

# Stage Map Graphs

José Lorgeré

8 juillet 2025

## Introduction

### 1 Trucs généraux

#### 1.1 Résultats et définitions préliminaires

**Définition** (Carte). Une carte est une fonction  $f : V \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$  telle que pour tout  $v \in V$ ,  $f(v)$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}^2$  et telle que pour  $v \neq u$ ,  $f(u)$  et  $f(v)$  sont d'intérieur disjoints. Si  $f$  forme un recouvrement de  $\mathbb{S}^2$ , on la dira sans trou, ou complète. On appellera les  $f(v)$  régions

**Définition** (Graphe de carte). Un graphe  $G = (V, E)$  est de carte s'il existe une carte  $f$  sur  $V$  telle que  $xy \in E$  si et seulement si  $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset$

**Théorème 1** (Caractérisation des graphes de carte). Un graphe  $G = (V, E)$  est de carte si et seulement si il existe  $H$  un graphe biparti planaire, de bipartition  $V, U$ , tel que  $H^2[V] = G$ . Un tel graphe  $H$  est appelé graphe témoin de  $G$

**Proposition 1.** Si  $G$  est un graphe de carte, et  $H = G[A]$  où  $A \subset V$ , alors  $H$  est un graphe de carte

*Démonstration.* On reprend la carte de  $G$  où l'on ne garde que les régions identifiées aux sommets présents dans  $A$  □

**Définition** (Join). Le join de 2 graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  est le graphe ayant pour sommet  $V'' = V \cup V'$  et pour arrêtes

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x' \in V'\}$$

On notera pour tout  $n \geq 1$   $K(n, G)$  le join d'un indépendant à  $n$  sommets avec le graphe  $G$

**Proposition 2.** Soit  $G$  un graphe à 3 sommets.  $K(3, G)$  n'est pas un graphe de carte

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $K(3, G)$  est un graphe de carte. On se donne alors  $H$  vérifiant toutes les propriétés du théorème 1. On note pour tout  $v_i$ , sommet indépendant de  $K(3, G)$ ,  $N_i$  son voisinage dans  $H$  incluant  $v_i$ . On note  $H'$  le graphe  $((H/N_1)/N_2)/N_3$ , qui est donc un mineur de  $H$  et donc planaire. Or  $H' = K_{3,3}$  : en effet  $N_i$  est adjacent à tout les sommets de  $G$ , comme le voisinage de  $v_i$  dans  $H$  l'est, car  $v_i$  l'est dans  $K(3, G)$ . De plus il n'y a pas d'arrêtes entre les sommets de  $G$  comme  $H$  est biparti, et pas d'arrêtes entre les différents  $N_i$  comme les  $v_i$  sont indépendants dans  $G$ .

Absurde,  $K(3, G)$  n'est pas un graphe de carte □

**Définition** (Témoin compact). Un témoin compact est ...

Dans l'article ... on a que l'existence d'un témoin compacte équivaut à l'existence d'un témoin de  $G$ . Ainsi on peut se restreindre à l'étude de ces témoins particuliers

**Théorème 2.** Un graphe  $G$  admet une carte complète si et seulement si il admet un témoin qui est une quadrangulation

On en déduit alors que les graphes admettant des cartes complètes sont 2-connexes comme une quadrangulation l'est

**Définition** (Adjacence réelle). *Pour  $H = (V \cup U, E')$  un témoin de  $G$ , on définit l'adjacence réelle,  $RA(x)$  d'un sommet  $x \in V \cup U$  comme suit :*

- Si  $x \in V$ ,  $RA(x) = \{x\}$
- Si  $x \in U$ ,  $RA(x) = N(x)$

*On peut alors définir l'adjacence réelle  $RA(S)$  d'un sous ensemble  $S \subset V \cup U$  en faisant l'union sommet par sommet.*

## 2 Etude des cartes complètes 3-connexes

On va faire qqes lemmes sur les cartes complètes qui permettront de débayer un algo

**Proposition 3.** *Soit  $G$  3-connexe admettant une carte complète. Soit  $v \in V$ . Il existe un témoin compact quadrangulé  $H$  de  $G$  et un cycle  $C$  tel que*

- $RA(C) = N[v]$  (on considère ici les voisins dans  $G$ )
- L'intérieur de  $C$  ne contient que  $v$  et les seules arrêtes dans cet intérieur sont celles entre  $v$  et les éléments de  $C \cap U$

*Démonstration.* On se donne une carte complète de  $G$ . On ne s'intéressera ici qu'à la construction du témoin impliquant le voisinage de  $v$ , le reste du témoin pouvant être construit comme souhaité à partir de la carte complète grâce au théorème 2.

La région  $v$  étant homéomorphe à un disque, on se donne  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$  un lacet simple paramétrant sa frontière. Quitte à reparamétriser, on admettra que l'on peut choisir  $\gamma(0)$  tel qu'il soit point de rencontre d'au plus 2 régions (et donc d'exactly 2 comme la carte est complète), le graphe étant fini. Les mêmes arguments de finitude et le fait que la carte soit complète permettent d'affirmer qu'il existe  $v_1 \in V$  tel que l'ensemble  $I_1 = \{t \in [0, 1] \mid \gamma([0, t]) \subset v_1\}$  soit un intervalle non ponctuel. On note alors  $t_1 = \sup(I_1) > 0$ . On a que  $t_1 < 1$  : en effet si  $t_1 = 1$ , alors  $\gamma$  est un lacet inclus dans  $u_1$ , et l'on admettra que ce lacet n'est pas homotope à un point, ce qui est absurde comme  $u_1$  est homéomorphe à un disque. En utilisant le même argument que celui donnant l'existence de  $v_1$ , et comme  $t_1$  est maximal, on trouve un  $v_2 \in V$  distinct de  $v_1$  tel que l'ensemble suivant  $I_2 = \{t \in [t_1, 1] \mid \gamma([t_1, t]) \subset v_2\}$  soit un intervalle non ponctuel et on continue ce processus jusqu'à atteindre 1. A noter que la dernière région considérée se trouve être  $v_1$ , comme  $\gamma(0)$  n'est pas un point de rencontre de 3 régions pour aller du dernier point,  $\gamma(t_k)$ , à 1, il faut longer  $v_1$  selon un chemin. On notera alors  $v_1, \dots, v_k$  les régions obtenues par ce processus, où  $v_k$  est l'avant dernière région considérée.

Supposons que  $v_i = v_j$  où  $j > i$ . Par construction, on a donc  $j > i + 1$ . Donc la région  $v_i$  rencontre  $v$  en au moins deux chemins. On a alors que  $G - \{v, v_i\}$  n'est pas connexe,  $v_{i+1}$  et  $v_{j+1}$  sont séparés, absurde par 3-connexité. Donc les  $v_i$  sont tous distincts. On construit à présent le témoin.

On place chaque sommet de  $V$  à l'intérieur de la région lui correspondant. On ajoute les points  $\gamma(t_i)$  au graphe, en les plaçant à leurs positions, et l'on relie  $v$  à tout ces points par des chemins dans sa région. On relie également toutes les régions contenant un point  $\gamma(t_i)$  à ce dernier par des chemins.

On a ainsi obtenu un cycle vérifiant par construction la seconde propriété de l'énoncé. Pour la première, pour un sens, il suffit de voir que tout les sommets adjacents à des  $\gamma(t_i)$  dans ce graphe sont des régions rencontrant  $v$ , donc des voisins. Réciproquement, un voisin de  $v$  est soit un  $v_i$ , soit rencontre ponctuellement  $v$  en un des  $\gamma(t_i)$  : si un voisin de  $v$  rencontre sa frontière en un point entre deux  $\gamma(t_i)$  et  $\gamma(t_{i+1})$ ,  $v_i$  n'est pas homéomorphe à un disque. On a bien la première propriété

Les sommets  $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_k)$ , qui correspondront à des éléments de  $U$ , sont tous utiles, et les faces présentes à l'intérieur du cycle sont bien bordées par 4 arrêtes. On complète ensuite le graphe pour obtenir un témoin compact de  $G$  quadrangulé □

**Corollaire 1.** *Soit  $G$  3-connexe admettant une carte complète et  $v \in V$ . Il existe un ordre total  $v_1, \dots, v_k$  sur les voisins de  $v$  induisant un cycle*

*Démonstration.* On se donne un témoin  $H$  vérifiant les propriétés de la proposition 3. Soit  $s_1, \dots, s_{2l}$  le cycle dans  $H$  donné par cette proposition. On suppose sans perte de généralité que  $s_1 \in V$ . Pour tout  $i$ , on pose  $E_i = \{s_i\}$  si  $i$  est impair, si  $i$  est pair,  $E_i$  correspond à l'ensemble des voisins de  $s_i$  hors cycle,  $v$  exclu. On ordonne alors  $N(v)$  comme suit : on ordonne chaque  $E_i$  selon un ordre arbitraire. Puis on ordonne ces ordres arbitraires de sorte à ce que tout les éléments de  $E_i$  soient plus petits que ceux de  $E_{i+1}$ . Cet ordre est bien total sur  $N(v)$  comme  $RA(\{s_1, \dots, s_{2l}\}) = N[v]$ . De plus ce dernier donne bien lieu à un cycle : en effet tout les sommets de  $E_i$  sont adjacents aux sommets de  $E_{i+1}$  (les indices étant pris modulo  $2l$ ), et les  $E_i$  pour  $i$  pair sont des cliques.  $\square$

**Lemme 1.** *Soit  $G$  un graphe de carte 3-connexe. Il existe un surgraphe de  $G$  à un sommet de plus admettant une carte complète.*

*Démonstration.* On se donne un témoin  $H$  de  $G$  et on note  $U$  l'ensemble des sommets autres que  $V$  de  $H$ . On peut supposer que  $H$  est construit de telle sorte à ce que  $d(u) \geq 2$  pour  $u \in U$ . Soit  $u \in U$ ,  $x, y \in V$  parmi ses voisins. Si  $x$  et  $y$  sont adjacents à la même face de  $H$ , alors on ajoute une arête entre  $x$  et  $y$  à l'intérieur de cette face, que l'on subdivise ensuite à l'aide d'un sommet afin de garder le graphe biparti. On répète alors ce processus jusqu'à ce que tout les sommets adjacents dans  $G$  soient reliés par deux chemins de longueur 2.

Le nouveau graphe  $H'$  est planaire biparti et 2-connexe : si l'on retire un sommet de  $V$  le graphe reste clairement connexe comme  $G$  est 3-connexe. Si l'on retire un sommet de  $U'$  (l'ensemble  $U$  avec les nouveaux sommets ajoutés),  $H$  reste aussi connexe : si le sommet retiré est parmi ceux de  $U' \setminus U$ , la construction de  $U'$  donne que le graphe reste connexe. Sinon, on se donne  $v_1, \dots, v_k$  les voisins de  $u$  le sommet retiré, tels que  $v_i$  et  $v_{i+1}$  soient adjacents à la même face. On a alors qu'après le retrait de  $u$ , par construction encore de  $U'$ , les  $v_i$  sont tous accessibles entre eux. On peut alors voir que cela implique que le graphe reste connexe et est un témoin de  $G$

On construit alors un surgraphe de  $H'$  que l'on va plonger dans le plan. On construit le surgraphe  $H''$  en itérant sur tout sommet  $v \in V$ , et en ajoutant une arête entre chaque paire  $u_1, u_2$  voisine de  $v$  adjacente à une même face, arête prenant la forme d'un chemin dans cette face. Si  $v$  est un sommet extérieur dans  $H'$ , et que l'on considère 2 de ses voisins dans  $H'$  eux aussi extérieurs, alors on choisira le chemin de telle sorte à ce que  $v$  devienne intérieur dans  $H''$ . Ainsi tout les éléments de  $U'$  deviennent de degré au moins 3.  $G$  étant 3-connexe, on peut alors voir que  $H''$  le devient également (on ne peut plus isoler de sommet de  $U'$ ).  $H''$  est également planaire et par construction, tout les sommets  $v \in V$  sont intérieurs.

**(merde faut montrer que les adjacences restent cohérentes aussi).** On construit à présent la carte : pour  $v \in V$ , la région associée à  $v$  est l'adhérence de la face dans laquelle se trouve le point  $v$  dans  $H'' - v$ . Cette face est bien homéomorphe à un disque, comme  $H'' - v$  est 2-connexe et qu'alors cette dernière est bordée par un cycle (voir ...), le théorème de Jordan-Schönflies nous donne ce que l'on veut. Cet ensemble de région correspond alors à l'intérieur du cycle de  $H''$  séparant la face non bornée des autres (comme  $H''$  est 2-connexe). Ainsi, pour les mêmes raisons, la face non bornée, vue dans  $\mathbb{S}^2$ , est homéomorphe à un disque. On ajoute alors un sommet à  $G$  correspondant à cette face et à ses adjacences dans cette carte. La carte est bien complète par construction  $\square$

**Définition** (Arrête sans trou). *On dit qu'une arête  $xy$  d'un graphe  $G$  3-connexe est sans trou si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes pour un certain  $S \subsetneq \{x, y\}$  :*

- *Pour toute clique max  $K$  de  $G[N(x) \cap N(y)]$ , si  $G - (K \cup \{x, y\})$  n'est pas connexe,  $G - (K \cup S)$  l'est aussi.*
- *Pour toute paire de cliques indépendantes maximales  $K^1, K^2$  de  $G[N(x) \cap N(y)]$ , si  $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$  n'est pas connexe,  $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$  l'est aussi, où  $\Delta$  est la différence symétrique sur les sommets de  $K^1$  et  $K^2$*

La définition est motivée par... le dessin qui n'est pas là

On considèrera par la suite que tout les graphes  $G$  sont de carte, 3-connexe, et admettent une carte complète

**Lemme 2.** *Soit  $xy \in E$ . Si  $xy$  est sans trou, alors dans toute carte complète de  $G$ , l'arrête  $xy$  est représentée par une adjacence connexe entre les deux régions, soit un chemin, soit un point*

*Démonstration.* On se donne une carte complète de  $G$  vérifiant ces conditions. Supposons par l'absurde que  $x$  et  $y$  ne se rencontrent pas en un ensemble connexe. On raisonne selon la nature de  $x \cap y$

Supposons cet ensemble discret, donc fini car compact. Notons alors ses points  $u_1, \dots, u_k$ ,  $k \geq 2$  dans l'ordre cyclique selon la frontière de  $x$ . On construit alors  $H$  un témoin compact quadrangulé de  $G$  à partir de cette carte, contenant les points  $u_1, \dots, u_k$  dont le voisinage correspond aux régions les contenant dans cette carte.

Si  $k \geq 4$ , alors en retirant les cliques max suivantes :  $K^1$  est l'ensemble des régions hors  $x, y$  contenant  $u_1$ ,  $K^2$  celles contenant  $u_k$ . Notons alors que ce témoin contient un cycle,  $x, u_1, y, u_k$ , dont les sommets de  $V$  à l'intérieur de ce dernier ne peuvent accéder à l'extérieur qu'en utilisant les points  $u_1$  et  $u_k$ . De même les sommets de  $K^1$  intérieurs à ce cycle ne peuvent se trouver dans  $K^2$ , car alors on aurait une arrête d'un sommet à l'intérieur du cycle  $x, u_1, y, u_2$  à  $u_k$ , ou à tous les sommets de  $K^2$ , qui sont tous à l'extérieur de ce cycle. En retirant  $K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\}$ , on sépare alors l'intérieur du cycle  $x, u_2, y, u_3$  du reste du graphe. Cela n'est plus le cas si on ne retire que  $x$  ou  $y$ , ainsi  $xy$  est à trou.

S

Si cet ensemble n'est pas discret, son nombre de composantes connexes étant fini par compacité, il est alors union disjointe de chemins et de points.

Sinon : cet ensemble ne peut contenir 2 chemins disjoints par 3-connexité : en effet dans ce cas  $G - \{x, y\}$  n'est pas connexe. Donc il contient un chemin et un point n'appartenant pas à ce dernier. On choisit alors un point  $u_1$  dans l'intérieur du chemin (pas à une de ses extrémités) et on note  $u_2$  un point de  $x \cap y$  n'appartenant pas au chemin. On construit un témoin  $H$  de la même manière que précédemment.

L'intérieur du cycle  $x, u_1, y, u_2$  contient un sommet de  $V$  pour les mêmes raisons qu'auparavant, sauf qu'ici  $u_1$  étant dans l'intérieur du chemin ne peut être adjacent à ce sommet. Notons  $K$  la clique formée des sommets extérieurs à ce cycle, excepté  $x$  et  $y$ , contenant le point  $u_2$ .  $G - K$  est connexe, pour les mêmes raisons que pour le cas précédent, tandis que  $G - (K \cup \{x, y\})$  ne l'est pas □

**Lemme 3.** *Pour tout  $v \in V$ , il existe  $u$  un voisin de  $v$  tel que  $uv$  soit sans trou*

*Démonstration.* On se donne une carte complète de  $G$ . La preuve du lemme ?? permet d'affirmer qu'il existe des régions  $u$  adjacentes à  $v$  telles que  $u \cap v$  ne soit pas discret. On suppose alors par l'absurde que toutes ces régions sont telles que  $u \cap v$  ne soit pas connexe. Mais alors,  $u \cup v$  sépare  $\mathbb{S}^2$  en au moins 2 composantes connexes, et la carte étant complète les deux sont totalement recouvertes par des régions. Ainsi,  $v$  a des voisins tels que leur intersection n'est pas discrète dans les deux composantes connexes ainsi délimitées. On considère alors un voisin dans l'une de ces composantes que l'on note  $C$  et on réitère le processus, en choisissant à chaque fois une composante incluse dans  $C$ . On obtient ainsi une infinité de régions distinctes ce qui est absurde car le graphe est fini.

Ainsi il existe  $u$  voisin de  $v$  tel que  $u \cap v$  soit un chemin. On montre alors qu'il existe un tel  $u$  tel que  $uv$  soit sans trou. Bon globalement faut distinguer selon si la frontière est recouverte ou pas □

**Proposition 4.** *Soit  $G$  admettant une carte complète et  $xy \in E$ . On suppose que  $xy$  est représentée dans une certaine carte complète de  $G$  par une adjacence en un seul point  $u$ . Si dans cette même carte, la clique formée des régions contenant  $u$  (hors  $x$  et  $y$ ) est supportée par d'autres points que  $u$ , alors  $G/xy$  admet une carte complète*

*Démonstration.* On se donne un témoin compact quadrangulé issu de la carte complète de l'énoncé,  $H$ . On suppose également sans perte de généralité que le plongement de  $H$  dans le plan donné est un plongement droit. On construit un nouveau témoin compact quadrangulé  $H'$  comme suit : on note  $K$  la clique formée des régions contenant  $u$ , hors  $x, y$ . On retire toute les arrête entre  $K$  et  $u$ .  $u$  devient alors

de degré 2, ayant pour seuls voisins  $x$  et  $y$ . On place alors un sommet  $u'$  arbitrairement proche de  $u$ , que l'on relie à  $x$  et  $y$  par des segments. Ensuite, par des arguments géométriques, tout sommet de  $K$  peut être relié par un segment soit à  $u$  soit à  $u'$ . On obtient alors au final un graphe planaire biparti quandrangué  $H'$ . Reste à voir que  $H'$  est un témoin compact de  $G$ .

Les seuls arrêtes de  $G$  impactées par les modifications sont les arrêtes entre sommets de  $K$  (celles avec  $x$  et  $y$  sont préservées comme on relie chaque sommet soit à  $u$  soit à  $u'$ ). Hors par hypothèse, la clique  $K$  est portée par d'autres points de la carte distincts de  $u$ . Ainsi la suppression de certaines arrêtes de  $K$  à  $u$  n'a pas d'impact sur les adjacences des sommets de  $K$ .  $H'$  est bien un témoin de  $G$ . Il est compact par sa construction comme  $H$  est un témoin compact

Il est alors facile de construire un témoin compact quandrangué de  $G/xy$  comme  $H'$  représente une carte où les régions  $x$  et  $y$  se rencontrent en un chemin □

Reformuler la propriété de sans trou, et reformuler la propriété (typiquement le premier point est pas en équivalence, le deuxième si par contre. Toutefois si le premier point échoue, alors on peut reconstruire la carte pour y enlever les trous). Sans trou est peut être plus intelligent dans le cas spécifique des graphes de carte, si on a une non instance de toute façon on le verra quand ça devient gênant

**Proposition 5.** *Soit  $xy \in E$ .  $xy$  est une arrête à trou si et seulement si pour tout  $S \subsetneq \{x, y\}$*

— *Soit pour  $K^1, K^2$  deux cliques max de  $G[N(x) \cap N(y)]$ ,  $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$  n'est pas connexe, où  $\Delta$  est la différence symétrique sur les sommets des deux cliques, et  $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$  l'est*

*Démonstration.* Si  $xy$  vérifie ces conditions, alors  $xy$  est une arrête à trou : il existe au plus 2 cliques  $K^1, K^2$  voisines de  $x$  et  $y$  telles que  $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$  ne soit pas connexe, tandis que pour  $S \subsetneq \{x, y\}$ ,  $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$  le soit.

Si  $xy$  est une arrête à trou : on se donne  $K^1, K^2$  les cliques voisines de  $x$  et  $y$  données par la définition. Si l'on peut prendre  $K^2$  vide :

On notera alors le  $K^1$  correspondant comme  $K$ . On se donne alors une clique max de  $G[N(x) \cap N(y)]$  contenant  $K$ , que l'on note  $K'$ . Notons  $C_1, \dots, C_k$  les composantes connexe de  $G - K - \{x, y\}$ ,  $k \geq 2$ . Si pour tout choix de  $K'$ , la propriété n'est pas vérifiée : alors pour tout  $K'$ , □

**Proposition 6.** *Soit  $G$ ,  $xy \in E$  une arrête. Supposons que  $G/xy$  admette une carte complète et soit 3-connexe. Soit  $H$  un témoin compact quadrangué de  $G/xy$ . Notons  $s_1, \dots, s_k$  le cycle séparant  $xy$  du reste de  $H$ . Si les voisins de  $x$  distincts de  $y$  sont exactement  $RA(\{s_i, \dots, s_{i+l}\}) - x$  et ceux de  $y$   $RA(\{s_{i+l}, \dots, s_{i-1}, s_i\}) - y$ , où  $i, l$  sont entiers et les indices sont vus modulo  $k$ , alors  $G$  admet une carte complète*

*Démonstration.* On construit la carte complète comme suit : on part de  $H$ , on retire  $xy$  et on ajoute  $x$  et  $y$  à l'intérieur du cycle séparant. Ensuite, on relie  $x$  à tout ses voisins de la manière suivante : si  $s_j \in U$  et que les deux voisins de  $s_j$  sur le cycle sont voisins de  $x$ , on ajoute une arrête entre  $x$  et  $s_j$ .

Si l'un des voisins de  $s_j$  n'est pas voisin de  $x$  et l'autre l'est, et que ce dernier n'a pas été pris en compte par l'étape précédente, c'est alors que  $x$  n'a qu'un voisin sur le cycle par les conditions précédentes : si il en avait plus de deux, il aurait été possible de tous les couvrir en considérant les sommets de  $U$  faisant la liaison. Dans ce cas, on relie  $x$  à son voisin par deux arrêtes subdivisées, et on relie  $y$  à chaque sommet situé joignant  $x$  à son voisin.

On effectue les mêmes étapes pour  $y$ . Si il n'existe aucun  $s_j \in U$  tels que ses deux voisins sur le cycle soient également voisins de  $x$  et  $y$ , cela signifie que  $s_i$  et  $s_{i+l}$  sont dans  $V$ . On ajoute alors deux sommet,  $s$  et  $s'$ , l'un relié à  $s_i, x, y$ , l'autre à  $s_{i+l}, x, y$ . On obtient au final un témoin de  $G$ , compact et quadrangué, donc  $G$  admet une carte complète □

**Lemme 4.** *On reprend les notations de la proposition 6. Les hypothèses concernant l'existence d'un tel témoin  $H$  sont équivalentes à la proposition suivante : il existe un ordre cyclique des voisins de  $xy$  dans  $G/xy$  tels que les voisins de  $x$  et de  $y$  forment deux intervalles (modulaires)*

*Démonstration.* Si □

### 3 Algorithmes