée : alors pour tout K', □

Lemme 3. *Soit G un graphe de carte 3-connexe. Il existe un surgraphe de G à un sommet de plus admettant une carte complète.*

Démonstration. On se donne un témoin H de G et on note U l'ensemble des sommets autres que V de H. On peut supposer que H est construit de telle sorte à ce que $d(u) \geq 2$ pour $u \in U$. Soit $u \in U$, $x, y \in V$ parmi ses voisins. Si x et y sont adjacents à la même face de H, alors on ajoute une arrête entre x et y à l'intérieur de cette face, que l'on subdivise ensuite à l'aide d'un sommet afin de garder le graphe biparti. On répète alors ce processus jusqu'à ce que tout les sommets adjancents dans G soient reliés par deux chemins de longueur 2.

Le nouveau graphe H' est planaire biparti et 2-connexe : si l'on retire un sommet de V le graphe reste clairement connexe comme G est 3-connexe. Si l'on retire un sommet de U' (l'ensemble U avec les nouveaux sommets ajoutés), H reste aussi connexe : si le sommet retiré est parmi ceux de $U' \backslash U$, la construction de U' donne que le graphe reste connexe. Sinon, on se donne $v_1, ..., v_k$ les voisins de u le sommet retiré, tels que v_i et v_{i+1} soient adjacents à la même face. On a alors qu'après le retrait de u, par construction encore de U', les v_i sont tous accessibles entre eux. On peut alors voir que cela implique que le graphe reste connexe et est un témoin de G

On construit alors un surgraphe de H' que l'on va plonger dans le plan. On construit le surgraphe H'' en itérant sur tout sommet $v \in V$, et en ajoutant une arrête entre chaque paire u_1, u_2 voisine de v adjacente à une même face, arrête prenant la forme d'un chemin dans cette face. Si v est un sommet extérieur dans H', et que l'on considère 2 de ses voisins dans H' eux aussi extérieurs, alors on choisira le chemin de telle sorte à ce que v devienne intérieur dans H''. Ainsi tout les élements de U' deviennent de degré au moins 3. G étant 3-connexe, on peut alors voir que H'' le devient également (on ne peut plus isoler de sommet de U'). H'' est également planaire et par construction, tout les sommets $v \in V$ sont intérieurs.

(merde faut montrer que les adjacences restent cohérentes aussi). On construit à présent la carte : pour $v \in V$, la région associée à v est l'adhérence de la face dans laquelle se trouve le point v dans $H'' - v$. Cette face est bien homéomorphe à un disque, comme $H'' - v$ est 2-connexe et qu'alors cette dernière est bordée par un cycle (voir ...), le théorème de Jordan-Schönflies nous donne ce que l'on veut. Cet ensemble de région correspond alors à l'intérieur du cycle de H'' séparant la face non bornée des autres (comme H'' est 2-connexe). Ainsi, pour les mêmes raisons, la face non bornée, vue dans $\mathbb{S}^2$, est homéomorphe à un disque. On ajoute alors un sommet à G correspondant à cette face et à ses adjacences dans cette carte. La carte est bien complète par construction

$\square$