Stage Map Graphs

José Lorgeré

1er juillet 2025

Introduction

1 Trucs généraux

1.1 Résultats et définitions préliminaires

Définition (Carte)**.** *Une carte est une fonction $f : V \to \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ telle que pour tout $v \in V$, $f(v)$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^2$ et telle que pour $v \neq u$, $f(u)$ et $f(v)$ sont d'intérieur disjoints. Si f forme un recouvrement de $\mathbb{S}^2$, on la dira sans trou, ou complète. On appelera les $f(v)$ régions*

Définition (Graphe de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte s'il existe une carte f sur V telle que $xy \in E$ si et seulement si $f(x) \cap f(y) \neq \varnothing$*

Théorème 1 (Caractérisation des graphes de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte si et seulement si il existe H un graphe biparti planaire dont un des côtés de la bipartition est V, tel que $H^2[V] = G$. Un tel graphe H est appelé graphe témoin de G*

Proposition 1. *Si G est un graphe de carte, et $H = G[A]$ où $A \subset V$, alors H est un graphe de carte*

Démonstration. On reprend la carte de G où l'on ne garde que les régions identifées aux sommets présents dans A □

Définition (Join)**.** *Le join de 2 graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommet $V'' = V \cup V'$ et pour arrêtes*

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x \in V'\}$$

On notera pour tout $n \geq 1$ $K(n, G)$ le join d'un indépendant à n sommets avec le graphe G

Proposition 2. *Soit G un graphe à 3 sommets. $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K(3, G)$ est un graphe de carte. On se donne alors H vérifiant toutes les propriétés du théorème 1. On note pour tout v_i, sommet indépendant de $K(3, G)$, N_i son voisinage dans H incluant v_i. On note H' le graphe $(((H/N_1)/N_2)/N_3)$, qui est donc un mineur de H et donc planaire. Or $H' = K_{3,3}$: en effet N_i est adjacent à tout les sommets de G, comme le voisinage de v_i dans H l'est, car v_i l'est dans $K(3, G)$. De plus il n'y a pas d'arrêtes entre les sommets de G comme H est biparti, et pas d'arrêtes entre les différents N_i comme les v_i sont indépendants dans G.
Absurde, $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte □

2 Etude des cartes complètes 3-connexes

On va faire qqes lemmes sur les cartes complètes qui permettront de déblayer un algo

Lemme 1 (Cycle recouvrant)**.** *Soit G un graphe de carte 3-connexe à carte complète. Il existe un cycle, ou chemin de taille 2, C inclus dans le voisinage de v, tel que $N(v) \subset N(C)$*

Faut prendre en compte le cas où la fusion de v et d'une région n'est pas simplement connexe et intersecte en au moins 2 segments disjoints

Démonstration. On se donne une carte complète de G et on confondra alors sommets et régions. Les voisins de v sont exactement les régions rencontrant la frontière de v. Comme v est homéomorphe à un disque, on se donne $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ une courbe de Jordan paramétrant sa frontière. Notons u_0 une région distincte de v contenant $\gamma([t_0, \varepsilon[)$ pour ε assez petit, où $t_0 = 0$, cette dernière existe comme la carte est complète. On note $I_0 = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in u_0\}$ et $t_1 = \max(I_0)$. Si $t_1 = 1$, comme v est de degré au moins 2, il existe une autre région adjacente à v, en un point uniquement comme $t_1 = 1$. On peut alors montrer que γ n'est pas un lacet contractile dans u_0 et donc que u_0 n'est pas simplement connexe, absurde. Donc $t_1 < 1$. Par maximalité, $\gamma(t_1)$ est sur le bord de u_0 et donc il existe un u_1 vérifiant les mêmes propriétés que u_0 relativement à t_1. On a alors $u_0u_1 \in E$. On répète alors le processus afin de trouver $u_0, ..., u_k$, $k \geq 1$ formant un cycle

On construit alors le graphe témoin H comme suit : on commence par se donner un graphe témoin quelconque de $G - v$ construit à partir de la carte complète donnée, que l'on considèrera alors plongé dans le plan. On ajoute ensuite v : on ajoute au graphe témoin les sommets $\gamma(t_i)$, $1 \leq i \leq k$, à l'exception peut être de $\gamma(t_k)$ si $u_k = u_0$. On relie alors les regions u_i aux $\gamma(t_j)$ adjacents à ces dernières par des chemins, et on ajoute enfin un dernier point dans v, que l'on relie à chaque $\gamma(t_i)$. Par construction de γ, s'il existe une région adjacente à v distincte des u_i, leur intersection est incluse dans les $\gamma(t_i)$, et il suffit alors de relier $\gamma(t_i)$ au point représentant la région correspondante pour ainsi avoir un témoin de G. Notons que $u_0, \gamma(t_1), u_1, \gamma(t_2), ..., u_0$ est un cycle séparant v du reste de H par construction de ce dernier, et la construction des u_i implique que v leur est adjacent dans G □

Lemme 2. *Soit G un graphe de carte 3-connexe. Il existe un surgraphe de G à un sommet de plus admettant une carte complète.*

Démonstration. On se donne un témoin H de G et on note U l'ensemble des sommets autres que V de H. On peut supposer que H est construit de telle sorte à ce que $d(u) \geq 2$ pour $u \in U$. Soit $u \in U$, $x, y \in V$ parmi ses voisins. Si x et y sont adjacents à la même face de H, alors on ajoute une arrête entre x et y à l'intérieur de cette face, que l'on subdivise ensuite à l'aide d'un sommet afin de garder le graphe biparti. On répète alors ce processus jusqu'à ce que tout les sommets adjancents dans G soient reliés par deux chemins de longueur 2.

Le nouveau graphe H' est planaire biparti et 2-connexe : si l'on retire un sommet de V le graphe reste clairement connexe comme G est 3-connexe. Si l'on retire un sommet de U' (l'ensemble U avec les nouveaux sommets ajoutés), H reste aussi connexe : si le sommet retiré est parmi ceux de $U' \backslash U$, la construction de U' donne que le graphe reste connexe. Sinon, on se donne $v_1, ..., v_k$ les voisins de u le sommet retiré, tels que v_i et v_{i+1} soient adjacents à la même face. On a alors qu'après le retrait de u, par construction encore de U', les v_i sont tous accessibles entre eux. On peut alors voir que cela implique que le graphe reste connexe et est un témoin de G

On construit alors un surgraphe de H' que l'on va plonger dans le plan. On construit le surgraphe H'' en itérant sur tout sommet $v \in V$, et en ajoutant une arrête entre chaque paire u_1, u_2 voisine de v adjacente à une même face, arrête prenant la forme d'un chemin dans cette face. Si v est un sommet extérieur dans H', et que l'on considère 2 de ses voisins dans H' eux aussi extérieurs, alors on choisira le chemin de telle sorte à ce que v devienne intérieur dans H''. Ainsi tout les élements de U' deviennent de degré au moins 3. G étant 3-connexe, on peut alors voir que H'' le devient également (on ne peut plus isoler de sommet de U'). H'' est également planaire et par construction, tout les sommets $v \in V$ sont intérieurs.

(merde faut montrer que les adjacences restent cohérentes aussi). On construit à présent la carte : pour $v \in V$, la région associée à v est l'adhérence de la face dans laquelle se trouve le point v dans $H'' - v$. Cette face est bien homéomorphe à un disque, comme $H'' - v$ est 2-connexe et qu'alors cette dernière est bordée par un cycle (voir ...), le théorème de Jordan-Schönflies nous donne ce que l'on veut.

Cet ensemble de région correspond alors à l'intérieur du cycle de H'' séparant la face non bornée des autres (comme H'' est 2-connexe). Ainsi, pour les mêmes raisons, la face non bornée, vue dans $\mathbb{S}^2$, est homéomorphe à un disque. On ajoute alors un sommet à G correspondant à cette face et à ses adjacences dans cette carte. La carte est bien complète par construction

$\square$

Définition (Arrête sans trou)**.** *On dit qu'une arrête xy d'un graphe G 3-connexe est sans trou si et seulement si pour toute paire de cliques K^1, K^2, voisines toutes deux de x et y, si $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, alors $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$ ne l'est pas non plus pour un certain $S \subsetneq \{x, y\}$*

La définition est motivée par... le dessin qui n'est pas là

On considèrera par la suite que tout les graphes G sont de carte, 3-connexe, et admettent une carte complète

Lemme 3. *Soit $xy \in E$ tel que dans une certaine carte complète de G, x et y se rencontrent pas qu'en un seul point. Si xy est sans trou, alors G/xy admet une carte complète et reste 3-connexe*

Démonstration. On se donne une carte complète de G vérifiant ces conditions. Supposons par l'absurde que x et y ne se rencontrent pas selon un chemin. On raisonne selon la nature de $x \cap y$

Supposons cet ensemble discret, donc fini car compact. Notons alors ses points $u_1, ..., u_k$, $k \geq 2$ dans l'ordre cyclique selon la frontière de x. On construit alors H un témoin de G comme suit : on place x et y dans leurs régions respectives, $u_1, ..., u_k$ à leur position respectives et on relie x et y aux u_i par des chemins dans les régions x et y. La carte étant complète, en suivant le chemin de u_1 à u_2 le long de la frontière de x, on construit un chemin dans G de la même manière que dans le lemme 1. On place alors les régions et points de rencontre comme discuté dans le lemme 1 dans H. Ainsi, l'intérieur du cycle x, u_1, y, u_k dans H contient au moins un sommet de V. La carte étant complète, il existe des régions, extérieures aux cycles précedemment décrits, contenant les points u_1 et u_k. Les régions, distinctes de x et y, contenant u_1 forment une clique K^1 et celle contenant u_k une clique K^2, voisines toutes deux de x et y. En retirant les sommets de V formant ces cliques du graphe H, on remarque qu'il n'est plus connexe, comme l'intérieur du cycle x, u_1, y, u_k ne peut plus accéder aux sommets extérieurs à ce dernier, le seul chemin possible empruntant u_1 ou u_k qui n'a plus de voisins extérieurs. Donc $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe. Or $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$, $S \subsetneq \{x, y\}$, l'est car le témoin H où l'on retire uniquement les sommets adjacents à u_1 ou u_k extérieurs au cycle et éventuellement soit x soit y est connexe par construction de ce dernier

Si cet ensemble n'est pas discret, son nombre de composantes connexes étant fini par compacité, il est alors union disjointe de chemins et de points.
Si cet ensemble est connexe, il ne s'agit que d'un chemin, alors on peut construire une carte complète pour G/xy en représentant xy par l'intérieur du chemin obtenu en concaténant les parties disjointes des frontières de x et y, auquel on ajoute ce chemin.

Sinon : cet ensemble ne peut contenir 2 chemins disjoints par 3-connexité : en effet dans ce cas $G - \{x, y\}$ n'est pas connexe. Donc il contient un chemin et un point n'appartenant pas à ce dernier. On choisit alors un point u_1 dans l'intérieur du chemin (pas à une de ses éxtrémités) et on note u_2 un point de $x \cap y$ n'appartenant pas au chemin. On construit un témoin H de la même manière que précédemment. L'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 contient un sommet de V pour les mêmes raisons qu'auparavant, sauf qu'ici u_1 étant dans l'intérieur du chemin ne peut être adjacent à ce sommet. Notons K la clique formée des sommets extérieurs à ce cycle, excepté x et y, contenant le point u_2. $G - K$ est connexe, pour les mêmes raisons que pour le cas précédent, tandis que $G - (K \cup \{x, y\})$ ne l'est pas

La 3-connexité vient directement de la définition d'arrête sans trou $\square$

Lemme 4. *Pour tout $v \in V$, il existe u un voisin de v tel que uv vérifie les conditions du lemme 3*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. La preuve du lemme 1 permet d'affirmer qu'il existe des régions u adjacentes à v telles que $u \cap v$ ne soit pas discret. On suppose alors par l'absurde que toutes ces régions sont telles que $u \cap v$ ne soit pas connexe. Mais alors, $u \cup v$ sépare $\mathbb{S}^2$ en au moins 2 composantes connexes, et la carte étant complète les deux sont totalement recouvertes par des régions. Ainsi, v a des voisins tels que leur intersection n'est pas discrète dans les deux composantes connexes ainsi délimitées. On considère alors un voisin dans l'une de ces composantes que l'on note C et on réitère le processus, en choisissant à chaque fois une composante incluse dans C. On obtient ainsi une infinité de régions distinctes ce qui est absurde car le graphe est fini.

Ainsi il existe u voisin de v tel que $u \cap v$ soit un chemin. On montre alors qu'il existe un tel u tel que uv soit sans trou. Bon globalement faut distinguer selon si la frontière est recouverte ou pas $\square$

Proposition 3. *Un graphe G 3-connexe admet une carte complète si et seulement si il existe une certaine arrête $xy \in E$ telle que G/xy admette une carte complète, reste 3-connexe, et telle que, blabla condition sur le témoin de G/xy, globalement x et y se partagent leurs voisins de manière nice*

3 Algorithmes

La proposition d'avant est la base d'un algorithme