

Stage Map Graphs

José Lorgeré

1^{er} août 2025

Table des matières

1 Généralités sur les graphes de carte	2
1.1 Résultats et définitions préliminaires	2
1.2 Premières obstructions à l'existence de cartes	3
1.3 Cartes et connexités	5
2 Reconnaissance de sous classes	6
2.1 Cas des graphes trivialement parfaits	6
2.1.1 Cas 3-connexe	6
2.1.2 Cas général	7
2.2 Cas des cographes	8
2.2.1 Connexités et coarbres	8
2.2.2 Structure des cographes de carte	9
3 Quelques propriétés des graphes de cartes 3-connexes	13
3.1 Généralités	13
3.2 Cas particulier des graphes cordaux	14

Introduction

La notion de planarité est une des notions les plus influentes de la théorie des graphes, ayant motivé le célèbre théorème des 4 couleurs, et l'étude des liens et apports mutuels entre graphes et surfaces topologiques [1]. En 1998, Chen, Grigni et Papdimitriou introduisent une notion proche de la planarité, et une nouvelle classe de graphe, les graphes de carte [9]. Ces derniers sont définis comme graphes d'intersection de régions d'intérieurs disjoints sur la sphère : les sommets du graphe sont les régions, si deux régions se touchent, il y a une arête entre ces dernières. Cette notion peut faire penser à la formulation originale la plus connue du théorème des 4 couleurs qui énonce que l'on peut colorier toute carte en 4 couleurs sans que deux régions voisines n'aient la même couleur. Les graphes planaires sont en fait tous des graphes de carte. Toutefois, la classe des graphes de carte est bien plus large que celle des graphes planaires, contenant par exemple des cliques de toutes tailles. Cette dernière a des propriétés structurelles intéressantes, par exemple, son nombre de cliques maximales étant linéaire en le nombre de ses sommets [9], et l'on peut borner la taille de ses cliques maximales par $\frac{3k}{2}$ où k est le nombre maximal de régions autorisées à se rencontrer en un point [9]. Cette classe a également des propriétés algorithmiques intéressantes : le problème de l'indépendant maximum admet un schéma d'approximation en temps polynômial et le nombre chromatique peut être 2-approché en temps polynômial [7].

Dans leur article introductif, Chen et al. posent la question de la reconnaissance de cette nouvelle classe de graphe : décider si un graphe donné est de carte ou non. Il montrent que ce problème est dans NP, et donnent un algorithme polynômial dans un cas particulier, lorsque les régions recouvrent la sphère et qu'en tout point au plus 4 régions se rencontrent. En 1998, Thorup annonce avoir un algorithme

polynômial résolvant le problème [5]. Toutefois, l'algorithme a une complexité estimée de $O(n^{120})$ [8] et les détails ne sont jamais publiés. Plus récemment, un algorithme FPT a été obtenu [6] où le paramètre est la largeur arborescente du graphe.

J'ai travaillé pendant ce stage à l'élaboration d'algorithmes de reconnaissances des graphes de carte, et à trouver des caractérisations combinatoires de ces derniers : après avoir trouvé quelques graphes contre exemple relativement simples, j'ai pu classer les graphes de carte trivialement parfaits et les cographes de carte. Certaines de mes réflexions concernant les graphes 3-connexes de carte, en vue d'un algorithme généralisant les méthodes utilisées, sont également présentées. Certaines de mes contributions apportant peu au rapport, par exemple certaines démonstrations parfois longues, sont reléguées en annexe.

1 Généralités sur les graphes de carte

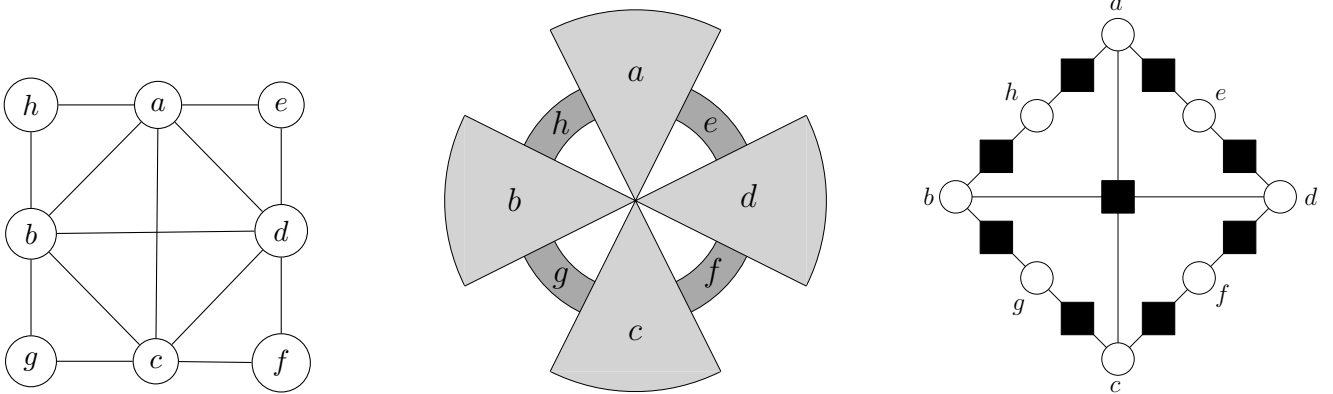
1.1 Résultats et définitions préliminaires

On commence par définir plus formellement ce que l'on entend lorsque l'on parle de régions et donc de graphes de carte.

Définition (Carte). *Une carte est une fonction $f : V \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ telle que pour tout $v \in V$, $f(v)$ est homéomorphe à \mathbb{D}^2 et telle que pour $v \neq u$, $f(u)$ et $f(v)$ sont d'intérieur disjoints. Si f forme un recouvrement de \mathbb{S}^2 , on la dira sans trou, ou complète. On appellera régions les images de f .*

Définition (Graphe de carte [9]). *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte s'il existe une carte f sur V telle que $xy \in E$ si et seulement si $f(x) \cap f(y) \neq \emptyset$.*

FIGURE 1 – Un graphe, une carte, et un témoin associés à ce dernier.



La caractérisation suivante permet d'envisager les graphes de carte de manière bien plus combinatoire que la définition précédente. Si G est un graphe et $S \subset V$, $G[S]$ désigne le sous graphe induit de G par S . G^2 désigne le graphe sur le même ensemble de sommets, où xy est une arête si et seulement si il existe un chemin de longueur 2 de x à y .

Théorème 1 (Témoins des graphes de carte [9]). *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte si et seulement si il existe H un graphe biparti planaire, de bipartition V, U , tel que $H^2[V] = G$. Un tel graphe H est appelé graphe témoin de G .*

Le témoin est construit depuis une carte comme suit : les sommets de V sont placés à l'intérieur de leur région respective. Les sommets de U quant à eux représentent les points de rencontre entre différentes régions : si deux régions se rencontrent, on place un sommet de U dans leur frontière commune et on relie les sommets de V respectifs à ce sommet par des chemins à valeur dans les régions respectives.

La proposition suivante montre une certaine stabilité de la classe des graphes de carte.

Proposition 1. *Si G est un graphe de carte, et $H = G[A]$ où $A \subset V$, alors H est un graphe de carte.*

Démonstration. On considère la restriction de la carte de G à A . □

Toutefois, comme on le verra plus tard, les graphes de carte ne sont ni stables par retrait d'arrêtes, ni par contraction d'arrêtes. On ne peut donc espérer obtenir des caractérisations similaires aux graphes planaires, par mineurs interdits.

On introduit ensuite quelques concepts communs et notations utiles pour la suite de l'étude.

Définition (Join). *Le join de 2 graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommet $V'' = V \sqcup V'$ et pour arrêtes*

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x' \in V'\}$$

On notera pour tout $n \geq 1$ $K(n, G)$ le join d'un indépendant à n sommets avec le graphe G . Plus généralement, le join des graphes G et G' sera noté $K(G, G')$. Cette opération étant associative, on se permettra d'écrire $K(G, H, L)$ pour désigner le join successif de G à H puis à L .

Si un graphe G est de la forme $K(K_n, H)$, les sommets de K_n seront dits universels. Plus généralement, un sommet universel est un sommet adjacent à tout les sommets du graphe.

Définition (Cliques indépendantes). *Pour tout $k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 1$, on dénotera par I_{n_1, \dots, n_k} le graphe complémentaire de K_{n_1, \dots, n_k} . Ainsi I_n est l'indépendant à n sommets pour n un entier, et I_{n_1, \dots, n_k} pour $k \geq 2$ est composé de k composantes connexes, qui sont toutes des cliques de tailles n_1, \dots, n_k .*

Définition (Union disjointe). *L'union disjointe de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommets $V \sqcup V'$ et pour arrêtes $E \cup E'$. On notera cette dernière $I(G, G')$. Cette opération étant également associative, on se permettra de reprendre la convention du join.*

On notera pour tout $n \geq 1$, $I(n, G)$ l'union disjointe d'une clique à n sommets et du graphe G .

Enfin on introduit le concept d'adjacence réelle pour les témoins, permettant de simplifier les preuves et les notations.

Définition (Adjacence réelle). *Pour $H = (V \cup U, E')$ un témoin de G , on définit l'adjacence réelle, $RA(x)$ d'un sommet $x \in V \cup U$ comme suit :*

- Si $x \in V$, $RA(x) = \{x\}$
- Si $x \in U$, $RA(x) = N(x)$

On définit alors l'adjacence réelle d'un sous ensemble $S \subset V \cup U$ par

$$RA(S) = \bigcup_{x \in S} RA(x)$$

1.2 Premières obstructions à l'existence de cartes

Comme beaucoup de problèmes concernant des représentations de graphes, il est bien plus simple de montrer qu'un graphe admet une carte que de montrer qu'il ne peut en admettre. On peut bien sûr trouver des graphes n'admettant pas de carte en exploitant le fait que le nombre de cliques maximales dans un graphe de carte est linéaire en le nombre de sommets. Les graphes bipartis complets ne sont donc plus de carte à partir d'un certain rang, tout comme les graphes $K_{r, \dots, r}$. Le rang trouvé est toutefois élevé. On trouve ici des graphes contre exemples relativement simples.

Lemme 1. *Un graphe G a pour mineur $K_{3,3}$ si et seulement si il existe 6 sommets, $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ et des chemins $P_{i,j}$ de s_i à t_j pour tout i, j tels que*

- Pour tout $i \neq i', j \neq j'$, $P_{i',j'}$ et $P_{i,j}$ ne se rencontrent pas
- Pour tout i , s_i et t_i ne sont sommet intermédiaire d'aucun des chemins
- Si deux de ces chemins se rencontrent, leur intersection est également un chemin

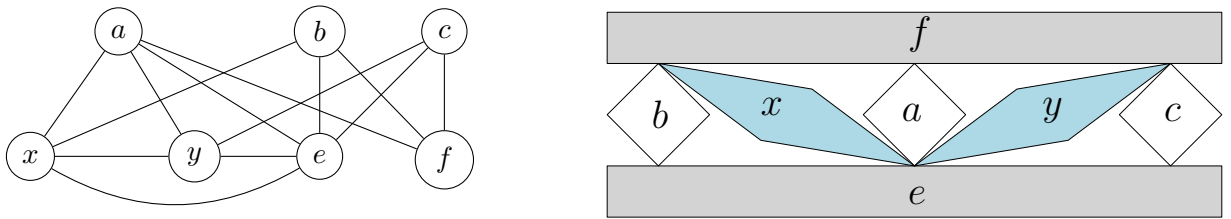
Rappelons que la stabilité par mineur des graphes planaires implique qu'un graphe possédant un mineur $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Proposition 2. Soit G un graphe à 3 sommets. $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K(3, G)$ est un graphe de carte. On se donne alors H vérifiant toutes les propriétés du Théorème 1, et étant donc planaire. On note pour tout v_i , sommet indépendant de $K(3, G)$, N_i son voisinage dans H incluant v_i . Notons que pour $i \neq j$, N_i et N_j sont disjoints comme v_i et v_j sont indépendants. Comme les chemins de v_i aux sommets de G n'empruntent que des sommets de N_i , mis à part le sommet de G , les hypothèses du Lemme 1 sont vérifiées. H a donc pour mineur $K_{3,3}$, absurde par planarité. $K(3, G)$ n'est donc pas un graphe de carte. \square

Notons toutefois que $K(2, G)$ lui est un graphe de carte, et que le join de 2 graphes à 3 sommets tous deux non indépendants est de carte également. On peut déduire de cette proposition que la classe des graphes de carte n'est pas stable par retrait d'arrête : en effet K_6 est de carte mais $K_{3,3}$ ne l'est pas. On peut également en déduire que les graphes de carte ne sont pas stables par contraction d'arrêtes, le graphe Figure 2 en est un contre exemple.

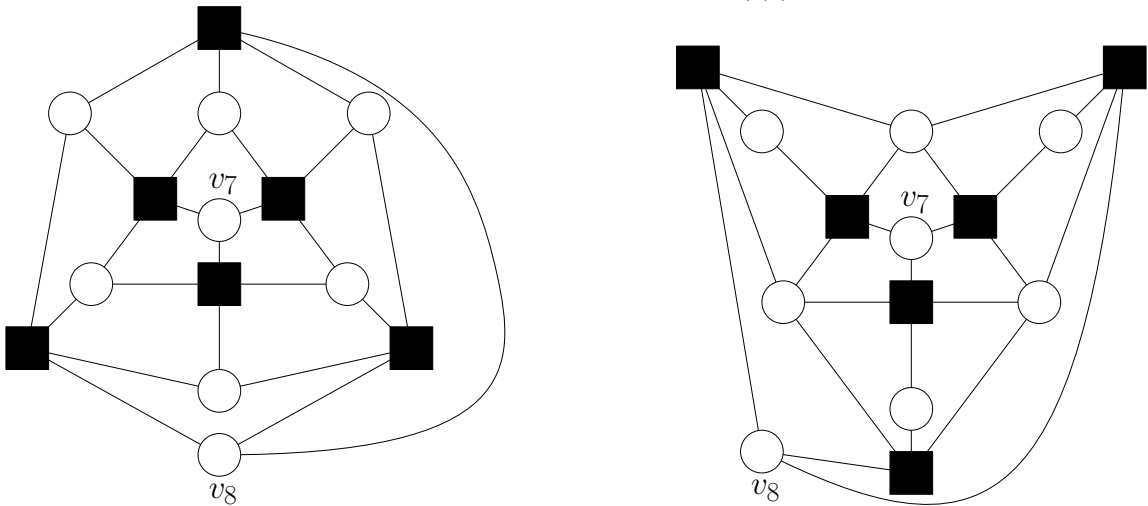
FIGURE 2 – Un graphe de carte dont la contraction de xy le transforme en un $K(3, G)$.



Il est également possible de trouver des graphes n'étant pas de carte et n'ayant pas 3 sommets indépendants, comme le montrent les propositions suivantes.

Proposition 3. $K(2, 2, 2, K_5)$ n'est pas un graphe de carte.

FIGURE 3 – Des témoins de $K_{2,2,2,2}$.



Lemme 2. $K_{2,2,2,2}$ est de carte et tout témoin de ce dernier a pour sous graphe induit un des graphes Figure 3.

Proposition 4. $K_{2,2,2,2,1}$ et $K(2, 2, 2, I_{2,1})$ ne sont pas des graphes de carte.

Démonstration. Si un témoin d'un de ces deux graphes existe, il a pour sous graphe induit un des deux témoins du Lemme 2 : en effet, en retirant les sommets supplémentaires de $K_{2,2,2,1}$ ou $K(2, 2, 2, I_{2,1})$, on obtient un témoin de $K_{2,2,2,2}$. Ainsi un témoin d'un de ces deux graphes est construit depuis ceux du Lemme 2 par ajouts de sommets et d'arrêtes ayant à l'une de ses extrémités un de ces sommets ajoutés. Dans le cas $K_{2,2,2,1}$, le sommet ajouté doit être universel. Or aucune face des témoins n'a pour adjacence réelle l'intégralité des sommets de V , donc le graphe ne peut être de carte. Dans le cas $K(2, 2, 2, I_{2,1})$, le sommet ajouté doit être adjacent à tout les sommets sauf un. Là encore c'est impossible, et le graphe n'est donc pas de carte. \square

1.3 Cartes et connexités

La propriété "de carte" d'un graphe a des interactions avec la connexité de ce dernier, et à quel point cette connexité est forte. Par exemple, un graphe est de carte si et seulement si chacune de ses composantes connexes l'est, ce qui peut se montrer facilement à l'aide d'un témoin. Dans toute la suite, on considèrera alors que tout les graphes que l'on cherche à étudier sont connexes.

Un séparateur d'un graphe connexe est un ensemble de sommets tel que leur retrait sépare le graphe en plusieurs composantes connexes. Un graphe sera dit k -connexe, $k \geq 2$ si tout les séparateurs ont au moins k sommets. On manipulera par la suite les composantes 2-connexes d'un graphe, c'est à dire l'ensemble des sous graphes induits 2-connexes maximaux. Ces derniers sont uniques.

Les graphes admettant une carte complète ont des propriétés de connexité particulière : on peut en effet montrer par des arguments topologiques (en exploitant le fait que chaque région est homéomorphe à un disque) qu'un graphe admettant une telle carte est nécessairement 2-connexe. Ceci couplé à la proposition suivante permet de dire que l'on peut accéder à toutes les propriétés intéressantes des graphes de carte en ne s'intéressant qu'à ceux 2-connexes.

Proposition 5. [6] *Un graphe G est de carte si et seulement si toutes ses composantes 2-connexes le sont.*

On peut par exemple en déduire qu'un block graph, c'est à dire un graphe dont les composantes 2-connexes sont des cliques, est alors toujours un graphe de carte, et admet une carte complète si et seulement si ce dernier est une clique

On pourrait alors se demander, à la lumière des exemples de $K(3, G)$ et $K_{2,2,2,2}$ si un graphe n'étant pas 3-connexe peut ne pas être de carte. Le graphe donné par un $K_{3,3}$ auquel on ajoute un sommet de degré 2 n'est pas 3-connexe et n'est pas de carte.

La 3-connexité jouant un rôle important dans la suite, on se propose de voir comment on peut se ramener à l'étude des graphes 3-connexes à partir d'un graphe 2-connexe. On suit ici partiellement les idées développées en [3].

Si $\{x, y\} \subset V$ est un séparateur d'un graphe 2-connexe G , on note C_1, \dots, C_k les composantes connexes de $G - \{x, y\}$. Pour tout i , on note G_i le graphe induit par $C_i \cup \{x, y\}$ auquel on a rajouté l'arrête xy . G_i est 2-connexe. Si G_i n'est pas 3-connexe, il existe alors séparateur de taille 2 et on peut ainsi recommencer ce processus. En répétant ce processus, on finit par obtenir un ensemble de graphes 3-connexes. La donnée de ces graphes finaux ainsi que celle des 2-séparateurs permettant de les obtenir sera appelée une décomposition 3-connexe de G . Les graphes 3-connexes finaux seront appelés des composantes 3-connexes de G associés à cette décomposition.

Proposition 6. *Soit G un graphe de carte 2-connexe. Pour toute décomposition 3-connexe de G , ses composantes sont des graphes de carte.*

Démonstration. On montre uniquement que, étant donné un séparateur $\{x, y\}$ de G , tout les G_i associés sont des graphes de carte. Si xy est une arrête de G , alors chaque G_i est un sous graphe induit de G et on a ce qu'on veut. Sinon, on construit une carte de G_i à partir de celle de G : comme $\{x, y\}$ est un séparateur, il existe au moins une autre composante connexe de $G - \{x, y\}$, que l'on note C_j , $j \neq i$. x et y étant reliés à C_j , il existe un chemin de x à y dans C_j . On se donne un témoin H associé à G . L'existence

de ce chemin dans G donne un chemin dans H de x à y , jamais voisin d'un sommet de C_i sauf en x et y . En considérant le sous graphe de H obtenu en ne considérant que le voisinage de C_i et le chemin de x à y évoqué, on peut en contractant des arrêtes du chemin obtenir un témoin de G_i . \square

2 Reconnaissance de sous classes

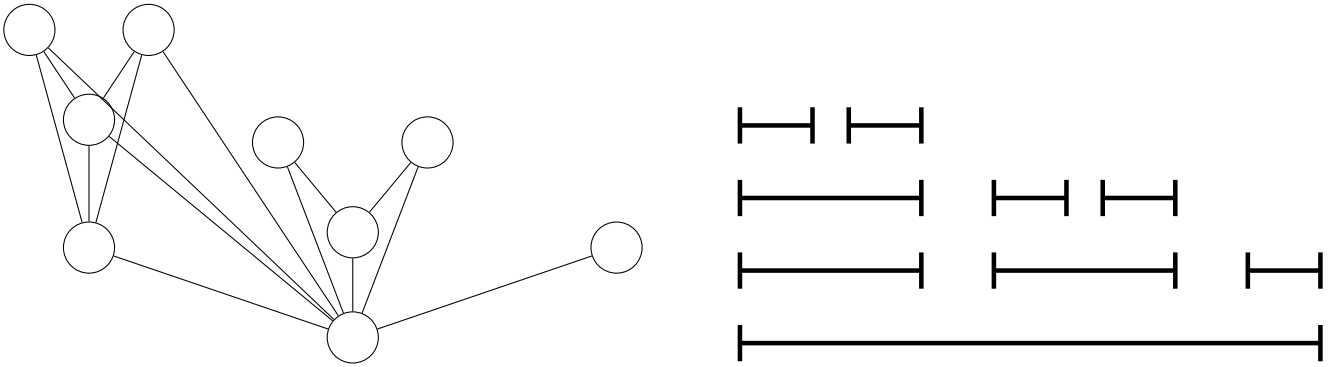
On a à présent les outils et sous graphes induits interdits nécessaires pour traiter le problème de reconnaissance dans certains cas particuliers.

2.1 Cas des graphes trivialement parfaits

Un graphe G sera dit trivialement parfait s'il ne contient pas les graphes P_4 et C_4 en sous graphe induit. Il est équivalent de définir cette classe comme une certaine sous classe des graphes d'intervalles. Un graphe trivialement parfait est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles "emboîtés" : si I et J sont deux intervalles représentant des sommets de G , si $I \cap J \neq \emptyset$, alors $I \subset J$ ou inversement. Un exemple d'une telle représentation est donné Figure 4.

Cette définition par les intervalles permet de voir facilement que l'unique séparateur minimal d'un graphe trivialement parfait G est composé de l'ensemble des sommets universels de G . Ainsi G est 3-connexe si et seulement si il possède au moins 3 sommets universels.

FIGURE 4 – Un graphe trivialement parfait et sa représentation par des intervalles emboîtés.



2.1.1 Cas 3-connexe

On se fixe pour la suite un graphe G trivialement parfait 3-connexe.

Lemme 3. *Si G a 3 sommets indépendants, il n'est pas de carte.*

Démonstration. Un tel graphe contient $K(3, K_3)$ parmi ses sous graphes induits, par les remarques précédentes. \square

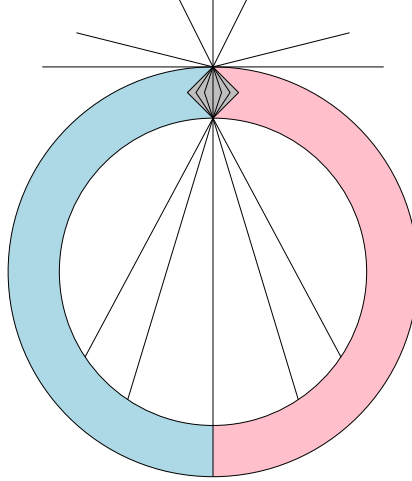
Supposons que G ne soit pas une clique. On peut déduire de ce lemme que le séparateur minimal de G le sépare en 2 composantes connexes. Notons que ce séparateur est une clique de taille au moins 3. Notons C_1 et C_2 les 2 composantes connexes séparées par ce séparateur. Le Lemme 3 permet également de déduire que C_1 et C_2 sont des cliques : en effet si C_1 n'est pas une clique, il contient 2 sommets indépendants. On a donc un indépendant de taille 3 constitué de ces 2 sommets et d'un sommet de C_2 . On en déduit le lemme suivant :

Lemme 4. *G est de carte si et seulement c'est une clique ou un $K(K_n, I_{p,q})$ avec $n \geq 3$. De plus, la carte donnée est complète.*

Démonstration. Le sens direct a déjà été traité précédemment.

Pour le sens réciproque, toute clique admettant une carte complète, on se concentre sur le second cas. On construit alors une carte complète pour $K(K_n, I_{p,q})$ comme illustré figure 5. \square

FIGURE 5 – Carte complète pour $K(K_n, I_{p,q})$.
Le séparateur en "donut" représente la clique K_n



2.1.2 Cas général

On s'intéresse à présent au cas où G est 2-connexe, qui conclura l'analyse des graphes trivialement parfaits par la proposition 5 et le fait qu'un graphe à carte complète est nécessairement 2-connexe. Comme précédemment, la 2-connexité de G impose l'existence de 2 sommets universels. S'il y en a 3, la question a déjà été réglée précédemment car G est alors 3-connexe. Notons que le séparateur minimal étant unique et universel, G n'a qu'une seule décomposition 3-connexe. On parlera alors simplement de composantes 3-connexes de G sans préciser de décomposition.

Théorème 2. *Un graphe G trivialement parfait 2-connexe est de carte si et seulement si chacune de ses composantes 3-connexe est de carte. De plus la carte de G que l'on construit est complète.*

Démonstration. Si G est de carte, toutes ses composantes 3-connexes sont de carte par la proposition 6. Pour le sens réciproque, le Lemme 4, nous donne la forme des composantes 3-connexes de G . Notons C_1, \dots, C_k les composantes 3-connexes de G . On construit alors une carte comme suit : on place 2 régions associées aux 2 universels, u et v , de G , que l'on fait se rencontrer en $k + 1$ chemins disjoints. Ainsi après retrait de ces 2 régions, la sphère est séparée en k composantes connexes.

Si C_i , $1 \leq i \leq k$, est une clique, on place dans une des k composantes connexes encore libre une clique remplissant entièrement cette composante, portée par un point de rencontre entre u et v . Sinon C_i est de la forme $K(K_n, I_{p,q})$, $n \geq 3$. On représente alors les sommets distincts de u et v formant le K_n par une clique séparant la composante en deux, de telle sorte à ce que chaque partie ait accès à un point portant cette clique. On remplit ensuite chaque partie par une clique portée par un point porteur de la clique K_n . \square

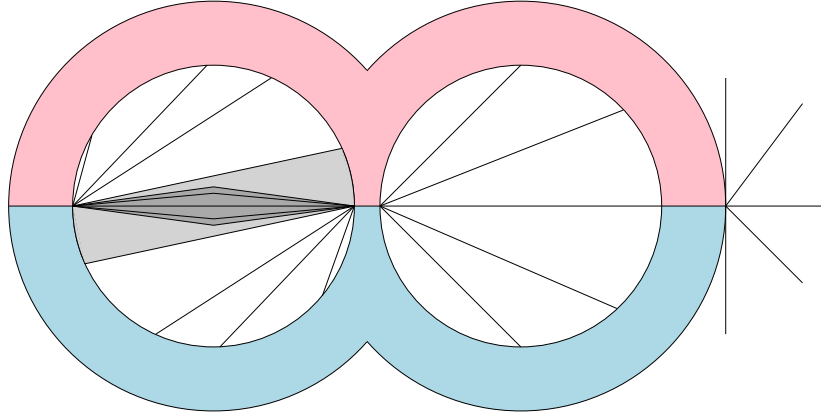
Notons alors que les graphes trivialement parfaits de carte sont exactement les graphes ne possédant pas $C_4, P_4, K(3, K_3)$ parmi leur sous graphes induits : en effet, un graphe trivialement parfait de carte vérifie cette condition, et réciproquement, un graphe n'ayant pas ces 3 sous graphes induits sera de carte car tout le raisonnement est basé sur le seul Lemme 3.

(A rediscuter avec la possibilité de juste passer en force par les sous graphes interdits) On en déduit alors un algorithme en temps polynômial décidant si un graphe G trivialement parfait est de carte : on commence par séparer G en ses composantes connexes puis 2-connexes, puis 3-connexes.

Puis, afin de décider si les composantes 3-connexes ont bien la forme souhaitée, on emploie l'algorithme suivant : on liste les cliques max de la composante, si la composante elle-même est une clique max, il n'y a alors qu'une seule clique max et ce cas est donc vu dès la première clique listée. On renvoie alors une

FIGURE 6 – Illustration de la construction du Théorème 2

Dans le "trou" de gauche, on a représenté un $K(K_n, I_{p,q})$, alors que dans le "trou" extérieur et de droite, on a représenté des cliques



réponse positive. Si il n'y a que 2 cliques max, chaque sommet étant dans au moins une clique max, ces deux dernières recouvrent la composante 3-connexe. La 3-connexité impose que ces deux dernières se rencontrent en au moins 3 points, le graphe est alors de la forme $K(K_n, I_{p,q})$, les 2 cliques max ayant $n + p$ et $n + q$ sommets chacune, la clique K_n , $n \geq 3$ étant formée des sommets communs aux deux cliques max. On renvoie alors aussi une réponse positive. Si il y a plus de 3 cliques max, on renvoie une réponse négative.

2.2 Cas des cographe

Une classe plus large que celle des graphes trivialement parfaits est celle des cographe : un graphe est un cographe s'il ne possède pas P_4 parmi ses sous graphes induits. Il est équivalent de les définir comme le plus petit ensemble de graphes contenant le sommet, stable par union disjointe et join [2]. Cette dernière caractérisation s'avèrera plus intéressante pour l'étude.

En effet cette dernière donne lieu à une représentation des cographe par des arbres enracinés : il s'agit en fait d'utiliser l'arbre enraciné des opérations, de join (étiqueté par 1) et union disjointe (étiquetée par 0), nécessaires afin d'obtenir le cographe en question, où les feuilles sont donc les sommets du graphe. Deux sommets sont alors adjacents si et seulement si leur plus petit ancêtre commun est un 1. Les opérations de join et union disjointe étant associatives, il est alors possible de compacter le coarbre de telle sorte à ce qu'un noeud 1 ne puisse avoir comme enfant que des noeuds 0 ou des sommets et de même pour 0. La représentation devient alors unique pour un cographe donné, on appelle cet arbre le coarbre associé au cographe [2], la Figure 7 donne un exemple d'un cographe et de son coarbre. On remarquera que les opérations de join et union disjointe étant au moins binaires, tout les noeuds internes ont au moins 2 enfants.

2.2.1 Connexités et coarbres

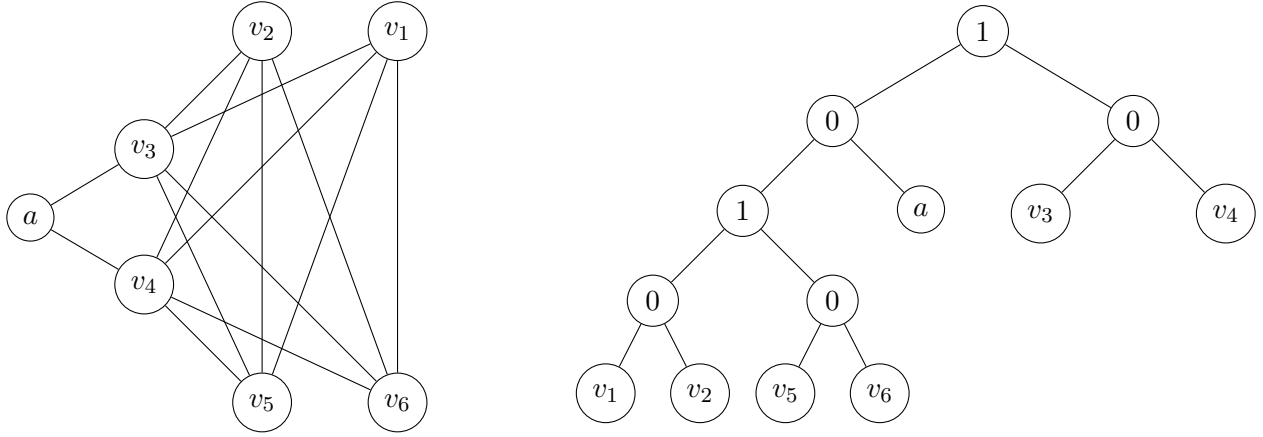
On discutera ici de comment se manifeste les différentes propriétés de connexité des cographe au niveau de leur coarbre associé. Le lemme suivant caractérise la connexité par la racine de du coarbre.

Lemme 5. *Un cographe G est connexe si et seulement si son coarbre T a pour racine un noeud 1.*

Dont on peut déduire la proposition suivante :

Proposition 7. *Soit G un cographe connexe et T son coarbre. Notons T_1, \dots, T_k les sous arbres de T enracinés en les enfants de la racine de T . Les séparateurs minimaux de G sont exactement les $\bigcup_{i \neq j} V(T_i)$ où j parcourt l'ensemble des indices de $1, \dots, k$ tels que T_j ne soit pas une feuille.*

FIGURE 7 – Le graphe $K(2, I(1, K_{2,2}))$ et son coarbre.



Démonstration. Les ensembles décrits sont bien des séparateurs : notons $S_j = \bigcup_{i \neq j} V(T_i)$ pour un tel j .

$G - S_j$ peut être représenté par l'arbre T où l'on a retiré les sous arbres $T_i, i \neq j$. Mais alors la racine n'a plus qu'un enfant et sa représentation est donc inutile. Donc $G - S_j$ peut être représenté par T_j , il s'agit même de son coarbre. Or T_j a un 0 à sa racine comme ce n'est pas une feuille.

Soit S un séparateur. Soient s, t deux sommets séparés par S . Le plus petit ancêtre commun de s et t dans T est donc un noeud 0. T étant le coarbre de G , connexe, 0 a pour parent un noeud 1. Tout r descendant de ce noeud, n'étant pas dans le sous arbre contenant s et t fournit un chemin de longueur 3 de s à t . En particulier, en notant j l'indice du sous arbre de la racine contenant s et t , T_j n'est pas une feuille et S contient alors $V(T_i)$ pour tout $i \neq j$. Donc $S_j \subset S$. On a alors montré que les S_j sont des séparateurs minimaux, et que ce sont les seuls. \square

Corollaire 1. *Un cographes G est k -connexe si et seulement si pour tout j tel que T_j n'est pas une feuille, $\sum_{i \neq j} |V(T_i)| \geq k$.*

On mènera alors une étude similaire aux graphes trivialement parfaits, en se concentrant d'abord sur les cographes à forte connexité pour ensuite généraliser les résultats.

2.2.2 Structure des cographes de carte

On s'intéressera d'abord aux cographes 3-connexes de carte que le théorème suivant permet de classer. On utilisera les résultats des Propositions 2, 3, 4.

Théorème 3. *Soit G un cographie 3-connexe. G est de carte si et seulement si il est de l'une des formes suivantes*

- $K_n, n \geq 3$
- $K(I_{p,q}, K_n), n \geq 3$
- $K(I_{p,q}, I_{r,s}, K_n), p, q, r, s, n \geq 1$, tels que le graphe soit 3-connexe
- $K(I_{p,q}, I_{r,s}, I_{t,u}, K_n), p, q, r, s, t, u \geq 1, n \leq 4$
- $K_{2,2,2,2}$

Démonstration. Supposons G de carte. Notons T son coarbre. On va contraindre T pour ensuite aboutir aux 5 formes de l'énoncé.

Notons d'abord que tout noeud 0 a exactement 2 fils : si l'un d'entre eux en avait plus de 3, on aurait alors 3 sommets indépendants. G étant 3-connexe, le Corollaire 1 donne 3 sommets ayant pour plus petit ancêtre commun avec le noeud 0 à 3 fils la racine de T . On a ainsi construit un sous graphe induit $K(3, H)$, absurde comme G est de carte.

On contraint ensuite le nombre d'enfant des noeuds 1 : il n'existe aucun noeud 1 de T ayant plus de 5 fils 0 : chaque noeud 0 ayant au moins deux descendants sommets, on pourrait alors construire un sous graphe induit $K_{2,2,2,2,1}$, impossible comme G est de carte. Pour les mêmes raisons, si un noeud a 4 fils 0, il ne peut avoir aucun autre enfant. Si un noeud a 3 fils 0, il ne peut posséder 5 autres fils sommets : on pourrait en effet construire un sous graphe induit $K(2, 2, 2, K_5)$.

Enfin, T est de hauteur au plus 4 : supposons qu'il soit de hauteur au moins 5. Il existe donc une branche de T dont les noeuds sont étiquetés, de haut en bas, 1, 0, 1, 0, Le premier 0 ayant au moins 2 fils, on se donne v un sommet descendant de ce noeud ne descendant pas du noeud 1 situé juste après sur la branche. Le deuxième noeud 0 nous donne deux sommets u, w , indépendants. u et v ont pour plus petit ancêtre commun le premier noeud 0 de la branche, donc sont indépendants, de même pour w et v . On a ainsi un indépendant de taille 3. G étant 3-connexe, le Corollaire 1 donne comme précédemment un sous graphe induit $K(3, H)$, absurde comme G est de carte.

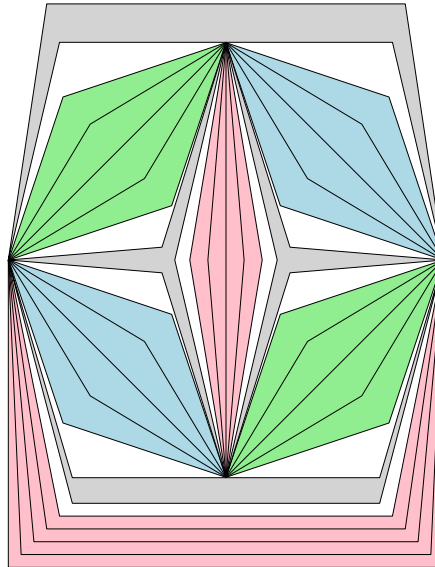
On distingue à présent selon k , le nombre de fils 0 de la racine. Les remarques précédentes donnent que :

- Si $k = 0$, G est une clique
- Si $k = 1$, $G = K(I_{p,q}, K_n)$
- Si $k = 2$, $G = K(I_{p,q}, I_{r,s}, K_n)$
- Si $k = 3$, $G = K(I_{p,q}, K_{r,s}, I_{t,u}, K_n)$, $n \leq 4$
- Si $k = 4$: supposons T de hauteur au moins 4. Donc l'un des 4 fils 0 de la racine a un fils 1, ayant au moins 2 descendants sommets. En considérant un descendant sommet de ce noeud 0 n'étant pas dans le même sous arbre que celui enraciné en le fils 1, et 2 sommets indépendants par autres fils 0 de la racine, on obtient un sous graphe induit $K(2, 2, 2, I_{2,1})$, absurde G étant de carte. Donc T est de hauteur 3, et on a donc $G = K_{2,2,2,2}$

On suppose à présent que G est de la forme souhaitée. Le premier cas est trivial, le deuxième a déjà été traité par la Figure 5. Le troisième et quatrième cas sont traités par la Figure 8, quitte à retirer des composantes de couleur ou des sommets spécifiques. Enfin le Lemme 2 nous donne le cinquième cas. \square

FIGURE 8 – Une carte du graphe $K(I_{p,q}, I_{r,s}, I_{t,u}, K_4)$.

Chaque couleur représente une paire de clique indépendantes distincte. Les régions grises représentent la clique K_4



Définition (Type). Si G est un cographie 3-connexe de carte, on dira qu'il est de type 0, 1, 2; 3 ou 4 selon le nombre de fils 0 de la racine de son coarbre.

Les différents graphes obtenables pour chaque type sont respectivement ceux cités dans l'énoncé du Théorème 3.

On s'intéresse à présent plus généralement à la reconnaissance des cograves de carte 2-connexe. Le cas 3-connexe ayant déjà été traité, on se limite aux graphes ayant des séparateurs de taille 2. Notons d'abord que, contrairement aux graphes trivialement parfaits, les obstructions au fait d'être de carte ne sont pas toutes dues à la forme des composantes 3-connexes dans une décomposition quelconque, mais également à la manière d'assembler ces composantes, comme l'illustre le lemme suivant.

Lemme 6. *Les graphes $K(2, I(1, K_{2,2}))$ et $K(K_2, I(1, K_{2,2,2}))$ ne sont pas de carte.*

On remarque que, par la forme des séparateurs minimaux donnée par la proposition 7, le seul cograve 2-connexe n'ayant pas un unique séparateur minimal de taille 2 est $K_{2,2}$: en effet si on souhaite avoir plus d'un séparateur minimal, la racine du coarbre doit avoir au moins 2 fils 0. Elle doit en avoir en fait exactement 2 sinon le grave devient 3-connexe. Chaque fils 0 ayant au moins 2 sommets descendants, la racine ne peut avoir d'autres fils. Enfin l'existence de 2 séparateurs minimaux de taille 2 finit d'imposer la structure du coarbre.

Ainsi, dès que le cograve a plus de 5 sommets, il ne possède qu'un seul séparateur de taille 2. Notons que les composantes 3-connexes du cograve G sont alors obtenues en une seule étape de décomposition : en effet le coarbre associé à un des graphes G_i , en reprenant les notations de 1.3, a pour racine 1, et a pour enfants les sommets x, y séparant le grave. Ses autres enfants sont les fils du noeud 1 dans le coarbre de G représentant la composante C_i , ou un unique sommet si cette composante n'est composée que d'un sommet. Dans le deuxième cas, $G_i = K_3$. Dans le premier, si G_i n'est pas 3-connexe, il doit exister un fils de la racine 0, et les autres sous arbres de la racine ne doivent pas excéder 2 sommets. Impossible, le noeud 1 racine du coarbre de C_i a au moins 2 fils, l'un d'entre eux étant ce noeud 0, les autres venant rejoindre x et y parmi les fils de la racine distincts de ce noeud 0. On dépasse alors nécessairement les 3 sommets.

On peut alors parler sans ambiguïté des composantes 3-connexes sans spécifier une décomposition. En effet ces dernières sont les G_i associés à l'unique séparateur à 2 sommets.

Soit G_i une composante 3-connexe de G . Soit T_i le coarbre de la composante connexe C_i de $G - \{x, y\}$. Notons que le coarbre de G_i est obtenu depuis T_i par ajout des sommets x et y comme fils de la racine. Ainsi, le nombre de fils 0 de la racine de T_i coïncide avec le type de G_i . On déduit de toutes ces remarques le résultat suivant :

Théorème 4. *Soit G un cograve 2-connexe à plus de 5 sommets et $\{x, y\}$ un séparateur minimal de G .*

- *Si $xy \in E$, G est de carte si et seulement si toutes ses composantes 3-connexes sont de carte de type au plus 2.*
- *Sinon, G est de carte si et seulement si chaque composante 3-connexe de G est de carte de type au plus 1.*

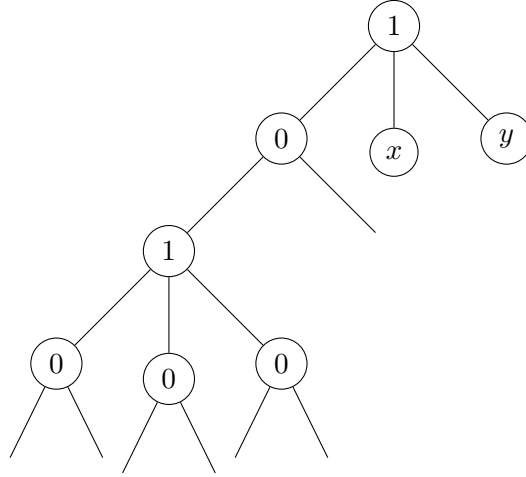
Démonstration. Supposons d'abord $xy \in E$. Pour le sens direct, la première partie est donnée par la proposition 6. Pour la seconde, si une des composantes 3-connexes de G est de type au moins 3, cela signifie d'après la discussion précédente, que le coarbre de G a pour sous arbre un arbre tel que décrit Figure 9. On peut alors trouver un sous grave induit $K(K_2, I(1, K_{2,2,2}))$.

Pour le sens réciproque, les remarques précédentes permettent de dire que les composantes 3-connexes de G sont exactement les G_i donnés par la paire $\{x, y\}$. Notons que comme $xy \in E$, les G_i sont des sous graphes induits de G . On représente les régions x et y comme décrit dans la démonstration du Théorème 2. On se fixe à présent un G_i que l'on va représenter à l'intérieur de l'un des trous laissés par les régions x et y .

Les composantes de type 0, 1 sont alors représentées comme sur la Figure 2 et celles de type 2 comme sur la Figure 10 (a).

Supposons maintenant $xy \notin E$. On s'intéresse au sens direct : la proposition 6 donne la première partie de la propriété. Le coarbre de G est construit de la manière suivante : la racine a 2 fils, les deux étant des

FIGURE 9 – Un sous arbre du coarbre de G si une composante est de type 3
Les arrêtes menant à un fils vide représentent des sous arbres

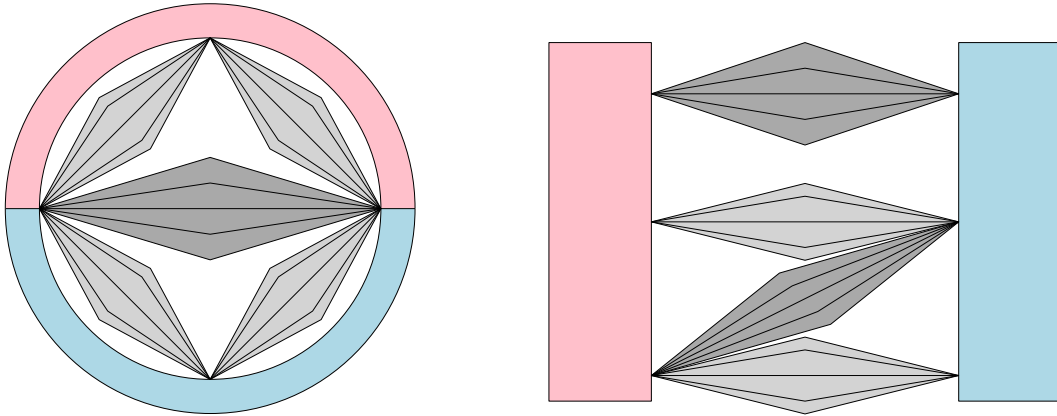


noeuds 0. L'un a pour enfants les sommets x et y . L'autre a pour sous arbres les coarbres des composantes connexes de $G - \{x, y\}$.

G étant de carte, G_i ne peut être de type 3, sinon on aurait un sous graphe induit $K_{2,2,2,2}$ en utilisant T_i, x et y . G_i ne peut être de type 2 : en effet le noeud 0 ayant pour sous arbres les composantes de $G - \{x, y\}$ admet un sommet descendant v n'appartenant pas à T_i . On trouve alors un sous graphe induit $K(2, I(1, K_{2,2}))$: le premier 2 est dû à x, y , le 1 à v , et $K_{2,2}$ est construit grâce à T_i . Au total, G_i vérifie bien la condition de l'énoncé.

Pour le sens réciproque, comme les composantes 3-connexes de G sont les G_i et que ces derniers ne peuvent qu'être de la forme K_n ou $K(I_{p,q}, K_n)$ par ce qui précède, la Figure 10 (b) donne une carte de G où x et y sont les deux régions indépendantes, représentées à part, et où chaque type possible est représenté. □

FIGURE 10 – Constructions des cartes du Théorème 4
À gauche la figure (a), à droite la (b)



On peut déduire de ces théorèmes que les cographes de carte sont exactement ceux ne possédant pas $K(3, G), K_{2,2,2,2,1}, K(2, 2, 2, I_{2,1}), K(2, 2, 2, K_5), K(2, I(1, K_{2,2})), K(K_2, I(1, K_{2,2,2}))$ parmi leur sous graphes induits : en effet la démonstration utilise uniquement l'interdiction de ces 6 classes de graphes comme condition nécessaire à être un graphe de carte. Que ce soit par une méthode exploitant cette

caractérisation ou par une autre méthode séparant en composantes 3-connexe et vérifiant si ces dernières ont la bonne forme, on obtient un algorithme polynômial reconnaissant si un cograph G est de carte

3 Quelques propriétés des graphes de cartes 3-connexes

L'étude des graphes 3-connexes est motivée par les méthodes utilisées dans la section précédente : en effet le problème de reconnaissance des graphes de carte devient plus aisé dans le cas 3-connexe, certaines structures complexes étant limitées par l'interdiction des sous graphes induits $K(3, G)$ et la 3-connexité.

3.1 Généralités

Les graphes de carte 3-connexe n'admettent pas tous des cartes complètes. La roue W_n (un cycle de longueur $n - 1$ auquel on ajoute un sommet universel) pour tout $n \geq 5$ en est un contre exemple. La proposition suivante permet toutefois d'envisager les graphes de carte 3-connexe de manière très similaire à des graphes admettant des cartes complètes, ces derniers étant en effet "presque" à carte complète, à un sommet près.

Proposition 8. *Soit G un graphe de carte 3-connexe. Il existe un graphe G' sur les sommets $V \sqcup \{\infty\}$ (où ∞ est un sommet non présent dans V) admettant une carte complète, et tel que $G'[V] = G$*

On peut par exemple "compléter" la roue W_n en ajoutant un autre sommet adjacent à tout les sommets du cycle. En conséquence de cette proposition, on s'intéressera plus particulièrement aux graphes de carte 3-connexe admettant une carte complète. Une propriété sympathique de ces derniers est que les voisins de chaque sommet v peuvent être organisés afin de former un cycle, et on a même plus précis si on regarde les cartes comme le montre la proposition suivante :

Proposition 9 (Cycle séparant). *Soit G 3-connexe admettant une carte complète. Soit $v \in V$. Il existe un témoin H de G et un cycle C dans H tel que*

- $RA(C) = N[v]$ (on considère ici les voisins dans G)
- L'intérieur de C ne contient que v et les seules arrêtes dans cet intérieur sont celles entre v et les éléments de $C \cap U$

On admettra pour la démonstration les lemmes suivants :

Lemme 7 ([6]). *Soit G un graphe admettant une carte complète. Alors G admet un témoin H quadrangulé (chaque face est bordée par un cycle de taille 4) vérifiant que, pour toute paire $u, u' \in U$ telle que $\deg(u) = 2$, on n'ait pas $N(u) \subset N(u')$.*

Lemme 8 ([1]). *Soit H un graphe planaire 2-connexe. Toute face de H possède un cycle de H en guise de bord.*

Démonstration. On se donne H un tel témoin quadrangulé de G . $H - v$ est un témoin de $G - v$.

Montrons que ce dernier est 2-connexe.

Notons que pour tout $u \in U$, son degré dans H est au moins 3 : en effet si un certain u est de degré 2, la condition sur le degré de u et le fait que H soit quadrangulé imposent qu'il existe $u' \in U$ tel que u , ses deux voisins et u' forment un cycle. Mais alors $N(u) \subset N(u')$, absurde. Donc u est de degré au moins 3.

Soient s, t des sommets non adjacents de $H - v$. Supposons par l'absurde que tout chemin de s à t passe par un sommet p . La 2-connexité de $G - v$ donne que $p \in U$. Notons p_1, \dots, p_k les voisins de p ordonnés dans le sens trigonométrique. On a, comme H est quadrangulé, qu'il existe u_i voisin commun de p_i et p_{i+1} pour tout i , où les indices sont pris modulo k . Ainsi pour toute paire de voisins de p , il existe deux chemins disjoints entre ces derniers n'utilisant pas p . Soit un chemin de s à t . Ce dernier rencontre nécessairement deux voisins de p . Notons q le premier voisin de p visité par le chemin et q' le dernier. En exploitant l'un des deux chemins de q à q' ne rencontrant ni p , ni v , on construit alors un chemin de s à t n'exploitant pas p . Absurde. Un seul sommet ne suffit donc pas à séparer s de t , $H - v$ est donc 2-connexe.

Le sommet v est situé dans une face du graphe $H - v$, 2-connexe. Notons C le cycle bordant cette face. Le deuxième point est clair par construction de C . Pour le premier, considérons $u \in C \cap U$. La paire vu constitue une arête de H : en effet, H étant quadrangulé, v est adjacent à au moins deux éléments de $C \cap U$. Si u n'est pas parmi eux, en considérant u' et u'' deux voisins de v "encadrant" u dans l'ordre cyclique, c'est à dire que pour un certain sens de parcours du cycle, u est vu entre u' et u'' et aucun sommet de $C \cap U$ vu entre u' et u'' n'est voisin de v , on obtient un cycle dont l'intérieur forme une face de H bordée par au moins 6 arêtes, absurde. Comme les voisins de v sont exactement $C \cap U$, on a bien $N[v] = RA(C)$ \square

Corollaire 2 (Ordre cyclique). *Soit G 3-connexe admettant une carte complète et $v \in V$. Il existe un ordre total v_1, \dots, v_k sur les voisins de v induisant un cycle*

Démonstration. On se donne un témoin H vérifiant les propriétés de la proposition 9. Soit s_1, \dots, s_{2l} le cycle dans H donné par cette proposition. On suppose sans perte de généralité que $s_1 \in V$. Pour tout i , on pose $E_i = \{s_i\}$ si i est impair, si i est pair, E_i correspond à l'ensemble des voisins de s_i hors cycle, v exclu. On ordonne alors $N(v)$ comme suit : on ordonne chaque E_i selon un ordre arbitraire. Puis on ordonne ces ordres arbitraires de sorte à ce que tout les éléments de E_i soient plus petits que ceux de E_{i+1} . Si un élément apparaît dans plusieurs E_i , on le placera avec le E_i de plus petit indice auquel il appartient. Cet ordre est bien total sur $N(v)$ comme $RA(\{s_1, \dots, s_{2l}\}) = N[v]$. De plus ce dernier donne bien lieu à un cycle : en effet tout les sommets de E_i sont adjacents aux sommets de E_{i+1} (les indices étant pris modulo $2l$), et les E_i pour i pair sont des cliques. \square

3.2 Cas particulier des graphes cordaux

On s'intéresse à présent aux graphes cordaux, classe définie par l'interdiction des sous graphes induits C_n , $n \geq 4$, et contenant ainsi strictement les graphes trivialement parfaits. Une autre caractérisation de cette classe est qu'un graphe est cordal si et seulement si tout ses séparateurs minimaux sont des cliques [4]. Les résultats suivants sont utiles pour contraindre la forme des graphes cordaux de carte 3-connexe, comme cela a été fait pour les différentes classes précédemment étudiées.

Lemme 9. *Soit G un graphe cordal connexe, S un séparateur minimal de ce dernier, et C_1, \dots, C_l les composantes de $G - S$. Pour tout i , il existe $v_i \in C_i$ tel que $S \subset N(v_i)$*

Corollaire 3. *Soit G un graphe cordal 3-connexe de carte et S un séparateur minimal de ce dernier. $G - S$ a au plus 2 composantes connexes*

Démonstration. Supposons que $G - S$ a au moins 3 composantes connexes C_1, C_2, C_3 . G étant 3-connexe, $|S| \geq 3$, on se donne alors 3 sommets $a, b, c \in S$. On se donne ensuite par le lemme précédent $v_i \in C_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, tel que $a, b, c \in N(v_i)$. Les v_i étant dans des composantes distinctes, ils sont indépendants. Le sous graphe induit par ces 6 sommets est $K(3, K_3)$, absurde comme G était de carte. \square

Conclusion

On a obtenu une caractérisation complètement combinatoire des graphes de carte trivialement parfaits, puis des cographes, généralisant cette dernière. On a ainsi implicitement obtenu des algorithmes polynômiaux résolvant le problème de reconnaissance pour des graphes dans une de ces classes. La prochaine étape aurait été, avec un peu plus de temps, de caractériser et/ou reconnaître les graphes cordaux de carte en s'inspirant des méthodes déjà utilisées.

Le problème de la reconnaissance des graphes de carte dans le cas général est lui bien plus dur, notamment à cause des faibles stabilités de cette classe, n'étant stable que par sous graphe induit. Le problème est résolu pour des graphes ayant des témoins dont les sommets de U sont de degré au plus 4 [9], mais pour des degrés plus grands que 5, aucun algorithme n'est aujourd'hui connu.

Références

- [1] B. Mohar, C. Thomassen. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University press, 2001.
- [2] D. G. Corneil, H. Lerchs, L. Stewart Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete applied mathematics*, 3(3) :163–174, 1981.
- [3] J.E. Hopcroft et R.E. Tarjan. Dividing a graph into triconnected components. *SIAM Journal on Computing*, 2(3), 1973.
- [4] G. A. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 25, 1961.
- [5] M. Thorup. Map graphs in polynomial time. In *FOCS*, 1998.
- [6] P. Angelin, M. A. Bekos, G. Da Lozzo, M. Gronemann, F. Montecchiani, A. Tappini. Recognizing map graphs of bounded treewidth. *Algorithmica*, 86, 2024.
- [7] Z. Chen. Approximations algorithms for independent sets in map graphs. *Journal of Algorithms*, 41(1), 2001.
- [8] Z. Chen, M. Grigni, C. H. Papadimitriou. Recognizing hole-free 4-map graphs in cubic time. *Algorithmica*, 45(2) :227–262, 2006.
- [9] Christos H. Papadimitriou Zhi-Zong Chen, Michelangelo Grigni. Map Graphs. *Journal of the ACM*, 49(2), 2002.

Annexe

Les preuves de certains énoncés admis.

Lemme (1). *Un graphe G a pour mineur $K_{3,3}$ si et seulement si il existe 6 sommets, $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ et des chemins $P_{i,j}$ de s_i à t_j pour tout i, j tels que*

- *Pour tout $i \neq i', j \neq j'$, $P_{i',j'}$ et $P_{i,j}$ ne se rencontrent pas*
- *Pour tout i , s_i et t_i ne sont sommet intermédiaire d'aucun des chemins*
- *Si deux de ces chemins se rencontrent, leur intersection est également un chemin*

Démonstration. Supposons que G possède un mineur $K_{3,3}$. Alors il existe des ensembles de sommets connexes, disjoints, $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ tels qu'une fois contractés, le graphe induit par ces ensembles aie pour sous graphe $K_{3,3}$. Soient $s_i \in S_i$ et $t_i \in T_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Comme on a une arête de S_i à T_j pour tout i, j , il existe des sommets $s'_i \in S_i$ et $t'_j \in T_j$ tels que $s'_i t'_j \in E$. En se donnant un chemin de s_i à s'_i puis de t'_j à t_j , on construit alors des chemins $P_{i,j}$ comme décrits dans l'énoncé. Si $i \neq i', j \neq j'$, les chemins $P_{i,j}$ et $P_{i',j'}$ sont à valeurs dans des ensembles disjoints et ne se rencontrent donc pas. La deuxième condition est vérifiée pour les mêmes raisons. Pour la troisième, si un chemin de s_i à t_j rencontre un chemin de s_i à $t_{j'}$ en un sommet intermédiaire, cette intersection se fait nécessairement dans S_i . On modifie alors le chemin $P_{i,j'}$ de sorte à ce qu'il coïncide avec $P_{i,j}$ jusqu'à sa dernière intersection avec ce dernier dans S_i . On raisonne de manière similaire pour $P_{i,j}$ et $P_{i',j}$.

Supposons à présent qu'il existe de tels s_i et t_i et de tels chemins $P_{i,j}$. On se restreint au sous graphe constitué des chemins $P_{i,j}$. Soient $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Supposons que $P_{i,j}$, hors extrémités, ne soit pas disjoint de tout les autres chemins. On note $P_{i,j} = \{s_i = v_1, v_2, \dots, v_l = t_j\}$ dans l'ordre de parcours, et on se donne

$$p = \min\{k \in \llbracket 1, l \rrbracket \mid \exists i' \neq i, v_k \in P_{i',j}\}$$

$$q = \max\{k \in \llbracket 1, l \rrbracket \mid \exists j' \neq j, v_k \in P_{i,j'}\}$$

L'hypothèse faite sur les chemins permet d'affirmer que les deux ensembles décrits sont les seules intersections possibles de $P_{i,j}$ avec d'autres chemins.

Montrons que $p > q$: on se donne les i' et j' correspondants. Comme l'intersection de deux chemins reste un chemin, et que $P_{i,j'}$ contient à la fois s_i et v_q , les sommets v_1, \dots, v_q font tous partie de $P_{i,j'}$. De même, v_p, \dots, v_l font partie de $P_{i',j}$. Supposons maintenant par l'absurde que $p \leq q$. On déduit des remarques

précédentes que les sommets v_p, \dots, v_q font partie de $P_{i,j'}$ et $P_{i',j}$, hors ces chemins ne s'intersectent pas par hypothèse, absurde.

On contracte alors tout les sommets de v_1 à v_p et ceux de v_q à v_l comme il existe un chemin les reliant tous. Puisque $p > q$ et que les sommets de départ et d'arrivée ne sont pas présents sur les chemins hors extrémités, on conserve bien des chemins de s_i à $t_{j'}$ et de $s_{i'}$ à t_j . Après cette opération, le nouveau chemin $P_{i,j}$ est disjoint de tout les autres. On répète alors cette opération pour tout i, j .

Une fois cela fait, on obtient des chemins tous disjoints de tout s_i à tout t_j , ne reste plus qu'à contracter ces chemins afin d'obtenir un $K_{3,3}$. \square

Proposition (3). $K(2, 2, 2, K_5)$ n'est pas un graphe de carte

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il le soit, on s'en donne alors un témoin H . On numérote les indépendants $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}$ et a_1, \dots, a_5 les sommets de la clique K_5 . On pose $S \subset V \cup U$ le sous ensemble composé de a_1, \dots, a_5 , des sommets de U tels que tout leurs voisins soient parmi a_1, \dots, a_5 , et des sommets de U de degré 2 tels que l'un des deux voisins est parmi a_1, \dots, a_5 .

$H - S$ est un témoin de $K_{2,2,2}$. On écrit alors $V \cup U \setminus S = \{v_1, \dots, v_6\} \cup U'$. Notons que les sommets de U' sont de degré au plus 3 dans $H - S$: en effet $H - S$ étant témoin de $K_{2,2,2}$, si on avait un sommet de U' possédant 4 voisins, le principe des tiroirs nous créerait une adjacence entre deux sommets supposés être indépendants.

Pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$, a_i étant adjacent à tout les v_1, \dots, v_6 dans $K(2, 2, 2, K_5)$, on en déduit que dans le plongement de H , a_i est placé dans une face de $H - S$ telle que, en notant A_i les sommets adjacents à cette dernière, $RA(A_i) = \{v_1, \dots, v_6\}$.

Montrons à présent que a_i a au moins 3 voisins : si il n'en avait que 2, ces voisins que l'on note u et u' ont respectivement pour voisins dans $H - S$ v_1, v_3, v_5 et v_2, v_4, v_6 . On considère les sommets $v_1, v_2, v_3, a_i, v_5, v_6$ et les chemins suivants : de v_1 et v_3 à a_i , on utilise u , de v_2 à a_i on utilise u' , puis pour le reste on prend des sommets intermédiaires quelconques. Ces derniers vérifient les hypothèses du Lemme 1 par indépendances et comme $u \neq u'$, absurde comme H est planaire, donc a_i a bien au moins 3 voisins. Cela permet alors d'affirmer que chaque face vérifiant les hypothèses précédentes ne peut pas accueillir plus d'un a_i par planarité. Il y a donc 5 faces vérifiant ces hypothèses.

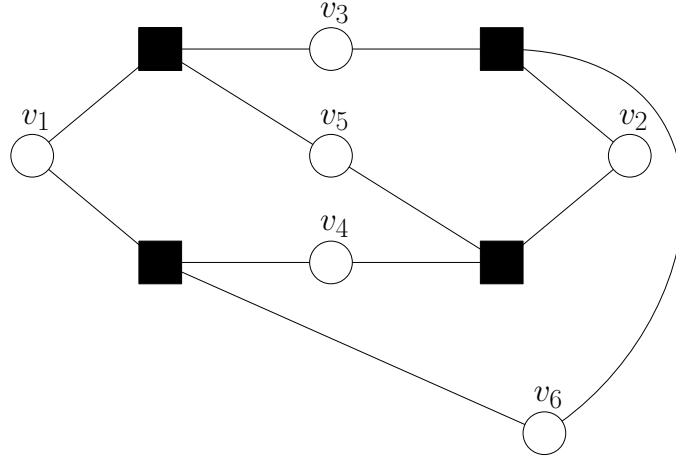
Considérons une face vérifiant les hypothèse : cette dernière ne peut avoir les 6 sommets de $K_{2,2,2}$ sur son bord car alors il n'y aurait qu'au plus une seule autre face pouvant vérifier les hypothèses pour des raisons de planarité (on peut par exemple y trouver un mineur $K_{3,3}$). De même si cette dernière contient 5 sommets. Si cette dernière contient 4 sommets, alors par les remarques précédentes sur le nombre de voisins minimal de a_i , les deux sommets de U' sur le bord de degré 3 ont des voisinages non disjoints. Cela conduit au fait d'avoir une autre face ayant plus de 5 sommets de $K_{2,2,2}$ sur son bord, encore impossible. Donc toutes les faces ont au plus 3 sommets de $K_{2,2,2}$ sur leur bord. En fait il y en a exactement 3, sinon on ne peut vérifier l'hypothèse comme les sommets de U' sur le bord sont de degré au plus 3 et ne peuvent avoir des voisinages disjoints. On déduit également de cela que tout les sommets de U' sur les bords des faces sont de degré exactement 3 afin d'avoir $RA(A_i) = \{v_1, \dots, v_6\}$.

$H - S$ est alors nécessairement le graphe illustré figure 11, quitte à renuméroter et à maximiser le nombre de faces vérifiant les hypothèses. Ce graphe a 4 faces. Absurde, $K(2, 2, 2, K_5)$ n'est donc pas de carte. \square

Lemme (2). $K_{2,2,2,2}$ est de carte et tout témoin de ce dernier a pour sous graphe induit un des graphes Figure 3

Démonstration. Les graphes de la Figure 3 sont bien des témoins de $K_{2,2,2,2}$, il est donc de carte. Soit H un témoin de $K_{2,2,2,2}$. On numérote v_1, \dots, v_8 les sommets avec les mêmes conventions que pour la Proposition 3. On considère H' le témoin de $K_{2,2,2}$ obtenu en retirant v_7, v_8 et les sommets de U devenus de degré inférieur à 1 après ce retrait. En reprenant la démonstration de la Proposition 3, on en déduit qu'il existe deux faces dans H' vérifiant les hypothèses citées dans cette proposition, dont le bord possède 6 sommets et où tout les sommets de U' présents sur ce dernier sont de degré 3.

FIGURE 11 – Le graphe $H - S$ de la proposition 3



v_7 et v_8 étant indépendants, les sommets de U' présents sur les bords des deux faces sont distincts. La nécessité pour un sommet universel d'avoir au moins 3 voisins dans H' (vu dans la proposition précédente), ainsi que des arguments de planarité, permettent d'affirmer que, soit les deux bords partagent les mêmes sommets hors U' , soit ils n'en partagent aucun. Selon le cas, on obtient soit le premier, soit le second témoin Figure 3 en sous graphe induit de H .

□

Lemme (6). *Les graphes $K(2, I(1, K_{2,2}))$ et $K(K_2, I(1, K_{2,2,2}))$ ne sont pas de carte*

Démonstration. On utilisera ici une méthode utilisant le Lemme 1 afin de montrer que les deux graphes ne sont pas de carte.

On commence par $K(2, I(1, K_{2,2}))$. On numérote v_1, \dots, v_6 les sommets du $K_{2,2,2}$ induit, tels que les indépendants soient $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}$. On notera a le sommet relié à deux sommets indépendants de ce sous graphe, que l'on supposera être v_1, v_2 .

On suppose le graphe de carte, on s'en donne alors H un témoin. Comme $v_1 v_2 \notin E$, les voisins de a sont tous de degré 2. Pour les mêmes raisons, les voisinages de v_3 et v_4 (comme ceux de v_5 et v_6) sont disjoints. On considère les sommets $a, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6$ et les chemins suivant entre eux : les chemins de v_3, v_4 à v_2, v_5, v_6 sont les arrêtes subdivisées de H traduisant les adjacences dans le graphe original, celui de a à v_2 est donné par l'arrête subdivisée représentant l'arrête av_2 , ceux de a à v_5, v_6 exploitent les chemins de a à v_1 puis de v_1 à v_5, v_6 .

Ces chemins vérifient les hypothèses du Lemme 1 : les voisinages disjoints de v_3, v_4 et v_5, v_6 permettent en effet d'éviter les croisements entre chemins ayant ces sommets à leurs extrémités. Le chemin de a à v_2 est disjoint de tout les autres. Enfin pour le chemin de a à v_5 (ou v_6) : le premier sommet de U rencontré ne peut être commun à un autre chemin, le deuxième ne peut se situer sur un chemin de v_3, v_4 à v_6 à cause des voisinages disjoints. Les autres hypothèses sont faciles à vérifier.

Ainsi H possède un mineur $K_{3,3}$, absurde comme il est planaire. Le graphe n'est donc pas de carte.

Pour $K(K_2, I(1, K_{2,2,2}))$, on numérottera v_1, \dots, v_6 les sommets formant le $K_{2,2,2}$, x le sommet indépendant du $K_{2,2,2}$ et a, b les deux sommets universels. On suppose par l'absurde le graphe de carte, on s'en donne un témoin H . On considère les sommets x, v_1, v_2, a, v_3, v_4 et les chemins suivants : de v_1, v_2 à a, v_3, v_4 on considère des chemins de longueur 2, de x à a également, puis de x à v_3, v_4 , on utilise le sommet intermédiaire b . On peut là aussi montrer par des arguments d'indépendance que les chemins vérifient les hypothèses du Lemme 1 et que donc H n'est pas planaire, le graphe n'était donc pas de carte. □

Proposition (8). *Soit G un graphe de carte 3-connexe. Il existe un graphe G' sur les sommets $V \sqcup \{\infty\}$ (où ∞ est un sommet non présent dans V) admettant une carte complète, et tel que $G'[V] = G$*

Démonstration. On se donne un témoin H de G et on note U l'ensemble des sommets autres que V de H . On peut supposer que H est construit de telle sorte à ce que $d(u) \geq 2$ pour $u \in U$. Soit $u \in U$, $x, y \in V$ parmi ses voisins. Si x et y sont adjacents à la même face de H , alors on ajoute une arête entre x et y à l'intérieur de cette face, que l'on subdivise ensuite à l'aide d'un sommet afin de garder le graphe biparti. On répète alors ce processus jusqu'à ce que tout les sommets adjacents dans G soient reliés par deux chemins de longueur 2.

Le nouveau graphe H' est planaire biparti et 2-connexe : si l'on retire un sommet de V le graphe reste connexe, par des arguments similaires à ceux de la Proposition 9. Si l'on retire un sommet de U' (l'ensemble U avec les nouveaux sommets ajoutés), le graphe reste aussi connexe : si le sommet retiré est parmi ceux de $U' \setminus U$, la construction de U' donne que le graphe reste connexe. Sinon, on se donne v_1, \dots, v_k les voisins de u le sommet retiré, tels que v_i et v_{i+1} soient adjacents à la même face. On a alors qu'après le retrait de u , par construction encore de U' , les v_i sont tous accessibles entre eux. On peut alors voir que cela implique que le graphe reste connexe et est un témoin de G .

On construit alors un surgraphe de H' que l'on va plonger dans le plan afin d'obtenir une carte. On construit le surgraphe H'' en itérant sur tout sommet $v \in V$, et en ajoutant une arête entre chaque paire u_1, u_2 voisine de v adjacente à une même face, arête prenant la forme d'un chemin dans cette face. Si v est un sommet extérieur dans H' , et que l'on considère 2 de ses voisins dans H' eux aussi extérieurs, alors on choisira le chemin de telle sorte à ce que v devienne intérieur dans H'' . On peut alors montrer par des arguments similaires à ceux utilisés précédemment que ce graphe est 3-connexe. H'' est également planaire et par construction, tout les sommets $v \in V$ sont intérieurs.

On construit à présent la carte : pour $v \in V$, la région associée à v est l'adhérence de la face dans laquelle se trouve le point v dans $H'' - v$. Cette face est bien homéomorphe à un disque, comme $H'' - v$ est 2-connexe et qu'alors cette dernière est bordée par un cycle. Cet ensemble de région correspond alors à l'intérieur du cycle de H'' séparant la face non bornée des autres (comme H'' est 2-connexe). Ainsi, pour les mêmes raisons, la face non bornée, vue dans \mathbb{S}^2 , est homéomorphe à un disque. Notons S l'ensemble des sommets de V adjacents à cette dernière dans H'' . On prends alors

$G' = (V \cup \{\infty\}, E \cup \{s\infty \mid s \in S\})$, et on associe à ∞ la face non bornée de H'' . La carte est bien complète par construction. Cette dernière, restreinte à V , donne bien une carte de G : en effet les frontières de la région associée au sommet v est le cycle formé des voisins de v dans H'' . Si $uv \in E$, u et v partagent un voisin dans H'' et donc les régions se rencontrent. Si les régions se rencontrent, H'' étant planaire, les cycles ne peuvent se rencontrer que s'ils partagent des sommets, donc $uv \in E$. \square

Lemme (9). *Soit G un graphe cordal connexe, S un séparateur minimal de ce dernier, et C_1, \dots, C_l les composantes de $G - S$. Pour tout i , il existe $v_i \in C_i$ tel que $S \subset N(v_i)$*

Démonstration. Notons que, G étant cordal, S est une clique. On se fixe un $1 \leq i \leq l$. Notons $k = |S|$. On va montrer par récurrence sur $1 \leq j \leq k$ que pour tout $B \subset S, |B| = j$, il existe $v \in C_i$ tel que $B \subset N(v)$.

Le cas $j = 1$ est donné par la minimalité de S : en effet si il existait un sommet de S complètement isolé de C_i , retirer ce dernier de S redonnerait un séparateur.

Soit $2 \leq j \leq k$ et supposons la propriété vraie pour $j - 1$. On écrit $S = \{s_1, \dots, s_k\}$. Supposons par l'absurde la propriété fausse pour j . On suppose la numérotation des sommets faite de telle sorte à ce que le sous ensemble B interdit soit $\{s_1, \dots, s_j\}$. Il existe par hypothèse $v \in C_i$ tel que s_1, \dots, s_{j-1} soient tous voisins de v , et $u \in C_i$ tel que s_2, \dots, s_j soient voisins de u . C_i étant connexe on a un chemin de u à v . Ce chemin, concaténé aux arêtes vs_1, s_1s_j, s_ju donne un cycle de longueur au moins 4. On choisit alors u et v et le chemin de manière à minimiser la longueur de ce cycle. Ce cycle possède alors des cordes, mais la minimalité impose que ces dernières ne soient pas entre des sommets du chemin de u à v , sinon on pourrait le raccourcir, ni entre s_1 ou s_j et un sommet intermédiaire du chemin de u à v . Les seules cordes envisageables sont alors s_1u ou s_jv . Supposons sans perte de généralité qu'on se trouve dans le premier cas. Alors u a parmi ses voisins s_1, \dots, s_j , absurde. Donc la propriété est également vraie pour j .

Au total, on a bien la propriété vraie au rang k , c'est à dire qu'il existe $v_i \in C_i$ tel que $S \subset N(v_i)$ \square