Stage Map Graphs

José Lorgeré

4 juillet 2025

Introduction

1 Trucs généraux

1.1 Résultats et définitions préliminaires

Définition (Carte)**.** *Une carte est une fonction $f : V \to \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ telle que pour tout $v \in V$, $f(v)$ est homéomorphe à $\mathbb{D}^2$ et telle que pour $v \neq u$, $f(u)$ et $f(v)$ sont d'intérieur disjoints. Si f forme un recouvrement de $\mathbb{S}^2$, on la dira sans trou, ou complète. On appelera les $f(v)$ régions*

Définition (Graphe de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte s'il existe une carte f sur V telle que $xy \in E$ si et seulement si $f(x) \cap f(y) \neq \varnothing$*

Théorème 1 (Caractérisation des graphes de carte)**.** *Un graphe $G = (V, E)$ est de carte si et seulement si il existe H un graphe biparti planaire dont un des côtés de la bipartition est V, tel que $H^2[V] = G$. Un tel graphe H est appelé graphe témoin de G*

Proposition 1. *Si G est un graphe de carte, et $H = G[A]$ où $A \subset V$, alors H est un graphe de carte*

Démonstration. On reprend la carte de G où l'on ne garde que les régions identifées aux sommets présents dans A □

Définition (Join)**.** *Le join de 2 graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ est le graphe ayant pour sommet $V'' = V \cup V'$ et pour arrêtes*

$$E'' = E \cup E' \cup \{xx' \mid x \in V, x \in V'\}$$

On notera pour tout $n \geq 1$ $K(n, G)$ le join d'un indépendant à n sommets avec le graphe G

Proposition 2. *Soit G un graphe à 3 sommets. $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $K(3, G)$ est un graphe de carte. On se donne alors H vérifiant toutes les propriétés du théorème 1. On note pour tout v_i, sommet indépendant de $K(3, G)$, N_i son voisinage dans H incluant v_i. On note H' le graphe $(((H/N_1)/N_2)/N_3)$, qui est donc un mineur de H et donc planaire. Or $H' = K_{3,3}$: en effet N_i est adjacent à tout les sommets de G, comme le voisinage de v_i dans H l'est, car v_i l'est dans $K(3, G)$. De plus il n'y a pas d'arrêtes entre les sommets de G comme H est biparti, et pas d'arrêtes entre les différents N_i comme les v_i sont indépendants dans G.
Absurde, $K(3, G)$ n'est pas un graphe de carte □

Définition (Témoin compact)**.** *Un témoin compact est ...*

Dans l'article ... on a que l'existence d'un témoin compacte équivaut à l'existence d'un témoin de G. Ainsi on peut se restreindre à l'étude de ces témoins particuliers

Théorème 2. *Un graphe G admet une carte complète si et seulement si il admet un témoin qui est une quadrangulation*

On en déduit alors que les graphes admettant des cartes complètes sont 2-connexes comme une quadrangulation l'est

2 Etude des cartes complètes 3-connexes

On va faire qqes lemmes sur les cartes complètes qui permettront de déblayer un algo

Lemme 1 (Cycle recouvrant). *Soit G un graphe de carte 3-connexe à carte complète. Il existe un cycle, ou chemin de taille 2, C inclus dans le voisinage de v, tel que $N(v) \subset N(C)$*

Faut prendre en compte le cas où la fusion de v et d'une région n'est pas simplement connexe et intersecte en au moins 2 segments disjoints

Démonstration. On se donne une carte complète de G et on confondra alors sommets et régions. Les voisins de v sont exactement les régions rencontrant la frontière de v. Comme v est homéomorphe à un disque, on se donne $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ une courbe de Jordan paramétrant sa frontière. Notons u_0 une région distincte de v contenant $\gamma([t_0, \varepsilon[)$ pour ε assez petit, où $t_0 = 0$, cette dernière existe comme la carte est complète. On note $I_0 = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in u_0\}$ et $t_1 = \max(I_0)$. Si $t_1 = 1$, comme v est de degré au moins 2, il existe une autre région adjacente à v, en un point uniquement comme $t_1 = 1$. On peut alors montrer que γ n'est pas un lacet contractile dans u_0 et donc que u_0 n'est pas simplement connexe, absurde. Donc $t_1 < 1$. Par maximalité, $\gamma(t_1)$ est sur le bord de u_0 et donc il existe un u_1 vérifiant les mêmes propriétés que u_0 relativement à t_1. On a alors $u_0 u_1 \in E$. On répète alors le processus afin de trouver $u_0, ..., u_k$, $k \geq 1$ formant un cycle

On construit alors le graphe témoin H comme suit : on commence par se donner un graphe témoin quelconque de $G - v$ construit à partir de la carte complète donnée, que l'on considèrera alors plongé dans le plan. On ajoute ensuite v : on ajoute au graphe témoin les sommets $\gamma(t_i)$, $1 \leq i \leq k$, à l'exception peut être de $\gamma(t_k)$ si $u_k = u_0$. On relie alors les regions u_i aux $\gamma(t_j)$ adjacents à ces dernières par des chemins, et on ajoute enfin un dernier point dans v, que l'on relie à chaque $\gamma(t_i)$. Par construction de γ, s'il existe une région adjacente à v distincte des u_i, leur intersection est incluse dans les $\gamma(t_i)$, et il suffit alors de relier $\gamma(t_i)$ au point représentant la région correspondante pour ainsi avoir un témoin de G. Notons que $u_0, \gamma(t_1), u_1, \gamma(t_2), ..., u_0$ est un cycle séparant v du reste de H par construction de ce dernier, et la construction des u_i implique que v leur est adjacent dans G □

Lemme 2. *Soit G un graphe de carte 3-connexe. Il existe un surgraphe de G à un sommet de plus admettant une carte complète.*

Démonstration. On se donne un témoin H de G et on note U l'ensemble des sommets autres que V de H. On peut supposer que H est construit de telle sorte à ce que $d(u) \geq 2$ pour $u \in U$. Soit $u \in U$, $x, y \in V$ parmi ses voisins. Si x et y sont adjacents à la même face de H, alors on ajoute une arrête entre x et y à l'intérieur de cette face, que l'on subdivise ensuite à l'aide d'un sommet afin de garder le graphe biparti. On répète alors ce processus jusqu'à ce que tout les sommets adjancents dans G soient reliés par deux chemins de longueur 2.

Le nouveau graphe H' est planaire biparti et 2-connexe : si l'on retire un sommet de V le graphe reste clairement connexe comme G est 3-connexe. Si l'on retire un sommet de U' (l'ensemble U avec les nouveaux sommets ajoutés), H reste aussi connexe : si le sommet retiré est parmi ceux de $U' \backslash U$, la construction de U' donne que le graphe reste connexe. Sinon, on se donne $v_1, ..., v_k$ les voisins de u le sommet retiré, tels que v_i et v_{i+1} soient adjacents à la même face. On a alors qu'après le retrait de u, par construction encore de U', les v_i sont tous accessibles entre eux. On peut alors voir que cela implique que le graphe reste connexe et est un témoin de G

On construit alors un surgraphe de H' que l'on va plonger dans le plan. On construit le surgraphe H'' en itérant sur tout sommet $v \in V$, et en ajoutant une arrête entre chaque paire u_1, u_2 voisine de v adjacente à une même face, arrête prenant la forme d'un chemin dans cette face. Si v est un sommet extérieur dans H', et que l'on considère 2 de ses voisins dans H' eux aussi extérieurs, alors on choisira le chemin de telle sorte à ce que v devienne intérieur dans H''. Ainsi tout les élements de U' deviennent de degré au moins

3. G étant 3-connexe, on peut alors voir que H'' le devient également (on ne peut plus isoler de sommet de U'). H'' est également planaire et par construction, tout les sommets $v \in V$ sont intérieurs.

(merde faut montrer que les adjacences restent cohérentes aussi). On construit à présent la carte : pour $v \in V$, la région associée à v est l'adhérence de la face dans laquelle se trouve le point v dans $H'' - v$. Cette face est bien homéomorphe à un disque, comme $H'' - v$ est 2-connexe et qu'alors cette dernière est bordée par un cycle (voir ...), le théorème de Jordan-Schönflies nous donne ce que l'on veut. Cet ensemble de région correspond alors à l'intérieur du cycle de H'' séparant la face non bornée des autres (comme H'' est 2-connexe). Ainsi, pour les mêmes raisons, la face non bornée, vue dans $\mathbb{S}^2$, est homéomorphe à un disque. On ajoute alors un sommet à G correspondant à cette face et à ses adjacences dans cette carte. La carte est bien complète par construction

□

Définition (Arrête sans trou)**.** *On dit qu'une arrête xy d'un graphe G 3-connexe est sans trou si et seulement si pour toute paire de cliques K^1, K^2, voisines toutes deux de x et y, si $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, alors $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$ ne l'est pas non plus pour un certain $S \subsetneq \{x, y\}$*

La définition est motivée par... le dessin qui n'est pas là

On considèrera par la suite que tout les graphes G sont de carte, 3-connexe, et admettent une carte complète

Lemme 3. *Soit $xy \in E$. Si xy est sans trou, alors dans toute carte complète de G, l'arrête xy est représentée par une adjacence connexe entre les deux régions, soit un chemin, soit un point*

Démonstration. On se donne une carte complète de G vérifiant ces conditions. Supposons par l'absurde que x et y ne se rencontrent pas en un ensemble connexe On raisonne selon la nature de $x \cap y$

Supposons cet ensemble discret, donc fini car compact. Notons alors ses points $u_1, ..., u_k$, $k \geq 2$ dans l'ordre cyclique selon la frontière de x. On construit alors H un témoin de G comme suit : on place x et y dans leurs régions respectives, $u_1, ..., u_k$ à leur position respectives et on relie x et y aux u_i par des chemins dans les régions x et y. La carte étant complète, en suivant le chemin de u_1 à u_2 le long de la frontière de x, on construit un chemin dans G de la même manière que dans le lemme 1. On place alors les régions et points de rencontre comme discuté dans le lemme 1 dans H. Ainsi, l'intérieur du cycle x, u_1, y, u_k dans H contient au moins un sommet de V. La carte étant complète, il existe des régions, extérieures aux cycles précedemment décrits, contenant les points u_1 et u_k. Les régions, distinctes de x et y, contenant u_1 forment une clique K^1 et celle contenant u_k une clique K^2, voisines toutes deux de x et y. En retirant les sommets de V formant ces cliques du graphe H, on remarque qu'il n'est plus connexe, comme l'intérieur du cycle x, u_1, y, u_k ne peut plus accéder aux sommets extérieurs à ce dernier, le seul chemin possible empruntant u_1 ou u_k qui n'a plus de voisins extérieurs. Donc $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe. Or $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$, $S \subsetneq \{x, y\}$, l'est car le témoin H où l'on retire uniquement les sommets adjacents à u_1 ou u_k extérieurs au cycle et éventuellement soit x soit y est connexe par construction de ce dernier

Si cet ensemble n'est pas discret, son nombre de composantes connexes étant fini par compacité, il est alors union disjointe de chemins et de points.
Sinon : cet ensemble ne peut contenir 2 chemins disjoints par 3-connexité : en effet dans ce cas $G - \{x, y\}$ n'est pas connexe. Donc il contient un chemin et un point n'appartenant pas à ce dernier. On choisit alors un point u_1 dans l'intérieur du chemin (pas à une de ses éxtrémités) et on note u_2 un point de $x \cap y$ n'appartenant pas au chemin. On construit un témoin H de la même manière que précédemment. L'intérieur du cycle x, u_1, y, u_2 contient un sommet de V pour les mêmes raisons qu'auparavant, sauf qu'ici u_1 étant dans l'intérieur du chemin ne peut être adjacent à ce sommet. Notons K la clique formée des sommets extérieurs à ce cycle, excepté x et y, contenant le point u_2. $G - K$ est connexe, pour les mêmes raisons que pour le cas précédent, tandis que $G - (K \cup \{x, y\})$ ne l'est pas □

Lemme 4. *Pour tout $v \in V$, il existe u un voisin de v tel que uv soit sans trou*

Démonstration. On se donne une carte complète de G. La preuve du lemme 1 permet d'affirmer qu'il existe des régions u adjacentes à v telles que $u \cap v$ ne soit pas discret. On suppose alors par l'absurde que toutes ces régions sont telles que $u \cap v$ ne soit pas connexe. Mais alors, $u \cup v$ sépare $\mathbb{S}^2$ en au moins 2 composantes connexes, et la carte étant complète les deux sont totalement recouvertes par des régions. Ainsi, v a des voisins tels que leur intersection n'est pas discrète dans les deux composantes connexes ainsi délimitées. On considère alors un voisin dans l'une de ces composantes que l'on note C et on réitère le processus, en choisissant à chaque fois une composante incluse dans C. On obtient ainsi une infinité de régions distinctes ce qui est absurde car le graphe est fini.

Ainsi il existe u voisin de v tel que $u \cap v$ soit un chemin. On montre alors qu'il existe un tel u tel que uv soit sans trou. Bon globalement faut distinguer selon si la frontière est recouverte ou pas $\square$

Proposition 3. *Soit G admettant une carte complète et $xy \in E$. On suppose que xy est représentée dans une certaine carte complète de G par une adjacence en un seul point u. Si dans cette même carte, la clique formée des régions contenant u (hors x et y) est supportée par d'autres points que u, alors G/xy admet une carte complète*

Démonstration. On se donne un témoin compact quadrangulé issu de la carte complète de l'énoncé, H. On suppose également sans perte de généralité que le plongement de H dans le plan donné est un plongement droit. On construit un nouveau témoin compact quandrangulé H' comme suit : on note K la clique formée des régions contenant u, hors x, y. On retire toute les arrête entre K et u. u devient alors de degré 2, ayant pour seuls voisins x et y. On place alors un sommet u' arbitrairement proche de u, que l'on relie à x et y par des segments. Ensuite, par des arguments géométriques, tout sommet de K peut être relié par un segment soit à u soit à u'. On obtient alors au final un graphe planaire biparti quandrangulé H'. Reste à voir que H' est un témoin compact de G.

Les seuls arrêtes de G impactées par les modifications sont les arrêtes entre sommets de K (celles avec x et y sont préservées comme on relie chaque sommet soit à u soit à u'). Hors par hypothèse, la clique K est portée par d'autres points de la carte distincts de u. Ainsi la suppression de certaines arrêtes de K à u n'a pas d'impact sur les adjacences des sommets de K. H' est bien un témoin de G. Il est compact par sa construction comme H est un témoin compact

Il est alors facile de construire un témoin compact quandrangulé de G/xy comme H' représente une carte où les régions x et y se rencontrent en un chemin $\square$

Proposition 4. *Soit $xy \in E$. xy est une arrête à trou si et seulement si pour tout $S \subsetneq \{x, y\}$*
- *Soit pour K une certaine clique max de $G[N(x) \cap N(y)]$, $G - K - \{x, y\}$ n'est pas connexe et $G - K - S$ l'est*
- *Soit pour K^1, K^2 deux cliques max de $G[N(x) \cap N(y)]$, $G - (K^1 \Delta K^2 \cup \{x, y\})$ n'est pas connexe, où Δ est la différence symétrique sur les sommets des deux cliques, et $G - (K^1 \Delta K^2 \cup S)$ l'est*

Démonstration. Si xy vérifie ces conditions, alors xy est une arrête à trou : il existe au plus 2 cliques K^1, K^2 voisines de x et y telles que $G - (K^1 \cup K^2 \cup \{x, y\})$ ne soit pas connexe, tandis que pour $S \subsetneq \{x, y\}$, $G - (K^1 \cup K^2 \cup S)$ le soit.

Si xy est une arrête à trou : on se donne K^1, K^2 les cliques voisines de x et y données par la définition. Si l'on peut prendre K^2 vide :
On notera alors le K^1 correspondant comme K. On se donne alors une clique max de $G[N(x) \cap N(y)]$ contenant K, que l'on note K'. Notons $C_1, ..., C_k$ les composantes connexe de $G - K - \{x, y\}$, $k \geq 2$. Si pour tout choix de K', la propriété n'est pas vérifiée : alors pour tout K', il existe un i et un $S \subsetneq \{x, y\}$ tels que $V - (K' \cup S) \subset C_i$ $\square$

3 Algorithmes

Les propositions et lemmes précédents sont la base d'un algorithme : on élimine d'abord pour un $v \in V$ donné toutes les arrêtes à trou (faut encore caractériser ça de manière vérifiable en P) depuis v. Ensuite, il faut sélectionner une arrête que l'on sait qui va marcher pour la fusion (ou alors se tromper un nombre borné de fois) et on vérifie avec la proposition précédente.